

MATEMÁTICA EM FRAGMENTOS

UM PASSEIO POR TEORIA E APLICAÇÕES

ROGÉRIO CÉSAR DOS SANTOS

**MATEMÁTICA EM FRAGMENTOS:
UM PASSEIO POR TEORIA E APLICAÇÕES**



ROGÉRIO CÉSAR DOS SANTOS

**MATEMÁTICA EM FRAGMENTOS:
UM PASSEIO POR TEORIA E APLICAÇÕES**

1ª Edição

Quipá Editora
2023

Copyright © dos autores e autoras. Todos os direitos reservados.

Esta obra é publicada em acesso aberto. O conteúdo dos capítulos, os dados apresentados, bem como a revisão ortográfica e gramatical são de responsabilidade de seus autores, detentores de todos os Direitos Autorais, que permitem o download e o compartilhamento, com a devida atribuição de crédito, mas sem que seja possível alterar a obra, de nenhuma forma, ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Dra. Francione Charapa Alves, Universidade Federal do Cariri | Dr. Francisco Odécio Sales, Instituto Federal do Ceará | Me. Marília Maia Moreira, Universidade Estadual Vale do Acaraú | Dra. Mônica Maria Siqueira Damasceno, Instituto Federal do Ceará, Campus Juazeiro do Norte | Ricardo Damasceno de Oliveira, Universidade Regional do Cariri.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S237m Santos, Rogério César dos
Matemática em fragmentos : um passeio por teoria e aplicações / Rogério César dos Santos. — Iguatu, CE : Quipá Editora, 2025.

62 p. : il.

ISBN 978-65-5376-451-4

DOI 10.36599/qped-978-65-5376-451-4

1. Matemática. I. Título.

CDD 510

Elaborada por Rosana de Vasconcelos Sousa — CRB-3/1409

Obra publicada pela Quipá Editora em março de 2025

Quipá Editora
www.quipaeditora.com.br
@quipaeditora

A todos que conseguem contemplar a beleza da
ciência pura e da linguagem algébrica.

AGRADECIMENTO

Agradeço aos meus companheiros matemáticos de jornada.

APRESENTAÇÃO

O interesse de uma pessoa pela Matemática pode ser despertado quando lhe é apresentada a sua beleza, seus padrões e interligações.

Este livro pretende proporcionar a alunos, professores, e a todos interessados em Matemática Básica ou Superior, a navegar por uma pequeníssima parte das riquezas que essa disciplina possui, que está além dos livros didáticos dessa disciplina.

Alguns assuntos serão trabalhados com matemática bastante elementar, outros exigirão um acompanhamento cuidadoso dos cálculos efetuados.

Assim como a vida cotidiana serve de matéria prima para as artes, ela também serve de matéria prima para o desenvolvimento da Matemática...

Pré-Requisitos para a Leitura

Para o leitor poder acompanhar o livro, e entendê-lo, é necessário ter os conhecimentos Matemáticos do Ensino Médio frescos na memória.

Em raros momentos, o conhecimento de Matemática do Ensino Superior também será necessário.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

CAPÍTULO 1 09

COMO A BRINCADEIRA DO CHOCOLATE REVELA A SUA IDADE?

CAPÍTULO 2 11

INDEPENDÊNCIA DA DATA FOCAL EM JUROS COMPOSTO

CAPÍTULO 3 16

COMO APLICAR PROBABILIDADE CONDICIONAL EM JOGOS DE AZAR?

CAPÍTULO 4 18

SOFTWARES AJUDANDO NA CRIAÇÃO DE TEOREMAS

CAPÍTULO 5 23

GRÁFICOS PODEM ENGANAR

CAPÍTULO 6 27

PROGRESSÕES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS NUM JOGO FAMOSO DE VIDEO GAME

CAPÍTULO 7 33

UMA PROVA LÚDICA DO VOLUME DO TETRAEDRO

CAPÍTULO 8 39

DE VOLTA AOS 5 POLIEDROS REGULARES

CAPÍTULO 9 44

A RAIZ QUADRADA DO NÚMERO $X + YZ$

CAPÍTULO 10	49
2N-ÁGONOS. UMA PROPRIEDADE	
CAPÍTULO 11	55
RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA POR MEIO DO EIXO RADICAL	
CONSIDERAÇÕES FINAIS	62

CAPÍTULO 1

COMO A BRINCADEIRA DO CHOCOLATE REVELA A SUA IDADE?

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: expressões aritméticas e algébricas – Ensino Fundamental

Uma mágica intrigante

Em 2010, um e-mail com o truque do chocolate que revelava idades circulava pela Internet. Vamos adaptá-la para o ano de 2025:

“Diga quantas vezes ($n > 0$) você come chocolate por semana.

Agora, multiplique por 2, depois some 5.

Multiplique por 50.

Se já fez aniversário nesse ano de 2025, some 1.775. Se não, 1.774.

Subtraia o ano de seu nascimento.

O resultado vai revelar duas coisas: quantas vezes come chocolate e também a sua idade!”

Exemplo

Eu como $n = 8$ chocolates por semana, e não fiz aniversário esse ano.

Então, dado que eu nasci em 1.977, temos:

$$(8 \cdot 2 + 5) \cdot 50 + 1.774 - 1.977 = 847.$$

Desfragmentando o resultado 847: o algarismo 8 é quantas vezes você come chocolate por semana, e o número 47 é a sua idade!

Observação: a mágica não funciona se você tiver 100 ou mais anos de vida.

Por que funciona?

Antes de tentar adaptar a mágica para um ano qualquer, vamos às explicações do porquê da mágica funcionar:

O cálculo é simples: efetuando a distributiva,

$$(2n + 5) \cdot 50 = 100n + 250.$$

Agora, o truque: somando 1.775 ou 1.774 ao 250, chega-se a 2.025 ou a 2.024, dependendo se a pessoa já fez ou não aniversário nesse ano de 2.025. Se já fez aniversário nesse ano de 2025, fica assim:

$$100n + 250 + 1775 = 100n + 2025.$$

Subtraindo do ano de seu aniversário, fica $100n +$ sua idade. Portanto, as casas da unidade e da dezena do resultado informam a sua idade. Os demais algarismos (não importam quantos) revelam o número n , a quantidade de chocolates.

Agora, se não fez aniversário nesse ano de 2025, fica:

$$100n + 250 + 1774 = 100n + 2024.$$

Subtraindo o ano de seu nascimento, o resultado revelará sua idade e o valor de n , da mesma forma.

Adaptando a Mágica

Essa mágica funciona para o ano de 2025. Para um outro ano x qualquer, basta trocar 1.775 e 1.774 por $(x - 250)$ e $(x - 251)$, respectivamente, para que, no lugar dos 250, apareça o ano x ou o ano $x - 1$, dependendo se a pessoa já fez aniversário nesse ano de 2.025 ou não. Assim, o cálculo ficaria:

Se já fez aniversário no ano x :

$$100n + 250 + (x - 250) = 100n + x.$$

Se não fez:

$$100n + 250 + (x - 251) = 100n + x - 1.$$

Exemplo, se você está em $x = 2.027$, já fez aniversário neste ano, e nasceu em 1.977, então deve-se somar $x - 250 = 2.027 - 250 = 1.777$. Se você come 6 chocolates por semana, então:

$$(2 \cdot 6 + 5) \cdot 50 + 1.777 - 1.977 = 650.$$

6 chocolates, 50 anos de idade!

CAPÍTULO 2

INDEPENDÊNCIA DA DATA FOCAL EM JUROS COMPOSTOS

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: matemática financeira, juros e descontos simples e compostos – Ensino Médio e Superior

Planos de Pagamentos nos Regimes Simples e Compostos

Em regime de juros compostos, dois planos de pagamentos são Equivalentes se o Valor Atual total das prestações em uma data focal específica é o mesmo para os dois planos. Veremos nesse capítulo que, caso isso aconteça, no sistema do desconto composto *racional*, o mesmo ocorrerá para qualquer outra data focal.

Porém, em regime de juros simples, tal fato não é verdadeiro; para que dois planos sejam considerados equivalentes em regime de juros simples, a data focal para a qual o Valor Atual coincide, no sistema de desconto simples *racional*, deve ser sempre a data zero, ou seja, hoje.

Um Exemplo

Vejamos primeiramente um exemplo a juros compostos. Imagine que você está devendo 2.000 reais hoje, e o acordo é pagá-los em duas vezes iguais, uma vez daqui a 30 dias e outra daqui a 60 dias, a juros compostos de 4% ao mês. De quanto seria a prestação? Devemos descontar as prestações P à data zero obtendo assim os valores atuais A_1 e A_2 de cada prestação P . A soma será o Valor Atual 2.000 da dívida:

$$A=2.000=A_1+A_2=P(1+4/100)^{-1}+P(1+4/100)^{-2},$$

ou seja, $P = 1.060,39$. Você iria pagar um total de $2 \times 1.060,39 = 2.120,78$.

No entanto, você tem interesse em aumentar o número de prestações para quatro, diminuindo-as de valor. Qual seria o valor das novas prestações? Novamente, descontando as prestações para a data zero:

$$A=2.000=A_1+A_2+A_3+A_4=P(1+4/100)^{-1}+P(1+4/100)^{-2}+P(1+4/100)^{-3}+P(1+4/100)^{-4},$$

e daí $P = 550,98$. Aqui você pagaria um total de $4 \cdot 550,98 = 2.203,92$ reais.

Desconto Racional e Desconto Comercial Composto

Antes de continuarmos, cabe observarmos que o valor atual A_t de cada prestação P que estamos calculando é o valor atual Racional, que é definido como sendo aquele valor que se aplicaria, fazendo o papel do capital, para se obter o montante P . Ou seja, $A_t = P(1+i)^{-t}$. Nesse sentido, o Desconto Racional Composto é definido como sendo a diferença $P - A_t$, ou seja, $D_R = P - P(1+i)^{-t}$, onde t é o número de períodos considerados para o desconto. O outro desconto, o Desconto Comercial Composto D_C , é a diferença entre a Prestação P e o resultado dos abatimentos sucessivos em cima de P :

$$D_C = P - P(1-i)^t = P(1 - (1-i)^t)$$

O desconto comercial composto é sempre maior do que o racional composto, conforme podemos mostrar:

$$\begin{aligned} D_C > D_R &\Leftrightarrow P - P(1-i)^t > P - P(1+i)^{-t} \Leftrightarrow (1-i)^t < (1+i)^{-t} \Leftrightarrow (1-i)^t(1+i)^t < 1 \Leftrightarrow \\ &(1-i^2)^t < 1 \Leftrightarrow 1 - i^2 < 1 \Leftrightarrow i^2 > 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Em Matemática Financeira, no entanto, utiliza-se o Desconto Racional Composto para o cálculo do Valor Atual, que é o que estamos fazendo aqui.

Mudando a data focal

Continuando o nosso exemplo, dizemos, portanto, que uma dívida de 2.000 vencida hoje equivale a duas parcelas de 1.060,39 vencidas em 30 e 60 dias cada uma, e também equivalem às quatro parcelas de 550,98, pois, trazendo todas as prestações para a data Zero, produzem o mesmo valor atual 2.000. De acordo com uma propriedade importante dos juros compostos que demonstraremos mais adiante, isso implica que, se transportarmos estas prestações para uma outra data focal qualquer, com suas respectivas taxas de juro, o valor final também seria o mesmo; continuemos na mesma dívida de 2.000 para exemplificar este fato:

Vamos transportar as duas prestações de 1.060,39 para o terceiro mês, e as quatro prestações de 550,98 também para o terceiro mês. Veremos que o respectivo Valor Atual será o mesmo:

No Plano 1, a primeira prestação deve ser transportada dois meses adiante, e a segunda prestação deve ser transportada um mês adiante. Portanto, o Valor Atual no

terceiro mês no Plano 1 é igual a

$$1.060,39(1+4/100)^2 + 1.060,39(1+1/100) = 2.2497,72$$

Já o Valor Atual no terceiro mês no Plano 2 será, seguindo a mesma ideia:

$$550,98(1+4/100)^2 + 550,98(1+4/100) + 550,98 + 550,98(1+4/100)^{-1} = 2.249,72$$

Isto é, para sabermos se um plano de pagamento de uma dívida é equivalente a outro, basta transportarmos as respectivas prestações para uma data focal qualquer, não necessariamente a data Zero. O Valor Atual correspondente deve ser o mesmo para os dois planos.

No regime de Juros Simples

Porém, o mesmo não ocorre em regime de juros simples. Nesse mesmo exemplo, vamos calcular agora de quanto serão as prestações se o pagamento for feito novamente em duas vezes no Plano 1, a juros simples de 4%, e também em quatro vezes no Plano 2.

Vamos transportar, usando Desconto Simples Racional, para a data focal Zero as prestações do plano 1, em duas vezes, para obtermos a prestação P :

$$2.000 = P(1+4/100)^{-1} + P(1+8/100)^{-1}, \text{ o que implica que } P = 1.059,62.$$

Agora, o plano em quatro vezes:

$$2.000 = P(1+4/100)^{-1} + P(1+8/100)^{-1} + P(1+12/100)^{-1} + P(1+16/100)^{-1},$$

o que nos dá $P = 549,09$.

Logo, os dois planos a juros simples são equivalentes, pois transportadas as respectivas prestações para a data Zero, produzem o mesmo valor atual soma 2.000 reais. Porém, percebamos a seguir que estas mesmas prestações transportadas para o terceiro mês, não produzirão o mesmo resultado, ao contrário do que aconteceu com o regime de juros compostos.

Valor Atual no terceiro mês no Plano 1:

$$1.059,62(1+8/100) + 1.059,62(1+4/100) = 2.246,39.$$

Valor Atual no terceiro mês no Plano 2:

$$549,09(1+8/100) + 549,09(1+4/100) + 549,09 + 549,09(1+4/100)^{(-1)} = 2.241,13,$$

uma diferença de 5 reais.

Desconto Racional e Desconto Comercial Simples

Novamente, observamos que estamos usando o valor atual Racional, mas agora a juros simples. O valor atual A_t de cada prestação é o valor que se aplicaria em t períodos para obter o montante P a juros simples: $A=P(1+it)^{-1}$. O Desconto Racional Simples é definido como sendo $D_R=P-A_t$, ou seja, $D_R=P-P(1+it)^{-1}$. Já o Desconto Comercial Simples, analogamente ao Desconto Comercial Composto, é a diferença entre a prestação P e o resultado dos abatimentos sucessivos, a juros simples, em cima de P , isto é: $D_C=P-P(1-it)=P+Pit-P=Pit$. Como antes, o Desconto Comercial Simples é maior do que o Racional Simples, pois:

$$D_C=Pit=P(1+it)-P=(1+it)(P-P(1+it)^{-1})=(1+it)D_R>D_R.$$

A Equivalência em Regime de Juros Compostos

Um fato que generaliza o exemplo considerado no caso dos juros compostos é o seguinte: considere dois planos de um certo pagamento e uma data qualquer n . Suponha que o Valor Atual na data n , em regime de juros compostos, seja o mesmo para os dois planos. Então, o Valor Atual em uma outra data focal k , também é o mesmo.

