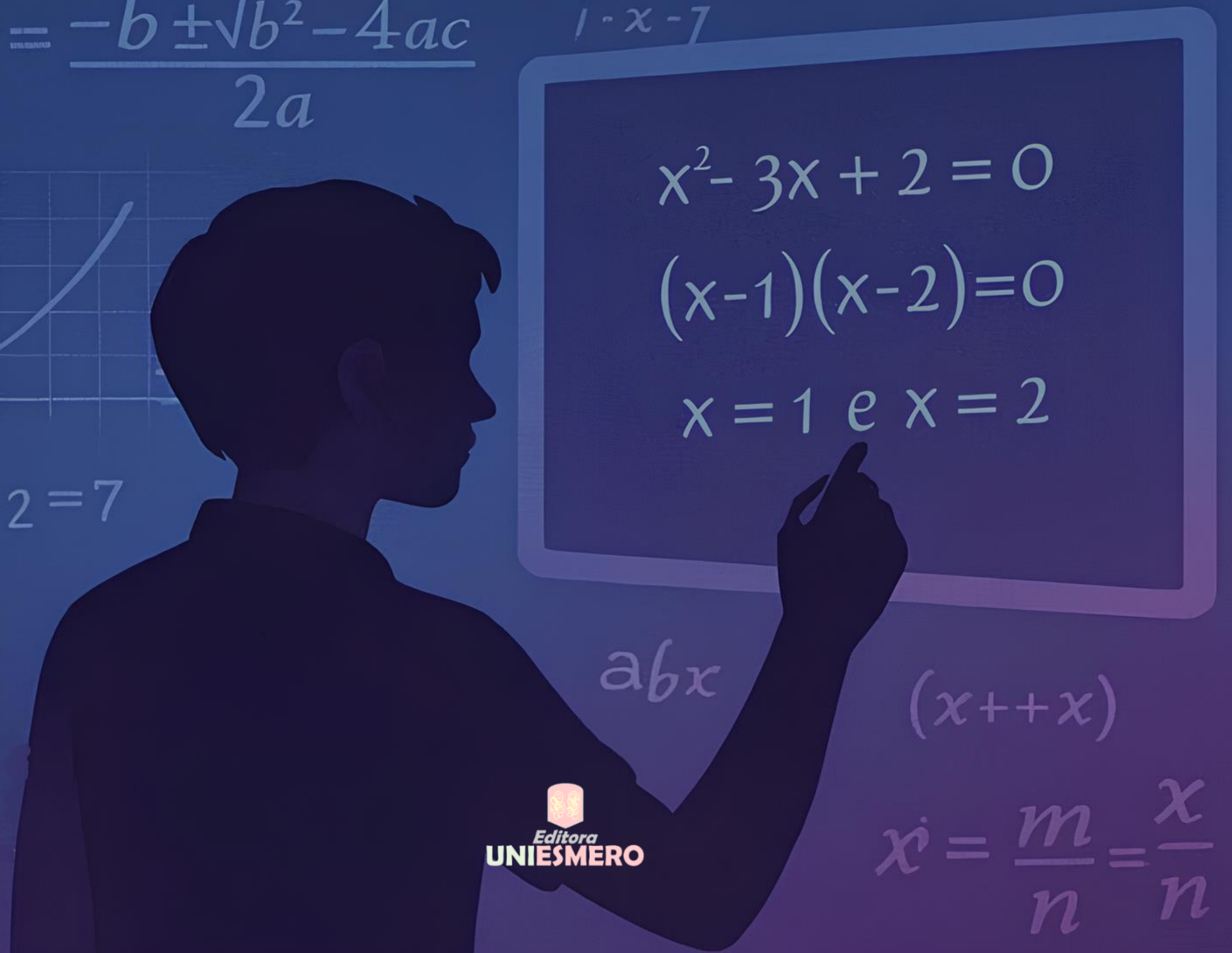
Organizadores

ANA CAROLINA COSTA PEREIRA
LÍVIA BEZERRA DE ALENCAR
PEDRO HENRIQUE SALES RIBEIRO
JOELMA NOGUEIRA DOS SANTOS

PRÁTICAS LABORATORIAIS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA

sob o olhar do licenciando em Matemática



Editora UNIESMERO

Organizadores

ANA CAROLINA COSTA PEREIRA

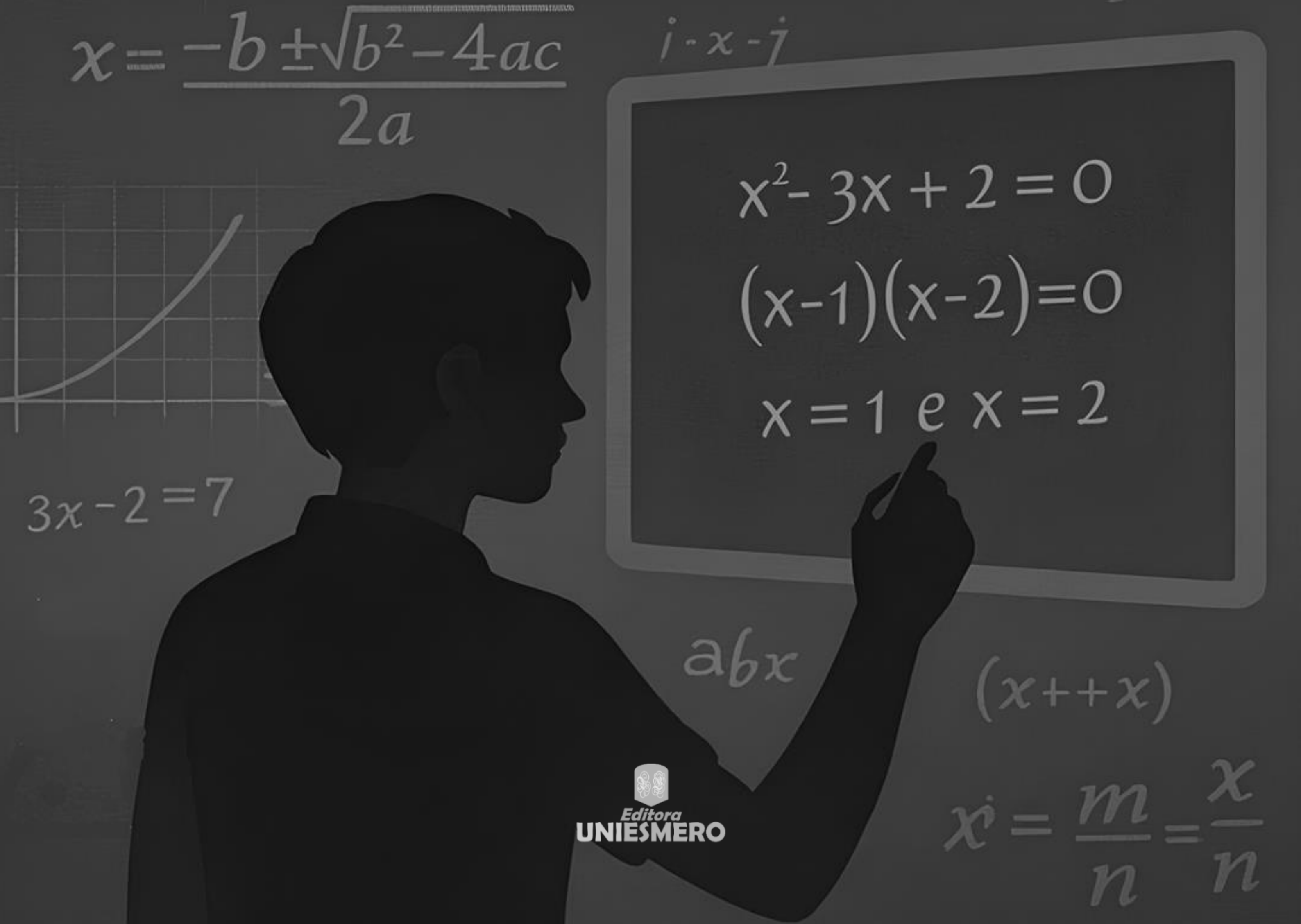
LÍVIA BEZERRA DE ALENCAR

PEDRO HENRIQUE SALES RIBEIRO

JOELMA NOGUEIRA DOS SANTOS

PRÁTICAS LABORATORIAIS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA

sob o olhar do licenciando em Matemática



Editora UNIESMERO

2025 – Editora Uniesmero

www.uniesmero.com.br
uniesmero@gmail.com

Organizadores
Ana Carolina Costa Pereira
Lívia Bezerra de Alencar
Pedro Henrique Sales Ribeiro
Joelma Nogueira dos Santos

Revisão Textual
Georgia Tath Lima de Oliveira

Editor Chefe: Jader Luís da Silveira
Editoração e Arte: Resiane Paula da Silveira
Imagens, Arte e Capa: Freepik/Uniesmero

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P436p

Práticas laboratoriais para o ensino de Álgebra: sob o olhar do licenciando em Matemática - Volume 1

/ Ana Carolina Costa Pereira; Lívia Bezerra de Alencar; Pedro Henrique Sales Ribeiro; Joelma Nogueira dos Santos (organizadores). – Formiga (MG): Editora Uniesmero, 2025. 121 p. : il.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5492-124-4
DOI: 10.5281/zenodo.15380424

1. Fundamentos de álgebra. 2. Ensino de Álgebra. 3. Formação de Professores. I. Pereira, Ana Carolina Costa. II. Alencar, Lívia Bezerra de. III. Ribeiro, Pedro Henrique Sales. IV. Santos, Joelma Nogueira dos. V. Título.

CDD: 512.9
CDU: 51

Editora Uniesmero
CNPJ: 35.335.163/0001-00
Telefone: +55 (37) 99855-6001
www.uniesmero.com.br
uniesmero@gmail.com
Formiga - MG
Catálogo Geral: https://editoras.grupomultiatual.com.br/

Acesse a obra originalmente publicada em:
https://www.uniesmero.com.br/2025/05/praticas-laboratoriais-para-o-ensino-de.html

PRÁTICAS LABORATORIAIS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA

sob o olhar do licenciando em Matemática

Volume I

Organizadores

Ana Carolina Costa Pereira

Lívia Bezerra de Alencar

Pedro Henrique Sales Ribeiro

Joelma Nogueira dos Santos

COLEÇÃO

PRÁTICAS DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA E ENSINO DA UECE

PREFÁCIO

> "A beleza da matemática só se mostra a seguidores mais pacientes."
>
> Maryam Mirzakhani (2014)

E, de repente, a história de um fazer pedagógico no chão de um laboratório de matemática, foi materializado. Claro que não! Hoje, esse livro, que organiza atividades experimentais vivenciadas na disciplina de Laboratório de Ensino de Álgebra (LEAl), é resultado de imersão laboriosa com recurso manipulativo e aprofundamento teórico e metodológico por licenciandos sob a confiante orientação de uma professora dedicada.

Com esse tema, abrimos caminho para muitos jovens pesquisadores que buscam ou buscarão trilhar os caminhos da formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, na perspectiva de pesquisas e práticas laboratoriais no contexto acadêmico do laboratório de matemática organizadas pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), na Universidade Estadual do Ceará (UECE).

Práticas laboratoriais surge como uma referência para professores, pesquisadores e comunidade acadêmica que pensam o conteúdo de matemática, ante os grandes desafios do ensino e da formação de professores da Educação Básica, como uma ciência experimental e dinâmica para a formação de cidadãos. Essas orientações, fundamentadas e organizadas, procurou apresentar alguns conteúdos de Álgebra mais que uma ferramenta ou números, mas como conceitos dinâmicos e manipulativos.

O conjunto de textos, resultante de estudos e pesquisas aprofundadas pelos autores dos capítulos, vai dar subsídios e indicações metodológicas aos professores de Matemática que irão contribuir para a melhoria da qualidade do ensino dessa disciplina na escola sob a perspectiva de atividades experimentais. Possa então, a leitura de – PRÁTICAS LABORATORIAIS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA: sob o olhar do licenciando em Matemática – através de suas orientações inovadoras e de eficácia das experiências de ensino analisadas nos capítulos, desencadear, junto aos nossos professores e futuros professores, um processo de ensino e aprendizagem da Matemática capaz de transformar as estruturas deste ensino em nossas escolas.

Agradeço carinhosamente o convite para escrever este prefácio e diante do exposto, recomendo a leitura desta obra.

Profa. Dra. Ana Cláudia Mendonça Pinheiro
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Campus Sobral

APRESENTAÇÃO

O ensino de Álgebra no Brasil no século XXI passou por diversas transformações, impulsionado por mudanças nas diretrizes curriculares, avanços tecnológicos e novas abordagens pedagógicas. A Álgebra, que tradicionalmente era introduzida de forma mais abstrata nos anos finais do ensino fundamental, começou a ser abordada de maneira mais contextualizada e progressiva, a fim de facilitar a compreensão dos alunos.

Mondini e Bicudo (2010, p. 47)[1] ressaltam que

> [...] a Álgebra é, muitas vezes, apresentada aos estudantes como uma determinada maneira de a Matemática proceder, por meio de uma linguagem característica. Consideram-na como expandida por outras áreas da Matemática, destacam seu rigor e suas estruturas, porém pensam deste modo somente quando falam da Álgebra no Ensino Superior.

Após a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), houve uma maior preocupação em garantir que os conceitos algébricos fossem introduzidos gradualmente desde os primeiros anos do ensino fundamental. A ênfase está direcionada para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde cedo, promovendo uma transição mais natural entre a aritmética e a Álgebra. Assim, o uso de padrões, sequências e expressões matemáticas tornou-se mais presente nos anos iniciais, preparando os alunos para lidar com equações e funções nos anos seguintes.

Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 40)[2] , "a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões". Muitas vezes, essa maneira mais técnica de perceber a Álgebra é encontrada em muitos dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro, o elemento majoritário, e por vezes único, utilizado pelo professor em sala de aula.

Dessa forma, há um movimento crescente para torná-la mais aplicada ao cotidiano dos estudantes, relacionando os conceitos com problemas reais e

---

[1] MONDINI, Fabiane; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A presença da Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul. Acta Scientiae. Canoas, v.12, n.2, p. 43-54, jul./dez. 2010.
[2] MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? Pró-Posições, v.3., n.1, p. 39-54, 1992.

interdisciplinares. Isso pode contribuir para um aprendizado mais significativo e para a valorização da matemática como ferramenta essencial para a vida acadêmica e profissional dos alunos.

O pensamento algébrico se manifesta não apenas na Álgebra formal, mas também em diferentes áreas do conhecimento, expressando-se por meio de diversas linguagens, como a aritmética, a geometria e até mesmo a linguagem natural. Na sala de aula, muitas vezes, não se enfatiza a observação, a identificação de regularidades em fenômenos e a formulação de generalizações. No entanto, atividades como a busca por padrões em sequências, a análise da regularidade de um fenômeno, o estudo de proporcionalidades e a exploração de generalizações podem contribuir significativamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018),[3] o pensamento algébrico envolve competências como a identificação de regularidades e padrões em sequências numéricas e não numéricas, a compreensão e aplicação da simbologia algébrica, além do desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização para a resolução de problemas. Neste sentido a Álgebra,

> [...] tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (Brasil, 2018, p. 270).

É importante ressaltar que, para muitos alunos, a Álgebra ainda não tem significado, levando-os a focar na memorização de dados e na aplicação mecânica de

[3] BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/SEB, 2018.

fórmulas, que rapidamente são esquecidas, sem que consigam desenvolver verdadeiramente o pensamento algébrico.

Diante desse cenário, o uso de novas metodologias e recursos didáticos começaram a ser incorporadas ao seu ensino, permitindo que os alunos experimentem e visualizem conceitos geométricos de maneira interativa, tornando o aprendizado mais concreto e intuitivo. Dentre eles, pode-se citar o uso de materiais manipulativos, como blocos algébricos e balanças de equações, que auxiliam na visualização dos conceitos abstratos, além das tecnologias digitais de comunicação e informação como os softwares educativos, aplicativos e plataformas digitais, que possibilitam a exploração dinâmica de conceitos algébricos.

Ainda sobre os materiais manipulativos no ensino da Álgebra, defende-se que eles favorecem a construção do pensamento algébrico ao possibilitar que os estudantes explorem padrões, identifiquem regularidades e compreendam as relações entre números e símbolos. Seu uso na sala de aula torna a aprendizagem mais interativa e significativa, ajudando a reduzir as dificuldades comuns associadas à Álgebra. Em vez de memorizar regras e fórmulas de maneira mecânica, os alunos podem experimentar, testar hipóteses e compreender os conceitos de forma mais intuitiva.

Nessa perspectiva, este livro foi organizado pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE) e é fruto do trabalho desenvolvido por estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), campus Itaperi, na disciplina de Laboratório de Ensino de Álgebra (LEAl), por estudantes e ex-estudantes do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE), e estudantes do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), além de docentes dessas instituições.

Essa integração fortalece a troca de experiências entre a graduação e a pós-graduação no desenvolvimento e na evolução de práticas pedagógicas inovadoras, ocasionando uma ponte entre a teoria e a prática, ajudando a atualizar e informar tanto a formação inicial quanto o desenvolvimento profissional contínuo dos professores de matemática. O livro traz uma contribuição para a produção de práticas laboratoriais relacionadas ao ensino de Álgebra.

A referida disciplina tem o intuito de discutir o papel do Laboratório de Matemática no ensino e na aprendizagem de conceitos algébricos, confeccionar recursos didáticos manipuláveis e desenvolver propostas de atividades para o Ensino Básico, além de planejar e realizar experiências práticas com o uso de materiais nesse nível de ensino.

Na elaboração de um experimento para a aula de Álgebra, foram utilizados dois materiais principais: o guia do professor e a folha do aluno. O guia do professor é um documento que descreve detalhadamente o percurso conceitual e metodológico do experimento didático, funcionando como um roteiro passo a passo para a realização da atividade em sala. Além disso, esse material deve estar alinhado com os documentos oficiais brasileiros, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC) e o Documento Curricular Referencial de Fortaleza (DCRFor), entre outros.

A folha do aluno serve como um guia detalhado elaborado pelos participantes da disciplina de Laboratório de Ensino de Álgebra, permitindo que os estudantes sigam as etapas do experimento de forma estruturada. Esse material inclui uma imagem do recurso manipulativo utilizado, uma explicação introdutória sobre a prática laboratorial e instruções organizadas em diferentes fases, garantindo clareza na execução das ações. Seu principal objetivo é fornecer suporte ao professor, facilitando o desenvolvimento e o fluxo das atividades em sala de aula (Oliveira; Oliveira; Pereira, 2022)[4]. Com esse propósito, as atividades apresentadas neste livro, que envolvem o laboratório de matemática e a aritmética, tornam-se ferramentas essenciais para a reflexão sobre o ensino na formação de professores de matemática.

O livro “Práticas laboratoriais para o ensino de Álgebra: sob o olhar do licenciando em Matemática” é composto de sete capítulos nos quais são abordados elementos da Álgebra tais como expressões algébricas, equação do 1º grau e Função do 2º grau, generalização de sequências numéricas, produto notável, expressões algébricas, matrizes, entre outros. A seguir são apresentados detalhadamente cada assunto.

No **primeiro capítulo**, Amanda Cardoso Benicio de Lima e Pedro Guilherme Mourão Braga trazem a prática laboratorial intitulada “Missão Equilíbrio” que, a partir dos materiais manipulativos, como a balança de dois pratos, torna possível o estudo

[4] OLIVEIRA, FWS; OLIVEIRA, GP; PEREIRA, ACC (org.). Práticas Laboratórios para o Ensino de Trigonometria: Sob o olhar do licenciando em matemática. Formiga (Mg): Editora Uniesmero, 2022.

das equações. A partir disso, os alunos devem reconhecer o conceito matemático de equação do 1º grau, juntamente com outros que estão diretamente ligados a ele, como o de igualdade, balanceamento de equações e incógnita, por meio da balança de dois pratos, levando o aluno a apropriação e significação desses conceitos.

