

Até aonde irão seus limites: Sequências numéricas

Elzimar de Oliveira Rufino
Universidade Federal de Roraima
elzimar.rufino@ufrr.br

17 de abril de 2025



Licença Creative Commons: Este material é disponibilizado sob a licença [Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/). Você é livre para copiar, distribuir, exibir e executar a obra, bem como criar obras derivadas, desde que credite o autor original e compartilhe as obras derivadas sob a mesma licença.

Apresentação

Caro(a) Estudante,

Seja bem-vindo(a) à disciplina de *Sequências e Séries!*. Este material foi cuidadosamente preparado para auxiliar sua jornada de aprendizado.

Finalidade do Produto Educacional

Este produto educacional tem como finalidade principal desmistificar e elucidar o processo de demonstração da convergência de sequências numéricas utilizando a definição formal de limite. Através de uma abordagem passo a passo, com explicações detalhadas e exemplos práticos resolvidos, busca-se capacitar o estudante a:

- Compreender profundamente a definição formal de limite de uma sequência.
- Desenvolver a intuição necessária para manipular a desigualdade $|a_n - L| < \epsilon$ e encontrar um valor n_o apropriado.
- Adquirir a habilidade de construir demonstrações rigorosas e logicamente consistentes de convergência.
- Aplicar a definição formal para verificar limites de diferentes tipos de sequências.
- Superar as dificuldades comuns associadas à compreensão e aplicação da definição.

Ao final deste material, espera-se que o estudante seja capaz de não apenas memorizar a definição, mas de compreendê-la em sua essência e utilizá-la com confiança para provar a convergência de sequências numéricas, desenvolvendo assim uma base sólida para estudos mais avançados em seqências e séries e também em análise matemática.

Carta do Professor ao Aluno

Prezado(a) Estudante,

Seja bem-vindo(a) a esta jornada pelo universo da convergência de sequências numéricas, onde a precisão da matemática se encontra com a intuição do infinito. O conceito de limite é fundamental em toda a Análise Matemática, e compreender como prová-lo utilizando a definição formal é um passo crucial para solidificar seus conhecimentos.

Neste material, embarcaremos juntos na tarefa de desmistificar essa definição, muitas vezes vista como abstrata e desafiadora. Nosso objetivo não é apenas apresentar as contas, mas sim guiá-lo(a) através do raciocínio lógico que as sustenta. Exploraremos o significado de cada componente – o ϵ que representa a nossa tolerância, o n_o que marca o ponto de partida da nossa certeza – e, principalmente, como eles interagem para formalizar a ideia de "aproximar-se indefinidamente".

Através de explicações detalhadas e exemplos cuidadosamente escolhidos, você será conduzido(a) pelo processo de encontrar o elusivo n_o a partir do termo geral da sequência e da nossa exigência de precisão (ϵ). Verá como as manipulações algébricas e as implicações lógicas se unem para construir uma demonstração formal e irrefutável.

Lembre-se que a beleza da matemática reside em sua precisão e rigor. Dominar a definição de limite não é apenas uma habilidade técnica, mas também um exercício de pensamento crítico e lógico. Encare os desafios que surgirão não como obstáculos, mas como oportunidades de aprofundar sua compreensão e fortalecer seu raciocínio matemático.

Este material foi preparado com o intuito de ser um guia claro e acessível. Dedique tempo para estudar os exemplos, refaça os passos e não hesite em revisitar os conceitos sempre que necessário. Com dedicação e persistência, você descobrirá a elegância e o poder da definição formal de limite.

Espero que esta jornada seja enriquecedora e que, ao final, você se sinta mais confiante e apto(a) a explorar os fascinantes conceitos que a Análise Matemática tem a oferecer.

Bons estudos!

Elzimar de Oliveira Rufino
Professor

Informações da Disciplina

Carga Horária

Carga horária total: 60 horas

Ementa

Sequências e Séries Numéricas. Sequências de Funções: Convergência Simples e Uniforme. Séries de Potência. Séries de Fourier.

Objetivo Geral do material

Instrumentalizar o aluno com os conceitos de sequências

Objetivos Específicos

- Sequências: Compreender a definição, tipos (crescente/decrescente) e propriedades (limitadas) de sequências numéricas. Calcular e analisar o limite de sequências.