Ora, suponha $k > n$, sem perda de generalidade. Suponha que o plano 1 seja constituído por L prestações C_1 , sendo a primeira 30 dias após a assinatura do contrato, e que o plano 2 seja constituído por P prestações C_2 , sendo a primeira também 30 dias após a assinatura do contrato. Suponha $P > L$ sem perda de generalidade. Atente para o fato de que agora P é o número de prestações do Plano 2.

Data Plano 1	0	1	...	n	...	k	...	L		
Prestação		C_1		C_1		C_1		C_1		
Data Plano 2	0	1	...	n	...	k	...	L	...	P
Prestação		C_2		C_2		C_2		C_2		C_2

Calculando o Valor Atual na data n nos dois planos, teremos, pela hipótese que

resultam no mesmo valor atual na data n , a seguinte igualdade:

$$C_1(1+i)^{n-1} + \dots + C_1 + \dots + C_1(1+i)^{n-k} + \dots + C_1(1+i)^{n-L} = \\ C_2(1+i)^{n-1} + \dots + C_2 + \dots + C_2(1+i)^{n-k} + \dots + C_2(1+i)^{n-L} + \dots + C_2(1+i)^{n-P}$$

Gostaríamos de saber então se essa igualdade implica na igualdade abaixo, que corresponde aos Valores Atuais na data k para os dois planos:

$$C_1(1+i)^{k-1} + \dots + C_1(1+i)^{k-n} + \dots + C_1 + \dots + C_1(1+i)^{k-L} = \\ C_2(1+i)^{k-1} + \dots + C_2(1+i)^{k-n} + \dots + C_2 + \dots + C_2(1+i)^{k-L} + \dots + C_2(1+i)^{k-P}$$

Multiplicando os membros dessa última igualdade por $(1+i)^{n-k}$, esta se torna equivalente à primeira, o que demonstra a nossa proposição.

No Ensino Médio...

Não é utópico pensar que tais abordagens possam ser apresentadas aos alunos do Ensino Médio, dado que os mesmos já têm os primeiros contatos com a Matemática Financeira desde o Ensino Fundamental. Pode ser eficaz para o despertar do interesse matemático dos alunos apresentar tais demonstrações aos mesmos, para que a Matemática possa fazer sentido em suas afirmativas, que, quando não justificadas, parecem por demasiado abstratas e sem conexão com a realidade.

O fato de que o Valor Atual deve ser igual em qualquer data focal, em regime de juro composto, para que dois planos sejam considerados equivalentes, e que no de juro simples a data focal deve ser a data zero, pode despertar no aluno a curiosidade do porquê disso.

CAPÍTULO 3

COMO APLICAR PROBABILIDADE CONDICIONAL EM JOGOS DE AZAR?

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: análise combinatória, probabilidade – Ensino Médio

Um Jogo de Azar

Imagine duas bancas de jogos de azar. Ambas são muito parecidas. Na primeira, que chamaremos de banca A, o dono da banca possui 5 cartas de baralho: Ás de copas, Ás de espada, Ás de paus, 7 de paus e 8 de paus. Em siglas, AC, AE, AP, 7P e 8P.

O jogo consiste em: você embaralha as cinco cartas e dá duas delas ao dono da banca, sem olhá-las. Se ele não sair com algum Ás dentre as duas que recebeu, ele te mostra as cartas, e as te devolve. O processo é então repetido.

Assim que ele sair com algum Ás, ele te dirá que possui algum Ás. Você ganha se ele tiver outro Ás na mão, e perde caso contrário. Isto é, você ganha se ele tiver mais de um Ás, e perde se ele tiver apenas um Ás.

Outro Jogo Quase Igual

Na segunda, a banca B, o dono possui as mesmas cartas, e o processo é parecido. Só que, primeiro, decide-se em consenso um naipe para o ás, ex: paus. Então, você dá a ele duas cartas. Se ele não tiver saído com o referido Ás de paus, você as pega e reembaralha todas as cartas e lhe entrega duas, novamente. Assim que ele tiver o Ás de paus, ele o informa e começa a aposta. Novamente, você ganha se ele tiver algum outro Ás, e perde caso contrário..

A pergunta é: a chance de você ganhar é a mesma para as duas bancas? Intuitivamente, pode parecer que a chance de você ganhar é a mesma nas duas bancas, porém isso não ocorre, trata-se de um Paradoxo, como veremos a seguir.

Calculando as Probabilidades

Bom, vamos calcular a sua chance de vitória jogando na banca A. Queremos descobrir a probabilidade de o dono da banca possuir dois Ases, sabendo que ele possui

algum Ás. De todas as mãos possíveis, apenas uma delas não possui algum Ás, que é a mão 7P, 8P. Então, o número de mãos que possuem algum Ás é a combinação de cinco elementos, tomados dois a dois, menos 1, isto é, $C_{5,2} - 1 = 9$, são elas:

AC e AE, AC e AP, AE e AP, AC e 7P, AC e 8P, AE e 7P, AE e 8P, AP e 7P e AP e 8P.

Destas mãos, as que você ganha são três. Logo, sua chance de ganhar é de $3 / 9 = 33,33\%$.

Já na banca B, precisamos saber qual a probabilidade de ele ter outro Ás, sabendo que possui o Ás de paus. De todas as mãos possíveis, as que possuem o Ás de paus, são em número de $C_{4,1} = 4$, são elas:

AC e AP, AE e AP, 7P e AP e 8P e AP

Destas quatro, as que você ganha são duas. Logo, sua chance é de $2 / 4 = 50\%$.
Conclusão: é melhor jogar na banca B.

CAPÍTULO 4

SOFTWARES AJUDANDO NA CRIAÇÃO DE TEOREMAS

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: polinômios – Ensino Médio

Neste capítulo vamos verificar um resultado cuja solução foi inspirada no manuseio do software matemático gratuito MAXIMA, na ocasião da fatoração do número $x^{2p}-1$, com p primo ímpar.

O problema inicial

Ao tentar explorar fatorações de polinômios, foi pedido ao MAXIMA a fatoração do número $x^{10}-1$, ao que ele respondeu:

$$x^{2 \cdot 5}-1=(x-1)(x+1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right).$$

Ora, por que o software não fatorou os dois últimos polinômios deste produto? Sabemos, da Álgebra, que os únicos polinômios Irredutíveis (isto é, não fatoráveis em polinômios de grau maior ou igual a 1), com coeficientes Reais, são os de primeiro grau e os de segundo grau com discriminante menor do que zero. Logo, os polinômios $x^4+x^3+x^2+x+1$ e $x^4-x^3+x^2-x+1$ poderiam ser fatorados em fatores sobre os reais, isto é, em polinômios de grau 2 ou 1, com coeficientes reais.

A título de ilustração, vamos abrir um parêntese e fatorar $x^4+x^3+x^2+x+1$ em fatores sobre os reais. É fácil perceber que 1 e -1 são as únicas raízes reais do polinômio $x^{2p}-1$, e, como $x^4+x^3+x^2+x+1$ possui um número ímpar de parcelas, $x^4+x^3+x^2+x+1$ não pode, portanto, possuir raízes reais. Assim, $x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+ax+E)(x^2+bx+F)$. “Chutando educadamente”, vamos supor, e ver se dará certo, que $E=F=1$, o que implica

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1).$$

Efetuando a multiplicação e igualando os coeficientes correspondentes, temos: $a+b=1$ e $ab=-1$. Resolvendo esse sistema, chegamos finalmente à fatoração

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)$$

ou seja, o nosso chute educado funcionou. Os discriminantes destes dois polinômios são negativos, de forma que o polinômio está completamente fatorado. O leitor pode verificar, realizando o mesmo chute educado, que a fatoração do outro polinômio será

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \left(x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + 1\right)\left(x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right).$$

Lendo então a Ajuda do MAXIMA, descobre-se que ele fatora polinômios apenas em fatores Irredutíveis sobre os *inteiros*. Logo, se não há falha de programação do software, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ devem ser irredutíveis sobre os inteiros. Conjectura-se também que os polinômios

$$x^{p-1} + \dots + x + 1 \text{ e } x^{p-1} - x^{p-2} + \dots + (-1)^n x^n + \dots + 1$$

devem ser, portanto, irredutíveis sobre os inteiros para todo p primo ímpar. Essa foi a primeira conjectura oriunda desta atividade.

Irredutibilidade

Para estudar a irredutibilidade destes dois polinômios sobre os inteiros, teríamos que recorrer à teoria de Anéis de Polinômios, assunto bem distante do conteúdo de Ensino Médio. Pesquisando em livros de Álgebra, encontra-se a exatamente a resposta: nas páginas 51 e 52 da referência [1] está mostrado (o primeiro como exemplo resolvido e o outro como proposta de exercício para o leitor) que os dois polinômios acima, para p primo, são de fato Irredutíveis sobre os Inteiros.

Porém, as demonstrações usam o critério de Eisenstein, tópico além do que é visto na Educação Básica. Vamos, então, nos ater à minha segunda conjectura, a seguir.

A outra conjectura

Bem, para chegarmos a nossa *outra* conjectura, outras fatorações de $x^{2p} - 1$ foram executadas no software, trocando o valor do primo ímpar p , ao que ele forneceu resultados semelhante à fatoração de $x^{2 \cdot 5} - 1$. Conjecturou-se, portanto, que

$$x^{2p} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^{p-1} + \dots + x + 1)(x^{p-1} - x^{p-2} + \dots + (-1)^n x^n + \dots + 1)$$

Então, é natural pensar se é possível demonstrar que este fato é verdade para todo p primo ímpar, ou pelo menos dar uma justificativa, já que não devemos aceitar uma conjectura como verdadeira apenas porque ela vale para alguns casos. Será que vale para todo p ímpar primo, como supõe alguns exemplos calculados no MAXIMA?

Para dar uma ideia da demonstração da nossa conjectura, vamos pegar o exemplo dado inicialmente, e mostrar a igualdade

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)(x^{5-1} + x^{5-2} + x^{5-3} + x^{5-4} + 1)(x^{5-1} - x^{5-2} + x^{5-3} - x^{5-4} + 1).$$

O raciocínio para o caso geral é análogo, como veremos.

Vamos reescrever o segundo membro e, por fim, mostrar que é igual a $x^{2 \cdot 5} - 1$:

$$(x^2 - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

Observe, primeiro, somente o produto $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$: multiplicando x^4 pelas parcelas do polinômio à direita, depois multiplicando x^3 , e assim sucessivamente até o 1, e *separando* os resultados *em cada linha* abaixo, temos:

$$\begin{aligned} & x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 + \\ & x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + \\ & x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + \\ & x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + \\ & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

No caso geral, para um primo ímpar p qualquer, na primeira linha acima, a primeira parcela será x^{2p-2} , na segunda linha, a primeira parcela será x^{2p-3} , até a última linha, onde a primeira parcela será x^{p-1} .

Além disso, na primeira linha, a última parcela será sempre x^{p-1} , na segunda linha, a última parcela será x^{p-2} , etc, até a última linha, cuja última parcela é sempre 1.

Agora, observemos os seguintes cancelamentos:

- O primeiro x^7 que aparece se cancela com o segundo x^7 que aparece.
- O primeiro x^6 que aparece se cancela com o segundo x^6 que aparece, *restando ainda uma parcela positiva* de x^6 .
- Os dois primeiros x^5 que aparecem se cancelam com os dois seguintes x^5 que aparecem.

- Os primeiros x^4 que aparecem se cancelam com os dois seguintes x^4 que aparecem, *restando ainda uma parcela positiva* de x^4 .
- Os termos x^3 se cancelam.
- Resta um termo positivo de x^2 .
- Os termos x se cancelam.
- Resta o termo 1.

O padrão de cancelamento para o caso geral segue o mesmo modelo.

Enfim, temos a seguinte simplificação:

$$x^{2 \cdot 5} - 1 = (x^2 - 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$$

Para o caso geral, ficaríamos, à direita, somente as potências pares de x :

$$x^{2 \cdot p} - 1 = (x^2 - 1)(x^{2p-2} + x^{2p-4} + \dots + x^4 + x^2 + 1)$$

Aplicando a distributiva no segundo membro, temos:

$$(x^2 - 1)(x^{2p-2} + x^{2p-4} + x^{2p-6} + \dots + x^2 + 1) =$$

$$x^{2p} + x^{2p-2} + x^{2p-4} + \dots + x^4 + x^2 - (x^{2p-2} + x^{2p-4} + \dots + x^4 + x^2 + 1) =$$

$x^{2p} - 1$, o que conclui a nossa justificativa, provando assim a nossa conjectura obtida pelo MAXIMA.

O leitor deve estar se perguntando onde foi usado o fato de p ser primo. De fato, quando p não é primo, mas um ímpar qualquer, *vale também esta fatoração*. Porém, quando se usa o MAXIMA para fatorar o polinômio com p ímpar *não* primo, ele deu uma fatoração diferente, isto é, ele fatorou os polinômios

$$x^{p-1} + \dots + x + 1 \text{ e } x^{p-1} - x^{p-2} + \dots + (-1)^n x^n + \dots + 1$$

em mais polinômios.

Por exemplo, fatorando $x^{2 \cdot 15} - 1$, ele forneceu

$$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \times \\ (x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1),$$

uma expressão bem mais difícil de se obter uma conjectura (veja que o último polinômio foge do padrão na troca de sinais).

Mas p Deve Ser Primo?