O **segundo capítulo** apresenta um experimento didático intitulado “Matrizes caixas”, de autoria de *Felipe Macedo de Oliveira Silva e Vinicius de Sousa Paula,* que visa introduzir, de maneira lúdica, o conceito de matrizes e suas operações introdutórias, como soma e subtração de matriz, bem como as regras para que estas possam ser realizadas de maneira correta.

“Estudo de sequência numérica por meio da Torre de Hanói”, dos autores Francimar Miguel da Silva Nunior e Guilherme da Silva Pereira, é o **terceiro capítulo**, o qual traz a exploração do material didático Torre de Hanói, para desenvolver situações que possibilitem a modelagem matemática de problemas com a utilização dos conhecimentos dos alunos sobre sequências numéricas.

O **quarto capítulo**, intitulado “Analisando caminhos com o Geoplano”, de Sabrina de Sousa Paulino e Cícero Moreira Hitzschky Filho, apresenta um experimento didático a partir do recurso didático Geoplano, para apresentar, de forma lúdica, os conceitos de análise combinatória, com ênfase na generalização da combinação e suas relações com os Binômios de Newton.

Já o **quinto capítulo**, intitulado “O quadrado da Soma e da diferença”, dos autores Pedro Henrique Sales Ribeiro, Daniel da Silva Rocha e Wallyson Batista Sampaio, traz uma prática laboratorial que visa contribuir para o estudo do conceito de expressões algébricas, a partir de um material manipulável intitulado “produtos notáveis”, que é composto por peças de madeira. No experimento, busca-se permitir a associação de expressões algébricas com grandezas geométricas, assim como mediar a construção de uma visualização geométrica do quadrado da soma e da diferença.

O **sexto capítulo**, com o título de “Dominó algébrico”, de Francisco Hemerson Brito da Silva, busca introduzir os alunos ao conceito de valor numérico de expressões algébricas e preparar o ambiente para a criação do jogo, por meio da construção de peças de dominó que contenham expressões algébricas e valores numéricos.

O **sétimo capítulo**, denominado “O cubo da soma”, desenvolvido por Pedro Henrique Sales Ribeiro, Daniel da Silva Rocha e Verusca Batista Alves, tem o intuito de permitir a associação de expressões algébricas com grandezas geométricas, assim como de mediar a construção de uma visualização geométrica do cubo da soma, através do material didático manipulável intitulado “Produto notável - o cubo da soma”, composto por peças tridimensionais de madeira.

Assim, os sete capítulos que compõem esta obra, são fruto das ações realizadas por estudantes da graduação na disciplina de Laboratório de Ensino de Álgebra (LEAl), componente curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE, *campus* Itaperi, sendo alguma delas elaboradas em parceria com discentes e egressos do PGECM/IFCE e do PPGE/UECE.

As atividades envolvem planejamento, estudo e aplicação do conteúdo de ensino, utilizando o laboratório como recurso para os alunos da licenciatura. Esse processo evidencia o protagonismo do licenciando ao enfrentar os desafios de sua formação, com foco em uma prática profissional efetiva.

Este livro, organizado pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE), convida licenciandos e professores de matemática a refletirem sobre o uso de diferentes recursos didáticos em sala de aula, explorando conceitos aritméticos por meio de materiais manipulativos. As atividades propostas envolvem planejamento, estudo e aplicação do conteúdo matemático, utilizando experimentos didáticos desenvolvidos por estudantes e professores de graduação e pós-graduação. Essa abordagem evidencia como a integração entre diferentes níveis universitários pode aprimorar a qualidade do ensino e fortalecer uma Educação Matemática que alia teoria e prática a experiências concretas.

Os organizadores

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1
Missão Equilíbrio
Amanda Cardoso Benicio de Lima e Pedro Guilherme Mourão Braga

CAPÍTULO 1
Missão Equilíbrio

Amanda Cardoso Benicio de Lima e Pedro Guilherme Mourão Braga

INTRODUÇÃO

Discussões que envolvem novas formas de ensino que podem ser empregadas em sala de aula, de modo a auxiliar o aluno a compreender o conhecimento matemático, são foco de constante preocupação das pesquisas no contexto acadêmico. Desse modo, com o objetivo de auxiliar o atual e futuro professor de matemática a elaborar aulas que despertem o interesse dos alunos pelo conteúdo matemático, o laboratório de matemática, através da utilização de materiais manipuláveis concretos e/ou digitais, pode proporcionar ao aluno a apropriação do conhecimento de maneira mais intuitiva e lúdica. Sendo assim, a prática “Missão Equilíbrio”, apresentada a seguir, é uma das formas de esse estudante reconhecer o conceito matemático de equação do 1º grau, juntamente com outros que estão diretamente a ele ligados, como o de igualdade, balanceamento de equações e incógnita, por meio da balança de dois pratos, levando o aluno à apropriação e à significação desses conceitos.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Conjunto do equilíbrio

Elementos que norteiam a prática

<table>
<tr><td colspan="2">Série/Ano</td><td>7º ano do Ensino Fundamental</td></tr>
<tr><td colspan="2">Unidade Temática</td><td>Álgebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objeto de conhecimento</td><td>Linguagem algébrica: variável e incógnita</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidade</td><td>(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetivos</td><td>Docente</td><td>• Constatar a captação do conceito de igualdade, explicado em aulas anteriores;
• Aplicar o conceito de balanceamento por meio dos movimentos de "colocar" e "tirar" discos dos pratos da balança;
• Indicar o conceito de incógnita presente na manipulação dos discos na balança;
• Formalizar o conceito de equação do 1º grau a partir da manipulação dos discos na balança.</td></tr>
<tr><td>Aluno</td><td>• Relembrar o conceito de igualdade por meio do equilíbrio entre os pratos da balança;
• Utilizar o conceito de balanceamento para equilibrar a balança de dois pratos;
• Compreender o conceito de incógnita através das situações propostas com a balança de dois pratos;
• Reconhecer o conceito matemático de equação do 1º grau por meio da balança de dois pratos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiais Necessários</td><td>• Balança de dois pratos[5];
• kits de objetos (1 cubo de madeira, 4 discos de madeira de diferentes formas e tamanhos, pequenos cilindros coloridos de mesma massa, pequenos discos de madeira, caso necessário[6]);
• Kits de discos coloridos (5 discos azuis, 5 discos verdes, 5 discos laranjas, 5 discos amarelos, 5 discos pretos[7]);
• Folha do Aluno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conhecimentos Prévios</td><td>• Noção de igualdade, maior que e menor que;
• Adição entre números naturais;
• Subtração entre números naturais;
• Equação do 1º grau.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Duração</td><td>1 hora-aula</td></tr>
</table>

Sinopse

Na prática "Missão Equilíbrio", os alunos serão expostos a algumas situações nas quais deverão encontrar o ponto de equilíbrio das balanças. Essa abordagem

---

[5] O conjunto do equilíbrio e as balanças, utilizados nessa prática, não foram encontrados disponíveis para venda. Porém, se o professor desejar comprar a balança, algumas sugestões de substituição são apresentadas no *link* a seguir: Opção 1 de substituição de balança (para compra) ou Opção 2 de Substituição da balança (para compra). Outra opção possível para o professor é a confecção desse material, o que pode ser visto em Marinho (2022).
[6] Esses objetos podem ser substituídos por quaisquer outros, desde que tenham um peso significativo, para que, ao serem colocados em um dos lados da balança, gerem o desequilíbrio.
[7] Esses discos são parte do conjunto do equilíbrio comprado juntamente com a balança.

laboratorial, permite visualizar o que será necessário realizar entre os dois lados de uma equação para que se mantenha um equilíbrio, proporcionando ao estudante o reconhecimento de alguns conceitos matemáticos que estão diretamente relacionados ao conteúdo de equação do 1º grau, como igualdade, balanceamento de equações e incógnita.

O experimento

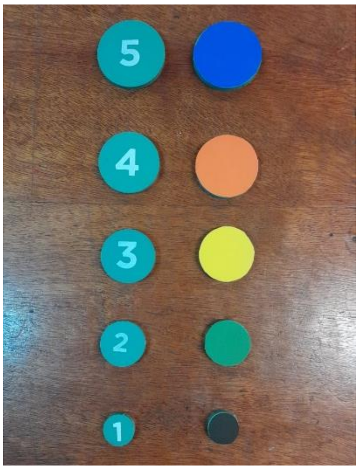
A prática elaborada, utiliza-se da balança de dois pratos e do conjunto do equilíbrio (conjunto de pesos) como materiais manipuláveis que podem ser empregados na exploração dos conceitos fundamentais que envolvem o conteúdo matemático de equações do 1º grau. O experimento em questão está dividido em três etapas, cujo principal objetivo é reconhecer o conceito matemático de equação do 1º grau, juntamente com os de igualdade, balanceamento de equações e incógnita, que estão diretamente a ele ligados, por meio da manipulação do material.

Preparação

Antes de os alunos entrarem em sala, o professor deve organizar o ambiente, separando, em cada bancada, os kits de objetos para a realização da Etapa 1, juntamente com os discos pequenos de madeira adicionais, as balanças e os kits com os discos coloridos que serão utilizados nas demais etapas da prática. Baseando-se no quantitativo de estudantes matriculados na turma, ao iniciar a aula, o professor deve solicitar-lhes que formem duplas. Porém, caso a quantidade de estudantes corresponda a um número ímpar, fica a cargo do professor sugerir que formem trios, levando em consideração a quantidade de material disponível na escola.

É importante destacar que o conjunto do equilíbrio utilizado para a realização da prática contém marcações com números, revelando os valores dos discos. Entretanto, preferiu-se cobrir esses valores com círculos de cartolina dupla-face, para que, assim, os objetivos traçados pudessem ser alcançados (Figura 1).

Figura 1 – Alteração dos discos com marcações de números



Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

Desse modo, no Quadro 1, a seguir, é apresentado o material que deve estar em cada bancada para a utilização das equipes durante a prática.

Quadro 1 – Materiais para utilização das equipes durante a prática

MATERIAL	DESCRIÇÃO
Balança	Uma balança de dois pratos
Kits da Etapa 1	Um objeto de peso considerável e 10 objetos de mesma massa (Dentro de cada kit)
Kits da Etapa 2	5 discos azuis, 5 discos amarelos, 5 discos laranjas, 5 discos verdes e 5 discos pretos (Dentro de cada kit)

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 2 – Materiais para utilização das equipes: Balança, Kits da Etapa 1, Kits da Etapa 2

Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1

A primeira etapa tem o objetivo de relembrar o conceito de igualdade por meio do equilíbrio entre os pratos da balança. Para isso, o professor deve indicar aos alunos que utilizem o kit de objetos que está nas bancadas, nesse caso, foram destinados objetos distintos para a utilização de cada equipe (discos e cubos de madeira). Com as instruções da folha do aluno, as equipes deverão colocar o objeto mais pesado em um dos pratos da balança e tentar equilibrá-la utilizando os demais objetos restantes (Figura 3).

Figura 3 – Utilização da balança na Etapa 1

Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

Ao término desse movimento, os alunos devem resolver a seguinte questão:

- Quantos e quais objetos foram colocados em cada prato para que a balança ficasse equilibrada?

<u>Discussão</u>:

Quando o professor perceber que os estudantes finalizaram a Etapa 1, deve realizar a primeira discussão sobre as percepções que obtiveram. Sendo assim, deve começar fazendo algumas perguntas:

O que aconteceu quando foi colocado o primeiro objeto na balança? Espera-se que digam *"os pratos da balança ficaram desiguais".*

Figura 4 – Exemplo do primeiro objeto colocado na balança

Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

- E para que ela ficasse equilibrada, o que foi feito? Espera-se que digam *"foram colocados objetos no outro prato da balança".*

- E como a equipe percebeu que a balança ficou equilibrada? Espera-se que digam *"é possível observar o equilíbrio da balança através da altura de seus pratos (alinhamento)".*

- Se os pratos da balança estão na mesma altura, o que é possível dizer sobre o valor dos pesos desses objetos? Eles são diferentes ou iguais? Espera-se que eles indiquem que *são iguais.*

Encerramento da etapa e formalização: O encerramento da primeira etapa deve ser dado com a conclusão de que a balança estará em equilíbrio se os pesos dos objetos presentes em seus dois pratos forem iguais. Mediante essa percepção, o professor deverá escrever no quadro as configurações estabelecidas por cada equipe em suas balanças, de acordo com o objeto fornecido e, assim, utilizar o símbolo "=" para representar os pratos em equilíbrio.

Observação: Com o término da discussão, o professor deve recolher os objetos utilizados na Etapa 1 e avisar às equipes que, para as próximas etapas, serão utilizados somente os discos coloridos contidos no segundo kit.

Etapa 2

Na segunda etapa, o estudante tem o objetivo de utilizar o conceito de balanceamento, visto em aulas anteriores, para equilibrar a balança de dois pratos. Dessa forma, com as instruções da folha do aluno, as equipes deverão colocar três discos azuis em um dos pratos da balança e, a partir disso, utilizar os demais discos coloridos no outro prato a fim de equilibrá-la (Figura 5).

Figura 5 – Balança equilibrada a partir do comando da Etapa 2

Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

Ao término desse movimento, os alunos devem resolver a seguinte questão:

- Qual foi a configuração realizada com os demais discos coloridos para deixar a balança equilibrada?

<u>Discussão</u>:

Quando o professor perceber que os estudantes finalizaram a primeira parte da Etapa 2, deve realizar uma discussão sobre as percepções que obtiveram. Para registrar as percepções de cada equipe, o professor deve anotar no quadro a configuração realizada com os discos, a qual deixou a balança em equilíbrio. Caso perceba que essa configuração se repetiu entre as demais equipes, deve solicitar aos estudantes que pensem se existe outro modo de equilibrar a balança utilizando pesos distintos dos que foram usados anteriormente.

Sendo assim, com a nova configuração estabelecida pelas equipes, o professor deve fazer as seguintes solicitações:

Com a configuração montada, coloquem um disco laranja e um disco amarelo no prato dos discos azuis. O que aconteceu com a balança? Espera-se que digam *"a balança ficou desequilibrada".*

Figura 6 – Balança desequilibrada ao adicionar disco em apenas um dos pratos

Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

- Partindo dessa percepção, como deixá-la equilibrada novamente? Espera-se que digam *"colocando a mesma quantidade de discos do outro lado".*

Figura 7 – Retirada do disco laranja de um dos pratos da balança

Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

Após essas perguntas, o professor deve observar, na balança de cada equipe, quais discos se repetem nos dois pratos Por exemplo, se na configuração da Equipe 2 o disco que se repete nos dois pratos da balança é o laranja, solicite aos alunos que retirem um deles de somente um dos pratos.

Figura 8 – Retirada do disco laranja de um dos pratos da balança

Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

A partir disso, o professor deve levantar os seguintes questionamentos:

- O que aconteceu com a balança? Espera-se que digam *"a balança ficou desequilibrada".*

- Partindo disso, como deixá-la equilibrada novamente? Espera-se que digam *"tirando a mesma quantidade de discos do outro lado".*

<u>Encerramento da etapa e formalização:</u> Para o encerramento da segunda etapa, o professor deve relatar aos alunos que, a fim de deixar a balança em equilíbrio, todo movimento de peça que for feito em um dos pratos precisa ser feito no outro, remetendo à noção de balanceamento. No que se refere à formalização matemática, já que os alunos relembraram o conceito de igualdade com a Etapa 1, o professor deve escrever um exemplo no quadro utilizando os discos para formalizar a noção de "colocar", como sendo a adição de termos, e "tirar", como sendo a subtração de termos da equação.

Etapa 3

Com o objetivo de compreender o conceito de incógnita mediante as situações propostas, para a terceira e última etapa, siga os passos a seguir:

PASSO 1: Com as instruções da folha do aluno, as equipes deverão realizar uma nova configuração de discos na balança. Dessa vez, colocando três discos azuis em um prato e três discos laranjas e um amarelo no outro. Em seguida, será solicitado que insiram um disco laranja em cada lado da balança.

Figura 9 – Balança equilibrada a partir do Passo 1 da Etapa 3

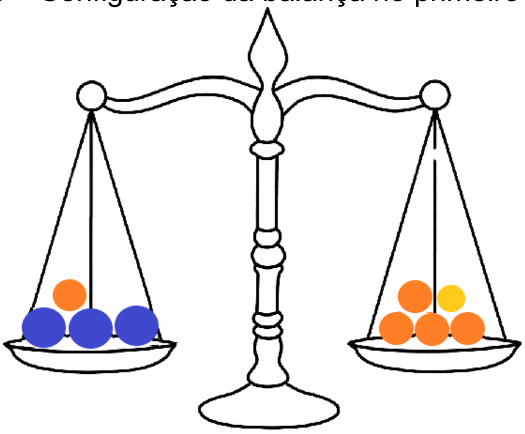
Fonte: Elaborada pelos autores (2024).

Ao término desse movimento, os alunos devem resolver a seguinte questão:

- Sabendo que um disco laranja é igual a 4 e um disco amarelo é igual a 3, utilize a balança e as noções de "colocar" e "tirar" discos, vistas na etapa anterior, para descobrir quanto vale um disco azul.

<u>*Discussão*</u>*:*
Quando o professor perceber que as equipes finalizaram esse momento, deverá realizar uma discussão sobre as percepções que obtiveram. Para isso, deve registrar a configuração da balança no quadro, como no exemplo:

Figura 10 – Configuração da balança no primeiro momento



Fonte: Elaborada pelos autores.

Dessa forma, com os valores dos discos fornecidos, as equipes deverão relacionar que três discos azuis somados com um disco laranja resultarão na soma de quatro discos laranjas com um disco amarelo. Assim, se for retirado um disco laranja em cada prato da balança, os três discos azuis resultarão na soma de três discos laranjas e um disco amarelo. Tendo os valores dos discos laranjas e amarelos, os três discos azuis terão valor igual a 15. Sendo assim, cada disco azul corresponde ao valor igual a 5.

Formalização: Enquanto as equipes estiverem explicando como descobriram o valor do disco azul, o professor deve escrever no quadro a maneira como a igualdade é representada de forma algébrica. Assim, o peso azul desconhecido será denotado por A e, como se repete três vezes, será escrito como 3A. Como os valores dos outros pesos são conhecidos, teremos o esquema abaixo:

$$3.A + 4 = 4.4 + 3$$
$$3.A + 4 = 16 + 3$$
$$3.A + 4 = 19$$

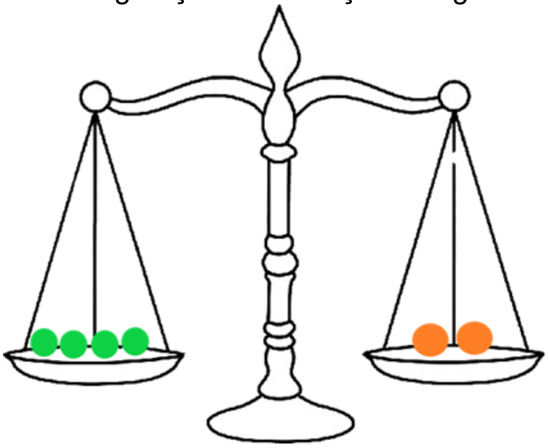
PASSO 2: Com as instruções da folha do aluno, as equipes devem realizar uma nova configuração de discos na balança, dessa vez, colocando quatro discos verdes em um dos pratos e dois discos laranjas no outro. Em seguida, os alunos devem resolver a seguinte questão:

- Utilizando a balança e os valores dos discos já mencionados anteriormente, qual o valor de um disco verde?