Metodologia de Ensino

Apresentar material didático com explicações complementares com o intuito de proporcionar uma melhor compreensão do assunto limite de sequências e demonstrações usando tal definição.

Sumário

1	Introdução à Convergência de Sequências	3
1.0.1	A Definição Formal de Convergência	3
1.0.2	Estratégia para Encontrar n_o	3
1.0.3	Exemplos de Demonstração de Convergência	4
1.1	Soma de Infinitos Termos de uma Progressão Geométrica (PG)	6
1.1.1	Explorando mais um ponto de vista	8
1.2	Conclusão	9
1.3	Exercícios	9
1.4	Exemplo de Série Geométrica Divergente com Razão Menor que -1	12

Capítulo 1

Introdução à Convergência de Sequências

Uma sequência numérica de números reais é uma lista ordenada de números, geralmente denotada por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, onde a_n é o n -ésimo termo da sequência e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais. Para alguma utilidade formal matemática considera-se uma sequência como sendo uma função

$$n \mapsto a_n$$

que tem como domínio o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e como contradomínio (conjunto das imagens) o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. O leitor poderá consultar a referência [1] para mais detalhes.

É de nosso interesse estudar a convergência de sequências. Intuitivamente, dizemos que uma sequência (a_n) converge para um limite a se os termos a_n se aproximam cada vez mais de a à medida que n se torna cada vez maior. Mas para sermos rigorosos em matemática, precisamos de uma definição precisa.

1.0.1 A Definição Formal de Convergência

Definição 1.1 (Convergência de uma Sequência). Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um número real a se, para todo número real $\epsilon > 0$, existe um número natural n_o tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_o$, temos $|a_n - a| < \epsilon$.

Simbolicamente, isto é escrito como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists n_o \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |a_n - a| < \epsilon).$$

A desigualdade $|a_n - a| < \epsilon$ pode ser reescrita pondo-se $-\epsilon < a_n - a < \epsilon$. De modo equivalente, $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$. Em termos de intervalos $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Aqui, ϵ representa uma "tolerância" ou uma "vizinhança" ao redor do limite a . A definição diz que para qualquer tolerância (por menor que seja), podemos encontrar um ponto na sequência (indexado por n_o) a partir do qual todos os termos subsequentes da sequência estão dentro dessa tolerância do limite a .

1.0.2 Estratégia para Encontrar n_o

O desafio ao usar a definição formal é, dado um $\epsilon > 0$, exibir um número natural n_o que satisfaça a condição $|a_n - a| < \epsilon$ para todo $n \geq n_o$. A estratégia geral envolve os seguintes passos:

1. Começar com a desigualdade $|a_n - a| < \epsilon$.
2. Manipular algebricamente essa desigualdade para isolar n . O objetivo é obter uma expressão da forma $n >$ alguma função de ϵ .
3. Escolher um número natural n_o que seja maior ou igual a essa "função de ϵ ". Geralmente, tomamos o menor inteiro maior que essa função.

Vamos agora aplicar essa estratégia a alguns exemplos.

1.0.3 Exemplos de Demonstração de Convergência

Exemplo 1.2. Considere a sequência definida por $a_n = \frac{1}{n}$. Vamos demonstrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ um número real positivo arbitrário. Precisamos encontrar um número natural n_o tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_o$, tenhamos $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

A desigualdade a ser satisfeita é:

$$|\frac{1}{n}| < \epsilon$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n > 0$, então $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$. Assim, a desigualdade se torna:

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Multiplicando ambos os lados por n (que é positivo) e dividindo por ϵ (que é positivo), obtemos:

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

Agora, precisamos encontrar um número natural n_o que seja maior que $\frac{1}{\epsilon}$. Pela propriedade arquimediana dos números reais, para qualquer número real x , existe um número natural n_o tal que $n_o > x$. Portanto, podemos escolher n_o como o menor inteiro estritamente maior que $\frac{1}{\epsilon}$. Formalmente, podemos tomar $n_o = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$.

Vamos passar a conferir que a escolha feita realmente satisfaz a definição.