A segunda conjectura valia, inicialmente, apenas para p primo ímpar. Na demonstração, no entanto, não foi usado que p é primo. Logo, ela vale para todo p ímpar. A diferença é que, para outros p ímpares, o MAXIMA fatora ainda mais, em fatores irredutíveis sobre os inteiros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Garcia, A., Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*. 1ª edição. Rio de Janeiro, IMPA: 1988. Pág. 51 e 52

CAPÍTULO 5

GRÁFICOS PODEM ENGANAR

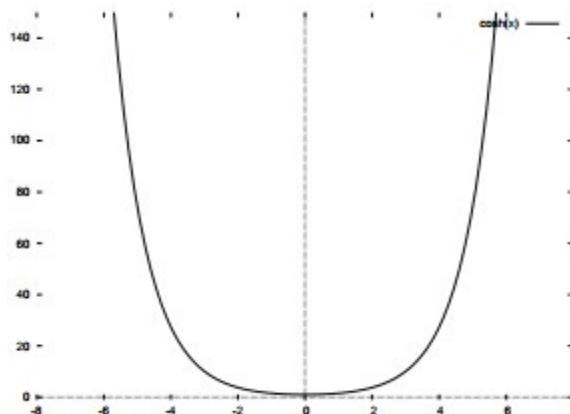
Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: funções e gráficos – Ensino Médio

É conhecida entre os matemáticos a função cujo gráfico é a figura de uma corda suspensa com densidade uniforme, que pode ser encontrada, por exemplo, no artigo da referência [1]:

$$f(x) = \frac{1}{C} \cosh(Cx) + k$$

para constantes apropriadas C e k .

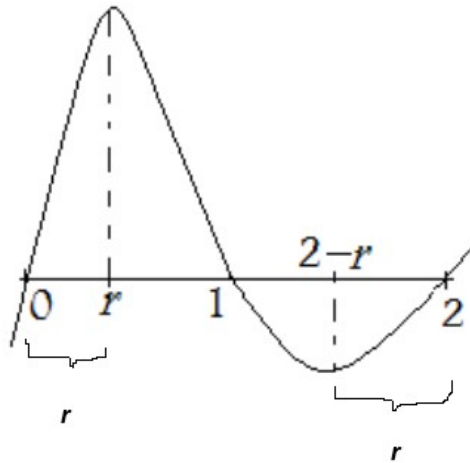
A curva lembra bastante uma parábola:



Este é um exemplo no qual o gráfico pode nos enganar, no sentido de que aparenta ser o gráfico de uma função polinomial do segundo grau, mas não é.

Vamos ver neste capítulo outro engano que pode ocorrer, porém com gráficos que aparentam ser o gráfico de uma função polinomial de grau superior a dois.

O leitor arriscaria a dizer que o gráfico abaixo é o de uma função do terceiro grau?



Em uma primeira análise, seríamos tentados a dizer que sim, é o gráfico de uma função do terceiro grau, de raízes 0, 1 e 2. Porém, se fosse, como a distância entre as raízes é a mesma, de uma unidade, o gráfico para $x < 1$ teria que ser, de uma certa forma, simétrico ao gráfico para $x > 1$, ou seja, $|f(r)|$ teria que ser igual a $|f(2 - r)|$, o que claramente não ocorre neste exemplo.

Este fato é o que vamos provar neste capítulo, para o caso geral. Como o leitor vai observar, a função a ser definida no teorema a seguir terá o 0 como uma das raízes, porém, a menos de translação, o resultado valerá para qualquer outra função polinomial de grau $n + 1$ que possua $n + 1$ raízes igualmente espaçadas.

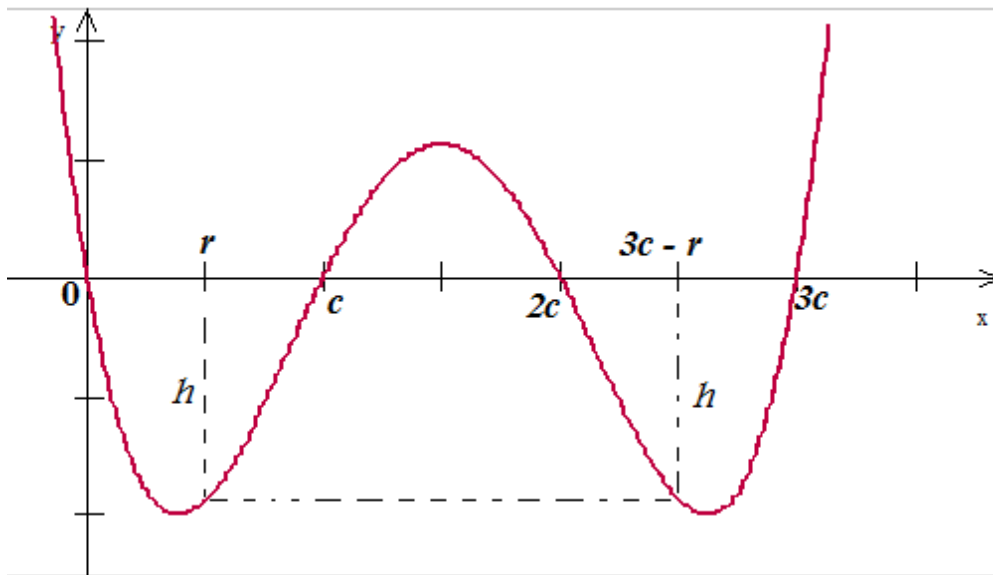
Teorema: Se c é diferente de zero, então a função polinomial de grau $n + 1$,

$$f(x) = kx(x - c)(x - 2c) \cdots (x - nc),$$

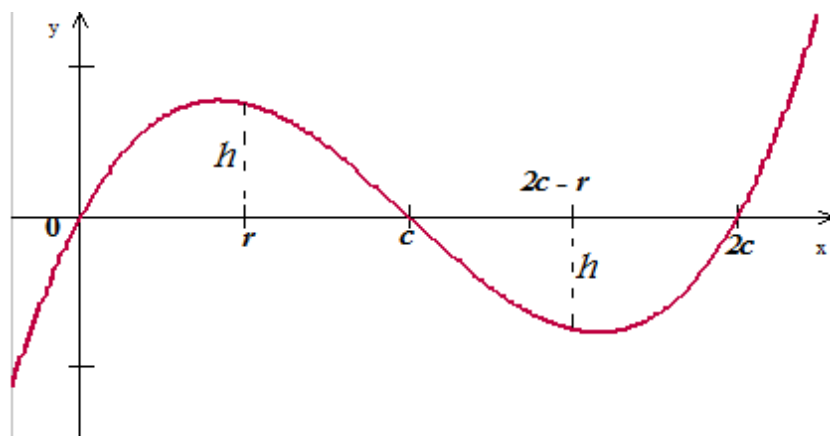
com k diferente de zero, que possui $n + 1$ raízes igualmente espaçadas, satisfaz a seguinte propriedade de simetria:

$$|f(r)| = |f(nc - r)| = h$$

para todo r real. No exemplo abaixo está ilustrada tal simetria para $n = 3$, $k > 0$ e $r > 0$.



Já no exemplo abaixo, $n = 2$, $k > 0$ e $r > 0$.



O teorema diz que o módulo da imagem de um valor que está a uma certa distância $|r|$, à direita da menor das raízes (no caso em que $r > 0$), é igual ao módulo da imagem do valor que está à mesma distância $|r|$, à esquerda da maior das raízes.

Analogamente, o módulo da imagem de um valor que está a uma certa distância $|r|$, à esquerda da menor raiz (caso $r < 0$), é igual ao módulo da imagem do valor que está à mesma distância $|r|$, à direita da maior raiz. Vamos à prova:

De fato, como

$$f(x) = kx(x-c)(x-2c) \cdots (x-nc),$$

então:

$$|f(nc-r)| = |k(nc-r)(nc-r-c) \cdots (nc-r-(n-1)c)(nc-r-nc)| =$$

$$\left| k(r - nc)(r - (n-1)c) \cdots (r - c)r \right| = |f(r)|,$$

como queríamos demonstrar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] site <http://www.ime.usp.br/~martha/mat2453-2003/catenaria.pdf>, disponível em 11/09/2012

CAPÍTULO 6

PROGRESSÕES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS NUM JOGO FAMOSO DE VIDEO GAME

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: progressões, probabilidade, valor esperado – Ensino Médio

Um Jogo Antigo e Famoso

No artigo de Raphael Alcaires de Carvalho, da Revista do Professor de Matemática – RPM, volume 77, foi resolvido um problema de tempo de fuga usando P.A.G. (progressão aritmético geométrica) e valor esperado. Neste capítulo, usaremos também estes dois conceitos, mas num histórico jogo de vídeo game.

O “Alex Kidd in Miracle World” foi, sem dúvida, um dos dois maiores jogos do video game Master System, ao lado de Sonic, na virada da década de 80 para 90. É muito provável que muitos de nós professores o tenhamos jogado. Eu ainda jogo até hoje e, durante o jogo, há vários momentos em que algum inimigo me desafia no conhecido “pedra, papel e tesoura” (abreviaremos para PPT).

Cada desafio no PPT é realizado com um inimigo diferente, e cada um é na verdade composto por vários PPT: e quem for o primeiro a vencer dois PPT (não precisa ser seguido) ganha o desafio naquele momento, com aquele inimigo.

Trata-se de um melhor de 3. Por exemplo: se o Alex Kidd (eu na verdade) perder o primeiro PPT, vencer o segundo, empatar no terceiro e perder no quarto PPT, o inimigo venceu este desafio e o Alex Kidd perde uma vida – veja a tabela abaixo:

Alex Kidd	Inimigo
Tesoura	Pedra – vitória do inimigo no PPT
Tesoura	Papel – derrota do inimigo
Pedra	Pedra – empate
Pedra	Papel – segunda vitória do inimigo

Se, porém, o Alex Kidd consegue ser o primeiro a vencer dois PPT, ele ganha o desafio, o inimigo morre e o jogo continua na próxima fase. Um outro inimigo, mais adiante, o desafiará novamente no PPT, no mesmo esquema.

O últimos inimigos de Alex Kidd

Acontece que os últimos inimigos a desafiar Alex no PPT permitem que se veja o seu pensamento durante os segundos que antecedem a escolha de cada lance (rodada). Ambos os personagens têm alguns segundos para a escolha do objeto a ser indicado pela mão na 'hora H' – pedra, papel ou tesoura. E, durante este tempo, um balão (como nas revistinhas em quadrinho) aparece em cima da cabeça dos dois, mostrando qual objeto está em seu pensamento naquele instante. O último objeto ilustrado no balão é o que será jogado pelos jogadores na respectiva rodada.

O objeto dentro do balão que fica em cima de Alex pode ser alterado por mim através do controle do video game, indo para cima ou para baixo. Já o balão em cima da cabeça do inimigo parece mudar aleatoriamente a cada meio segundo aproximadamente, até que uma hora o tempo se esgota e os objetos são finalmente indicados pela mão dos participantes e o jogo avalia quem ganhou a rodada. Porém, a mudança de um objeto para outro que o inimigo realiza em seu pensamento é muito rápida, não dando tempo de eu escolher o objeto ideal para ganhar. Talvez o leitor lembre-se desta dificuldade.

Então, eu penso que a melhor estratégia é a seguinte: eu deixo o meu objeto na Tesoura, sabendo que, se eu der um toque para baixo no controle, o objeto muda para Papel, se preciso for. Fico portanto preparado para mudar apenas de Tesoura para Papel, se o inimigo escolher a Pedra.

Eu preparo meu reflexo unicamente se ele puser pedra. É uma simplificação necessária levando em consideração o tempo do meu reflexo. Isso vai significar que eu estarei preparado para empatar com a Tesoura (se ele mostra Tesoura eu não mexo), ou ganhar com Tesoura (se ele mostrar Papel eu também não mexo e continuo na Tesoura), ou ganhar com Papel (como já disse, se ele colocar Pedra eu vou para baixo e coloco Papel).

Esta estratégia me garante que eu empato numa situação ou ganho em duas situações, isso em cada rodada. E também me garante que eu não perco, não importa quanto tempo e quantas rodadas iremos precisar. E aqui vem a pergunta: usando esta

estratégia, qual é o número de rodadas *esperado* até que eu vença o desafio com um dado inimigo, ou seja, para que eu ganhe dois PPT em cima dele?

Vamos verificar neste capítulo que o número de rodadas esperado até que eu vença o desafio é três rodadas.

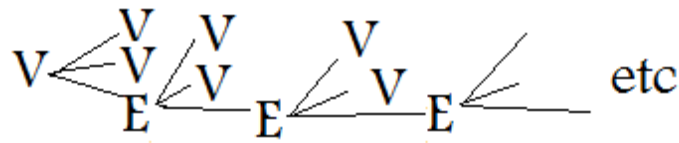
Vamos aos cálculos: na rodada, se o inimigo escolhe Papel ou Pedra ele perde, pois, no primeiro caso eu permaneço na Tesoura e no segundo caso eu mudo para Papel. E, se o inimigo escolhe Tesoura, empatamos, pois eu permaneço na Tesoura. Logo, vamos denotar Papel e Pedra pela mesma letra V (vitória minha), e Tesoura pela letra E (de empate). Vamos montar uma árvore de possibilidades, lembrando que eu ganho com dois V. Separemos em dois casos. Primeiro quando o inimigo joga Pedra ou Papel no primeiro lance:

Pedra ou Papel no Primeiro Lance

Inicialmente, vejamos quando o inimigo joga Pedra, em que V = vitória e E = empate:

1º lance	2º lance	3º lance	4º lance
V (ele joga Pedra com probabilidade $1/3$ e eu mudo para Papel)	V (ele joga Pedra com probabilidade $1/3$ e eu mudo para Papel)	Não tem	Não tem
	V (ele joga Papel com probabilidade $1/3$ e eu fico na Tesoura)	Não tem	Não tem
	E (ele joga Tesoura com probabilidade $1/3$ e eu fico na Tesoura)	V (ele joga Pedra com probabilidade $1/3$ e eu mudo para Papel)	Não tem
		V (ele joga Papel com probabilidade $1/3$ e eu fico na Tesoura)	Não tem
		E (ele joga Tesoura com probabilidade $1/3$ e eu fico na Tesoura)	V (ele joga Pedra com probabilidade $1/3$ e eu mudo para Papel)
			V ...
			E (etc)

Por uma figura podemos também enxergar as rodadas acima:



Vamos chamar essa árvore de *Galho Fundamental iniciado em V*, pois usaremos mais tarde.