Discussão:

Quando o professor perceber que as equipes finalizaram esse momento, deve realizar uma discussão sobre as percepções que obtiveram. Para isso, deve registrar a configuração da balança no quadro, como no exemplo:

Figura 11 – Configuração da balança no segundo momento



Fonte: Elaborada pelos autores.

Tendo em vista os valores já revelados dos discos laranjas para a pergunta anterior, as equipes deverão relacionar que cada disco laranja corresponde a dois discos verdes, tendo cada disco laranja o valor de 4, então, cada disco verde valerá 2.

Formalização: Enquanto as equipes estiverem explicando como descobriram o valor do disco verde, o professor deve escrever no quadro a maneira como a igualdade é representada de forma algébrica. Assim, o disco verde desconhecido será denotado por V e, como se repete quatro vezes, será escrito como $4V$. Como o valor do peso laranja já foi revelado, tem-se o esquema abaixo:

$$4.V + 0 = 2.4$$
$$4.V + 0 = 8$$

PASSO 3: Com as instruções da folha do aluno, as equipes devem realizar uma nova configuração de discos na balança, agora colocando em um dos pratos cinco discos pretos e um amarelo e, no outro prato, dois discos amarelos e um verde. Em seguida, os alunos devem resolver a seguinte questão:

- Utilizando a balança, os valores de discos já mencionados anteriormente e as noções de “colocar” e “tirar” discos, qual o valor de um disco preto?

Discussão:

Quando o professor perceber que as equipes finalizaram esse momento, deve realizar uma discussão sobre as percepções que obtiveram. Para isso, deve registrar a configuração da balança no quadro, como no exemplo:

Figura 12 – Configuração da balança no terceiro momento

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tendo em vista que os valores dos discos amarelos e dos verdes já foram descobertos, as equipes deverão utilizar a noção de "tirar", vista anteriormente, e, assim, aplicá-la ao disco amarelo presente em cada prato da balança. Assim, poderão perceber que o peso de cinco discos pretos será igual ao peso de um disco amarelo somado a um disco verde. Sendo assim, cada disco preto valerá 1.

Formalização no quadro: Enquanto as equipes estiverem explicando como descobriram o valor do disco preto, o professor deve escrever no quadro a maneira como a igualdade é representada de forma algébrica. Assim, o disco preto desconhecido será denotado por P e, como se repete cinco vezes, será escrito como $5P$. Como o valor dos pesos amarelos e verdes já foi revelado, tem-se o esquema abaixo:

$$5.P + 3 = 2.3 + 2$$

$$5.P + 3 = 8$$

Fechamento

Após o fim da terceira etapa, o professor deve se utilizar do último esquema para o fechamento da aula.

$$5.P + 3 = 8$$

Mediante isso, o professor deve relembrar aos alunos a notação de equação como sendo a igualdade entre a expressão $5.P+3$ e o número 8, sendo a letra P a incógnita dessa equação. Além disso, pode aplicar o conceito de balanceamento visto na Etapa 2, dessa vez, realizando a subtração do número 3 em ambos os lados da equação.

$$5.P+3\ -3=8-3$$
$$5.P=5$$

Sendo assim, por meio da divisão em ambos os lados da equação, vista em aulas anteriores, o professor chegará à resposta que os alunos obtiveram utilizando apenas o material concreto, ou seja, que o disco de cor preta (P) vale 1. Deve-se repetir esse processo utilizando as duas equações dos passos anteriores, descobrindo os valores que correspondem às letras A e V, conduzindo os alunos a reconhecerem o conceito matemático de equação do 1º grau por meio da balança de dois pratos.

Variações

Essa prática foi aplicada com balanças físicas, porém, também podem ser utilizadas balanças virtuais, encontradas *online*, para o ensino de equações do 1º grau e conhecimentos matemáticos a elas relacionados. Para se ter acesso a um exemplo de balança virtual, clique no *link* a seguir: Link para balança online.

Referências

ARAÚJO, Carlos Alberto Souza. **Ensino de Equação Polinomial do Primeiro Grau por meio do uso da balança de dois pratos**. 2022. 74 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro - Bahia, 2022.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular, 2018.

MARINHO, Vanderson. **Sequência didática para utilização da balança de dois pratos na matemática**. 2022.

MENDES, Daniela. **Aprendendo Equações na Balança**. Disponível em: https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2018/03/aprendendo-equacoes-na-balanca-opcoes-plano-aula-download.html. Acesso em: 05 jun. 2024.

FOLHA DO ALUNO

Comentários Iniciais

Caro aluno,

A balança é um instrumento que foi criado há muito tempo para medir a massa de um objeto e, atualmente, pode ser encontrada em muitos lugares, como comércios, hospitais e farmácias, estando disponível em sua forma analógica e/ou digital. Na aula de hoje, iremos apresentar uma prática laboratorial utilizando o material manipulável conhecido como "balança de dois pratos", juntamente com um "conjunto do equilíbrio", que corresponde a um conjunto de discos com uma certa massa. Dessa forma, para a realização desse experimento, são destinadas três etapas para as quais, com a mediação do professor, devem ser seguidas as instruções abaixo para responder aos questionamentos solicitados. Vale lembrar que, se estiver realizando a prática em equipe, deve discutir com seus colegas as percepções obtidas.

Experimento

ETAPA 1: Utilizando o kit de objetos presente na bancada, coloque em um dos pratos da balança o objeto mais pesado. Em seguida, utilize os demais objetos presentes no kit para equilibrar a balança e responda:

- Quantos e quais objetos foram colocados em cada prato para que a balança ficasse equilibrada?

____

____

____

Observação: Ao término da Etapa 1, o professor realizará uma breve discussão sobre as respostas dadas. Após essa discussão, devolva os objetos utilizados na Etapa 1 e, com o novo kit de discos, inicie a Etapa 2.

ETAPA 2: Utilizando o kit de discos coloridos, coloque em um dos pratos da balança três discos azuis. Após isso, utilize os demais discos coloridos (exceto os azuis) no outro prato da balança, a fim de equilibrá-la, e responda:

- Qual foi a configuração realizada com os demais discos coloridos para deixar a balança equilibrada?

Observação: Ao término da Etapa 2, o professor realizará uma breve discussão sobre as respostas dadas. Após isso, inicie a Etapa 3.

ETAPA 3 – PASSO 1: Para esse passo, realize uma nova configuração de discos na balança. Coloque três discos azuis em um dos pratos e três discos laranjas e um amarelo no outro. Após isso, insira um disco laranja em cada prato da balança. Em seguida, responda:

- Sabendo que um disco laranja é igual a 4 e um disco amarelo é igual a 3, utilize a balança e as noções de “colocar” e “tirar” discos, vistas na etapa anterior, para descobrir quanto vale um disco azul. Registe sua descoberta na folha.

Observação: Ao término do Passo 1, o professor realizará uma breve discussão sobre as respostas dadas. Após isso, inicie o Passo 2.

ETAPA 3 – PASSO 2: Para esse passo, realize uma nova configuração de discos na balança. Coloque quatro discos verdes em um dos pratos e dois discos laranjas no outro. Em seguida, responda:

- Utilizando a balança e os valores de discos já mencionados anteriormente, qual o valor de um disco verde?

Observação: Ao término do Passo 2, o professor realizará uma breve discussão sobre as respostas dadas. Após isso, inicie o Passo 3.

ETAPA 3 – PASSO 3: Para esse passo, realize uma nova configuração de discos na balança. Coloque cinco discos pretos e um disco amarelo em um dos pratos e dois discos amarelos e um disco verde no outro. Em seguida, responda:

- Utilizando a balança e os valores de discos já mencionados anteriormente, qual o valor de um disco preto?

____

____

____

Observação: Ao término do Passo 3, o professor realizará uma breve discussão sobre as respostas dadas, formalizando os valores dos discos que foram encontrados e o que eles representam.

CAPÍTULO 2
Matrizes em caixas
Felipe Macedo de Oliveira Silva e Vinicius de Sousa Paula

CAPÍTULO 2

Matrizes em caixas

Felipe Macedo de Oliveira Silva e Vinicius de Sousa Paula

INTRODUÇÃO

A matemática é considerada por muitos uma disciplina desafiadora para a compreensão. Por meio de estratégias expositivas, muitos discutem o aprendizado da matemática e a importância de não a negligenciar. Para ajudar na melhor compreensão, foram desenvolvidas abordagens para explicar conceitos de matrizes e suas operações. Além disso, podemos realizar operações de soma e subtração de maneira mais dinâmica. Dessa forma, tornamos mais acessíveis problemas considerados mais complexos.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Matrizes em caixas de papelão

Elementos que norteiam a prática

Série/Ano	2º ano do Ensino Médio
Unidade Temática	Álgebra
Objeto de conhecimento	Matrizes e determinantes
Habilidade	EM13MAT102 - Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam

		induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
Objetivos	**Docente**	• Explicitar o conceito abstrato de matrizes a partir do material manipulável; • Formalizar o conceito de soma e subtração de matrizes.
	Aluno	• Identificar os elementos da matriz; • Identificar as linhas e as colunas de matrizes; • Identificar as diagonais principal e secundária.
Materiais Necessários		• Matrizes de papelão 3x3; • Matrizes de papelão 3x2; • Folhas A4; • Folha do Aluno; • Tampas de garrafa pet.
Conhecimentos Prévios		• Soma de números reais; • Subtração de números reais; • Áreas de figuras planas; • Diagonal do quadrado.
Duração		1 hora-aula

Sinopse

Nesta prática laboratorial, os alunos serão expostos durante todo o experimento a conceitos que já foram estudados em anos anteriores, como área de figuras planas, diagonal do quadrado, soma e subtração de números reais. Com isso, através do material concreto, os discentes deverão concluir o conceito de matrizes e suas operações de soma e subtração.

O experimento

Prezado professor,

Este experimento consiste em introduzir, de maneira lúdica, o conceito de matrizes e suas operações introdutórias, como soma e subtração de matriz, bem como as regras para que estas possam ser realizadas de maneira correta. Destacamos que este experimento serve para definir o conceito de matriz, mas não com todos os seus detalhes, uma vez que o foco principal é entender como podemos identificar os elementos de cada entrada da matriz e como funciona o cálculo das operações. Para isso, serão realizados cinco exercícios que têm como objetivo construir uma sequência para que os alunos compreendam matrizes e as operações de soma e subtração.

Preparação

Para confeccionar as matrizes dessa prática laboratorial, o professor precisará de papelão, tesoura e cola de isopor. As matrizes de dimensão três por três têm 20cm de comprimento, 10cm de largura e 20cm de altura. As matrizes de dimensão três por dois têm 14cm de comprimento, 10cm de largura e 20cm de altura.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1

Passo 1: Formação Das Equipes

Divida a turma em equipes de, pelo menos, três integrantes ou mais, dependendo da quantidade de material adquirido, e distribua a folha do aluno, para, em seguida, realizar a aula prática.

Passo 2: Distribuição Das Matrizes

Para cada equipe formada, distribua uma matriz de ordem três por três, pois ela será o material da prática no primeiro momento.

Passo 3: Pergunta Inicial

Após a entrega do material, o professor deverá realizar a leitura dos comentários iniciais da folha do aluno e solicitar aos alunos que respondam à primeira pergunta, para efeito de reconhecimento: “= O material entregue se assemelha a algo que conhecem?”. O objetivo dessa pergunta é fazer com que os alunos associem o material com algo de seu cotidiano.

Algumas respostas possíveis para essa pergunta podem ser: “tabela dos horários das aulas”, “calendário”, “jogo da velha”, “estante de livros”, “tabela dos jogos do Brasileirão”, entre outras.

Passo 4: Explorando a Matriz

Com base nas respostas dos alunos, o professor pode trabalhar a localização na matriz. Por exemplo, se algum aluno respondeu “tabela do Brasileirão”, é interessante questioná-los “como podemos analisar os dados dessa tabela?”. Perguntas, como “Em que posição algum time está?”, podem induzir os alunos a compreenderem as entradas das matrizes a partir das linhas e colunas.

Passo 5: Conceito de Matriz

Para concluir essa primeira etapa, formalize o conceito de matrizes com os alunos perguntando-lhes, “o que é uma matriz?”. A depender das respostas, conclua informando que matrizes são tabelas nas quais os valores são atribuídos em linhas e colunas.

Etapa 2

Passo 1: Definição da Soma de Matrizes

Após a conclusão da etapa anterior, o professor definirá, no quadro, a soma de duas matrizes como sendo a soma dos elementos correspondentes às mesmas linha e coluna nas duas matrizes. No entanto, não se deve informar que a regra vale apenas para matrizes de mesma ordem, pois essa conclusão deve ser feita pelos estudantes no decorrer das respostas da folha do aluno.

Passo 2: Distribuição do Restante do Material

O professor deverá distribuir aos grupos as tampinhas e o restante das matrizes, para que seja possível realizar as atividades restantes da folha do aluno.

Passo 3: Uso das matrizes três por três

Nesse momento, os alunos serão solicitados a retirar as tampinhas da embalagem plástica para, em seguida, distribuí-las aleatoriamente nas entradas de duas matrizes de ordem três por três. Com as tampinhas distribuídas, os alunos devem tentar efetuar a soma das duas matrizes criadas com base na definição dada pelo professor e registrar o resultado na folha do aluno.

Como exemplo de ilustração, suponha que uma equipe criou as seguintes matrizes A e B:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{12} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

A partir da definição fornecida, espera-se a seguinte conclusão:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7 & 12 & -1\\ 2 & 4 & 9\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6 & 12\\ -1 & 2 & 7\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 18 & 11\\ 1 & 6 & 16\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

Para efeito de constatação de que todos os alunos estão compreendendo tal definição, o professor poderá solicitar a, pelo menos, um representante das equipes que escreva no quadro as duas matrizes elaboradas por seu grupo e comente para os demais colegas de classe como foi realizada a operação de soma.

Passo 4: Uso das matrizes de ordem três por dois

Concluída a soma com as matrizes de ordem três por três, o professor deverá informar aos alunos que façam o mesmo procedimento para as matrizes com três linhas e duas colunas. Distribuam aleatoriamente as tampinhas nas matrizes e tentem efetuar a soma das duas.

Como exemplo de ilustração, suponha que uma equipe criou as seguintes matrizes A e B:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 1 & 9\\ 2 & -1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 0 & 6\\ 3 & -3\end{bmatrix}$$

A partir da definição fornecida pelo professor, espera-se a seguinte conclusão:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 1 & 9\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 5\\ 0 & 6\\ 3 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 5\\ 1 & 15\\ 5 & -4\end{bmatrix}$$

Passo 5: Uso das matrizes de ordens três por três e dois por dois

Espera-se que os alunos não tenham tido grandes dificuldades durante a operação de soma com as matrizes dos exercícios anteriores. Então, neste momento, o professor solicitará que os alunos tentem resolver o último exercício desse tópico. Tal exercício consiste em tentar somar uma matriz de ordem três por três com uma matriz de ordem três por dois, após distribuírem as tampinhas nas entradas das matrizes.

Como exemplo de ilustração, suponha que uma equipe criou as seguintes matrizes A e B:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{12} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

A partir da definição fornecida, espera-se a seguinte conclusão:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{12} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{17} & ? \\ \mathbf{2} & \mathbf{10} & ? \\ \mathbf{6} & \mathbf{6} & ? \end{bmatrix}$$

Os pontos de interrogação na última coluna da matriz simbolizam uma possível expressão dos alunos durante a resolução do exercício. Um provável pensamento que os alunos podem ter é se perguntarem o que fazer para somar a última coluna de A sendo que B não tem uma terceira coluna.

Passo 6: Discussão

Relembre com os alunos o que foi realizado até o momento e pergunte-os se a última operação pode ser realizada da mesma maneira que as operações anteriores. Neste momento, espera-se dos alunos que comentem a ausência de uma coluna na matriz de ordem três por dois, alegando que, nos outros casos, sempre foi possível efetuar a operação de soma, pois sempre podiam utilizar elementos correspondentes nas mesmas linhas e colunas.

Passo 7: Conclusão

A partir das conclusões dos alunos, a respeito das somas que foram realizadas, formalize a maneira correta para soma de duas matrizes.

Etapa 3

Passo 1: Discussão

Nesta terceira etapa, o professor perguntará aos alunos se, a partir da conclusão da etapa anterior, é possível definir a subtração de matrizes. Espera-se que os alunos definam a subtração de matrizes como sendo apenas para matrizes que tenham a mesma quantidade de linhas e colunas, assim como para a soma de matrizes, e o resultado se dará com a subtração de cada elemento correspondente às mesmas entradas. Para constatar a veracidade da definição fornecida pelos alunos, estes serão solicitados a criarem duas matrizes com três linhas e três colunas e, assim, efetuar a subtração para efeito de verificação.

Passo 2: Comutatividade da Soma

Espera-se dos alunos que, neste momento, eles já estejam familiarizados com as noções de soma e subtração de matrizes. Então, o professor deverá relembra-los que a operação de soma dos números reais é comutativa, ou seja, o resultado da soma de 5 + 2 é o mesmo se efetuada a soma 2 + 5. A partir disso, os alunos serão questionados se “a soma das matrizes também comuta?“. Dependendo das respostas dos alunos, o professor poderá solicitar que utilizem o material para efetuarem as somas das matrizes em duas ordens e constatar se os resultados serão os mesmos. Como exemplo de ilustração, suponha que uma equipe criou as seguintes matrizes A e B:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

A partir da definição para soma de matrizes, espera-se dos alunos a seguinte conclusão:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{19} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{15} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{19} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{15} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{bmatrix}$$

Constatando que a ordem na operação de soma de matrizes não afeta o resultado.

Passo 3: Não Comutatividade da Subtração

Semelhante ao passo anterior, questione aos alunos sobre a comutatividade da operação de subtração para matrizes. Pode ocorrer de alguns alunos não lembrarem que a subtração de números reais não é comutativa e afirmarem que a subtração de matrizes é comutativa. Então, solicite aos alunos que utilizem o material para criarem duas matrizes e efetuarem duas subtrações, cada uma em uma ordem.

Como exemplo de ilustração, suponha que uma equipe criou as seguintes matrizes A e B:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \textbf{ e } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A partir da definição para subtração de matrizes, espera-se que os alunos obtenham os seguintes resultados:

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 13 \\ -3 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -13 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Constatando que a operação de subtração não é comutativa.

Fechamento

Para finalizar a aula, relembre com os alunos o que foi trabalho durante a prática. Caso algum aluno ainda tenha alguma dúvida sobre as operações estudadas até então, utilize este momento para sanar todas as incertezas e formalizar os conceitos estudados em sala de aula.

Espera-se que, ao final de cada etapa, os alunos saibam definir matriz, assim como realizar as operações de soma e subtração a partir do entendimento das regras.

Variações

Como variação da prática com as caixas, pode-se usar o *software Excel* para a criação de matrizes. É possível, então, formar matrizes com os dados obtidos em sala e representar esses dados referentes à entrada de uma matriz como cada célula do *Excel*.

Caso seja mais acessível realizar a prática utilizando *Excel*, e a instituição de ensino na qual o professor trabalha tenha esse espaço, recomendamos que reserve um local apropriado para tal prática, por exemplo, um laboratório de informática.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

FOLHA DO ALUNO

Comentários iniciais

Caro aluno,

O conteúdo de matrizes é geralmente apresentado de forma abstrata e desconectada da realidade. Por essa razão, nesta aula será desenvolvida uma prática laboratorial, cujo objetivo principal é compreender as operações de soma e subtração de matrizes. Sendo assim, iremos formalizar os componentes de uma matriz, utilizando para isso caixas retangulares, confeccionadas a partir de materiais de baixo custo, e tampinhas, recursos que serão disponibilizados pelo professor.

Experimento

Exercício 1: Observando o material que foi entregue, responda aos seguintes itens a partir da orientação do professor.

a) O material se assemelha a algo que conhecem?