Com essa escolha de n_o , para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_o$, temos:

$$n \geq n_o > \frac{1}{\epsilon}.$$

Como $n > 0$ e $\epsilon > 0$, podemos tomar os recíprocos e inverter a desigualdade:

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

Como $\frac{1}{n} > 0$, temos $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$, logo:

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon.$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe um $n_o \in \mathbb{N}$ (especificamente, $n_o = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$) tal que para todo $n \geq n_o$, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Pela definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemplo 1.3. Considere a sequência definida por $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Vamos demonstrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ um número real positivo arbitrário. Precisamos encontrar um número natural n_o tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq N$, tenhamos $|\frac{2n+1}{n+3} - 2| < \epsilon$.

Primeiro, vamos simplificar a expressão $|\frac{2n+1}{n+3} - 2|$:

$$|\frac{2n+1}{n+3} - 2| = |\frac{2n+1 - 2(n+3)}{n+3}| = |\frac{2n+1 - 2n - 6}{n+3}| = |\frac{-5}{n+3}| = \frac{5}{n+3}.$$

A desigualdade a ser satisfeita é:

$$\frac{5}{n+3} < \epsilon$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n \geq 1$, então $n+3 > 0$. Também $\epsilon > 0$. Podemos manipular a desigualdade:

$$5 < \epsilon(n+3)$$

$$5 < \epsilon n + 3\epsilon$$

$$5 - 3\epsilon < \epsilon n$$

Se $\epsilon > 0$, podemos dividir por ϵ :

$$\frac{5 - 3\epsilon}{\epsilon} < n$$

$$n > \frac{5}{\epsilon} - 3$$

Agora, precisamos encontrar um número natural n_o que seja maior que $\frac{5}{\epsilon} - 3$. Novamente, pela propriedade arquimediana, tal n_o existe. Podemos escolher $n_o = \lfloor \frac{5}{\epsilon} - 3 \rfloor + 1$. No entanto, precisamos garantir que n_o seja um número natural, ou seja, $n_o \geq 1$.

Considerando $\epsilon > 0$, se $\epsilon \geq 5/3$, então $\frac{5}{\epsilon} - 3 \leq 0$, e qualquer $n_o \geq 1$ funcionará, pois $\frac{5}{n+3}$ será sempre positivo e menor ou igual a $5/4 < \epsilon$.

Se $0 < \epsilon < 5/3$, então $\frac{5}{\epsilon} - 3 > 0$. Podemos escolher n_o como o menor inteiro estritamente maior que $\frac{5}{\epsilon} - 3$, ou seja, $N = \max\{1, \lfloor \frac{5}{\epsilon} - 3 \rfloor + 1\}$.

Com essa escolha de n_o , para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_o$, temos $n > \frac{5}{\epsilon} - 3$, o que implica:

$$\epsilon n > 5 - 3\epsilon$$

$$\epsilon n + 3\epsilon > 5$$

$$\epsilon(n+3) > 5$$

$$\epsilon > \frac{5}{n+3}$$

Como $\frac{5}{n+3} = |\frac{2n+1}{n+3} - 2|$, temos $|\frac{2n+1}{n+3} - 2| < \epsilon$.

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$.

1.1 Soma de Infinitos Termos de uma Progressão Geométrica (PG)

A soma de infinitos termos de uma Progressão Geométrica (PG) só é finita se a razão (q) da PG estiver entre -1 e 1, ou seja, $|q| < 1$. Nesse caso, à medida que o número de termos aumenta, os termos da PG se aproximam cada vez mais de zero, e a soma parcial converge para um valor específico.

A fórmula para a soma infinita (S_∞) de uma PG é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

onde:

- a_1 é o primeiro termo da PG.
- q é a razão da PG, com $|q| < 1$.

Por que a soma é finita apenas se $|q| < 1$?

- **Se $|q| \geq 1$:** Os termos da PG não se aproximam de zero (exceto se $a_1 = 0$), e a soma parcial cresce indefinidamente (ou oscila sem convergir), não tendo um limite finito.
 - Se $q > 1$ ou $q = 1$ (com $a_1 \neq 0$), os termos crescem em magnitude, e a soma tende a $\pm\infty$.
 - Se $q = -1$ (com $a_1 \neq 0$), a sequência das somas parciais oscila entre a_1 e 0, não convergindo.
 - Se $q < -1$, os termos crescem em magnitude e alternam o sinal, fazendo com que a soma parcial não convirja.