O número de rodadas esperado será, portanto (x_k = rod significa rodadas):

$$\begin{aligned} E(x) &= P(x_1) \cdot x_1 + \dots + P(x_n) \cdot x_n + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \text{ rod} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \text{ rod} \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \text{ rod} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \text{ rod} \right) + \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \text{ rod} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \text{ rod} + \dots \right) + \dots \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots \right) = \frac{2}{3^2} \cdot \left(2 + \frac{3}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

que é igual, pela fórmula da P.A.G.

$$S = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2},$$

de razão da P.A. $r = 1$, razão da P.G. $q = 1/3$, e primeiro termo $a = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3^2} \cdot \left(\frac{2}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \right) &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \right) = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

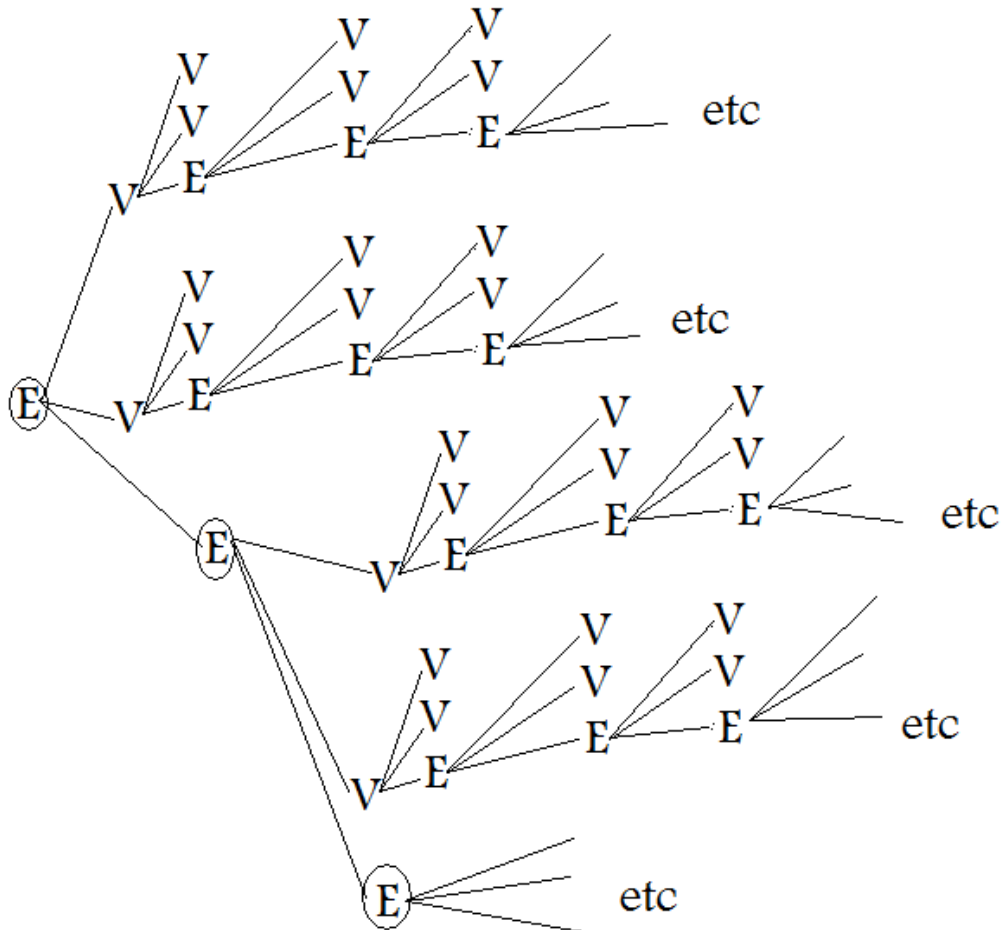
Não calculamos o valor final de propósito, pois teremos um padrão nos diferentes casos.

Agora, se ele começa com Papel, eu ganho a rodada da mesma forma, e a árvore fica idêntica. Logo, até aqui, o sub-total do valor esperado do número de rodadas é o dobro do calculado acima:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3^2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3}{4} \right).$$

Agora, falta somar com o valor esperado do segundo caso, no qual há empate na primeira rodada:

Segundo caso: Tesoura no Primeiro Lance



Acompanhando a figura acima, observe o seguinte: há dois *Galhos Fundamentais iniciados em V* adjacentes ao primeiro E circulado. Analogamente, há dois *Galhos Fundamentais iniciados em V* adjacentes ao segundo E circulado, que é adjacente ao primeiro E. E assim por diante, para cada E circulado. Cada E circulado aumenta uma rodada.

Logo, o valor esperado do número de rodadas nesse terceiro caso será, em analogia ao primeiro caso:

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \text{rod} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \text{rod} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \text{rod} \cdot 2 + \dots \right) \cdot 2 +$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \text{rod} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \text{rod} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \text{rod} \cdot 2 + \dots \right) \cdot 2 + \dots =$$

$$4 \cdot \left[\left(\frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots \right) + \left(\frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \frac{6}{3^6} + \dots \right) + \dots \right] =$$

$$4 \cdot \left[\frac{1}{3^3} \left(3 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3^2} + \dots \right) + \frac{1}{3^4} \left(4 + \frac{5}{3} + \frac{6}{3^2} + \dots \right) + \dots \right],$$

que é igual, pela fórmula da P.A.G. em cada parêntese, a

$$4 \cdot \left[\frac{1}{3^3} \left(\frac{3}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \right) + \frac{1}{3^4} \left(\frac{4}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \right) + \dots \right] =$$

$$4 \cdot \left[\left(\frac{3}{3^3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \right) + \left(\frac{4}{3^4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \right) + \dots \right].$$

Incluindo aí o primeiro e o segundo casos, temos o valor esperado total do número de rodadas necessárias para que eu ganhe de um dado inimigo no desafio do PPT:

$$4 \cdot \left[\left(\frac{2}{3^2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{3^3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{4}{3^4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3^4} \cdot \frac{3}{4} \right) + \dots \right],$$

que é igual, agrupando adequadamente, a

$$4 \cdot \left[\left(\frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots \right) \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \cdot \frac{3}{4} \right] =$$

$$4 \cdot \left[\frac{1}{3^2} \cdot \left(2 + \frac{3}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots \right) \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \cdot \frac{3}{4} \right]$$

que é igual, usando novamente a P.A.G. no primeiro parênteses com $a = 2$, $r = 1$ e $q = 1/3$, e a fórmula da P.G. no segundo parênteses, a rodadas.

$$4 \cdot \left[\frac{1}{3^2} \cdot \left(\frac{2}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \right) + \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{4} \right] =$$

$$4 \cdot \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \right] = 4 \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{8} \right) = 3$$

CAPÍTULO 7

UMA PROVA LÚDICA DO VOLUME DO TETRAEDRO

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: geometria espacial, tetraedros
– Ensino Médio

Neste capítulo iremos provar visualmente a fórmula do volume do tetraedro: um terço do produto da área da base pela altura. Também iremos dar sugestões de como construir com papel, cola e tesoura os elementos utilizados na demonstração. Poderá servir como ótima atividade lúdica para os alunos de ensino médio ou até mesmo do fundamental.

Para tanto, vamos assumir o fato de que o volume de um tetraedro só depende da área da base e da altura, e também vamos assumir conhecida a fórmula do volume do prisma como sendo o produto entre a área da base e sua altura.

Considere o tetraedro P abaixo de base ABC e vértice V , não necessariamente reto, cujo volume queremos descobrir. Vamos trabalhar em quatro curtos passos.

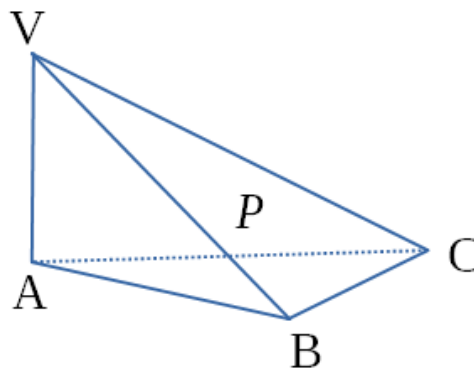


Figura 1 – Um tetraedro P qualquer cuja fórmula do volume se quer descobrir

Passo 1

Por V , no plano VAB , trace uma paralela a AB . Neste mesmo plano, por B , trace uma paralela a AV . Denote por D a interseção das duas paralelas assim construídas.

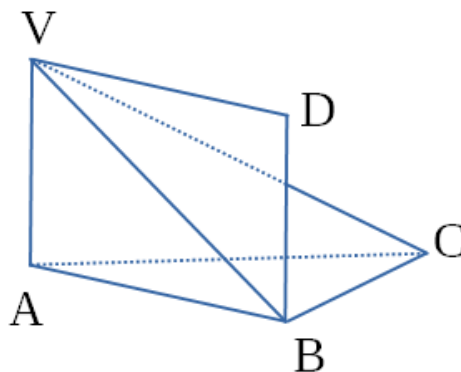


Figura 2 – Resultado do passo 1

Observe que $ABDV$ é, portanto, um paralelogramo e por isso os dois triângulos ABV e DVB que o compõem são congruentes e logo possuem mesma área.

Passo 2

No plano ao fundo VAC , por V , trace uma paralela a AC . Neste mesmo plano, por C , trace uma paralela a AV . Denote por E a interseção das duas paralelas assim construídas. Assim, temos formado um prisma triangular $ABCVDE$ de bases ABC e VDE , composto pelo tetraedro $ABCV$ e pela pirâmide quadrangular de base $BCED$ e vértice V .

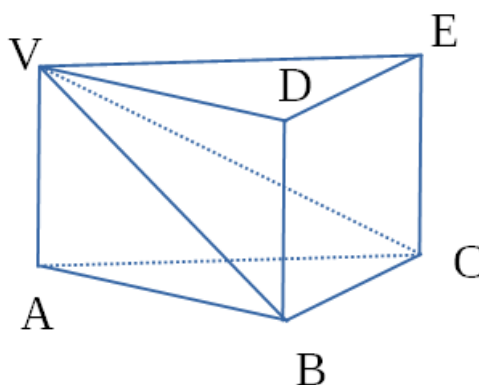


Figura 3 – Resultado dos passos 1 e 2

Observe que, como $BD = AV$ e $CE = AV$, então $BD = CE$ e são segmentos paralelos por transitividade, logo, $BDEC$ é um paralelogramo também. Isto é, a diagonal DC o divide em dois triângulos congruentes. Este será o próximo passo.

Passo 3

Agora, crie a aresta DC. Assim, a pirâmide quadrangular ficou agora formada por dois tetraedros: o de base BVD e vértice C, denotado por Q, e o de base DCE e vértice V, denotado por R, tendo em comum a face DVC, como mostram as figuras 4 e 5.

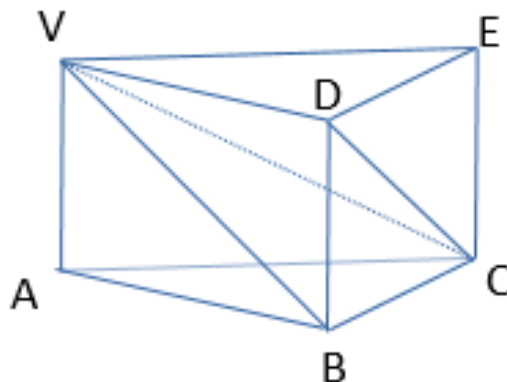


Figura 4 – Criação da aresta DC

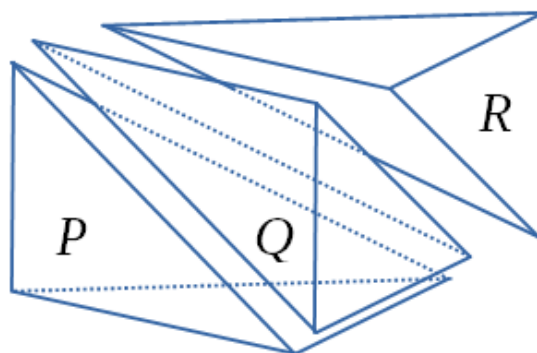


Figura 5 – Os poliedros P, Q e R vistos separadamente

Passo 4

Os tetraedros P e Q de bases ABV e DVB, respectivamente, possuem áreas das bases iguais e uma mesma altura, que corresponde à distância do plano ABDV ao vértice C.

Como tínhamos visto, os triângulos BCD e DEC possuem mesma área, logo, considerando estes triângulos como sendo as bases dos tetraedros Q e R, respectivamente, vemos que possuem áreas das bases iguais e mesma altura, que correspondente à distância do plano BDEC ao vértice V.

Logo, os três tetraedros possuem mesmo volume. Enfim, o volume do tetraedro P é igual a um terço do volume do prisma triangular, que corresponde ao produto da área da base pela altura, encerrando, assim, a prova visual da fórmula do volume do tetraedro.

Construção com papel, cola e tesoura

Nossa abordagem para a construção dos tetraedros não será feita por meio da planificação dos mesmos. Ao contrário, iremos construir todos os triângulos que os compõem em separado.

Para que se arquitetem os três tetraedros que formam o prisma utilizando-se papel, cola e tesoura, são necessários doze triângulos. Quais seriam estes doze triângulos? Vejamos:

O tetraedro P original pode ser reto para facilitar as construções e os recortes. A base pode ser regular de lado 3, e a altura pode ser 4. Desta forma, $VB = VC = 5$, como ilustra a figura 6.

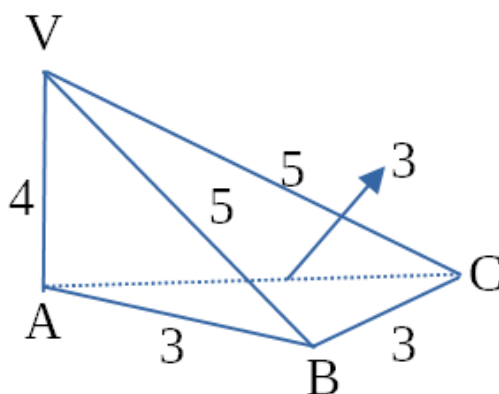


Figura 6 – Medidas do tetraedro P

Isto é, para P, são necessários dois triângulos retângulos de lados 3, 4 e 5, um triângulo isósceles de lados 3, 5 e 5 e um triângulo equilátero de lado 3.

Conforme o leitor pode verificar nas figuras 4 ou 5, o poliedro Q por sua vez possui como faces dois triângulos retângulos de lados 3, 4 e 5 e dois triângulos isósceles de lados 3, 5 e 5.

Já o poliedro R possui como faces um triângulo equilátero de lado 3, dois triângulos retângulos de lados 3, 4 e 5 e um triângulo isósceles de lados 3, 5 e 5 (confira também nas figuras 4 ou 5).

Enfim, são apenas três tipos de triângulos a serem construídos, em quantidades diferentes. São seis triângulos retângulos, quatro isósceles e dois equiláteros. Os triângulos podem ser construídos em softwares como Geogebra ou Winplot, e depois impressos.