____

____

Exercício 2: Retirem as tampinhas da embalagem plástica e coloquem-nas de forma aleatória em duas matrizes que tenham três linhas e três colunas.

a) A partir da definição para a soma de matrizes comentada pelo professor, qual a soma das duas matrizes que acabou de fazer?

b) Pegue mais uma matriz de três linhas e três colunas, distribua as tampas e efetue a soma com a matriz obtida no item ‘a’. Qual o resultado da soma?

Exercício 3: Retire as tampinhas das matrizes anteriores e, juntamente com as tampinhas restantes, coloque-as de forma aleatória nas duas matrizes com três linhas e duas colunas.

a) Some as duas matrizes. Qual o resultado da soma?

b) Retire as tampas de uma matriz e, a partir das tampas que sobraram, crie outra matriz. Some suas duas matrizes e escreva o resultado da soma.

Exercício 4: Retire as tampas das matrizes de três linhas e duas colunas. Pegue uma matriz de três linhas e três colunas e uma matriz de três linhas e duas colunas. Com as tampinhas, coloque-as de forma aleatória nas entradas das duas matrizes.

a) Qual a soma das duas matrizes? Foi possível efetuar a soma das duas matrizes?

Exercício 5: A partir das conclusões dos exercícios anteriores, responda:

a) É possível subtrair matrizes? Em caso afirmativo, defina a subtração de matrizes.

b) Distribua, aleatoriamente, as tampinhas em duas matrizes com três linhas e duas colunas. Usando a definição do item ‘a’, qual o resultado da subtração das duas matrizes?

c) Ao subtrair as matrizes A – B e B – A, encontramos o mesmo resultado? Registre a explicação utilizando as tampinhas nas caixas.

CAPÍTULO 3
Estudo de sequência numérica por meio da Torre de Hanói

Francimar Miguel da Silva Junior e Guilherme da Silva Pereira

CAPÍTULO 3

Estudo de sequência numérica por meio da Torre de Hanói

Francimar Miguel da Silva Junior e Guilherme da Silva Pereira

INTRODUÇÃO

Uma sequência de números reais é uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, que toma valores no conjunto dos números reais. As sequências numéricas têm diversas aplicações importantes em várias áreas do conhecimento, por exemplo, matemática pura, ciência da computação, economia e finanças, física, engenharia etc. Dentro dessa perspectiva, existe um material manipulável que facilita a compreensão de sequências numéricas, chamado de torre de Hanói. A torre de Hanói é um excelente recurso para ensinar sequências numéricas devido sua estrutura e padrão matemático envolvidos na solução do jogo, pois alterando a quantidade de discos, é possível observar diferentes sequências numéricas. Além disso, ao manusear um material manipulável, a torre de Hanói se torna uma ferramenta valiosa para o ensino, porque oferece uma abordagem prática e visual para o estudo de padrões.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Torre de Hanoi

Elementos que norteiam a prática

Série/Ano		8° ano do Ensino Fundamental
Unidade Temática		Álgebra
Objeto de conhecimento		Sequências recursivas e não recursivas (Brasil, 2018, p. 312)
Habilidade		(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes (Brasil, 2018, p. 313).
Objetivos	**Docente**	• Desenvolver uma situação que possibilite a modelagem matemática de um problema com a utilização dos conhecimentos dos alunos sobre sequências numéricas.
	Aluno	• Identificar a relação de dependência entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos necessários através de sequências numéricas; • Modelar e resolver situações problemas usando os conhecimentos sobre sequências.
Materiais Necessários		• Torre de Hanói com 7 discos; • Folha no aluno; • Papel e caneta.
Conhecimentos Prévios		• Potenciação; • Sequências Numéricas.
Duração		2 horas-aula

Sinopse

A torre de Hanói, conhecida também como jogo da torre, é um famoso jogo usado para o estudo de sequências numéricas. Esse material didático é composto por uma base, três hastes e, comumente, 7 discos, com diferentes diâmetros e perfurados no centro, podendo ser utilizada a quantidade desejada de discos. Os alunos precisarão manipular o material e observar padrões somente com o auxílio do material concreto.

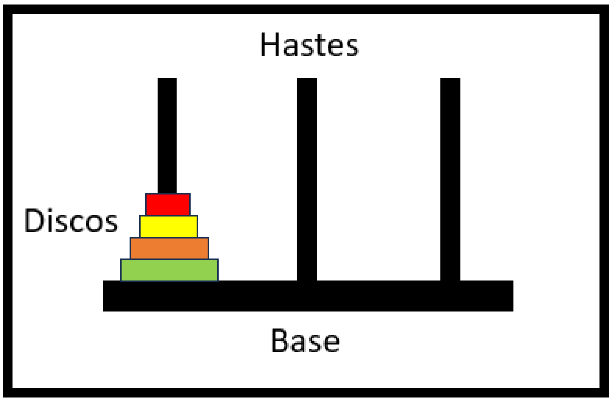
O experimento

Prezado professor,

A torre de Hanói consiste em uma base de madeira na qual estão firmadas três hastes verticais e um certo número de discos de madeira, de diferentes diâmetros, perfurados no centro, de modo que possam ser encaixados nas hastes. O objetivo do jogo é transferir todos os discos que, inicialmente, estão em uma mesma haste e dispostos de forma crescente em relação a seus diâmetros, para outra haste, com a menor quantidade de movimentos possível. Para a movimentação dos discos existem duas regras:

1. Somente um disco pode ser movido de cada vez.
2. Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

Figura 1 - Representação da torre de Hanói



A partir disso, as próximas etapas explorarão os conceitos envolvendo sequências numéricas que estão por trás da solução da torre.

Preparação

Antes do início da aula, o docente deverá entregar os materiais necessários, neste caso, as torres de Hanói. Esse material pode ser encontrado em lojas de artigos didáticos, *sites* ou confeccionado com material reciclável, sobras de madeira ou tampas plásticas de diversas cores, as quais representariam os discos da torre. Ao começar a aula, deverá organizar a sala em duplas e antes de entregar a folha do aluno e as torres de Hanói, deverá fazer uma breve introdução da prática que será conduzida ao ler os comentários iniciais com a turma.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

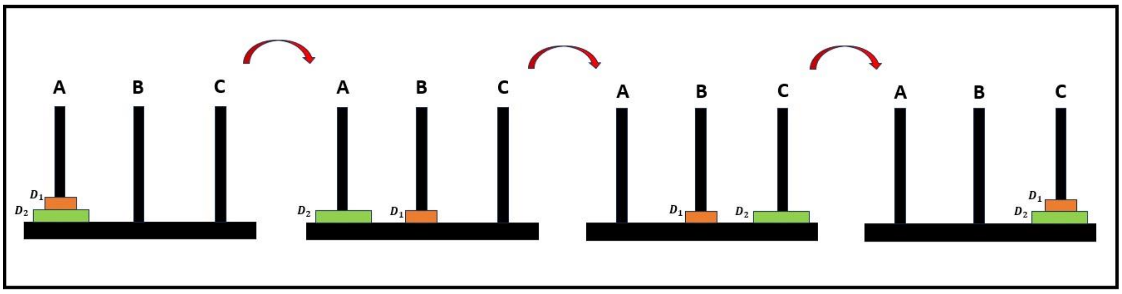
A prática será realizada em 6 etapas, a primeira será uma introdução inicial para estabelecer os objetivos e a segunda será a familiarização dos alunos com o material que será utilizado. As outras 4 etapas consistirão em destinar aos alunos tarefas a serem feitas com o material manipulável. Cada uma das etapas tem um objetivo específico para que, ao final da prática, os alunos consigam determinar a fórmula que resolve a torre de Hanói para qualquer quantidade de discos. Primeiramente, iremos entender como expressar as sequências com a movimentação padronizada, manipular a torre com 3 e 4 discos e, em seguida, desenvolver uma lei de formação para uma sequência recursiva para, finalmente, determinar a lei de formação da sequência que relaciona a quantidade mínima de movimentos que resolvem o jogo com a quantidade de discos.

Etapa 1

Num primeiro momento, o professor deverá explicar aos alunos as principais etapas da prática que será realizada e seus objetivos. Após realizar a leitura dos comentários iniciais da folha do aluno com a turma, deverá estabelecer a padronização dos movimentos da torre de Hanói, ou seja, representar cada movimento com um símbolo.

Vejamos um exemplo em que os discos estão inicialmente na haste A.

Figura 2 - Representação da solução da torre para dois discos

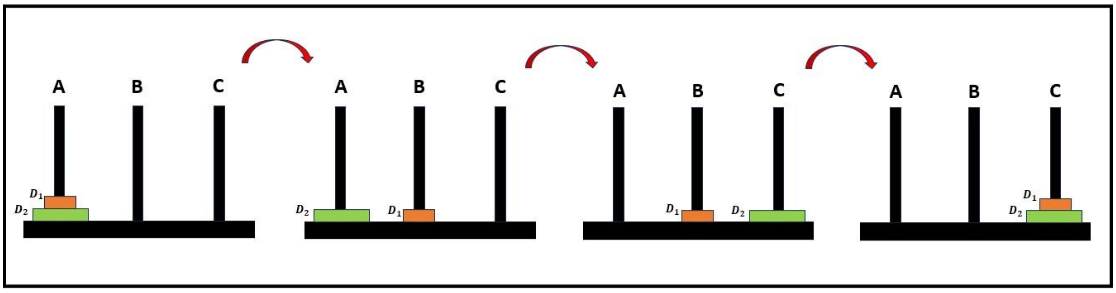


Nesse exemplo, a sequência que está sendo mostrada na Figura 2 resolve a torre de Hanói para o caso de dois discos. Cada movimento será representado por um par de letras, primeiro indicamos o disco que será movimentado e, em seguida, a haste para a qual o disco será movido. Nesse exemplo, temos D_1B, D_2C, D_1C.

Etapa 2

Nessa etapa, com o intuito de aproximar os alunos do material concreto e da padronização dos movimentos, é indicado que o professor mostre a solução do jogo com um e dois discos. Com o esquema (como mostra na Figura 1), os alunos terão um exemplo prático da sequência de movimentos resolutivos do jogo. A partir disso, os alunos terão contato com a prática que realizarem nas etapas seguintes.

Figura 3 - Representação da solução da torre para dois discos



Etapa 3

Na terceira etapa, após os alunos já estarem familiarizados com as regras do jogo e com a representação dos movimentos, o professor iniciará as demais atividades, fazendo a leitura da folha do aluno em conjunto com os estudantes e orientando que façam a manipulação pedida. Nesse contexto, os alunos devem resolver a torre de Hanói para três discos e, em seguida, fazer a representação da sequência de movimentos usando o padrão estabelecido.

Etapa 4

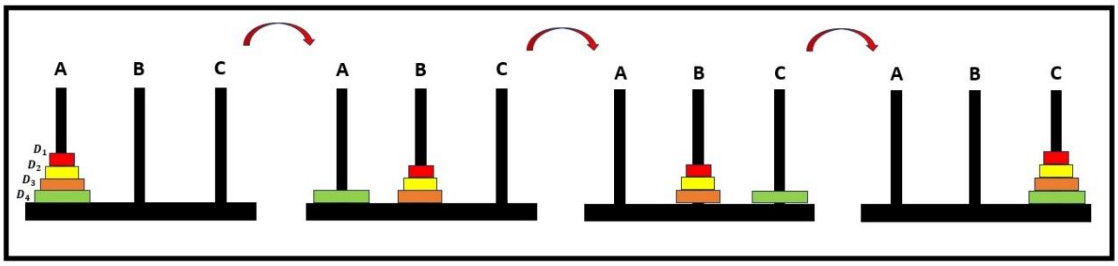
Na quarta etapa, o professor proporá a solução do jogo para quatro discos. Nessa situação, os alunos devem resolver a torre de Hanói para 4 discos e, em seguida, fazer a representação da sequência de movimentos usando o padrão estabelecido.

Ainda nessa etapa, o professor deve comentar sobre a dificuldade da solução para 4 discos em relação à solução com 3 discos, enfatizando que a partir do quinto disco a quantidade de movimentos mínimos cresce bastante. Nesse contexto, será relembrado o conceito de sequência recursiva.

Uma sequência é dita recursiva quando podemos calcular um termo da sequência em função de termos anteriores. A partir dessa definição, e utilizando somente a torre, o professor deve, encontrar uma lei de formação que resolva a torre para n discos. Essa lei de formação estará associada a uma sequência recursiva.

O processo de manipulação do material que o professor deverá fazer é apresentado na Figura 4.

Figura 4 - Representação da solução recursiva da torre para quatro discos



Aqui, considerando-se o caso com 4 discos, os três primeiros serão tidos como um único disco, então os alunos apenas repetirão o procedimento de solução visto anteriormente. Em seguida, o professor deve perguntar quantos movimentos mínimos serão necessários para o primeiro movimento. Espera-se que os alunos respondam 7, que foi o valor encontrado anteriormente, então, a partir desse processo, devem generalizar uma expressão do seguinte tipo:

$$Q_n = 2Q_{n-1} + 1$$

Seja Q_n o número de movimentos mínimos da torre, pode-se verificar a seguinte situação:

$$Q_1 = 2Q_{1-1} + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$Q_2 = 2Q_{2-1} + 1 = 2Q_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$Q_3 = 2Q_{3-1} + 1 = 2Q_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$
$$Q_4 = 2Q_{4-1} + 1 = 2Q_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1 = 15$$
$$Q_5 = 2Q_{5-1} + 1 = 2Q_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 30 + 1 = 31$$
$$Q_6 = 2Q_{6-1} + 1 = 2Q_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 62 + 1 = 63$$
$$Q_7 = 2Q_{7-1} + 1 = 2Q_6 + 1 = 2 \cdot 63 + 1 = 126 + 1 = 127$$

Etapa 5

Na quinta etapa, será solicitado que os alunos preencham a tabela por meio da lei de formação recursiva, que relaciona a quantidade de movimentos mínimos anteriores com a quantidade de movimentos atuais, os quais resolvem a torre de Hanói, resultado encontrado na etapa anterior.

Etapa 6

Na sexta etapa, será solicitado que os alunos determinem a lei de formação que relaciona o número de discos com a quantidade de movimentos mínimos que resolvem a torre de Hanói. Espera-se que, ao preencher a tabela da sexta etapa, os alunos cheguem aos seguintes valores:

Número de discos	**Quantidade mínima de movimentos que resolvem a torre de Hanói**
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

Com esses valores, o professor deve questionar aos alunos sobre um possível padrão, de modo que os alunos percebam que cada valor é bem próximo de uma potência de base 2 e expoente natural. Concluindo, assim, que os números da tabela seguem o seguinte padrão:

$$Q_n = 2^n - 1$$

Onde Q_n é a quantidade mínima de movimentos que resolve o jogo e n é a quantidade de discos utilizados. Para verificar se a fórmula acima é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, iremos prová-la por indução:

Base de Indução: Para $n = 1$

$$Q_n = 2^n - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

De fato, para 1 disco, a quantidade mínima de movimentos é 1.

Hipótese de Indução: Suponhamos que a fórmula $2^n - 1$ é válida para algum $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$Q_k = 2^k - 1$$

É quantidade mínima de movimentos que resolve a torre para k discos.

Tese de Indução: Usaremos a Hipótese de Indução para provar que a fórmula também será válida para k + 1.

Pela expressão encontrada na etapa 4, temos que $Q_n = 2Q_{n-1} + 1$, usando essa expressão para $k + 1$, temos:

$$Q_{k+1} = 2Q_k + 1$$

Agora, aplicando a Hipótese de Indução, temos:

$$Q_{k+1} = 2 \cdot (2^k - 1) + 1$$
$$Q_{k+1} = 2 \cdot 2^k - 2 + 1$$
$$Q_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos que $Q_n = 2^n - 1$ é a quantidade mínima de movimentos que resolve a torre de Hanói para n discos, sendo n um número natural.

Fechamento

Para concluir a aula, o professor pode fazer uma recapitulação dos principais conceitos e estratégias para resolver a torre de Hanói usando sequências numéricas. Além disso, é necessário que ele faça a formalização desses conceitos.

Variações

Caso a instituição educacional na qual atua o educador possua um laboratório de informática, é possível realizar uma versão adaptada dessa atividade utilizando a tecnologia. Ao trabalharem de forma individual, os estudantes serão incentivados a movimentar as peças por meio das ferramentas digitais disponíveis no Geogebra ou em outros *sites* que disponibilizam esse jogo. Outra possível alteração seria incluir explicitamente conceitos de progressão geométrica e função exponencial. Desse modo, essa prática seria destinada a alunos do 1º ano do ensino médio.

Referências

Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

FOLHA DO ALUNO

Comentário iniciais

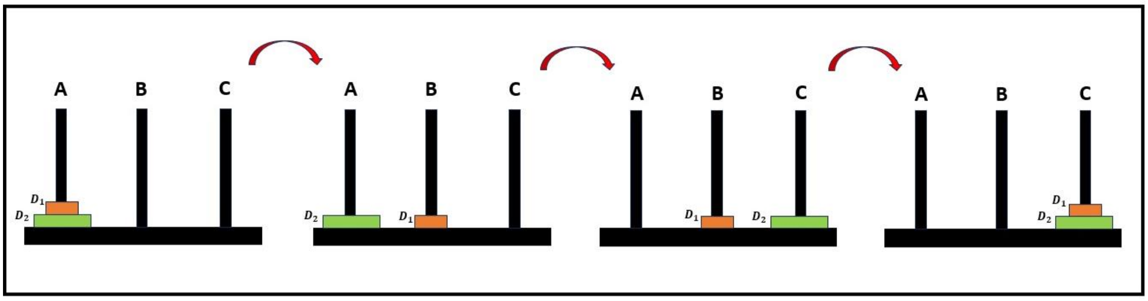
Uma sequência de números reais é uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, e que toma valores no conjunto dos números reais. Algumas sequências obedecem a uma lei de formação bem estabelecida, ou seja, um padrão. Nesse sentido, podemos trabalhar o conceito de sequência numérica através do material manipulável chamado Torre de Hanói ou Jogo da Torre. A estrutura do material consiste em uma base de madeira onde estão firmadas três hastes verticais e um certo número de discos de madeira, de diâmetros diferentes, perfurados no centro, de modo que possam ser encaixados nas hastes. O principal objetivo do jogo é transferir todos os discos, que estão inicialmente dispostos em uma mesma haste e de forma crescente em relação a seus diâmetros, para outra haste, com a menor quantidade de movimentos possível. Para a movimentação dos discos existem duas regras:

1. Somente um disco pode ser movido de cada vez.
2. Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

Experimento

Para começar nossa atividade prática, é necessário estabelecer uma padronização nos movimentos dos discos. Primeiro, atribuiremos letras a cada uma das hastes, desse modo, a haste da esquerda será representada pela letra “A”, a do centro pela letra “B” e a da esquerda pela letra “C”. Inicialmente, escolhemos uma haste e a quantidade de discos para começar o jogo. O menor disco representaremos como D_1, seguindo essa representação, do menor disco até o maior, teremos D_n representando o enésimo disco. Vejamos um exemplo em que os discos estão inicialmente na haste A:

Figura 1 - Representação da solução da torre para dois discos



Neste exemplo, a sequência que está sendo mostrada na figura resolve a torre de Hanói para o caso de dois discos. Cada movimento será representado por um par de letras, primeiro, indica-se o disco que será movimentado e, em seguida, a haste para a qual o disco será movido. Neste exemplo, tem-se D_1B, D_2C, D_1C.

Momento 1:

Determine a quantidade de movimentos mínimos que resolve a torre de Hanói para três discos. Utilize a padronização dos movimentos do disco e descreva a sequência de movimentos encontrada.