Exemplo: Uma PG Gera uma Nova Sequência das Reduzidas

Considere a Progressão Geométrica (PG) com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Os termos dessa PG são:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Agora, vamos gerar uma nova sequência formada pelas **somas reduzidas** (ou somas parciais) dessa PG, que podemos expressar usando a notação de somatório:

- $S_1 = \sum_{k=1}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1$
- $S_2 = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $S_3 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$
- $S_4 = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

- $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. A fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PG é $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Neste caso:

$$S_n = \frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

A sequência das somas reduzidas é, portanto:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

Análise da Forma do Termo Geral da Sequência das Reduzidas

O termo geral da sequência das somas reduzidas para esta PG específica é:

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Vamos analisar a forma desse termo geral:

- **Constante:** O termo geral possui uma parte constante, que é 2.
- **Termo Variável:** Há um termo variável, $-\frac{1}{2^{n-1}}$, que depende de n .
- **Comportamento à medida que n aumenta:** À medida que n tende ao infinito ($n \rightarrow \infty$), o termo $\frac{1}{2^{n-1}}$ tende a zero. Isso ocorre porque a base da potência ($1/2$) está entre -1 e 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

Portanto, o limite da sequência das somas reduzidas é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 - 0 = 2$$

Este resultado coincide com a fórmula da soma infinita da PG:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Conclusão sobre a forma do termo geral da sequência das reduzidas:

O termo geral da sequência das somas reduzidas de uma PG convergente (onde $|q| < 1$) tende para a soma infinita da PG à medida que n aumenta. A forma do termo geral geralmente envolve uma constante (que é a soma infinita) mais ou menos um termo que decai exponencialmente para zero, dependendo da razão q e do primeiro termo a_1 .

No exemplo, a sequência das reduzidas se aproxima do valor 2 à medida que adicionamos mais termos da PG original. A "distância" entre a soma parcial S_n e a soma infinita (2) é dada por $\frac{1}{2^{n-1}}$, que diminui rapidamente com o aumento de n .

1.1.1 Explorando mais um ponto de vista

Seja a sequência das somas parciais (ou reduzidas) S_n de uma série geométrica definida por:

$$S_n = \sum_{k=0}^n t^k$$

onde t é a razão da progressão geométrica.

Obtendo a Fórmula para S_n

Para encontrar uma fórmula fechada para S_n , podemos escrever a soma explicitamente:

$$S_n = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$$

Multiplicando ambos os lados por t , obtemos:

$$tS_n = t + t^2 + t^3 + \cdots + t^{n+1}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

$$S_n - tS_n = (1 + t + t^2 + \cdots + t^n) - (t + t^2 + t^3 + \cdots + t^{n+1})$$

A maioria dos termos se cancela, resultando em:

$$S_n(1 - t) = 1 - t^{n+1}$$

Se $t \neq 1$, podemos dividir por $(1-t)$ para obter a fórmula para a soma das reduzidas:

$$S_n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}, \quad t \neq 1$$

Se $t = 1$, então:

$$S_n = \sum_{k=0}^n 1^k = 1 + 1 + \cdots + 1 \quad ((n+1) \text{ vezes})$$

$$S_n = n + 1$$

Exemplo das Reduzidas $S_1, S_2, S_3, \dots$

Considerando a série geométrica $\sum_{k=0}^n t^k$:

- Para $n = 1$: $S_1 = \sum_{k=0}^1 t^k = t^0 + t^1 = 1 + t$
- Para $n = 2$: $S_2 = \sum_{k=0}^2 t^k = t^0 + t^1 + t^2 = 1 + t + t^2$
- Para $n = 3$: $S_3 = \sum_{k=0}^3 t^k = t^0 + t^1 + t^2 + t^3 = 1 + t + t^2 + t^3$
- Em geral: $S_n = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$, para $t \neq 1$.

Soma da Série Geométrica Infinita S_∞

A soma da série geométrica infinita é definida como o limite da sequência das somas parciais S_n quando n tende ao infinito:

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n t^k$$

Considerando a fórmula para S_n quando $t \neq 1$:

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

O valor desse limite depende do valor de t :

-Se $|t| < 1$: Então $\lim_{n \rightarrow \infty} t^{n+1} = 0$, e a série converge para:

$$S_\infty = \frac{1 - 0}{1 - t} = \frac{1}{1 - t}$$

Se $|t| \geq 1$:

Se $t = 1$, $S_n = n + 1$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

- Se $t = -1$, S_n oscila entre 1 e 0, não convergindo.