No winplot, a construção de um triângulo pode ser feita por meio de segmentos determinados pelos seus dois pontos extremos. Para o triângulo equilátero de lado 3, os pontos do plano cartesiano correspondentes aos vértices do triângulo poderiam ser, por exemplo, (0,0), (3,0) e $(1,5; \sqrt{9-1,5^2})$. Já para o triângulo de lados 3, 5 e 5, seriam: (0,0), (3,0) e $(1,5; \sqrt{25-1,5^2})$. Já o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 possui vértices (0,0), (3,0) e (0,4).

Basta então criar os segmentos para cada triângulo, copiar e colar os triângulos formados num programa de desenho ou de edição de texto para a impressão, tendo o cuidado de manter a proporção entre os lados entre eles. Se for necessário ampliar a figura no computador para imprimi-la, aumente todos os triângulos de uma só vez.

No momento de recortar os doze triângulos tome o cuidado de deixar uma aba de um centímetro em média, para cada lado do triângulo, para facilitar a colagem. Decerto, algumas abas poderão ser descartadas no momento da colagem, pois uma poderá já ser suficiente na junção entre duas faces.

Recomenda-se fazer triângulos de tamanhos tais que, numa página do editor de texto caibam somente 4 triângulos.

Após serem construídas no Winplot, os triângulos ficariam com os formatos da figura 7. No entanto, como dito, para recortá-los é necessário antes que seus tamanhos sejam aumentados para que a colagem seja executada de modo mais eficiente.

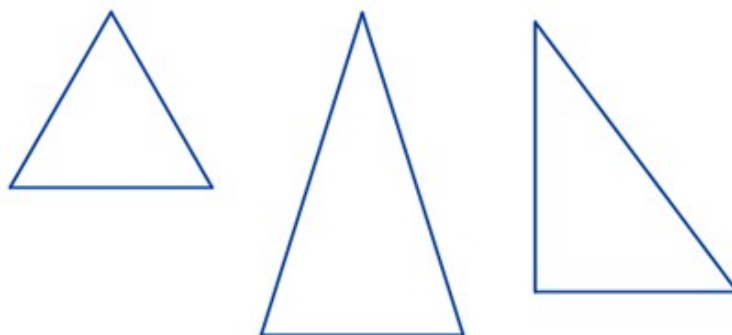


Figura 7 – Os triângulos 3 por 3 por 3, 3 por 5 por 5 e 3 por 4 por 5, respectivamente, prontos para serem ampliados, reproduzidos e recortados

O prisma pode então ser montado pela classe para verificação da fórmula do volume do tetraedro, por meio da identificação dos pares de tetraedros que possuem bases com áreas iguais e mesma altura, como mostrado no passo 4 da demonstração da fórmula.

Abaixo, a foto do prisma decomposto que fizemos:

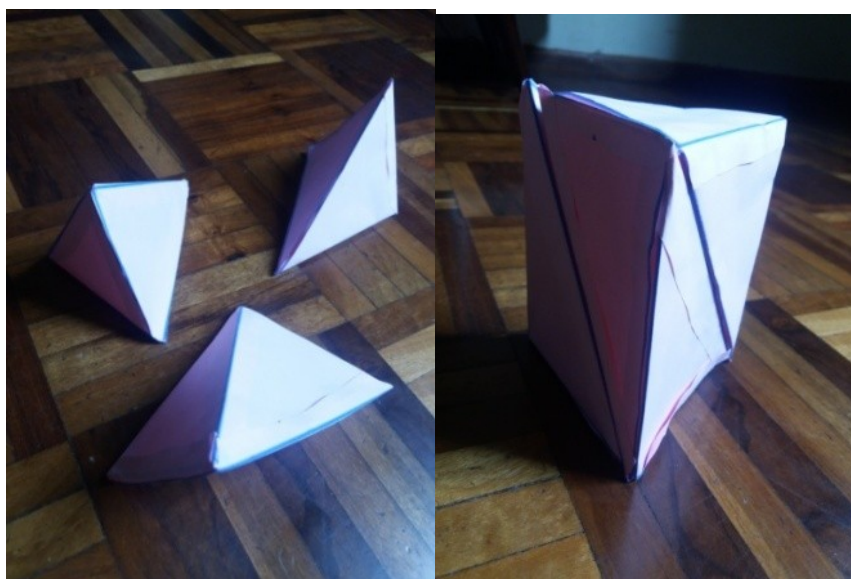


Figura 8 – Fotos dos tetraedros formando um prisma

CAPÍTULO 8

DE VOLTA AOS 5 POLIEDROS REGULARES

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: Geometria espacial, poliedros – Ensino Médio e Ensino Superior

É muito comum encontrarmos textos, voltados para o Ensino Médio, que explicam o porquê da existência de no máximo 5 poliedros regulares. Em geral, a explicação é que, em cada vértice do poliedro, a soma dos ângulos que o rodeiam deve ser menor do que 360° . Desta forma, com triângulos equiláteros, só é possível formar poliedros regulares de modo que em cada vértice cheguem 3, 4 ou 5 triângulos, respectivamente: o tetraedro regular, o octaedro regular e o icosaedro regular. Com quadrados, só é possível formar o poliedro regular no qual em cada vértice cheguem 3 faces, o hexaedro regular. E, com pentágonos, apenas o poliedro regular no qual em cada vértice cheguem 3 faces, o dodecaedro regular.

Esta explicação está correta, e convence satisfatoriamente nossos alunos. Porém, ela carece de um rigor matemático. De fato, no plano, quando tentamos juntar, por exemplo, três faces heptagonais congruentes, uma face necessariamente se sobrepõe à outra, pois o ângulo interno de cada face vale $\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 180^\circ \cdot \frac{5}{7} = 128,57^\circ$. Três faces adjacentes somam, portanto, $385,71^\circ$ ao redor de um vértice, valor maior ou igual a 360° . Porém, esta soma é no plano. Está faltando explicar que, quando tentamos juntar as três faces heptagonais ao redor de um vértice no espaço, tal feito também se torna impossível. Isto é, falta mostrar que, num poliedro regular, a soma dos ângulos que rodeiam um vértice também deve ser, agora no espaço, menor do que 360° . E, para a prova, beberemos da fonte primária, isto é, do próprio livro de Euclides, os Elementos.

Desigualdade angular

Antes de mostrarmos que, num poliedro regular, a soma dos ângulos que rodeiam um vértice é menor do que 360° , precisaremos de um lema bastante interessante em si mesmo. Trata-se de uma espécie de desigualdade angular:

Cada ângulo de um triedro é menor do que a soma dos outros dois ângulos.

Demonstração:

Considere um triedro $XZYV$ qualquer de vértice V . Queremos provar que $\widehat{XVY}$ é menor do que a soma dos ângulos $\widehat{ZVY}$ e $\widehat{XVZ}$. Dividimos a prova em dois casos.

Caso a) $\widehat{XVY} \leq \widehat{ZVY}$. Assim, é imediato que $\widehat{XVY}$ é menor que a soma dos outros dois ângulos do triedro, $\widehat{ZVY}$ e $\widehat{XVZ}$.

Caso b) $\widehat{XVY} > \widehat{ZVY}$. Na face XVY , trace uma semi reta VW tal que $\widehat{YVW} = \widehat{YVZ}$.

Marque, nas semi retas VZ e VW , pontos C e D tais que $\overline{VD} = \overline{VC}$. Se B é um ponto qualquer em VY , temos, por LAL, $\overline{BD} = \overline{BC}$.

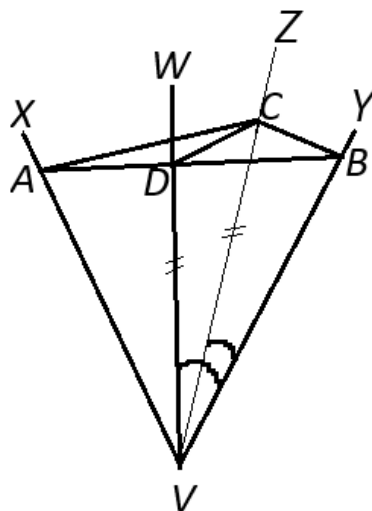


Figura 1 – O triedro $XZYV$

Se A é um ponto de VX colinear com B e D , então, usando a desigualdade triangular no triângulo ABC , vemos que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, logo,

$\overline{AD} + \overline{DB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, e, portanto, como $\overline{BD} = \overline{BC}$, então:

$$\overline{AD} < \overline{AC}.$$

Assim, considerando os triângulos AVD e AVC , de lado comum AV e lados congruentes VD e VC , pela lei dos cossenos, temos que $\widehat{AVD} < \widehat{AVC}$. Logo, $\widehat{AVB} = \widehat{AVD} + \widehat{DVB} < \widehat{AVC} + \widehat{BVC}$, isto é, $\widehat{XVY}$ é menor que a soma dos outros dois ângulos do triedro, $\widehat{XVZ}$ e $\widehat{ZVY}$, o que termina a prova do lema.

Condição necessária para a existência do poliedro convexo

Agora sim, podemos provar o seguinte resultado, válido não apenas para os poliedros regulares, mas também para os poliedros convexos. Trata-se de uma condição necessária para que um poliedro seja convexo.

Teorema: num poliedro convexo, a soma dos ângulos que rodeiam um vértice qualquer é menor do que dois ângulos rasos.

Na proposição 21 do Livro XI do livro de Euclides, a demonstração deste fato está feita para o caso particular do tetraedro. Aqui, faremos a adaptação da prova de Euclides para o caso geral.

Considere inicialmente uma pirâmide qualquer com vértice A . Sejam $a_i, i=1, \dots, n$ os valores dos ângulos do poliedro que incidem em A . As faces triangulares da pirâmide possuem, portanto, ângulos a_i , aqueles que têm vértice A , e $2n$ ângulos $x_j, j=1, \dots, 2n$, que não têm vértice A . Há na pirâmide, ainda, os ângulos internos $b_i, i=1, \dots, n$, da base da pirâmide.

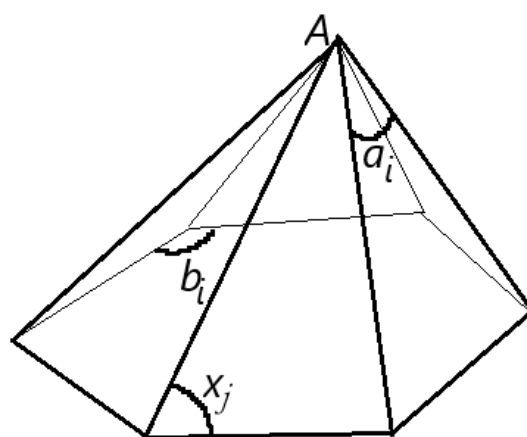


Figura 2 – Pirâmide de vértice A e seus ângulos

Encare cada vértice da base da pirâmide como sendo vértice de um triedro, formado pelas três arestas que incidem nele, as duas arestas da base e a aresta lateral. Usando

portanto o resultado do lema anterior em cada vértice da base da pirâmide, vemos que a soma de todos os ângulos x_j de todas as faces laterais satisfaz a desigualdade:

$$\sum_{j=1}^{2n} x_j > \sum_{i=1}^n b_i = 180^\circ(n-2),$$

onde $180^\circ(n-2)$ é a soma dos ângulos internos b_i da base da pirâmide de n lados.

Agora, calculando a soma S_f de todos os ângulos de todas as n faces laterais da pirâmide, agrupando-os por triângulos, temos:

$$S_f = 180^\circ n = \sum_{j=1}^{2n} x_j + \sum_{i=1}^n a_i > (180^\circ n - 360^\circ) + \sum_{i=1}^n a_i \leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n a_i < 360^\circ.$$

Logo, no vértice da pirâmide, vale o teorema.

Finalmente, considerando um poliedro convexo qualquer de faces não necessariamente triangulares, seja um vértice qualquer A . Suponha que, neste poliedro, não haja duas faces adjacentes num mesmo plano. Próximo o suficiente ao vértice A , intersecte um plano de tal modo que todas as arestas que incidem em A sejam intersectadas pelo plano, nos pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$, e que nenhuma outra aresta do poliedro seja intersectada pelo plano. Podemos fazer isto pela convexidade do poliedro. O sólido de vértices $A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ é uma pirâmide. Aplicando o resultado acima no vértice A , concluímos a prova do teorema para poliedros quaisquer.

Enfim, em qualquer poliedro convexo, a soma dos ângulos que rodeiam um vértice é menor do que 360° . Em particular, vale para os poliedros regulares.

Observamos que, se A é o vértice de um poliedro qualquer, convexo ou não, o valor $d_A = 2\pi - s_A$, onde s_A é a soma dos ângulos que rodeiam o vértice A , é definido como sendo o defeito angular do vértice A , e é positivo para os poliedros convexas, conforme demonstramos aqui. Em geral, demonstra-se que $\sum d_A$, a soma de todos os defeitos angulares dos vértices de um poliedro qualquer, vale $2\pi(V + F - A)$, e, para os poliedros convexas, em particular para os regulares, esta soma vale, portanto, 4π . Mas isto já seria assunto para outro livro...

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Euclides. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. Editora UNESP. 2009.

Muniz Neto, A. C. Geometria. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

Neto, A. P. Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 1 – Fundamentos.

Poliedros - parte 2. Revisor: Antônio Caminha Muniz Neto. Portal da Matemática. OBMEP.

Pedone, N. M. D. Poliedros de Platão. Revista do Professor de Matemática. SBM. vol. 15.

CAPÍTULO 9

A RAIZ QUADRADA DO NÚMERO $x+y\sqrt{z}$

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: Expressões algébricas – Ensinos Fundamental e Médio

INTRODUÇÃO

O problema resolvido no quadro Um Teste, da seção O Leitor Pergunta da RPM 84, é o seguinte: qual é o valor da raiz cúbica $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$? Algumas opções eram dadas para se marcar a correta, sendo a resposta $2-\sqrt{3}$. Então, me surgiu a dúvida: raízes do tipo $\sqrt[n]{x+y\sqrt[m]{z}}$ sempre possuem soluções do tipo $a+b\sqrt[p]{z}$? No presente capítulo, analiso, em particular, o seguinte

Problema: Sejam dados x, y e z racionais não nulos, onde $z > 0$ não é um quadrado perfeito, tal que $x+y\sqrt{z} > 0$. Sob quais condições necessárias e suficientes as raízes quadradas do tipo $\sqrt{x+y\sqrt{z}}$ têm (única) solução real do tipo $a+b\sqrt{z} > 0$, onde a e b são também racionais não nulos?