Momento 2:

Determine a quantidade de movimentos mínimos que resolve a torre de Hanói para quatro discos. Utilize a padronização dos movimentos do disco e descreva a sequência de movimentos encontrada.

Momento 3

Preencha a tabela com os valores encontrados para 1, 2, 3 discos e, em seguida, complete a tabela para 4, 5, 6 e 7 discos:

Número de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Momento 4

Com os valores apresentados na tabela, determine a fórmula geral da sequência que relaciona o número mínimo de movimentos que resolve a torre de Hanói com a quantidade de discos.

CAPÍTULO 4
Analisando Caminhos com o Geoplano
Sabrina de Sousa Paulino e Cícero Moreira Hitzschky Filho

CAPÍTULO 4

Analisando Caminhos com o Geoplano

Sabrina de Sousa Paulino e Cícero Moreira Hitzschky Filho

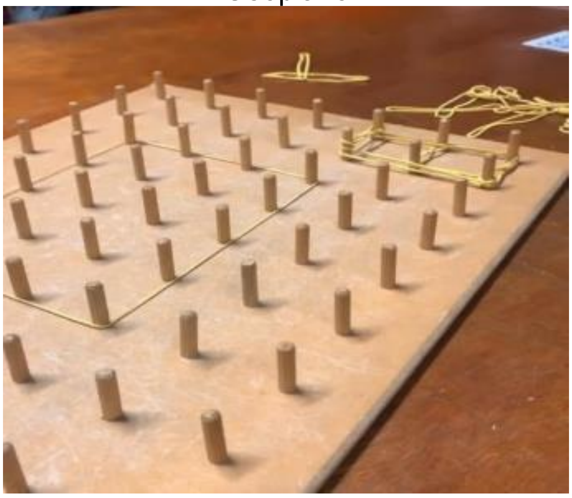
INTRODUÇÃO

Esse experimento propõe uma abordagem diferente das noções relacionadas aos conceitos de contagem e análise combinatória, assim como sua relação com os Binômios de Newton. A partir disso, tais conceitos serão expostos através dos processos de contagem de caminhos relacionados à menor distância entre determinados pontos A e B. Nessa prática, tal conceito é abordado a partir da utilização de um recurso concreto, o Geoplano, com o intuito de fornecer ao discente uma melhor visualização dos formatos geométricos criados, da distância entre cada ponto e dos caminhos possíveis de serem identificados visualmente, contribuindo, assim, para uma melhor compreensão do processo de contagem. Para essa prática, o recurso será explorado como uma ferramenta na formalização de processos de contagem. As atividades propostas exploram, em sua essência, as maneiras distintas e possíveis de realizar um trajeto, de um ponto A até um ponto B, de forma que a distância entre os dois pontos se mantenha a menor possível. Para isso, os alunos devem considerar que os movimentos realizados não podem ser retrocedidos e devem ser executados apenas na horizontal (da esquerda para a direita) e/ou na vertical. Com isso, o discente é guiado a perceber que, conforme a distância entre os pontos estipulados aumenta, os conceitos relacionados à combinatória emergem.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Geoplano



Elementos que norteiam a prática

<table>
<tr><th colspan="2">Série/Ano</th><td>1º ano do Ensino Médio</td></tr>
<tr><th colspan="2">Unidade Temática</th><td>Álgebra</td></tr>
<tr><th colspan="2">Objeto de conhecimento</th><td>Binômio de Newton</td></tr>
<tr><th colspan="2">Habilidades</th><td>(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Objetivos</th><th>Docente</th><td>• Apresentar, de forma lúdica, os conceitos de análise combinatória, com ênfase na generalização da combinação e suas relações com os Binômios de Newton.</td></tr>
<tr><th>Aluno</th><td>• Desenvolver técnicas de resolução de problemas que envolvam a contagem e combinação de elementos, assim como, identificar uma formalização geral para tais casos.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Materiais Necessários</th><td>• Um Geoplano para cada grupo formado (concreto);
• Quinze ligas por grupo;
• Folhas de papel;
• Um lápis;
• Uma borracha.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Conhecimentos Prévios</th><td>• Fatorial;
• Permutação simples;
• Permutação com repetição.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Duração</th><td>2 horas-aula</td></tr>
</table>

Sinopse

Nesse experimento, serão apresentados aos alunos conceitos iniciais a respeito do Geoplano e dos números binomiais e, consequentemente, será dada ênfase ao assunto de permutação com repetição e combinação, relacionando-o à área de análise combinatória. Para isso, será utilizado como recurso uma ferramenta de ensino, chamada Geoplano, como forma de propor aos alunos uma melhor compreensão do processo de construção do conhecimento matemático.

O experimento

Prezado professor,

As atividades que serão desenvolvidas no experimento têm o intuito de auxiliar o aluno a realizar a formulação de processos combinatórios, a partir da identificação de características relacionadas ao conceito de contagem. Para isso, será utilizado o Geoplano, de acordo com as etapas apresentadas a seguir.

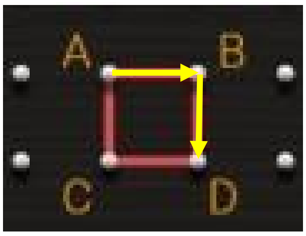
Preparação

Antes do início da prática, faz-se necessário que os alunos compreendam o que é o Geoplano e de que forma ele é geralmente utilizado. Dessa maneira, o professor deve reservar 10 minutos de sua aula para realizar uma breve explicação histórica e contextual a respeito do instrumento e de sua utilização.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1

Na primeira etapa, será apresentada aos alunos, incialmente, uma situação no Geoplano, em que é formada a figura de um quadrado de dimensões 1x1. O objetivo é o de introduzir a utilização do Geoplano e encontrar, visualmente, o número de caminhos a serem percorridos de um determinado ponto a outro, buscando a menor distância entre os pontos determinados.



A partir disso, o aluno deverá construir e analisar outras três situações similares, seguindo os mesmos passos, sendo elas representadas por retângulos que possuam as dimensões a seguir:

a) 2x1

b) 3x1

c) 4x1.

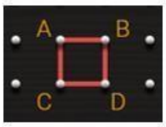
Etapa 2

Após realizar o processo de contagem visual dos caminhos possíveis em cada situação apresentada anteriormente, o aluno agora deve identificar, nas resoluções demonstradas, características que relacionem a quantidade de caminhos encontrados e o número de quadrados de dimensão 1x1 presentes em cada situação. Espera-se que o discente observe que a quantidade de quadrados é sempre uma unidade menor que a quantidade de caminhos encontrados em cada circunstância. Sendo o número de caminhos e de quadrados números naturais maiores que zero. Formulando:

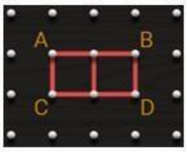
$$\textit{número de quadrados} < \textit{número de caminhos, ambos} \in \mathbb{N}$$

Etapa 3

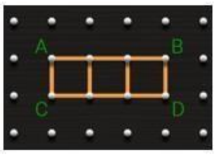
A partir dessa etapa, o experimento tem o foco de auxiliar no processo de formalização dos conceitos de números binomiais. Dessa forma, o aluno será apresentado à notação de binômio:



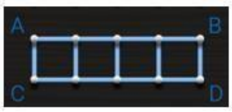
$\binom{2}{1}$



$\binom{3}{2}$



$\binom{4}{3}$



$\binom{5}{4}$

Cada representação é indicada pelo número de caminhos e a quantidade de quadrados existentes em cada situação. Dessa forma, pode-se observar que em cada representação, temos: $\binom{n}{n-1}$. De forma que, n representa a quantidade de caminhos encontradas e (n-1) representa a quantidade de quadrados em cada situação. Consequentemente, sabendo que $\binom{2}{1}$ = 2, pela situação resolvida na etapa 1, o aluno deve realizar a dedução intuitiva das seguintes representações: $\binom{3}{1}$ = 3; $\binom{4}{1}$ = 4; $\binom{5}{1}$ = 5. A partir disso, o aluno é guiado a realizar a generalização do termo $\binom{n}{1}$ = n e, consequentemente, encontrar os números binomiais combinatórios:

$$\binom{3}{2} = \binom{3}{1} \quad \binom{4}{3} = \binom{4}{1} \quad \binom{5}{4} = \binom{5}{1} \quad \ldots \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

Etapa 4

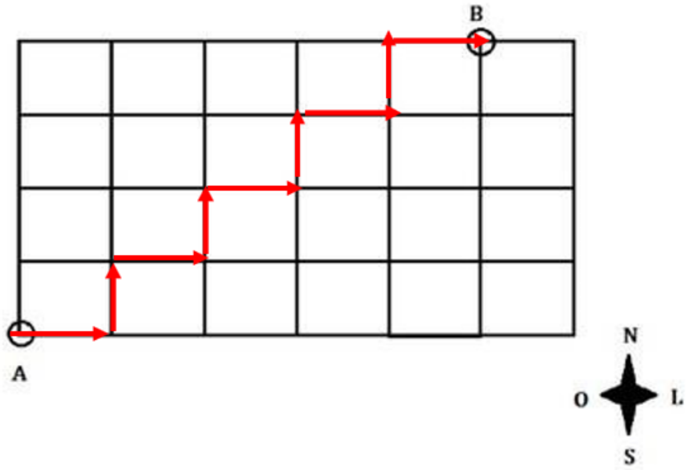
Observe que, até o momento, o aluno só se deparou com a construção de figuras cuja dimensão de altura é de 1 unidade de comprimento. A partir dessa etapa, serão apresentadas comparações entre figuras com alturas iguais a 1 unidade e 2 unidades. Nesse sentido, espera-se que, ao analisar a quantidade de caminhos presentes em cada uma dessas comparações, perceba que com o acréscimo de unidades à medida de altura das figuras, a quantidade de caminhos a ser calculada se torna maior e, consequentemente, se tornará inviável a partir de uma determinada quantidade de quadrados. Com isso, será apresentado o seguinte questionamento:

"O que você percebeu a respeito das quantidades de menores caminhos encontrados em cada situação apresentada na etapa 3?"

A partir disso, é esperado que o discente conclua que, a contagem visual de caminhos se torna inviável.

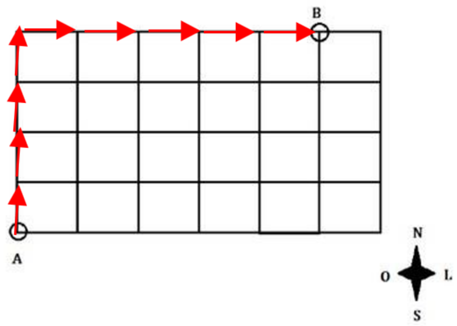
Etapa 5

a) A partir de então, o aluno pode obter diversos resultados de caminhos, dentre eles o seguinte:



Note que, ao traçar o caminho, o aluno irá identificar o total de 9 passos até chegar ao ponto B, de forma que seja percorrida a menor distância possível.

b) Consequentemente, pode-se observar que esse caminho não é o único possível, uma vez que, existem outras possibilidades de realizar 9 passos do ponto A ao ponto B e, ainda assim, manter a menor distância entre tais pontos. Observe o exemplo:



c) Agora, como forma de remeter ao conceito de permutação com repetição, é indicado que o aluno represente um dos caminhos realizados no percurso acima utilizando as letras H = horizontal e V = vertical. Logo, obteremos o seguinte resultado:

VVVVHHHHH

Dessa forma, espera-se que o aluno identifique o padrão de repetição das letras v e h, permitindo-o relacionar o percurso realizado com a permutação de elementos que se repetem.

d) Por fim, após realizar a sistematização do padrão acima, o aluno deve utilizar seus conhecimentos prévios para realizar a contagem de caminhos possíveis nesse trajeto. Dessa forma, teremos:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ = possibilidades de passos = 9

Dos quais, 5 são realizados no sentido horizontal e 4 na vertical. Logo, temos a seguinte representação: 9 elementos no total (v+h)! = 9!. Na qual, 4! = v! e 5! = h!, que representam os elementos repetidos e precisam ser retirados da contagem para que não sejam contados mais de uma vez. Então, podemos representar essa contagem como:

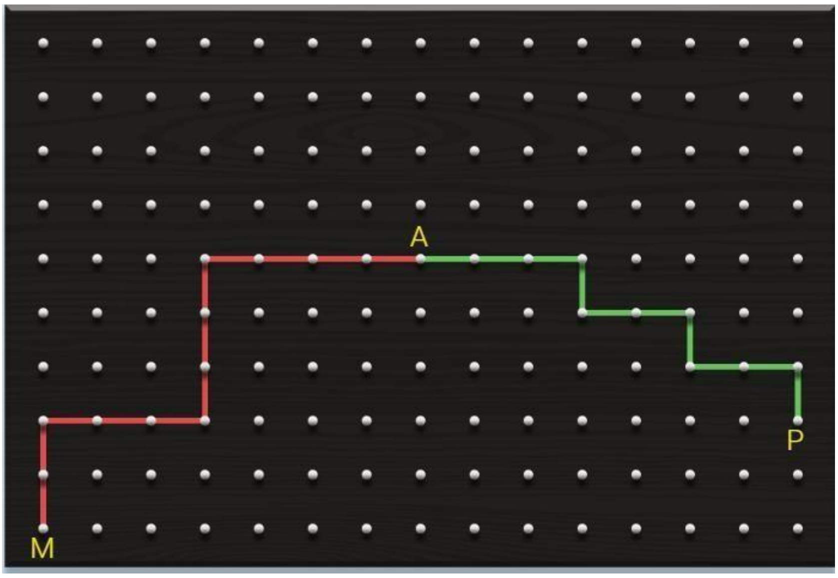
Número de caminhos = $\frac{(v+h)!}{v!h!}$

Note que (v+h) pode ser reescrito como um fator n, com n ϵ IN. Logo, teremos $\left(\frac{n!}{v!\,h!}\right)$ e como v e $v!h!$ h, são os elementos repetidos da sequência, temos uma permutação com repetição. Então, podemos representar como Pc = $P_9^{4,5}$. Então, observe que, $\frac{9!}{4!5!}$ = $\frac{9!}{4!(9-4)!}$ = $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ = $\binom{n}{v}$ = C_9^4.

Agora que o aluno possui o conhecimento da formulação geral para calcular qualquer quantidade de caminhos em que a menor distância seja mantida, propõe-se o seguinte exercício de fixação:

"Houve um acidente no ponto A. Há duas ambulâncias na região: uma no ponto M e outra no ponto P. Se considerarmos apenas a menor distância como critério de escolha da ambulância a ser chamada, qual é a quantidade de caminhos possíveis para os trajetos AM e AP? Qual das duas ambulâncias é a melhor opção para ir ao local do acidente? Justifique."

Com isso, o aluno pode realizar a seguinte resolução:



I) AM = $\frac{n!}{v!(n-v)!}$ = $\frac{12!}{5!(12-5)!}$ = $\frac{12!}{5!7}$ = $\frac{12\ X\ 11X\ 10\ X\ 9\ X\ 8}{5X4X3X2X1}$ = 792 = C_{12}^{5} , trajetos possíveis.

II) AP = $\frac{n!}{v!(n-v)!}$ = $\frac{10!}{3!(10-3)}$ = $\frac{10!}{3!7!}$ = $\frac{10x9x8}{3x2}$ = 120 = C_{10}^{3}, trajetos possíveis.

Fechamento

A atividade proposta no fechamento é a verificação dos resultados obtidos nos momentos 1 e 5, utilizando a generalização da fórmula da combinação, que incorpora a abordagem geométrica da malha quadriculada utilizada nesse experimento.

Variações

Uma das variações possível para esse experimento, pode ser a continuação da atividade realizada na etapa 5 aqui descrita, na qual, além de percorrer um trajeto do ponto A até o B, também seria proposto que o percurso passasse por uma terceira localidade, um ponto C. Nesse sentido, pode ser trabalhado o princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem, ao buscar pela quantidade de trajetos mínimos realizados.

Além disso, outra forma de variação dessa atividade, seria a utilização do Geoplano virtual (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/) que pode ser, ou não, incorporado à prática com o material concreto.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

FOLHA DO ALUNO

Comentários iniciais

Prezado aluno,

O Geoplano é um material utilizado no ensino de matemática, principalmente no que se refere à geometria plana, podendo ser concreto ou virtual. Essa ferramenta consiste em uma placa de madeira, na qual são colocados pinos, equidistantes, formando, assim, uma malha com linhas e colunas que auxiliam no processo de representação de figuras geométricas planas. Contudo, para essa prática, o auxílio do Geoplano será redirecionado para o tema algébrico, voltado para o conhecimento de análise combinatória, com o intuito de identificar as relações existentes entre cada situação apresentada e a representação dos termos encontrados.

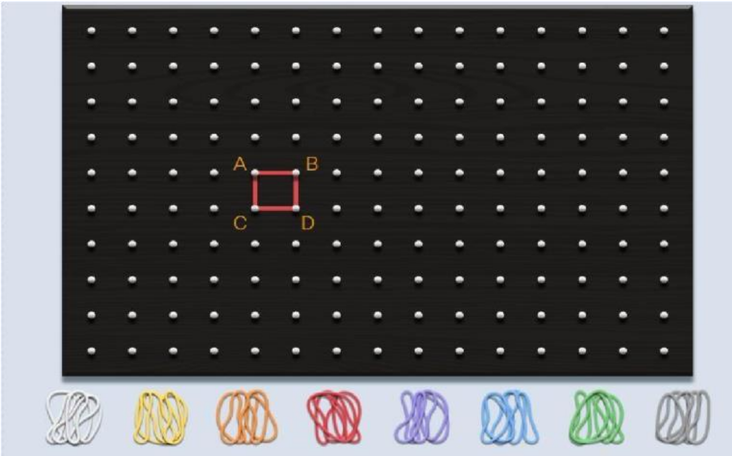
Procedimento

Para a realização da prática, inicialmente, os alunos devem se organizar em grupos com até 4 participantes. Posteriormente, cada grupo deve receber um Geoplano concreto. Vale ressaltar que, para uma melhor interação entre os componentes de cada equipe, os alunos podem acessar também o Geoplano virtual, no seguinte *link*: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/.

Experimento

Momento 1

Sabendo que a distância entre os pinos do Geoplano possui medida igual a 1 unidade de comprimento, observe o seguinte exemplo:



a) Agora, no quadrado representado acima, determine de quantas maneiras podemos sair do vértice A e chegar ao vértice D, caminhando apenas na vertical e/ou horizontal, buscando sempre a menor distância entre os pontos, não sendo possível retroceder no caminho percorrido.

b) Considere, então, as dimensões dos seguintes retângulos:

1) 2x1 2) 3x1

3) 4x1

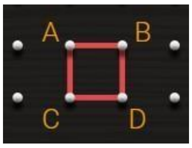
Agora, construa-os e, seguindo as mesmas orientações anteriores, determine a quantidade de caminhos, do vértice A ao D, em cada um deles.

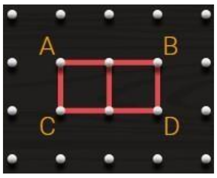
Momento 2:

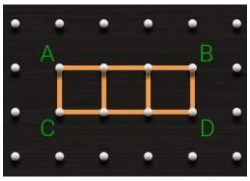
Considere os resultados obtidos nas situações anteriores. Existe alguma relação entre a quantidade de caminhos encontrados e a figura geométrica formada no Geoplano? Se sim, que relação seria essa? Quais condições podem ser observadas para os valores presentes nessa relação?

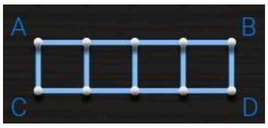
Momento 3:

A partir das características observadas a respeito da quantidade de caminhos e quadrados relacionados nas figuras anteriores, adotaremos agora a seguinte notação









para representar tal relação:

$\binom{2}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{5}{4}$

a) Sabendo que na representação $\binom{2}{1}$ o número inferior indica a quantidade de quadrados formados e o número superior indica a quantidade de caminhos que podemos trilhar, dadas as condições já apresentadas, o que significa a representação $\binom{3}{2}$? E $\binom{13}{12}$?