Se $|t| > 1$, $|t^{n+1}| \rightarrow \infty$, e o limite não existe (a série diverge).

Portanto, a soma da série geométrica infinita $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ é dada por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \begin{cases} \frac{1}{1-t}, & \text{se } |t| < 1 \\ \text{diverge}, & \text{se } |t| \geq 1 \end{cases}$$

1.2 Conclusão

Demonstrar a convergência de uma sequência usando a definição formal envolve mostrar que para qualquer nível de precisão $\epsilon > 0$, podemos encontrar um ponto na sequência a partir do qual todos os termos subsequentes estão dentro dessa precisão do limite. O processo chave é manipular a desigualdade $|a_n - a| < \epsilon$ para encontrar uma condição sobre n em termos de ϵ , e então escolher um número natural n_o que satisfaça essa condição. A propriedade arquimediana dos números reais garante que tal n_o sempre existirá se a sequência realmente convergir para a .

1.3 Exercícios

Exercício 1.4. Prove, usando a definição de limite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n}\right) = 2$.

Exercício 1.5. Prove, usando a definição de limite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{n + 2} = 4$.

Exercício 1.6. Uma sequência geométrica tem o primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = -2$.

1. Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência.

2. Calcule a soma dos oito primeiros termos dessa sequência.

Exercício 1.7. Considere a sequência geométrica $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$

1. Determine a razão dessa sequência.
2. Determine se a soma de todos os termos dessa sequência é finita. Justifique sua resposta.
3. Caso a soma seja finita, calcule o valor dessa soma.

Atividade Exploratória: Desvendando o Comportamento da Série Harmônica

Objetivo: Investigar o comportamento da série harmônica e desenvolver uma intuição sobre sua convergência ou divergência.

Materiais:

- Papel e caneta/lápis
- Calculadora (opcional, mas pode ser útil para verificar cálculos)
- Computador com acesso à internet (opcional, para visualizar gráficos ou simulações)

Introdução:

A série harmônica é uma das séries mais importantes e intrigantes em matemática. Ela é definida como a soma dos inversos de todos os números naturais:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Nesta atividade, vamos explorar o comportamento dessa série à medida que adicionamos mais e mais termos.

Parte 1: Calculando as Somas Parciais

1. Calcule as primeiras somas parciais da série harmônica:

- $H_1 = 1$
- $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = ?$
- $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$
- $H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$
- $H_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = ?$
- Continue calculando até H_{10} . Anote seus resultados em uma tabela como a seguinte:

n	H_n (Soma Parcial)
1	1
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2. Observe os valores de H_n à medida que n aumenta. A soma parece estar se aproximando de algum valor específico? Ou parece estar crescendo indefinidamente?

Parte 2: Agrupando os Termos

Vamos tentar uma abordagem diferente para analisar o crescimento da série. Agrupe os termos da seguinte maneira:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

- Compare a soma dos termos dentro de cada parêntese com uma fração mais simples:
 - $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = ?$
 - $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = ?$
 - $\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}$ (quantos termos de $\frac{1}{16}$ há?) $= ?$
- Generalize esse padrão. Para o grupo de termos de $\frac{1}{2^{k-1}+1}$ até $\frac{1}{2^k}$, compare a soma com um múltiplo de $\frac{1}{2^k}$. Quantos termos há nesse grupo?
- Usando essa comparação, tente encontrar uma cota inferior para a soma parcial H_n para alguns valores de n que são potências de 2 (por exemplo, $n = 2, 4, 8, 16$). Por exemplo:
 - $H_2 = 1 + \frac{1}{2} > ?$
 - $H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + ?$
 - $H_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + ? + ?$
- O que essa cota inferior sugere sobre o comportamento de H_n quando n se torna muito grande?

Parte 3: Reflexão e Discussão

1. Com base nos seus cálculos das primeiras somas parciais e na análise do agrupamento dos termos, você acha que a série harmônica converge para um valor finito ou diverge (cresce indefinidamente)? Justifique sua resposta.
2. Compare suas conclusões com as de seus colegas. Houve diferentes interpretações dos resultados?
3. Pesquise (opcional) sobre a prova formal da divergência da série harmônica. A estratégia de agrupamento que utilizamos está relacionada a essa prova?