Encontrando a primeira condição necessária para a existência da referida raiz: $x > 0$

Partindo-se da hipótese de que o radicando $x+y\sqrt{z}$ é positivo, podemos afirmar que a igualdade $\sqrt{x+y\sqrt{z}} = a+b\sqrt{z}$, vale se e somente se

$$x+y\sqrt{z} = a^2 + zb^2 + 2ab\sqrt{z} \leftrightarrow$$

$$x - (a^2 + zb^2) = (2ab - y)\sqrt{z}.$$

Como z não é um quadrado, então $\sqrt{z}$ não é racional. Logo, como as demais variáveis são números racionais não nulos, a igualdade acima vale se e somente se os dois membros são iguais a zero, ou seja, se e somente se vale o seguinte sistema, nas incógnitas a e b .

$$\begin{cases} a^2 + zb^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}$$

Observe que, da primeira equação deste sistema, e da hipótese $z > 0$, concluímos que x deve ser positivo, sendo esta uma primeira condição necessária para que o

problema tenha solução. Devemos assumir, portanto, temporariamente que $x > 0$, para continuarmos a resolver o problema.

Encontrando a segunda condição necessária: $z \leq \left(\frac{x}{y}\right)^2$

Considerando portanto a hipótese $x > 0$, temos que o sistema acima vale se e somente se:

$$\begin{cases} a = \frac{y}{2b} \\ \left(\frac{y}{2b}\right)^2 + z b^2 = x \end{cases}$$

$$\leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{y}{2b} \\ \frac{y^2}{4b^2} + z b^2 = x \end{cases}$$

$$\leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{y}{2b} \\ 4z b^4 - 4x b^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

sendo a segunda equação uma equação biquadrada na incógnita b . Tomando $0 < b^2 = w$, temos que o sistema acima tem solução se e somente se vale o seguinte sistema, nas incógnitas a , b e w :

$$\begin{cases} w = b^2 \\ a = \frac{y}{2b} \\ (*) \quad 4zw^2 - 4xw + y^2 = 0 \end{cases}$$

O discriminante da equação $*$ é:

$$\Delta = 16x^2 - 16zy^2.$$

Logo, para que o sistema acima tenha solução, deve-se ter

$$x^2 - zy^2 \geq 0,$$

isto é,

$$z \leq \left(\frac{x}{y}\right)^2,$$

Esta é, portanto, uma segunda condição necessária, que também deve estar no rol das hipóteses assumidas para que se possa resolver o problema.

Para nossa tranquilidade, o valor de w na equação (*) nunca será negativo. Se a equação (*) fornecer resultado w negativo, teremos problemas. Porém, isso não acontece, pois, como por hipóteses $z > 0$ e $x > 0$, temos que a equação (*) vale se e somente se

$$4xw = y^2 + 4zw \rightarrow$$

$$w = \frac{y^2 + 4zw^2}{4x} > 0.$$

Encontrando a terceira e última condição necessária: um dos valores (e portanto único) de $\frac{x \pm \sqrt{x^2 - zy^2}}{2z}$ é um quadrado perfeito

Assumindo as duas condições encontradas, temos que o último sistema tem solução se e somente se o sistema seguinte tem solução em a , b e w :

$$\begin{cases} w = b^2 \\ a = \frac{y}{2b} \\ w = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 16zy^2}}{8z} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - zy^2}}{2z} \end{cases},$$

desde que um dos valores de w acima seja quadrado perfeito, sendo esta a terceira e última condição necessária, que também deverá ser assumida. Observe que nunca haverá dois valores de w quadrados perfeitos, já a raiz quadrada que procuramos é única.

E as condições suficientes?

Assumindo as três condições que encontramos, podemos então obter a solução $a + b\sqrt{z}$ da raiz $\sqrt{x + y\sqrt{z}}$. E, como a raiz quadrada é um valor positivo, deve-se ter o cuidado de que a e b não sejam simultaneamente negativos. No entanto, não teremos este problema, pois, como b assumirá um valor negativo e outro positivo, tem-se a garantia de que haverá um par (a, b) único de números racionais não simultaneamente negativos que resolverá o sistema, e portanto, resolverá o problema.

Assim, as três condições encontradas, que, a princípio, são necessárias, juntas são também suficientes para que se tenha a solução do problema. Vamos resumir todas as informações obtidas na seguinte proposição:

Proposição: Sejam dados x , y e z racionais não nulos tais que $x+y\sqrt{z}>0$, onde $z > 0$ não é um quadrado perfeito. Então, para que a raiz quadrada $\sqrt{x+y\sqrt{z}}$ seja igual a um número real do tipo $a+b\sqrt{z}$, com a e b racionais não nulos,

A) é necessário que ocorra cada sentença abaixo:

$$1) x > 0$$

$$2) z \leq \left(\frac{x}{y}\right)^2, \text{ e}$$

$$3) \text{ ou } \frac{x+\sqrt{x^2-zy^2}}{2z} \text{ ou } \frac{x-\sqrt{x^2-zy^2}}{2z} \text{ é quadrado perfeito;}$$

B) é suficiente (e necessário) que as três hipóteses acima sejam satisfeitas simultaneamente.

Exemplos

Calcular no formato $a+b\sqrt{z}$:

a) $\sqrt{6+3\sqrt{5}}$. Aqui, a condição 2) é contraditada: $z=5 > \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 4$. Portanto, a raiz $\sqrt{6+3\sqrt{5}}$ não poderá ser escrita sob a forma $a+b\sqrt{5}$ com a e b racionais não nulos.

b) $\sqrt{49+12\sqrt{5}}$. Vejamos a condição 2): $z=5 \leq \left(\frac{49}{12}\right)^2 = 16,7$ aproximadamente, ok. Agora, a condição 3):

$$w = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - zy^2}}{2z} = \frac{49 \pm \sqrt{2.401 - 720}}{10} = \frac{49 \pm 41}{10} =$$

9, ou 0,8. Note que $w = 9$ é um quadrado perfeito, logo, como também é satisfeita a condição 1) ($x > 0$), o problema tem solução:

Sendo $b^2 = w$ $\rightarrow b = \pm 3$.

Para $b = -3$, temos $a = \frac{y}{2b} = \frac{12}{-6} = -2$, daí $-2-3\sqrt{5}$ seria uma candidata à solução.

Porém, como a raiz quadrada $\sqrt{49+12\sqrt{5}}$ é por definição um valor positivo, essa não seria uma solução da raiz.

Para $b = 3$, temos $a = \frac{y}{2b} = \frac{12}{6} = 2$, daí $\sqrt{49+12\sqrt{5}} = 2+3\sqrt{5}$, sendo essa a resposta.

C) $\sqrt{49-12\sqrt{5}}$. Pela similaridade com o item anterior, sabemos que as condições 1), 2) e 3) são satisfeitas, logo, há solução. Os valores de w são os mesmos: 9 ou 0,8. Descartando $w = 0,8$:

Para $b = -3$, temos $a = \frac{y}{2b} = \frac{-12}{-6} = 2$, daí $2-3\sqrt{5} < 0$ seria uma candidata à solução.

Porém, como a raiz quadrada $\sqrt{49-12\sqrt{5}}$ é por definição um valor positivo, essa não seria uma solução da raiz.

Para $b = 3$, temos $a = \frac{y}{2b} = \frac{-12}{6} = -2$, daí $\sqrt{49-12\sqrt{5}} = -2+3\sqrt{5} > 0$, sendo essa a resposta.

D) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$. Condição 1) satisfeita. Vejamos a condição 2): $z = 2 \leq \left(\frac{6}{-4}\right)^2 = 1,5^2$, ok. Agora, a condição 3):

$$w = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - z y^2}}{2z} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} =$$

2 ou 1. Descartando $w = 2$, temos que $w = 1$ satisfaz a terceira condição. Daí,

Para $b = -1$, temos $a = \frac{y}{2b} = \frac{-4}{-2} = 2$, daí $2-\sqrt{2} > 0$ seria a solução. Para $b = 1$, teríamos $-2+\sqrt{2} < 0$ como candidata, sendo essa devendo ser descartada.

Observação

Se estivéssemos tentando resolver a equação

$$X^2 = 49 + 12\sqrt{5},$$

com $X = a+b\sqrt{5}$, onde a e b são racionais não nulos, aí sim as duas soluções seriam aceitas, a positiva e a negativa. O mesmo vale para as equações $X^2 = 49 - 12\sqrt{5}$ e $X^2 = 6 - 4\sqrt{2}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Seção o Leitor Pergunta – Um Teste. Revista do Professor de Matemática - RPM no 84, p. 58. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

CAPÍTULO 10

2N-ÁGONOS. UMA PROPRIEDADE

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: Geometria Plana e Geometria Analítica: Ensinos Médio e Superior

O notável Teorema de Van Aubel (NISHIYAMA, 2011) afirma que, dado um quadrilátero qualquer $ABCD$, então, quando quadrados com centros M , N , O e P , são construídos externamente (ou internamente) sobre seus lados, conclui-se que os segmentos MO e NP são perpendiculares e congruentes, como mostra a figura 1.

O referido teorema constitui-se em fonte inesgotável de inspiração para a descoberta de novos padrões que podem ser obtidos por construções geométricas que envolvem pontos médios de segmentos e centros de polígonos, como podemos ver em vastos trabalhos como o de Krishna (2018), Santos, Comby e Silva (2019), Santos, Silva, Cornélio, e Anjos (2019), Lima (2019) e Silva (2018), por exemplo.

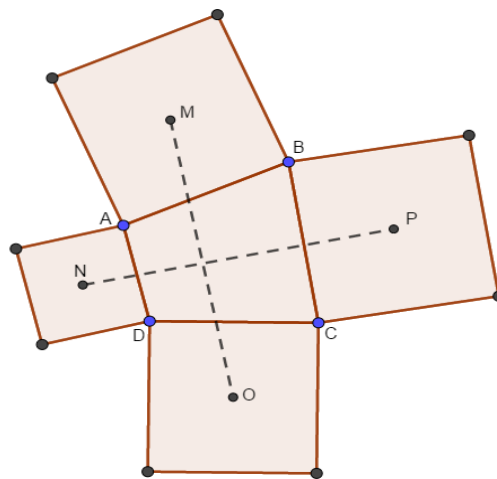


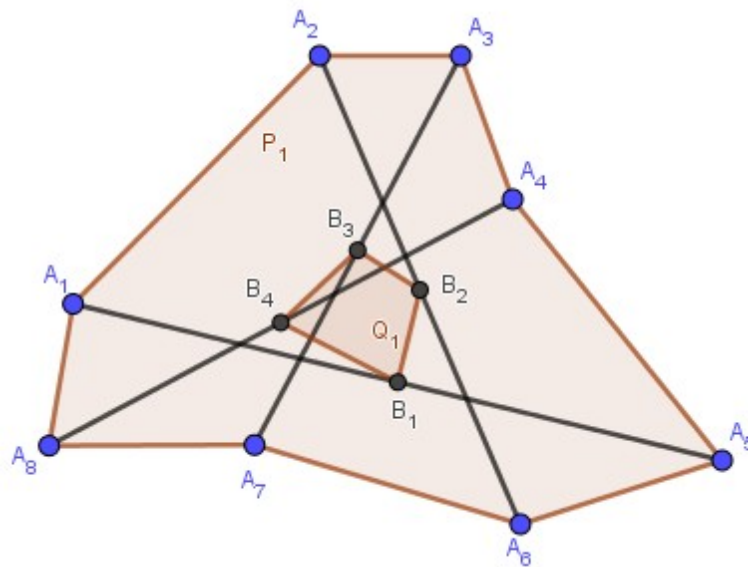
Figura 1 – Teorema de Van Aubel

A propriedade que iremos apresentar neste capítulo diz respeito a uma propriedade dos polígonos de $2n$ lados, também chamados de $(2n)$ -ágonos (lê-se: dois enágonos), em que também são tomados pontos médios de objetos geométricos para obtenção de propriedades.

Uma propriedade dos polígonos com número par de lados: construção

Consideremos, portanto, a seguinte construção: tome P_1 um polígono côncavo ou convexo $A_1A_2\ldots A_{2n-1}A_{2n}$ de $2n$ lados, $n \geq 2$, e tomemos as seguintes diagonais do mesmo: A_1A_{n+1} , A_2A_{n+2} , ..., A_nA_{2n} . Isto é, tomemos n diagonais do polígono P_1 que são os segmentos que unem os vértices opostos do polígono P_1 . A figura 2 ilustra a construção para o caso em que $n=4$.

Figura 2 – Diagonais unindo vértices opostos do polígono P_1

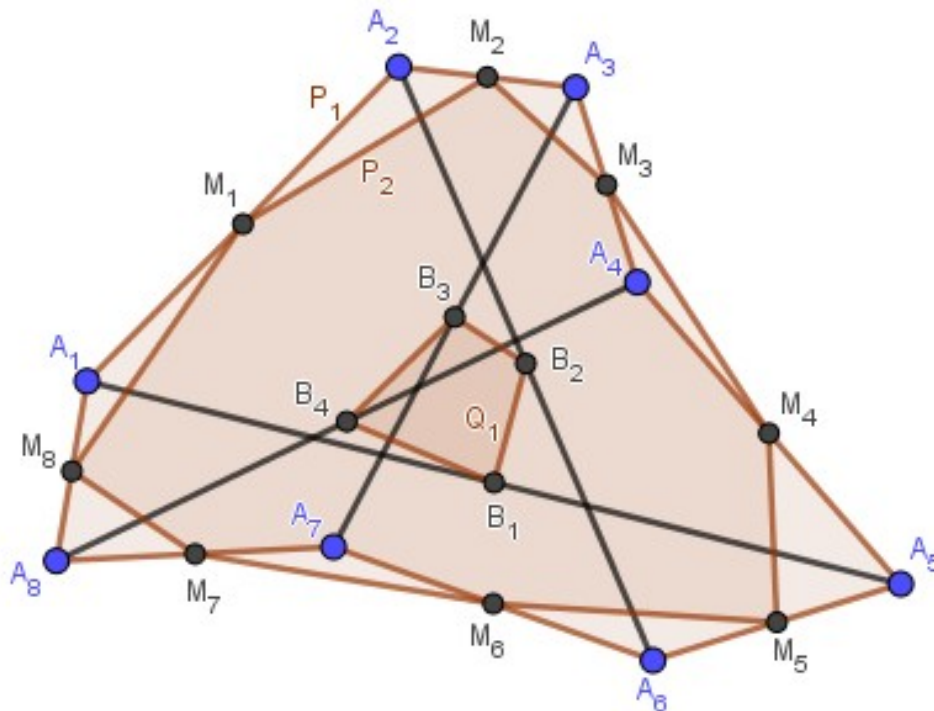


Fonte: construída pelo autor no software GeoGebra

Tomando em seguida $B_1, B_2, \dots, B_n$ os n pontos médios de cada uma destas n diagonais, tem-se um polígono $B_1B_2\ldots B_n$ de n lados se $n > 2$ ou um segmento de reta se $n = 2$, podendo este ser degenerado em um ponto. Suponhamos que seja não degenerado. Este polígono ou segmento será denotado por Q_1 . A figura 2 anterior ilustra o polígono Q_1 . Por outro lado, tomemos agora os pontos médios dos lados $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n}A_1$ do polígono P_1 e denotemo-los respectivamente por $M_1, M_2, \dots, M_{2n}$. Temos então construído o polígono $M_1M_2\ldots M_{2n}$ denotado por P_2 , também de $2n$ lados, isto é, outro $(2n)$ -ágono.