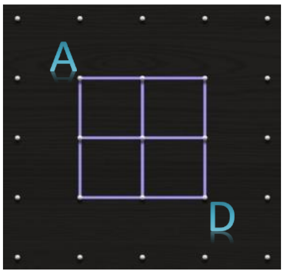
b) Ao continuar o processo do item anterior, quantos quadrados seriam necessários para que tivéssemos n caminhos? E quantos caminhos teríamos se tivéssemos p quadrados? Represente isso conforme o item a.

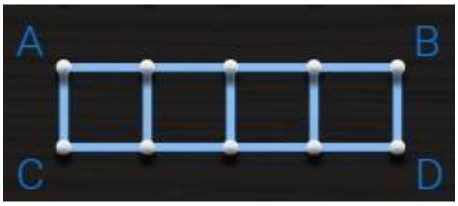
c) Sabendo que $\binom{2}{1}$ = 2, defina $\binom{n}{1}$ = n. Ou seja, $\binom{3}{1}$ = 3, $\binom{4}{1}$ = 4 e assim por diante. Agora, considerando os resultados obtidos anteriormente, é possível relacionar essa definição com a representação que utilizamos antes? Se sim, qual seria a relação entre elas?

Momento 4

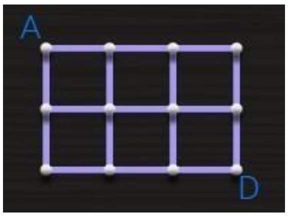
Agora, observe os casos apresentados a seguir e compare a quantidade de caminhos

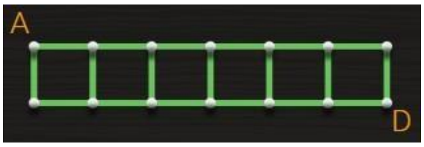
I)





II)



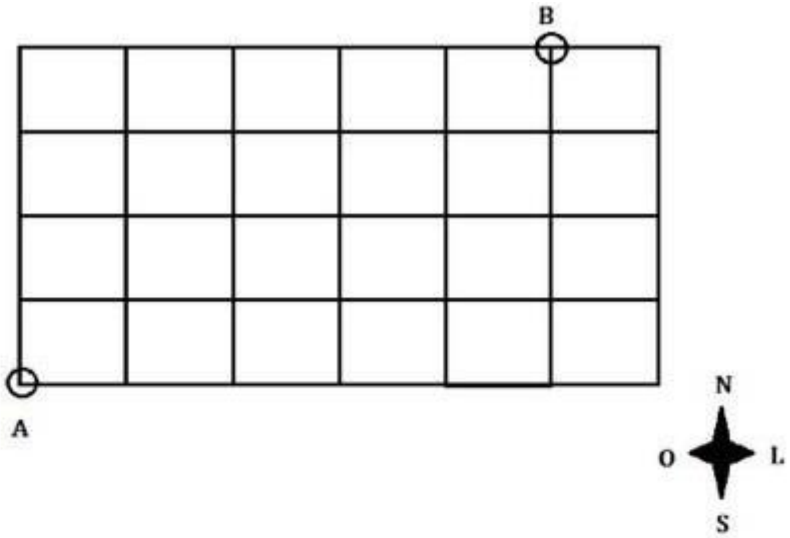


O que você percebeu a respeito das quantidades de caminhos encontradas em cada situação?

encontrados, do ponto A ao ponto D, em cada uma das situações.

Momento 5:

Considere agora a seguinte situação: Anderson se atrasou no caminho até a parada de ônibus mais próxima de sua casa quando estava indo à faculdade e decidiu solicitar um carro de aplicativo para levá-lo até lá. Considerando que o carro pode deslocar-se apenas na vertical e na horizontal, sem retroceder no caminho, e que Anderson se encontra no ponto A, responda:



a) Qual é a menor distância que ele terá que percorrer até a faculdade, localizada no ponto B?

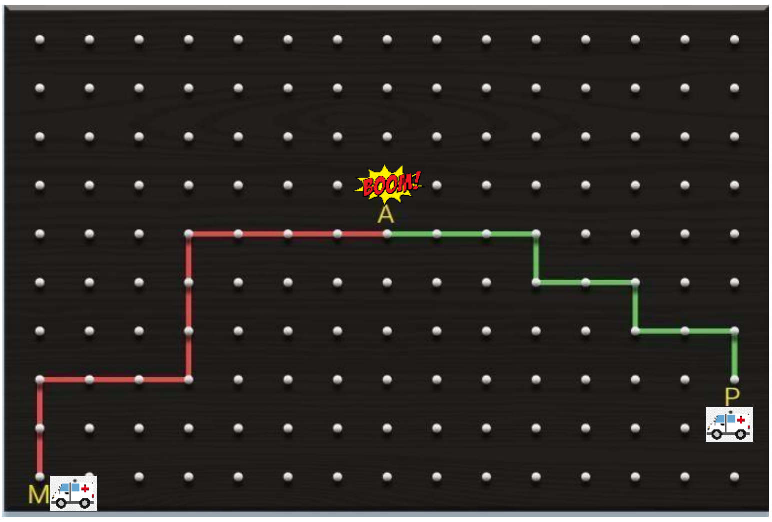
b) A menor distância de quadras que você encontrou forma um único caminho ou pode ser reorganizada em outros caminhos até o mesmo destino? Se for possível, exemplifique.

c) Utilizando as letras H = horizontal e V = vertical, represente um dos caminhos encontrados na situação apresentada acima. O que você consegue perceber ao analisar essa representação?

d) Com ajuda da sistematização utilizada, você é capaz de descobrir quantos menores caminhos existem até faculdade de Anderson? Descreva o processo utilizado para solucionar esse problema.

Momento 6:

Por fim, agora que você conseguiu identificar conceitos relacionados à análise combinatória, utilize-os para resolver a seguinte situação: houve um acidente no ponto A. Há duas ambulâncias na região: uma no ponto M e outra no ponto P. Se considerarmos apenas a menor distância como critério de escolha da ambulância a ser chamada, qual é a quantidade de caminhos possível para os trajetos AM e AP? Qual das duas ambulâncias é a melhor opção para ir ao local do acidente? Justifique.



CAPÍTULO 5
O Quadrado da Soma e da Diferença
Pedro Henrique Sales Ribeiro, Daniel da Silva Rocha e Wallyson Batista Sampaio

CAPÍTULO 5
O Quadrado da Soma e da Diferença

Pedro Henrique Sales Ribeiro, Daniel da Silva Rocha e Wallyson Batista Sampaio

INTRODUÇÃO

Os produtos notáveis são propriedades matemáticas relevantes ao longo do processo de construção do conhecimento matemático. Suas aplicações se estendem desde a resolução de equações de segundo grau, usos em geometria analítica, aplicações em binômio de Newton e em alguns conceitos envolvendo números complexos. Por essa ampla usabilidade, torna-se importante a fundamentação desse conhecimento, em especial valendo-se de um material concreto que pode possibilitar uma compreensão que vincule teoria e prática.

Nesse sentido, este experimento tem por objetivo permitir que os discentes compreendam que os produtos notáveis podem ser construídos a partir da "algebrização" de um processo geométrico relacionado construção de quadrados, quando tratamos da soma ou da diferença de dois números elevada à segunda potência.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Produtos notáveis – O quadrado da soma e da diferença

Elementos que norteiam a prática

<table>
<tr><th colspan="2">Série/Ano</th><td>9º ano</td></tr>
<tr><th colspan="2">Unidade Temática</th><td>Álgebra</td></tr>
<tr><th colspan="2">Objeto de conhecimento</th><td>Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis</td></tr>
<tr><th colspan="2">Habilidade</th><td>(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau (Brasil, 2018, p. 317).</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Objetivos</th><th>Docente</th><td>- Permitir a associação de expressões algébricas com grandezas geométricas.
- Mediar a construção de uma visualização geométrica do quadrado da soma e da diferença.</td></tr>
<tr><th>Aluno</th><td>- Relacionar grandezas geométricas com expressões algébricas.
- Compreender o quadrado de uma soma e de uma diferença por meio da geometria.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Materiais Necessários</th><td>- Papel e caneta/lápis;
- Placas para os produtos notáveis do quadrado da soma e da diferença;
- Folha do aluno contendo as instruções.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Conhecimentos Prévios</th><td>- Áreas de retângulos e quadrados.
- Conceitos e propriedades de potenciação e distributividade.
- Polinômios e expressões algébricas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Duração</th><td>2 horas-aulas</td></tr>
</table>

Sinopse

Esta prática consiste em uma representação geométrica que visa possibilitar a compreensão conceitual de dois produtos notáveis, quais sejam, o quadrado da soma e o quadrado da diferença. Para tanto, são utilizadas quatro placas de madeira de espessura ínfima, as quais são atribuídas áreas 1, x e x^2.

O experimento

Prezado professor,

Nesta prática, você irá mediar um experimento que utiliza quatro componentes retangulares de madeira. Para a consecução do objetivo, são propostas três etapas, das quais a primeira refere-se à familiarização com o material concreto, a segunda a manipulação para a obtenção do quadrado da soma e a terceira para a obtenção do quadrado da diferença.

Preparação

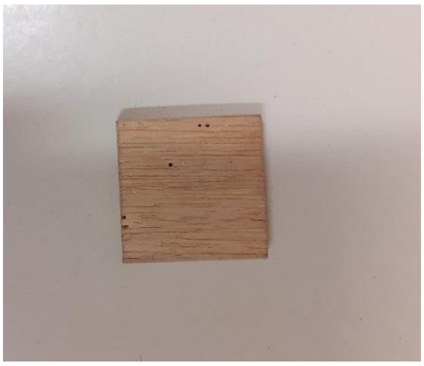
Antes de iniciar a prática, é importante que você separe o material necessário nos locais de aplicação e instrua os estudantes quanto os cuidados que eles devem ter com as placas de madeira, que não devem ser riscadas ou marcadas.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1 – Familiarização com o material

Nesta etapa, inicie separando a turma em grupos de até 4 componentes. Em seguida, solicite que os alunos verifiquem e analisem o material disposto, apontando e registrando as figuras observadas, tal como possíveis relações entre as medidas de seus lados. O Quadro 1 apresenta possíveis interpretações que podem ser adotadas pelos estudantes.

Quadro 1 – Relação entre as peças, seus nomes e sua interpretação algébrica

Peça do Material	Possíveis nomes associados	Interpretação algébrica
	Paralelogramo, quadrado, retângulo, losango.	**a^2**
	Paralelogramo, quadrado, retângulo, losango.	**b^2**
	Paralelogramo, retângulo.	**ab** OU **ba**

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Após o momento das observações pelos discentes, você deverá indagar cada grupo, a fim de compreender como foi nomeado cada peça, e qual interpretação algébrica foi dada a elas. Em discussão com todos os grupos, verifique se houve divergências entre as nomenclaturas adotadas, e em caso afirmativo, esclareça se essas diferenças podem impactar o resultado esperado.

Etapa 2 – Obtendo o quadrado da soma

Nesta etapa, solicite aos grupos que montem um quadrado utilizando as quatro placas disponibilizadas (Figura 1). Em seguida, peça para que os alunos calculem o valor da área de cada parte do material, utilizando os conceitos previamente discutidos, bem como os conhecimentos prévios acerca de quadrilátero. Após isso, peça para que eles se utilizem dessas áreas para que conjecturem uma área para o quadrado maior formado pela junção de todas as peças.

Figura 1 – Quadrado formado utilizando as quatro placas disponibilizadas

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

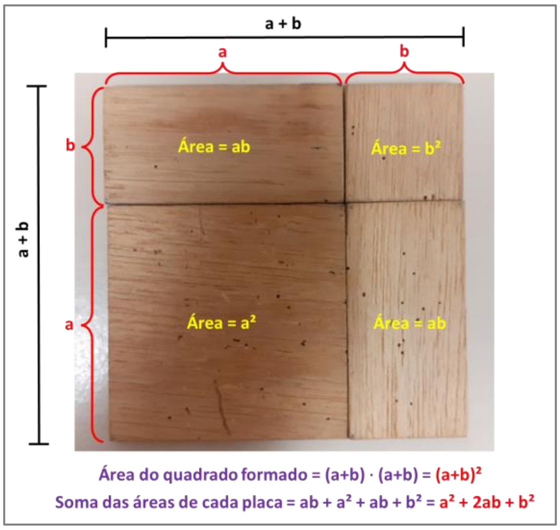
É possível que, por ausência de valores numéricos, esta etapa possa necessitar de algumas orientações. Caso isso ocorra, adote uma postura questionadora, de forma que os estudantes possam entender que é possível generalizar a medida desconhecida.

Discussões de resultados.

Este momento finaliza a etapa 2. Nele, você deverá pedir aos grupos que compartilhem os resultados adquiridos nos momentos anteriores.

Com esses resultados, peça para que um grupo vá ao quadro mostrar como chegou na área do quadrado. Em seguida, pergunte para os grupos se encontraram algum outro resultado. Após isso, utilizando a fórmula da área de um quadrado, realize os passos necessários para chegar, apoiando-se no material manipulativo e noções geométricas e algébricas, desde a forma fatorada $(a+b)^2$ até a forma completa ($a^2 + 2ab + b^2$). Um resultado possível pode ser visualizado na Figura 2.

Figura 2 – Resultado do quadrado da soma

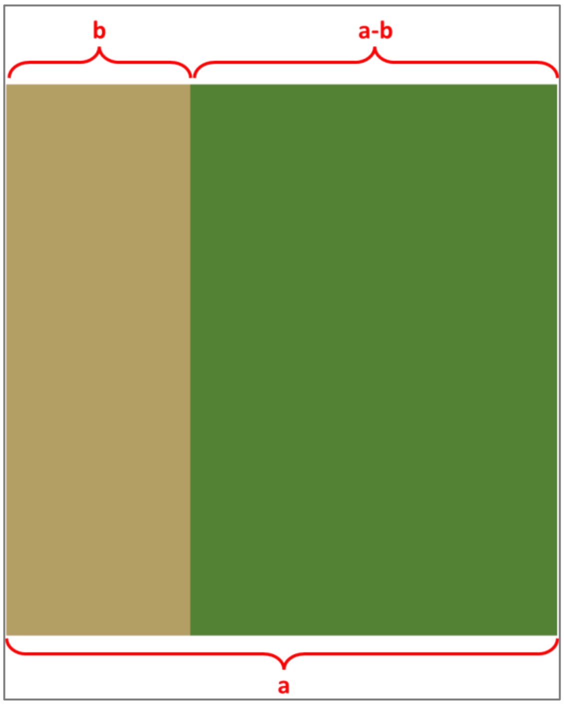


Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Etapa 3 – Obtendo o quadrado da diferença

Nesta etapa, você deverá orientar que os grupos busquem definir a operação de subtração utilizando uma perspectiva geométrica. Para tanto, indague: “como podemos representar uma subtração geometricamente?”. Após os estudantes refletirem em seus grupos, consulte as opiniões de cada equipe, buscando a resposta de que essa operação pode ser realizada a partir da sobreposição de peças, como pode ser visto na figura 3.

Figura 3– Diferença por meio da sobreposição.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Na figura 3, tem-se um quadrado, em verde, de lado *a* e um retângulo amarelo sobreposto de lados *a* e *b*. Dessa forma, pode-se representar uma diferença geométrica a partir da sobreposição das peças, já que um dos lados do quadrado que media *a*, mede agora *a-b*. É importante que você ressalte que, como o material disponibilizado não é colorido, os alunos deverão atentar-se as camadas das placas, sendo a que se encontra mais abaixo o resultado da diferença.

Além disso, é importante que você fique atento aos comentários dos alunos acerca do material, já que na construção das placas disponibilizadas, a medida aqui denominada como *a* é exatamente o dobro da medida *b*, o que não precisa ocorrer em geral, como no exemplo posto na figura 3 vista anteriormente. Dessa forma, o professor deverá explicar que essa é uma particularidade apenas do material dessa prática.

Primeiras conjecturas

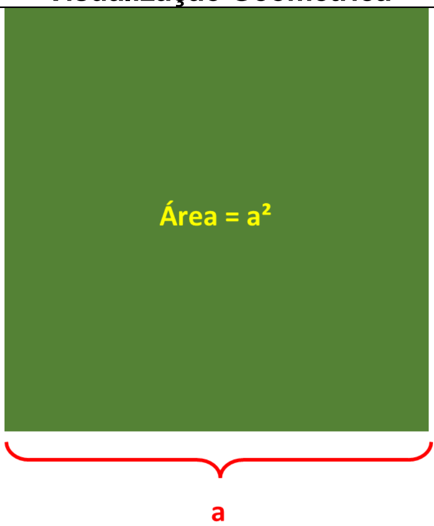
Neste momento, você deverá solicitar aos grupos que montem um quadrado que tenha lado *a-b*. Para isso, será necessário ter compreendido o que é uma diferença vista geometricamente, e por esse motivo o momento anterior faz-se necessário.

Em seguida, você deverá orientar e mediar as discussões na equipe acerca da utilização de todas as placas disponibilizadas, já que, por limitação na construção do material, os discentes poderão sobrepor os dois retângulos de lados *a* e *b* sobre o quadrado de lado *a*, o que resultará em uma área nula sem nem mesmo usar o quadrado de lado *b*.

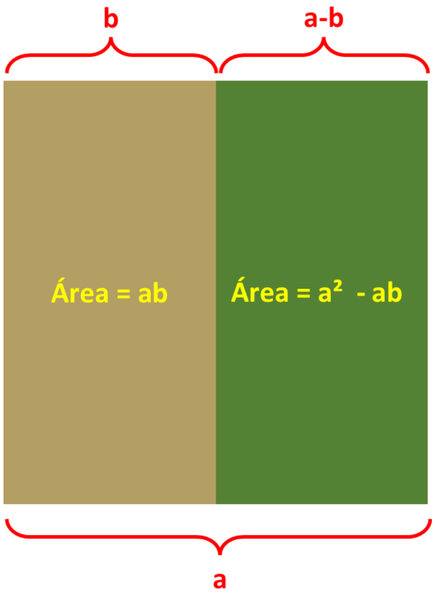
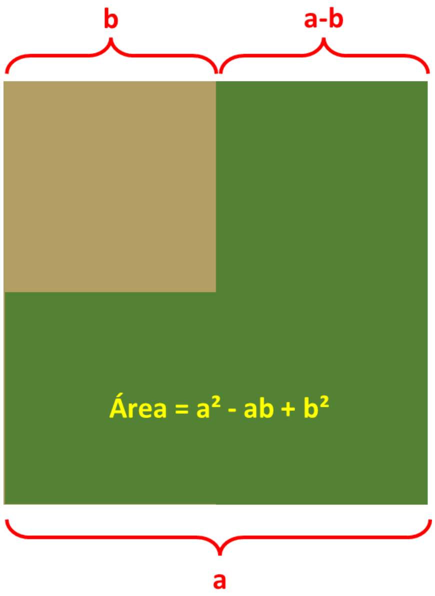
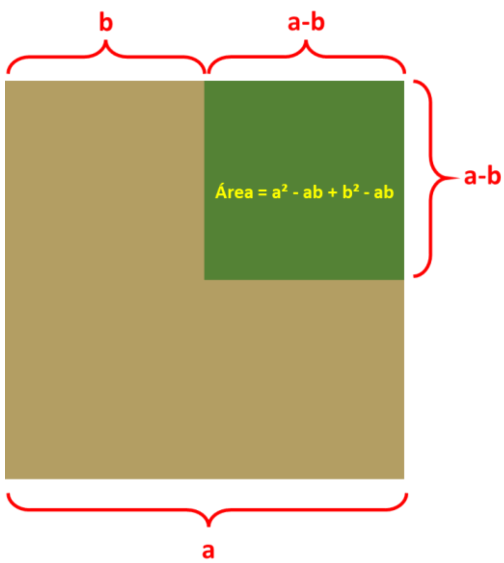
Discussão de resultados

Este momento irá finalizar a etapa 3. Para isso, você deverá pedir aos grupos que compartilhem como foi construído o quadrado de lado *a*-*b* utilizando todas as peças. A partir dos resultados compartilhados, peça para que um grupo se dirija ao quadro para mostrar como chegou na área desse quadrado. Em seguida, indague as equipes se encontraram algum outro resultado destoante. Após isso, utilizando a fórmula da área do quadrado, realize os passos necessários para chegar, apoiando-se no material manipulativo e noções geométricas e algébricas, desde a forma fatorada $(a-b)^2$ até a forma completa $(a^2 - 2ab + b^2)$. Um passo a passo do resultado possível pode ser visualizado no Quadro 2.