Conclusão:

Esta atividade exploratória tem como objetivo fornecer uma compreensão intuitiva do comportamento da série harmônica. Embora os primeiros termos da série diminuam rapidamente, a soma total cresce surpreendentemente devagar, mas continua crescendo indefinidamente. A técnica de agrupar os termos nos dá uma maneira poderosa de visualizar essa divergência. A série harmônica é um exemplo importante em matemática, pois ilustra que uma série cujos termos tendem a zero nem sempre converge.

1.4 Exemplo de Série Geométrica Divergente com Razão Menor que -1

Considere a série geométrica com o primeiro termo $a = 3$ e a razão $r = -2$. A série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot (-2)^n = 3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + 192 - 384 + \dots$$

Como $|r| = |-2| = 2 \geq 1$, a série é divergente.

Vamos observar as somas parciais (reduzidas) desta série até o oitavo termo (S_8):

- $S_1 = 3$
- $S_2 = 3 - 6 = -3$
- $S_3 = 3 - 6 + 12 = 9$
- $S_4 = 3 - 6 + 12 - 24 = -15$
- $S_5 = 3 - 6 + 12 - 24 + 48 = 33$
- $S_6 = 3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 = -63$
- $S_7 = 3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + 192 = 129$
- $S_8 = 3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + 192 - 384 = -255$

Podemos observar que a sequência das somas parciais $(3, -3, 9, -15, 33, -63, 129, -255, \dots)$ não converge para um valor finito. Em vez disso, os valores oscilam entre positivos e negativos, e a magnitude dos termos cresce exponencialmente.

A fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma série geométrica é $S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$. Para este exemplo:

$$S_n = 3 \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = 3 \frac{1 - (-2)^n}{3} = 1 - (-2)^n$$

Vamos verificar alguns valores usando a fórmula:

- $S_1 = 1 - (-2)^1 = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$
- $S_2 = 1 - (-2)^2 = 1 - 4 = -3$
- $S_3 = 1 - (-2)^3 = 1 - (-8) = 1 + 8 = 9$
- $S_4 = 1 - (-2)^4 = 1 - 16 = -15$
- $S_8 = 1 - (-2)^8 = 1 - 256 = -255$

A fórmula confirma o comportamento das somas parciais. Como $(-2)^n$ alterna de sinal e cresce em magnitude, a sequência das somas parciais não converge. Portanto, a série geométrica com $a = 3$ e $r = -2$ é divergente. Vamos analisar o comportamento de S_n para valores pares e ímpares de n quando $n \rightarrow \infty$.

Para n par ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$)

$$S_{2k} = 1 - (-2)^{2k} = 1 - ((-2)^2)^k = 1 - 4^k$$

À medida que $k \rightarrow \infty$, $4^k \rightarrow \infty$, logo $S_{2k} = 1 - 4^k \rightarrow -\infty$.

Para n ímpar ($n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$)

$$S_{2k+1} = 1 - (-2)^{2k+1} = 1 - ((-2)^{2k} \cdot (-2)^1) = 1 - (4^k \cdot (-2)) = 1 + 2 \cdot 4^k$$

À medida que $k \rightarrow \infty$, $4^k \rightarrow \infty$, logo $S_{2k+1} = 1 + 2 \cdot 4^k \rightarrow +\infty$.

Como as subsequências das somas parciais para índices pares tendem a $-\infty$ e as subsequências das somas parciais para índices ímpares tendem a $+\infty$, a sequência das somas parciais (S_n) não converge para um único valor finito.

Formalmente: Para que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ exista (onde L é um número real finito), para todo $\epsilon > 0$, deve existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|S_n - L| < \epsilon$.

No nosso caso, dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e qualquer $\epsilon > 0$, podemos sempre encontrar valores de n pares e ímpares suficientemente grandes tais que $|S_n - a| > \epsilon$. Por exemplo, para n par grande, S_n é um número negativo de grande magnitude, e para n ímpar grande, S_n é um número positivo de grande magnitude, ambos estando a uma distância maior que ϵ de a .

Referências Bibliográficas

- [1] Guidorizzi, Amilton Luiz.. *Um curso de Cálculo* Volume 4. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.