A figura 3 ilustra P_2 para o caso em que $n=4$.

Figura 3 – Polígono P_2 associado ao polígono P_1



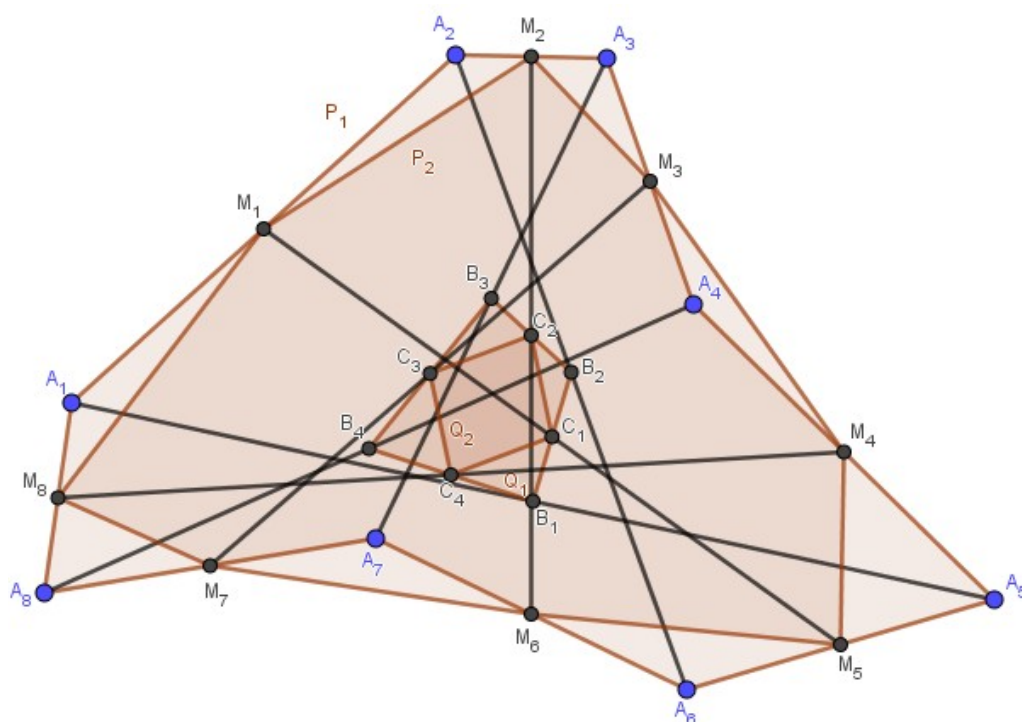
Fonte: construída pelo autor no software GeoGebra

Consideremos as diagonais de P_2 seguintes: $M_1M_{n+1}, \dots, M_nM_{2n}$, obtidas de maneira análoga às n diagonais de P_1 , isto é, diagonais que ligam os vértices opostos do polígono P_2 .

Tomando-se $C_1, \dots, C_n$ os n pontos médios de cada uma destas respectivas diagonais, temos um polígono $C_1C_2\dots C_n$ de n lados se $n > 2$ ou um segmento de reta se $n = 2$.

Tal polígono ou segmento será denotado por Q_2 , que também vamos supor não degenerado em um ponto. A figura 4 ilustra Q_2 para o caso em que $n = 4$.

Figura 4 – Polígono Q_2 associado ao polígono P_2



Fonte: construída pelo autor no software GeoGebra

A proposição

Vamos mostrar, portanto, que os vértices $C_1, C_2, \dots, C_n$ do polígono Q_2 assim construídos são exatamente os pontos médios dos lados $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_nB_1$ do polígono Q_1 , respectivamente. Em particular, se $n=4$, pelo Teorema da Base Média em triângulos, temos que Q_2 é um paralelogramo, como ilustra a figura 4.

Em síntese, vamos mostrar que os polígonos Q_1 e Q_2 obtidos, respectivamente, a partir dos polígonos P_1 e P_2 têm a propriedade de que os vértices do segundo são os pontos médios dos lados do primeiro.

A prova do resultado

A prova é dada por geometria analítica. Considere todos os pontos tomados na construção como pontos do plano cartesiano.

Pela construção, temos que

$$B_i = \frac{A_i + A_{i+n}}{2}, i = 1, \dots, n.$$

Também temos que

$$M_i = \frac{A_i + A_{i+1}}{2}, i = 1, 2, \dots, 2n,$$

em que convencionamos que $A_{2n+1} = A_1$.

Seguindo a construção,

$$C_1 = \frac{M_1 + M_{1+}}{2} \rightarrow$$

$$C_1 = \frac{A_1 + A_2 + A_{n+1} + A_{n+2}}{4}.$$

Porém, observamos que

$$\frac{B_1 + B_2}{2} = \frac{A_1 + A_{n+1} + A_2 + A_{n+2}}{4}.$$

Isto é,

$$C_1 = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Analogamente, se prova que

$$C_i = \frac{B_i + B_{i+1}}{2}, i = 2, \dots, n,$$

em que convencionamos que $B_{n+1} = B_1$.

Assim, está terminada a prova.

Nota-se que, se continuássemos o processo e pegássemos os pontos médios N_i dos lados $M_i M_{i+1}$ do polígono P_2 , onde $N_1 N_2 \dots N_{2n}$ seria então o polígono P_3 , e se fizéssemos a mesma construção do polígono Q_3 cujos vértices D_i são os pontos médios de $N_i N_{i+n}$, então os vértices D_i de Q_3 seriam os pontos médios do polígono Q_2 , isto é,

$$D_i = \frac{C_i + C_{i+1}}{2}.$$

E esse processo pode se repetir indefinidamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Santos, Rogério César dos; Comby, Ana Clara Oliveira; Silva, Breno Ramires Vargas da. Uma propriedade curiosa dos octógonos. *Revista do Professor de Matemática*. v. 99. p. 21-21. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

Nishiyama, Yutaka. The Beautiful Geometric Theorem of Van Aubel. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. v. 66 n. 1. p. 71-80. Osaka University of Economics. 2011.

Lima, Ítalo José Evangelista. Quadriláteros Iso-Ortodiagonais Associados a um Octógono Qualquer. 2019. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Orientador: Rogério César dos Santos.

Santos, R. C.; Comby, A. C. O. ; Silva, B. R. V. . Uma propriedade curiosa dos octógonos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 99, p. 21-22, 2019.

Santos, R. C.; Silva, B. R. V.; Cornélio, C. D. A.; Rodrigues, L. A. Extensões do Teorema de Van Aubel para octógonos. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 16, p. 1-15, 2019.

Neves, Robson Coelho Neves. Aplicações de Números Complexos em Geometria. *Dissertação*. IMPA. PROFMAT. Rio de Janeiro. Fevereiro de 2014.

NISHIYAMA, Y. Beautiful Theorems of Geometry as Van Aubel's Theorem. Department of Business Information. Faculty of Information Management. Osaka University of Economics. Osumi Higashiyodogawa. Osaka. Japan, 2010.

Villiers , Michael de. Dual Generalizations of Van Aubel's theorem. *The Mathematical Gazette*. Copyright Mathematical Association. Nov. 405-412. 1998. University of Durban-Westville, South Africa

CAPÍTULO 11

RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA POR MEIO DO EIXO RADICAL

Conteúdos de Matemática abordados neste capítulo: Geometria Plana: Ensinos Médio e Superior

O problema a seguir foi retirado do Youtube. Vamos resolvê-lo e depois generalizá-lo de duas maneiras diferentes.

O problema original considera uma circunferência de centro C e raio r , tangente ao segmento AB em seu ponto médio, em que $\overline{AB} = 2a$, conforme a figura 1. Tal circunferência será chamada aqui de círculo interno superior. a e r são números reais positivos fixados arbitrariamente, com $r < a$.

Considere a circunferência de raio T e centro E que passa pelos pontos A e B e que tangencia o círculo superior. Tal circunferência será chamada de círculo externo. Note que T depende de a e de r .

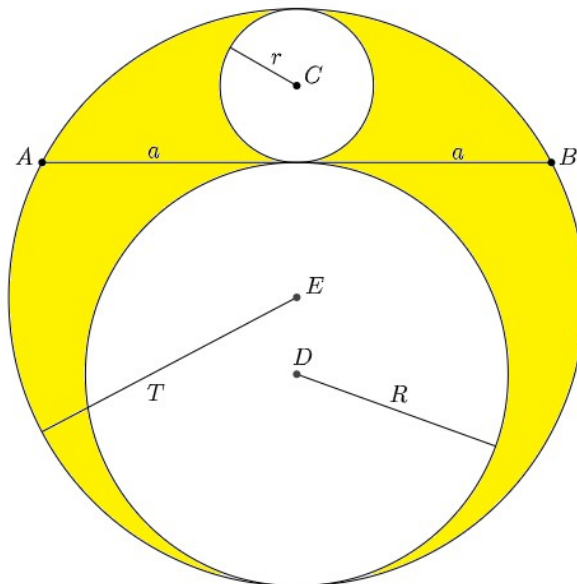


Figura 1. Nos círculos tangentes, procura-se a área hachurada.

Por fim, considere o círculo de centro D e raio R que tangencia os dois círculos anteriores e cujo centro D é colinear com os centros C e E . Tal círculo será chamado de círculo interno inferior. Observe que R depende de r e de a .

Vamos mostrar que a área hachurada da figura 1 não depende do valor r escolhido arbitrariamente, mas depende apenas do valor, também escolhido arbitrariamente, a , o que é surpreendente!

Depois de mostrar este fato, vamos generalizar este problema de duas maneiras, mais adiante.

Sendo r e R os raios dos círculos superior e inferior, respectivamente, e T o raio do círculo externo, então, $2r+2R=2T$, logo, $T=R+r$.

Pelo teorema das cordas com relação ao ponto de tangência entre os círculos internos, relativo à circunferência externa, sabemos que $2r \cdot 2R = a^2$. Logo,

$$2Rr = \frac{a^2}{2}.$$

Assim, a área hachurada será:

$$\begin{aligned} \pi T^2 - \pi R^2 - \pi r^2 &= \\ \pi \left[(R^2 + 2Rr + r^2) - R^2 - r^2 \right] &= \\ \pi (2Rr) &= \\ \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

Ou seja, a área solicitada é função apenas de a , e não r , o que é de certa forma surpreendente.

Vamos ver duas possíveis generalizações deste problema, como anunciado.

Primeira generalização: Considere um segmento AB tal que $\overline{AB} = a + b$, com $a > b$ pré-fixados arbitrariamente. Dado r também arbitrário, considere a circunferência superior de raio r e centro C , tangente ao segmento AB no ponto Q de modo que $\overline{CQ} = r$ e $\overline{AQ} = a$, como mostra a figura 2. Tal circunferência será chamada de círculo superior.

Chame de P_1 o polo norte do círculo superior, isto é, P_1 pertence ao círculo superior e é colinear com C e Q .

Considere a circunferência que passa por A , B e P_1 , de centro E e raio T , que chamaremos de círculo externo.

Se P_2 é o ponto de interseção da reta $C'Q$ com o círculo externo, e se D é o ponto médio de QP_2 , então, considere o círculo de centro D e raio $\overline{QD} = \overline{P_2D} = R$. Desta forma, P_2 é o polo sul do círculo inferior.

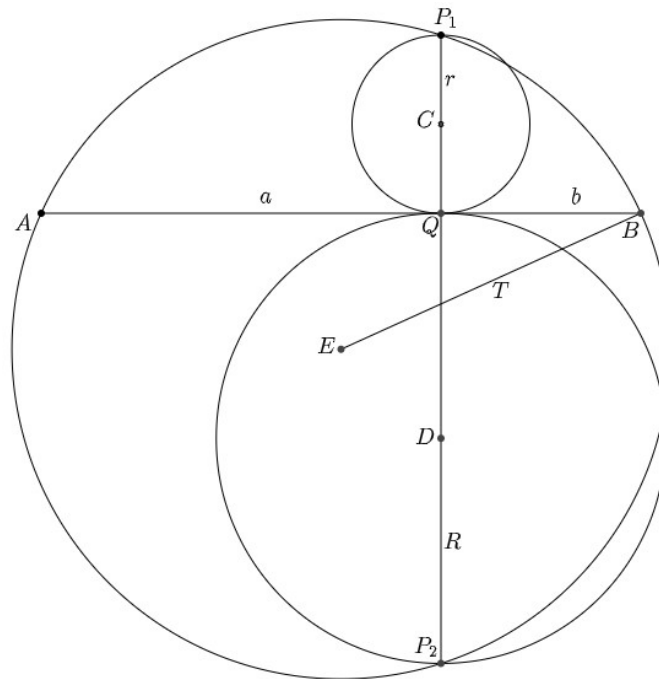


Figura 2. Primeira generalização do problema.

Queremos verificar se, novamente, a expressão $\pi T^2 - \pi R^2 - \pi r^2$ independe de r , isto é, a diferença entre a área do externo e as áreas dos internos depende apenas dos valores pré-fixados a e b , como no problema original, o que também seria surpreendente. Neste caso, tal expressão da diferença entre a área do externo e as áreas dos internos não possui uma visualização na figura tão clara como no caso original, por conta das partes dos círculos internos que podem estar fora do círculo externo, como mostra a figura 2.

Observe que este problema é sim uma generalização do original, pois, no original, também gostaríamos de verificar se a expressão não depende de r , tínhamos que os círculos internos eram tangentes entre si e tangentes ao segmento AB , o círculo externo também passava pelos polos dos círculos internos tangentes e pelos pontos A e B , o raio do círculo superior também era arbitrário. Nesta generalização, mantivemos o fato de o círculo externo passar pelos polos dos internos e deixamos arbitrária a posição do ponto de tangência dos círculos internos no segmento AB .

Consideremos, portanto, M o ponto médio de AB e S pertencente a QP_2 tal que ES é segmento paralelo ao segmento AB , como mostra a figura 3. Como AB é perpendicular a P_1P_2 , então ES também é perpendicular a P_1P_2 . Ora, como E é o centro do círculo externo, e ES é perpendicular à corda P_1P_2 , então, S é ponto médio de P_1P_2 .