Quadro 2 – Passo a passo para a obtenção do quadrado da diferença[8].

Passo	Visualização Geométrica	Descrição
1		Inicia-se com o quadrado de maior área, nesse caso o quadrado de lado *a* e área igual a a^2

[8] Para possibilitar a visualização da subtração por sobreposição, optou-se por utilizar-se aqui de ilustrações digitais, e não do material concreto, uma vez que esse, ao ser fotografado, não permite a percepção de profundidade.

2		Subtrai-se, por sobreposição, a área do retângulo de área *ab*, restando do quadrado inicial a área igual a $a^2 - ab$
3		Soma-se, sobrepondo ao retângulo anterior, o quadrado menor, de lado *b* e área b^2, resultando a área do quadrado inicial em $a^2 - ab + b^2$
4		Subtrai-se, por sobreposição, a área do retângulo de área *ab*, restando do quadrado inicial a área igual a $a^2 - ab + b^2 - ab$ O que é equivalente a $a^2 - 2ab + b^2$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Após os passos descritos no quadro 2, pode-se obter um quadrado de lado *a-b*, que tem, pela fórmula, área igual $(a-b)^2$, e pela construção geométrica, tem área $a^2 - 2ab + b^2$. Portanto, pode-se representar o produto notável do quadrado da diferença a partir da manipulação e sobreposição das placas disponibilizadas, concluindo que:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Fechamento

Para finalizar essa prática, você deverá solicitar que os discentes relatem em que medida a representação geométrica foi importante para a compreensão e significação de um conceito algébrico. Após isso, o docente poderá discutir acerca das concepções errôneas que podem surgir quando os produtos notáveis são apresentados apenas algebricamente, como a noção de que o quadrado da soma é a soma dos quadrados, ressaltando que com o material concreto isso não pode ocorrer, uma vez que não seria possível construir um quadrado maior apenas com as duas placas que representam um quadrado.

Variações

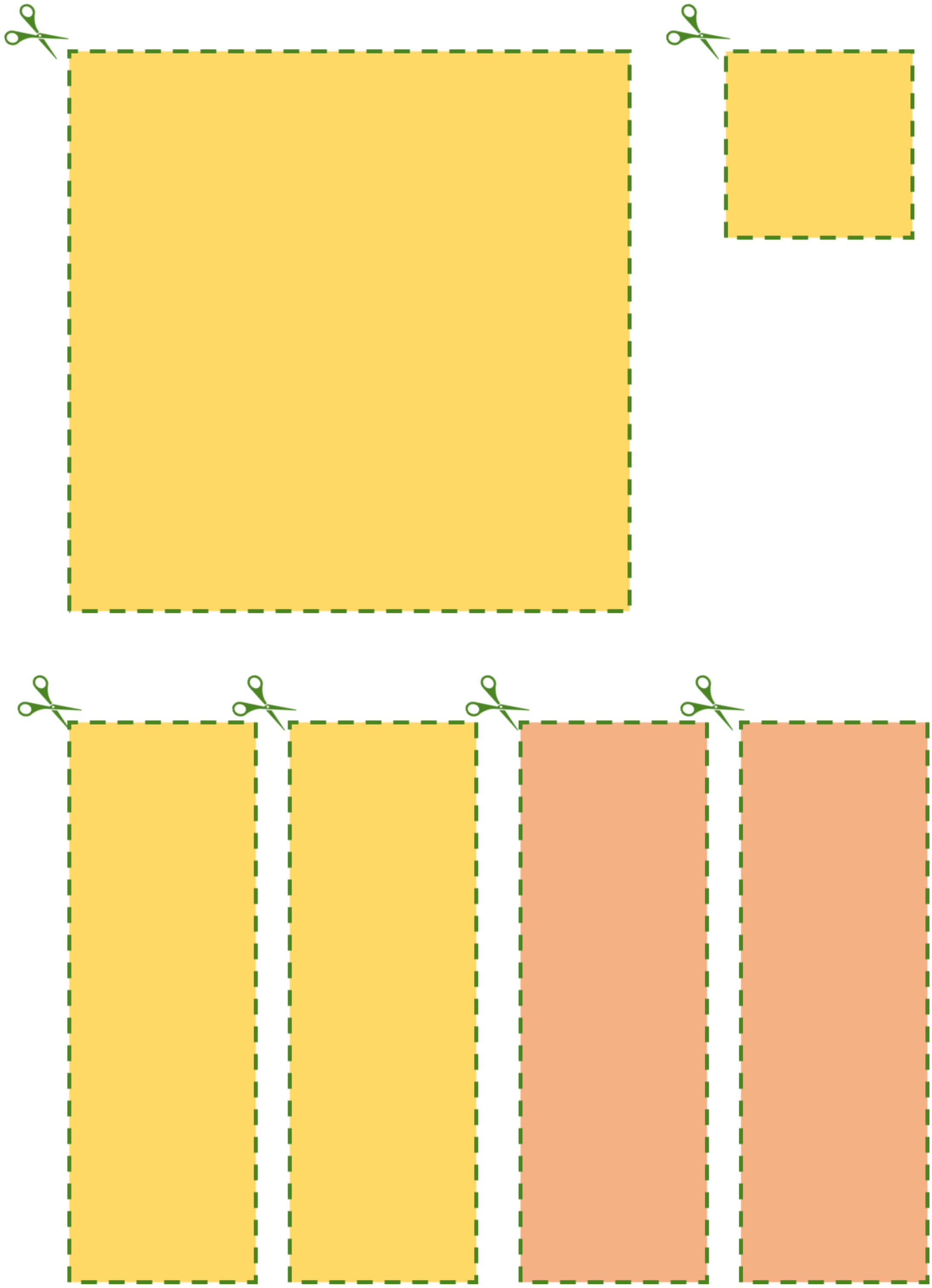
Algumas variações possíveis para o quadrado da soma e da diferença podem ser realizadas com a utilização de materiais feitos de papel ou isopor, principalmente com cores distintas, para facilitar a compreensão da diferença. Em anexo encontra-se uma variação para imprimir e cortar em que que se pode representar a soma em amarelo e a subtração em laranja.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: 2018.

ANEXOS

Anexo I – Variação do material contendo a opção de cores distintas.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

FOLHA DO ALUNO

COMENTÁRIOS INICIAIS

Prezado aluno,

Em situações em que é necessário a realização de manipulações algébricas, como, por exemplo, na obtenção das raízes de uma equação do segundo grau ou ao encontrar um cateto utilizando o Teorema de Pitágoras, é comum que se recorra aos produtos notáveis para possibilitar a simplificação ou a resolução do problema posto. Nesse sentido, esta prática laboratorial utiliza um material concreto e apresenta uma proposta de interpretação dos produtos notáveis via geometria, utilizando, para tanto, de quatro placas de madeira que devem ser mobilizadas para a construção da fórmula do quadrado da soma e da diferença.

PROCEDIMENTO

Prezado aluno,

Você está recebendo um kit contendo quatro placas de madeira. Com elas, realizem os passos a seguir, formalizando-os algebricamente.

Momento 1

1. Identifiquem as figuras geométricas representadas por cada uma das placas e preencha o quadro a seguir com um desenho da figura, o nome dela e a interpretação algébrica de sua área.

Desenho da Figura	Nome da figura	Interpretação algébrica da área

Momento 2

2. Utilizando todas as placas, construam um quadrado que possua **lado maior** que os dos que foram disponibilizados.

3. A partir da fórmula da área do quadrado, qual a área da figura construída na questão 2?

4. A partir da soma das áreas identificadas na questão 1, qual a área da figura construída na questão 2?

5. Visualizando os resultados encontrados nas questões 3 e 4, que igualdade pode-se concluir?

Momento 3

6. Discuta em seu grupo uma possível interpretação geométrica para a subtração.

7. Utilizando essa interpretação e todas as placas, construam um quadrado que possua **lado menor ou igual** que os dos que foram disponibilizados.

8. A partir da fórmula da área do quadrado, qual a área da figura construída na questão 7?

9. A partir da soma das áreas identificadas na questão 1, qual a área da figura construída na questão 7?

10. Visualizando os resultados encontrados nas questões 8 e 9, que igualdade pode-se concluir?

CAPÍTULO 6
Dominó Algébrico
Francisco Hemerson Brito da Silva

CAPÍTULO 6

Dominó Algébrico

Francisco Hemerson Brito da Silva

INTRODUÇÃO

O ensino de álgebra na educação básica desempenha um papel essencial no desenvolvimento do pensamento lógico e na construção do raciocínio matemático dos alunos. Diante disso, para tornar esse aprendizado mais dinâmico e acessível, metodologias lúdicas permitem que os estudantes explorem conceitos matemáticos de forma interativa e significativa. Nesse sentido, os alunos podem trabalhar com elementos algébricos, operações e simplificações de maneira prática, de modo a favorecer a fixação dos conteúdos e a compreensão da estrutura lógica por meio de desafios que estimulem o pensamento estratégico e a resolução de problemas.

Além de facilitar a aprendizagem da álgebra, o uso de jogos, como o dominó algébrico, reforça a conexão entre os conceitos matemáticos e sua aplicação no cotidiano escolar. Assim, a álgebra está presente em diversas situações da vida dos estudantes, como na interpretação de gráficos, na resolução de problemas financeiros e na análise de padrões numéricos.

Dessa forma, ao aprenderem álgebra por meio de abordagens lúdicas, os alunos não apenas desenvolvem habilidades matemáticas fundamentais, mas também compreendem sua importância para a tomada de decisões na resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, tornando-se mais preparados para desafios acadêmicos e profissionais no futuro.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Dominó Algébrico

$2x + 3a,$ com $x = 5$ $a = -4$	$x^2 - 7x + y$ com $x = 5$ $y = -1$	$\dfrac{2a + m}{a + m},$ com $a = -1$ $m = 3$	$7 + a - b,$ com $a = \dfrac{2}{3}$ $b = -\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{49}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	-11	-2

Elementos que norteiam a prática

Série/Ano		8º ano do Ensino Fundamental
Unidade Temática		Álgebra
Objeto de conhecimento		Valor numérico de expressões algébricas
Habilidade		(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Objetivos	**Docente**	• Introduzir os alunos ao conceito de valor numérico de expressões algébricas e preparar o ambiente para a criação do jogo; • Promover a organização do trabalho em equipe, assegurando que todos participem e compreendam suas tarefas; • Facilitar a construção de peças de dominó que trabalhem com expressões algébricas e valores numéricos, desenvolvendo a habilidade de resolução de expressões; • Preparar os alunos para aplicar o conceito de valor numérico de expressões algébricas em uma situação de jogo; • Consolidar o aprendizado por meio da reflexão sobre a prática realizada, revisando conceitos matemáticos e corrigindo possíveis erros.
	Aluno	• Desenvolver o cálculo do valor numérico de expressões algébricas por meio de uma atividade lúdica, utilizando o jogo de dominó matemático; • Praticar a resolução de expressões algébricas e o cálculo de seu valor numérico de forma lúdica, desenvolvendo o raciocínio lógico e matemático.
Materiais Necessários		• Cartolina ou Papel Cartão ou Papel Reciclado; • Cartão de Embalagens; • Canetas Hidrográficas ou Lápis de Cor;

	• Canetas Esferográficas ou Lápis; • Cola ou Fita Adesiva; • Tesouras; • Réguas; • Sacos Plásticos ou Caixas.
Conhecimentos Prévios	• Expressões algébricas e o cálculo de seu valor numérico.
Duração	2 horas-aulas

Sinopse

Essa aula prática envolve um jogo em que os estudantes precisarão desenvolver uma estratégia para encontrar os pares correspondentes entre uma operação matemática e seu resultado. Nesse processo, eles serão conduzidos a construir um raciocínio lógico para a utilização do cálculo mental, explorando técnicas e conceitos aritméticos em um intervalo de tempo decorrido.

O experimento

Prezado professor,

A prática de ensino descrita a seguir, consiste em uma ação na qual os alunos precisam construir um material manipulável (o dominó algébrico), com as respectivas expressões algébricas e seu valor numérico, de modo a elaborar relações entre eles, utilizando algumas estruturas matemáticas a partir da formalização de cálculos.

Preparação

Antes da realização do experimento, é necessário que o professor já tenha formalizado os principais conceitos envolvendo as expressões algébricas e seu valor numérico, de maneira que tenha sido discutido com os alunos as formas de resolução e o desenvolvimento de cada uma delas. Considera-se que, nesse momento, outros pensamentos lógicos possam surgir, de maneira que agilize os processos para o encontro dos resultados matemáticos.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Considerando a importância de se organizar as etapas para o desenvolvimento da prática, os momentos que o docente pode implementar a execução dos processos pedagógicos serão descritos a seguir. Em particular, é necessário que se tenha um espaço com mesas separadas para os alunos formarem grupos e, assim, vivenciarem as estratégias do dominó algébrico, possibilitando que as trocas aconteçam durante o andamento das aulas. Nesse momento, o professor dará as orientações iniciais e atuará como mediador, intervindo na medida em que achar necessário.

Etapa 1

No primeiro momento, será realizada a explicação do objetivo do dominó algébrico: conectar peças com expressões algébricas e seus valores numéricos correspondentes. Nisso, o professor precisa revisar os conceitos que foram trabalhados em aulas anteriores para, em seguida, apresentar o jogo de dominó e como ele será jogado, de modo a demonstrar exemplos das peças que os alunos irão produzir, explicando como conectar uma expressão algébrica a seu valor numérico correspondente. Assim sendo, cada peça do dominó terá uma expressão algébrica de um lado e o valor numérico da expressão do outro. Os jogadores conectam as peças resolvendo corretamente as expressões.

Exemplo: Uma peça com a expressão $2x + 3$ para $x = 2$ será ligada a outra com resultado 7.

Etapa 2

O segundo momento será direcionado para a organização dos alunos em grupos de 4 a 5 pessoas. Cada grupo será responsável pela criação de um conjunto de peças de dominó (que deverá ter 14 elementos). As funções podem ser distribuídas: alguns alunos montam as expressões, outros criam os valores numéricos, alguns verificam a correção dos pares e outros fazem a estrutura do dominó e os recortes a serem utilizados. Nesse processo, pode-se explicar as diferentes tarefas que cada membro do grupo irá cumprir.

Etapa 3

A terceira etapa se refere ao trabalho manual realizado pelos alunos. Nesse momento, o professor precisa fornecer materiais (cartolina ou papel resistente, marcadores, entre outros que foram descritos anteriormente) para a montagem do dominó algébrico. Ademais, o docente deve circular entre os grupos, oferecendo suporte e verificando se as expressões e valores numéricos estão corretos, de modo que seja oferecido um *feedback* sobre a criação das peças, ajudando na formulação de expressões algébricas de acordo com o nível da turma. Nesse momento, deverá ser explicado que os grupos criarão peças de dominó.

Para isso: Cada grupo receberá um conjunto de cartelas vazias (pode ser papel ou cartolina); em seguida, criará expressões algébricas simples (ex.: $3x - 5, x^2 + 2x, 4 - x$). Em um dos lados da peça, eles escrevem a expressão e os valores de cada variável (ex.: $x = 5\ ou\ y = 7$) e, no outro lado, escrevem o valor numérico para um valor específico para tais variáveis.

Etapa 4

Depois que as peças estiverem montadas e organizadas, o professor deve instruir os alunos a trocarem as peças de dominó entre os grupos, para que joguem com peças que não criaram, de modo que se tenha a garantia de que cada grupo tenha um conjunto completo de peças para o jogo.

Etapa 5

Após a troca dos dominós algébricos ser realizada entre os grupos, o professor deve explicar que serão realizadas quatro partidas, de forma que os alunos registrem em uma folha distinta as peças que irão conseguir ligar na partida para que se obtenha uma relação lógica entre elas. Assim sendo, o docente deve supervisionar o jogo, certificando-se de que os alunos estão conectando corretamente as expressões algébricas a seus valores numéricos, de forma a intervir quando necessário para corrigir erros ou esclarecer dúvidas sobre os cálculos. Nesse sentido, as anotações de cada grupo ficarão arquivadas para serem resgatadas no momento de discussão dos resultados encontrados.

Fechamento

O último momento da prática é crucial para a compreensão e o entendimento da finalidade dos processos executados. Diante disso, a partir dos comentários dos alunos, o professor pode promover uma discussão mediada, na qual os alunos podem explicar a noção lógica utilizada, e até formalizar no quadro branco, uma vez que a maneira de compreensão e mobilização dos conceitos pode ser feita de diversas formas, aumentando a diversidade cognitiva entre os estudantes. Diante disso, o docente deve conduzir a discussão final sobre os desafios e aprendizagens durante o jogo, de modo a perguntar aos alunos o que eles acharam mais difícil ou interessante ao resolver as expressões algébricas, revisando rapidamente os principais conceitos.

Referências

BERTOLLO, D. L.; FRIZZO, D. Avaliações de aprendizagem. **Revista Eletrônica Científica da UERGS**, v. 5, n. 3, p. 219-228, 19 dez. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

CARVALHO, D. L. **Metodologia do ensino da Matemática**. 2ª. ed. rev. São Paulo: Cortez, 1994.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática - Ideias e Desafios 8.** 15. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2015. 322 p. (Coleção Ideias e Desafios).

TEIXEIRA, L. A. **SuperAÇÃO! Matemática 8º ano.** 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2022. 305 p. (Coleção SuperAÇÃO).

FOLHA DO ALUNO

Comentários iniciais

Prezado aluno,

O uso de expressões algébricas e seu valor numérico é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático na educação básica, pois permite a generalização de padrões e a resolução de problemas de forma mais abstrata e eficiente. Nesse sentido, o jogo do dominó algébrico se apresenta como uma estratégia lúdica e interativa para trabalhar esses conceitos, de modo a desenvolver a identificação de expressões equivalentes, a realização de cálculos corretos e a associação de diferentes formas de representações numérica e algébrica.

Além do desenvolvimento conceitual, a aplicação das expressões algébricas no cotidiano escolar reforça a importância desse conhecimento para diversas situações práticas. Ao entender o valor numérico de uma expressão, temos a possibilidade de aplicação em problemas de proporcionalidade, cálculos financeiros, estatísticas e até mesmo na interpretação de fenômenos científicos. O jogo do dominó algébrico, ao transformar o aprendizado em um desafio estimulante, contribui para que os alunos percebam a utilidade da álgebra em seu dia a dia e desenvolvam um raciocínio matemático mais flexível e eficiente, preparando-os para enfrentar problemas reais de maneira estruturada e lógica.