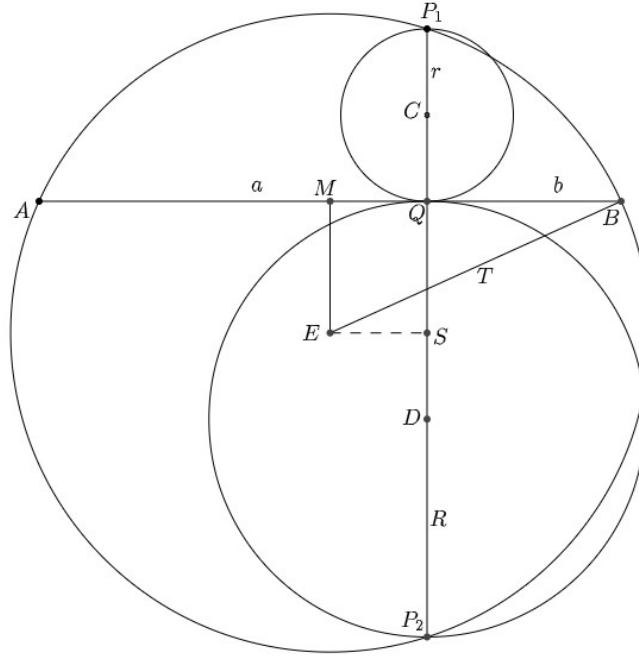


Figura 3. Resolução da primeira generalização.

Desta forma,

$$\overline{SP_1} = \overline{SP_2} = \frac{(2r + 2R)}{2} = r + R.$$

Assim, $\overline{ME} = \overline{QS} = \overline{QP_2} - \overline{SP_2} = 2R - (r + R) = R - r.$

Logo, por Pitágoras no triângulo MEB (M é ponto médio de AB), temos:

$$T^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Pelo teorema das cordas com relação ao ponto Q , referente ao círculo externo, temos, também, $4rR = ab$. Ou seja, $2Rr = \frac{ab}{2}.$

Logo,

$$\pi T^2 - \pi R^2 - \pi r^2 =$$

$$\begin{aligned} & \pi \left\{ \left[(R-r)^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right] - R^2 - r^2 \right\} = \\ & \pi \left(R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - R^2 - r^2 \right) = \\ & \pi \left(-2Rr + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) = \\ & \pi \left(\frac{-ab}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) = \\ & \pi \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \right). \end{aligned}$$

A expressão da diferença entre a área do círculo externo e as áreas dos internos, então, só depende dos valores pré-fixados arbitrariamente a e de b , o que também surpreende, pois r também foi escolhido arbitrariamente.

Este problema generaliza o anterior, pois, se $a=b$, então a expressão resulta em $\frac{\pi a^2}{2}$, mesmo resultado do problema original.

Segunda generalização: Considere novamente o segmento AB e o círculo superior de raio r e centro C que tangencia AB no ponto Q tal que AQ mede a e QB mede b , onde a , b e r são, novamente escolhidos arbitrariamente. Considere a circunferência (externa) que passa por A e B e tangencia o círculo interno superior, e considere também o círculo (interno inferior) cujo centro é colinear com C e Q e que tangencia AB e tangencia o círculo externo. A figura 4 ilustra.

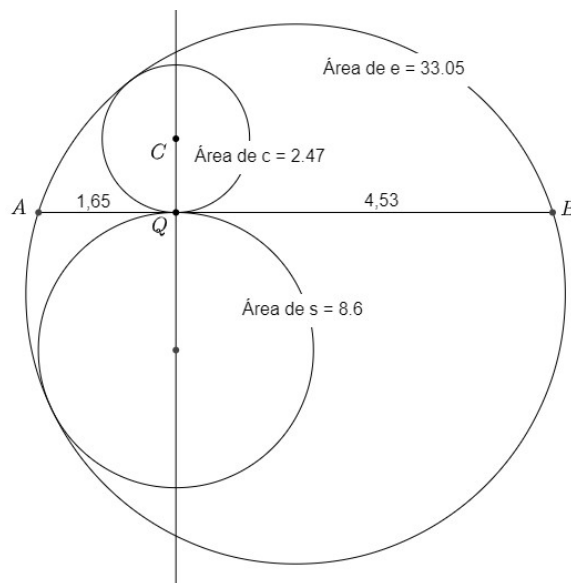


Figura 4. Segunda generalização do problema.

Observe que trata-se de um outro tipo de generalização do problema original, pois, como antes, os círculos internos são tangentes entre si e tangentes ao segmento AB , e, como antes, o círculo externo tangencia os círculos internos e passa por A e por B . Nesta segunda generalização, mantivemos o fato de o círculo externo tangenciar os internos e deixamos arbitrária a posição do ponto de tangência Q no segmento AB .

Neste caso, podemos construir a figura no software livre GeoGebra, variar o valor de r e verificar se a diferença entre a área do círculo externo e dos internos varia ou não com r .

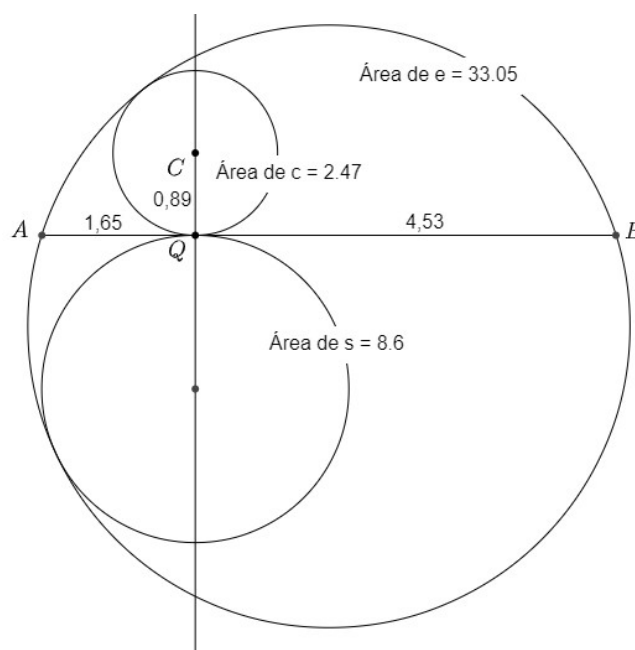


Figura 5. A diferença entre a área do círculo externo e as áreas dos internos depende do raio r do círculo superior.

Deixando fixos os valores de $a=1,65$ e de $b=4,53$, como mostra a figura 5, e o raio do círculo superior igual a $0,89$, então a diferença entre a área do externo e dos internos é igual a $33,05 - 2,47 - 8,6 = 21,89$. Porém, como mostra a figura 6, mantendo $a=1,65$ e $b=4,53$ como antes e variando apenas r para $0,73$, como mostra a figura 6, a diferença fica igual a $38,56 - 1,66 - 12,79 = 24,11$, diferente dos $21,89$ dados anteriormente.

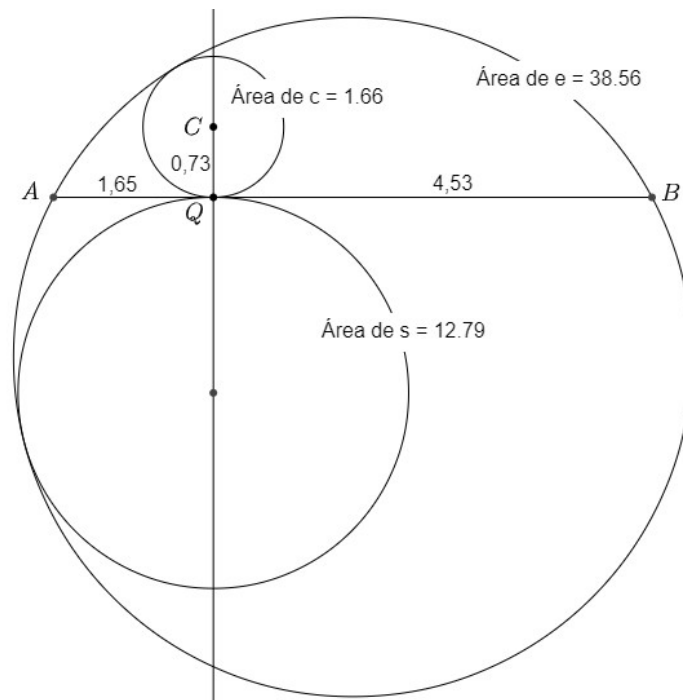


Figura 6. Mudando r , muda-se a expressão.

Logo, essa segunda generalização do problema não generaliza o resultado do problema original, em que a diferença não dependia de r . Agora, depende.

Como fica a expressão $\pi T^2 - \pi R^2 - \pi r^2$ em termos de a , b e r ?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O livro do famoso professor Hardy "Em defesa de um matemático" defende a tese de que a Matemática não deve ser orientada à prática, apenas. E, de fato, muitos foram os que estudaram e estudam esta ciência por lazer. Vejamos alguns exemplos de figuras notáveis na História da Matemática, cujo trabalho principal não era a Matemática:

- ✓ Fermat tinha a matemática como hobby,
- ✓ Venn foi padre e depois historiador, além de fazer matemática,
- ✓ O ex- presidente norte-americano Garfield (1880) elaborou uma das 400 provas do teorema de Pitágoras (a demonstração por trapézio),
- ✓ Vandermonde foi músico e foi estudar matemática somente após os 30 anos deixando seu nome eternizado no campo das matrizes e determinantes,
- ✓ Leibniz era jurista e historiador.

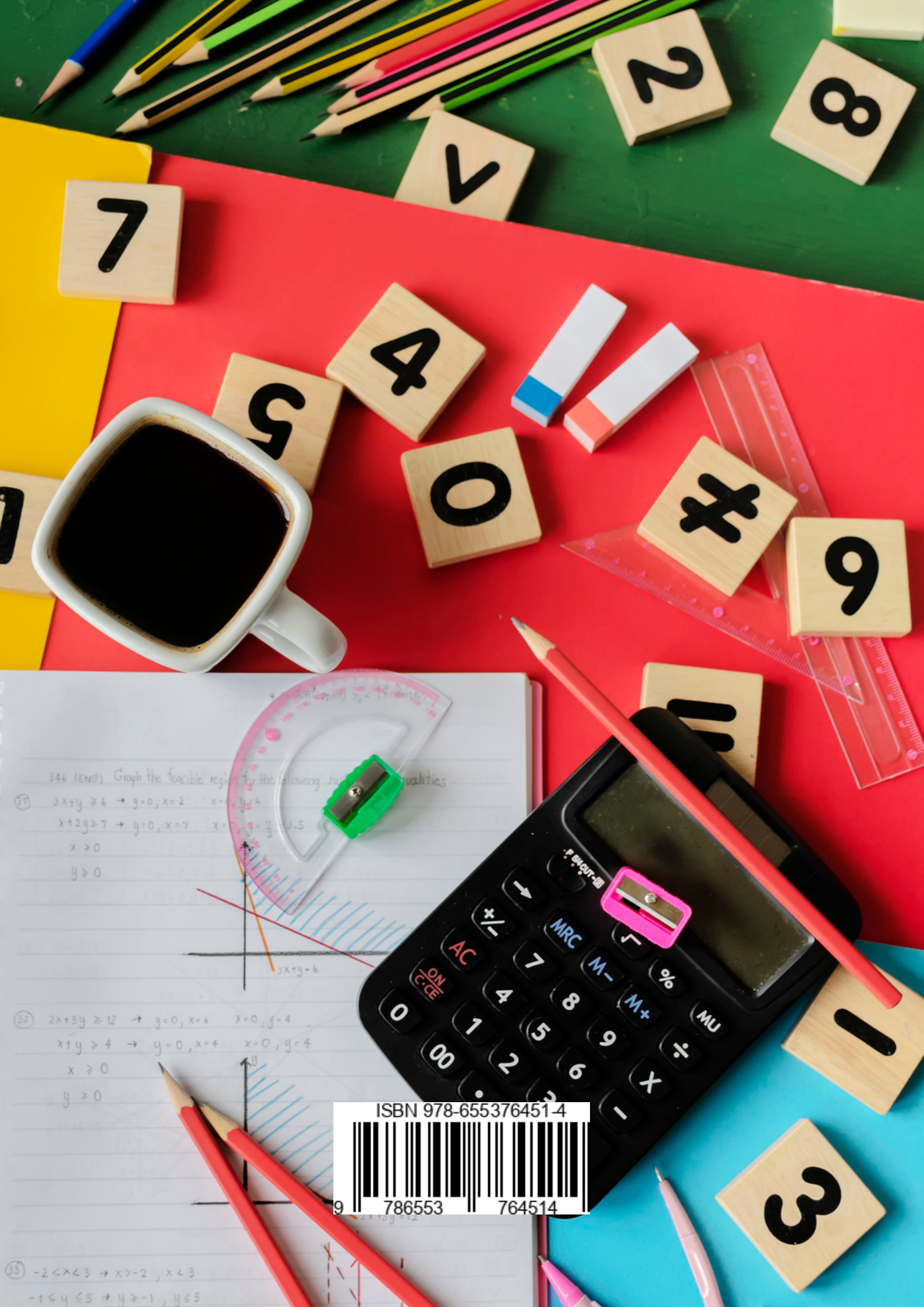
Curiosidades da História da Matemática

- ✓ Euclides ironizou um aluno dando-lhe uma moeda quando perguntado o que ele ganharia com aqueles conhecimentos,
- ✓ O matemático Perelman, em 2006, recusou a medalha fields (considerada por muitos um prêmio Nobel da Matemática, já que esta não o tem) e, depois, em 2010, recusou um prêmio de 1 milhão de dólares por ter resolvido um dos sete problemas do milênio.
- ✓ O grande matemático Tartaglia (1500 dC) começou a ler e a escrever aos 14 anos.

O trabalho de um matemático

É interessante o fato de um matemático provar um teorema sendo que com isto nenhum produto será patenteado para se vender e fazer dinheiro, pelo menos em geral. A moeda não é esta, a moeda é o reconhecimento de outros matemáticos à sua descoberta!

Também é curioso que, em geral, não se vê alguém que seja geógrafo por hobby, ou contador por hobby, ou biólogo nas horas livres. Matemática como hobby se ouve falar com mais frequência, me parece. Hobbys são coisas prazerosas de se fazer, como música, dança, e, claro, a matemática!



ISBN 978-655376451 4



9 786553 764514