Procedimento

Antes de começarmos a prática do jogo, é fundamental que todos os participantes leiam atentamente as instruções, pois elas contêm informações importantes sobre as regras, os objetivos e o funcionamento de nossa dinâmica. Diante disso, compreender bem cada etapa garantirá que todos saibam como participar, além de evitar confusões ou dúvidas durante a atividade. Lembrando que seguir as orientações é essencial para que o jogo ocorra de forma organizada, justa e divertida, permitindo que todos aproveitem a experiência de aprendizado.

Experimento

- **Objetivo do jogo:**

O objetivo do dominó algébrico é associar corretamente expressões algébricas ao seu respectivo valor numérico. Para isso, os jogadores devem conectar as peças corretamente até que todas tenham sido utilizadas ou até que não haja mais jogadas possíveis.

- **Elaboração e construção das peças:**

Antes de iniciar o jogo, os alunos podem participar da construção do material. Cada grupo poderá criar suas próprias peças em papel cartão ou outro material, escrevendo expressões algébricas de um lado do papel e os resultados do outro. O professor orienta que as expressões sejam variadas e envolvam diferentes operações matemáticas.

- **Formação dos grupos e distribuição das peças:**

Os alunos devem ser organizados em grupos de 4 a 5 participantes. Cada grupo receberá um conjunto de peças do dominó algébrico, o qual deve ser previamente confeccionado pelos próprios estudantes.

- **Definição das regras básicas:**

O jogo segue as regras do dominó tradicional. Cada aluno recebe um número igual de peças e, na sua vez, deve tentar encaixar uma peça que tenha uma expressão correspondente ao valor numérico ou expressão algébrica já disposta na mesa. Caso o jogador não tenha uma peça compatível, ele deve passar a vez ou comprar uma nova peça (caso haja um banco de peças disponíveis).

- **Início do jogo:**

O jogo começa com um aluno escolhendo uma peça inicial, que pode ser determinada aleatoriamente ou pela peça com a menor expressão algébrica. Os jogadores seguem em sentido horário, cada um tentando encaixar suas peças corretamente.

- **Cálculo do valor numérico:**

Quando um jogador posiciona uma peça, ele deve justificar sua escolha, calculando o valor numérico da expressão. Os demais jogadores e o professor podem conferir a validade da jogada.

- **Registro e discussão das jogadas:**

Durante a partida, os alunos podem registrar suas jogadas em um caderno ou folha de atividades. Esse registro ajudará na revisão posterior e na identificação de possíveis dificuldades ou padrões matemáticos explorados no jogo.

- **Resolução de dúvidas e acompanhamento do professor:**

O professor acompanha o jogo, esclarecendo dúvidas e incentivando os alunos a discutirem suas jogadas. Se necessário, pode intervir com dicas ou desafios extra para aumentar a complexidade do jogo.

- **Encerramento do jogo e verificação dos resultados:**

O jogo termina quando todas as peças forem encaixadas corretamente ou quando os jogadores não puderem mais jogar. O professor pode conduzir uma breve revisão, verificando se as jogadas foram feitas corretamente e promovendo um debate sobre os conceitos algébricos utilizados.

- **Reflexão e aplicação prática:**

Após o término da partida, os alunos devem discutir como o jogo os ajudou a compreender melhor as expressões algébricas e seus valores numéricos. O professor pode sugerir a aplicação dos conceitos aprendidos em problemas reais, reforçando a importância da álgebra no cotidiano escolar.

CAPÍTULO 7
O Cubo da Soma

Pedro Henrique Sales Ribeiro, Daniel da Silva Rocha e Verusca Batista Alves

CAPÍTULO 7
O Cubo da Soma

Pedro Henrique Sales Ribeiro, Daniel da Silva Rocha e Verusca Batista Alves

INTRODUÇÃO

Os produtos notáveis são igualdades matemáticas de importância durante a construção do conhecimento matemático. É possível encontrar aplicações desse conhecimento, por exemplo nos processos de resolução de equações de segundo grau e terceiro grau, na geometria analítica, no binômio de Newton e em alguns conceitos envolvendo números complexos. No entanto, ainda que sejam amplamente utilizados, percebe-se que são ensinados apenas pautando-se na memorização das fórmulas, sem uma compreensão conceitual dos símbolos algébricos.

Nessa perspectiva, este experimento visa possibilitar que os estudantes entendam que os produtos notáveis, em especial o cubo da soma, pode ser construído por um processo de "algebrização" da geometria. Para tanto, realiza-se a construção de um cubo por meio de oito blocos de madeira de quatro tipos distintos.

GUIA DO PROFESSOR

Material didático manipulável

Produto notável – O cubo da soma

Elementos que norteiam a prática

Série/Ano		9º ano
Unidade Temática		Álgebra
Objeto de conhecimento		Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis
Habilidade		(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau (Brasil, 2018, p. 317).
Objetivos	**Docente**	- Permitir a associação de expressões algébricas com grandezas geométricas. - Mediar a construção de uma visualização geométrica do cubo da soma
	Aluno	- Relacionar grandezas geométricas com expressões algébricas. - Compreender o cubo de uma soma a partir da geometria
Materiais Necessários		- Papel e caneta/lápis; - Blocos para o produto notável do cubo da soma - Folha do aluno contendo as instruções.
Conhecimentos Prévios		- Volumes de paralelepípedos e cubos - Conceitos e propriedades de potenciação e distributividade. - Polinômios e expressões algébricas.
Duração		2 horas-aulas

Sinopse

Esta prática consiste em uma representação geométrica que visa possibilitar a compreensão conceitual do cubo da soma. Para tanto, são utilizados quatro tipos de paralelepípedos de madeira, aos quais são atribuídos volumes a^3, b^3, ab^2 e a^2b.

O experimento

Prezado professor,

Nesta prática, você irá mediar um experimento que utiliza oito paralelepípedos de madeira, divididos em quatro tipos. Para a consecução do objetivo, são propostas duas etapas, das quais a primeira refere-se à familiarização com o material concreto e a segunda a manipulação para a obtenção do cubo da soma.

Preparação

Antes de iniciar a prática, é importante que você separe o material necessário nos locais de aplicação e instrua os estudantes quanto os cuidados que eles devem ter com os blocos de madeira, que não devem ser riscados ou marcados.

Etapas para o desenvolvimento do experimento

Etapa 1 – Familiarização com o material

Nesta etapa, inicie separando a turma em grupos de até 4 componentes. Em seguida, solicite que os alunos verifiquem e analisem o material disposto, apontando e registrando os sólidos observados, tal como possíveis relações entre as medidas de suas aretas. O Quadro 1 apresenta possíveis interpretações que podem ser adotadas pelos estudantes.

Quadro 1 – Relação entre as peças, seus nomes e sua interpretação algébrica

Peça do Material	Possíveis nomes associados	Interpretação algébrica
	Paralelepípedo, cubo, prisma de base quadrangular, prisma de base quadrada, prisma de base quadrangular reto, prisma de base quadrada reto.	**a^3**
	Paralelepípedo, cubo, prisma de base quadrangular, prisma de base quadrada, prisma de base quadrangular reto, prisma de base quadrada reto.	**b^3**
	Paralelepípedo, prisma de base quadrangular, prisma de base quadrangular reto	**ab^2** OU **b^2a**

	Paralelepípedo, prisma de base quadrangular, prisma de base quadrangular reto	**a^2b** OU **ba^2**

Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Após o momento das observações pelos discentes, você deverá indagar cada grupo, a fim de compreender como foi nomeado cada peça, e qual interpretação algébrica foi dada a elas. Em discussão com todos os grupos, verifique se houve divergências entre as nomenclaturas adotadas, e em caso afirmativo, esclareça se essas diferenças podem impactar o resultado esperado.

Etapa 2 – Montando o cubo da soma

Nesta etapa, solicite aos grupos que montem um cubo (Figura 1) utilizando todos os blocos disponibilizados.

Figura 1 – Um cubo formado com o material

Fonte: Acervo dos autores (2023)

Em seguida, peça para que os alunos calculem o valor do volume do cubo construído utilizando a fórmula do volume do cubo. Espera-se que as equipes digam que o volume é *$(a+b)^3$*, ou semelhantes, apenas com o simbolismo diferente.

Na sequência, solicite que os estudantes calculem o volume do cubo construído a partir da soma de cada um dos volumes dos blocos que o constituem, conforme já observado por eles na etapa 1.

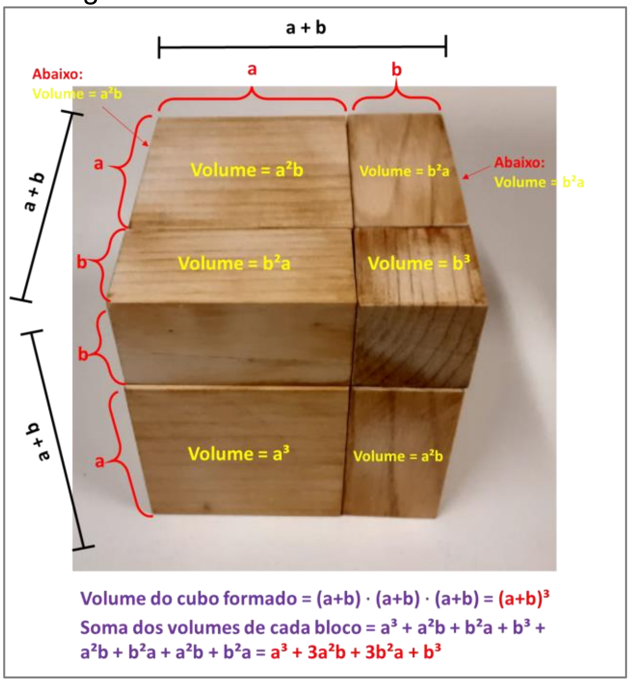
É possível que, por ausência de valores numéricos, esta etapa possa necessitar de algumas orientações. Caso isso ocorra, adote uma postura questionadora, de forma que os estudantes possam entender que é possível generalizar a medida desconhecida.

Discussões de resultados

Este momento finaliza a etapa 2. Nele, solicite que aos alunos compartilhem os resultados adquiridos e faça uma discussão em grupo.

Com esses resultados, peça para que um grupo vá ao quadro mostrar como chegou no volume do cubo. Em seguida pergunte para os grupos se encontraram algum outro resultado. Após isso, utilize a fórmula do volume do cubo e realize os passos necessários para chegar, apoiando-se no material manipulativo e noções geométricas e algébricas, desde a forma fatorada $(a+b)^3$ até a forma completa ($a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$). Um resultado possível pode ser visualizado na figura 2.

Figura 2 – Resultado do cubo da soma.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Fechamento

Para finalizar essa prática, você deverá solicitar que os discentes relatem em que medida a representação geométrica foi importante para a compreensão e significação de um conceito algébrico. Após isso, o docente poderá discutir acerca das concepções errôneas que podem surgir quando os produtos notáveis são apresentados apenas algebricamente, como a noção de que o cubo da soma é a soma dos cubos, ressaltando que com o material concreto isso não pode ocorrer, uma vez que não seria possível construir um cubo maior apenas com os dois blocos que representam cubos.

Variações

Uma possível variação dessa prática pode ser feita a partir de *softwares* de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Em https://www.geogebra.org/m/k5gnqdsf pode ser vista uma animação com este propósito.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: 2018.

FOLHA DO ALUNO

COMENTÁRIOS INICIAIS

Prezado aluno,

Nas situações matemáticas em que se faz necessária a realização de manipulações algébricas, como, por exemplo, nos processos de obtenção das raízes de uma equação do terceiro grau, é comum que se recorra a alguns dos produtos notáveis, que podem permitir uma simplificação ou a resolução do problema em questão.

Dessa forma, a prática laboratorial aqui apresenta utiliza-se de um material concreto e apresenta uma proposta de interpretação de um desses produtos notáveis, nomeadamente o cubo da soma, por meio de conhecimentos geométricos. Para tanto, são utilizados oito blocos de madeira que devem ser manipulados para a construção do produto notável mencionado.

PROCEDIMENTO

Prezado aluno,

Você está recebendo um kit contendo oito blocos de madeira. Com eles, realizem os passos a seguir, formalizando-os algebricamente.

Momento 1

1. Identifiquem os sólidos geométricos representadas por cada uma das placas e preencha o quadro a seguir com um desenho do sólido, o nome dele e a interpretação algébrica de seu volume.

Desenho da sólido	Nome da figura	Interpretação algébrica da área

Momento 2

2. Utilizando todas os blocos, construam um cubo que possua **volume maior** que os dos que foram disponibilizados.

3. A partir da fórmula do volume do cubo, qual o volume do sólido construído na questão 2?

4. A partir da soma dos volumes identificados na questão 1, qual o volume do sólido construído na questão 2?

5. Visualizando os resultados encontrados nas questões 3 e 4, que igualdade pode-se concluir?

CONHECENDO OS ORGANIZADORES

Ana Carolina Costa Pereira possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará, mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte e pós-doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atua como docente associada do curso de Licenciatura em Matemática e do Programa de Pós-graduação em Educação, ambos da Universidade Estadual do Ceará; e do Programa de Pós-Graduação de Ensino em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. É líder do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática e editora do Boletim Cearense de Educação e História da Matemática. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em História da Matemática, atuando principalmente na formação de professores de matemática.

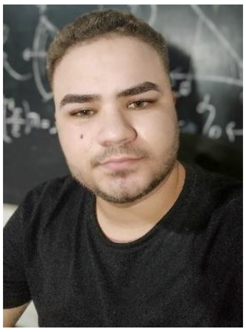
Lívia Bezerra de Alencar é mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação na Universidade Estadual do Ceará, possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2023), atualmente é bolsista pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). É membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolve projeto na área da Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Fontes históricas, instrumentos matemáticos do século XVI, interface entre história e ensino de matemática e formação do professor de matemática.

Joelma Nogueira dos Santos é graduada em Licenciatura em Ciências com Habilitação Plena em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), cuja formação está direcionada para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. É mestra em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC) e doutora em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC). É pós-doutoranda pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Atualmente é professora efetiva do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Caucaia. É coordenadora do Curso Superior de Licenciatura em Matemática e do Laboratório de Matemática e Ensino (Lamate).

Pedro Henrique Sales Ribeiro é mestrando em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE). Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) e Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática (UniFatecie). É membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolve pesquisa na área da Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Fontes históricas, interface entre história e ensino de matemática e formação do professor que ensina matemática.

CONHEÇA OS AUTORES

Amanda Cardoso Benicio de Lima é graduanda do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) e membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolve projeto na área da Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Fontes Históricas, Instrumentos Matemáticos do Século XVII, Interface entre História e Ensino da Matemática e Formação do Professor de Matemática.



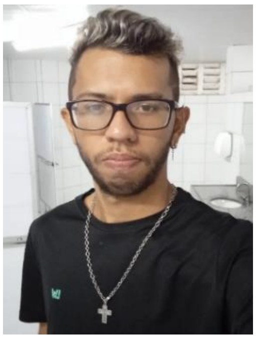
Cícero Moreira Hitzschky Filho é mestrando pelo Programa de Mestrado Acadêmico em Modelagem e Métodos Quantitativos (PPGMMQ) da Universidade Federal do Ceará (UFC), possui Especialização em Docência do Ensino Superior e Metodologias Ativas de Aprendizagem pela Faculdade Iguaçu (2023), graduação em Matemática, na modalidade de licenciatura plena, pela Universidade Estadual do Ceará (2023) e Graduação Tecnológica em Análise e Desenvolvimento de Sistemas pelo Centro Universitário UniFatecie (2023). Atualmente é professor temporário no setor de Matemática Aplicada da Universidade Estadual do Ceará (UECE) no Centro de Ciêncais e Tecnologias Campus Itaperi, colaborador no Grupo de Extensão e Pesquisa em Matemática Aplicada e Computacional (GEPMAC) da Universidade Estadual do Ceará (UECE) e coordenador do Projeto de Extensão em Ferramentas Digitais para o Ensino de Matemática.

Daniel da Silva Rocha é mestrando em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Atualmente é professor temporário da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC).

Felipe Macedo de Oliveira Silva é Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Atualmente bolsista do Projeto Areninha.

Francimar Miguel da Silva Junior é licenciado em matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) e atualmente atua como professor temporário da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC).

Francisco Hemerson Brito da Silva possui Graduação em Licenciatura em Matemática (2021) pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) e Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (2024) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Professor da Secretaria Municipal de Educação de Fortaleza. Membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolve projeto na área da Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Fontes históricas, instrumentos matemáticos do século XVI, interface entre história e ensino de matemática e formação do professor de matemática.



Guilherme da Silva Pereira é graduando em licenciatura em matemática pela Universidade Estadual do Ceará - UECE, atualmente é bolsista de projeto de extensão, Pós-Graduação: Um sonho possível, da Universidade Estadual do Ceará. Faz parte do Núcleo de Pesquisa em Educação, Tecnologia e Formação Docente (NUPET/UECE).

Kawoana da Costa Soares é graduanda do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará e membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolve projeto na área da Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Fontes históricas, instrumentos matemáticos do século XVII, interface entre história e ensino de matemática e formação do professor de matemática.

Maria Larissa da Silva Sales é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Foi bolsista do Programa de Monitoria Acadêmica (PROMAC) e membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolveu pesquisa sobre recursos didáticos para o ensino de Matemática.

Pedro Guilherme Mourão Braga é graduando do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Atualmente, exercita atividade como professor de matemática na rede particular de ensino.

Sabrina de Sousa Paulino é graduanda do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), bolsista do Programa de Monitoria Acadêmica (PROMAC) e membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolve projetos na área da Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Fontes históricas, instrumentos matemáticos do século XVI, interface entre história e ensino de matemática e formação do professor de matemática.

Verusca Batista Alves é doutoranda em Educação pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), possui mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (2019) e graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2017). Professora do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Educação e Ciências Integradas do Litoral Leste - FECIL/UECE. Membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente na formação inicial e continuada de professores de Matemática, com foco na interface entre história e ensino de Matemática.

Vinicius de Sousa Paula é graduando do Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) e membro do Grupo de Extensão em Análise Matemática (GEXAM). Atualmente é bolsista de iniciação científica da UECE no período de 2023 - atual na área de Equações Diferenciais Parciais (EDP), sob orientação do Prof.Dr. Carlos Alberto da Silva Nonato.

Wallyson Batista Sampaio é mestrando em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática PPGECM pelo Instituto Federal do Ceará (IFCE) e Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Também, é membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM).

Este livro, organizado pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE), é fruto do trabalho desenvolvido por estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), campus Itaperi, na disciplina de Laboratório de Ensino de Álgebra (LEAI), por estudantes e ex-estudantes do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE), e estudantes do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), além de docentes dessas instituições. Essa integração fortalece a troca de experiências entre a graduação e a pós-graduação no desenvolvimento e na evolução de práticas pedagógicas inovadoras, ocasionando uma ponte entre a teoria e a prática, ajudando a atualizar e informar tanto a formação inicial quanto o desenvolvimento profissional contínuo dos professores de matemática. O livro traz uma contribuição para a produção de práticas laboratoriais relacionadas ao ensino de Álgebra, visando a contribuição do pensar sobre ações do professor que levam ao desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno. O livro aborda discussões pertinentes para o ensino de matemática explorando a linguagem algébrica, conceitos e operações de expressões algébricas e de equações, além de matrizes, análise combinatória e com uma prática laboratorial para o Binômio de Newton. Os materiais explorados têm a característica de facilitar a formação do conceito matemático, porém, não desconsidera o lúdico para explorar a fixação da ideia após o conceito ser formado, por isso contempla também o jogo como recurso didático no ensino de álgebra. Com essa explanação, pode-se afirmar que no que se refere à álgebra ainda se caminha sob o olhar atento pelo e para o ensino. Nesta obra, os autores entenderam a importância de mostrar uma conexão entre ensino e pesquisa e assim fizeram em seus capítulos.

Editora UNIESMERO

ISBN 978-655492124-4

9 786554 921244