INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul Campus Canoas

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL

CAMPUS CANOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Determinação das medidas dos ângulos externos e internos de polígonos convexos por meio de atividades que integram aritmética, geometria e álgebra

DISCENTE: Isaura Cardoso Linde

ORIENTADORA: Prof.ª Dr.ª Carina Loureiro Andrade

COORIENTADORA: Prof.ª Dr.ª Jaqueline Molon

Produto Educacional

CANOAS

2025

RESUMO

Este produto educacional foi desenvolvido como parte do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) – Campus Canoas. Ele consiste em uma sequência didática voltada ao estudo de polígonos convexos, com foco nas medidas de seus ângulos internos e externos, bem como em suas propriedades, integrando aritmética, geometria e álgebra. A ideia surgiu da percepção de que o ensino da matemática, muitas vezes, acontece de forma fragmentada, o que dificulta a compreensão mais ampla e conectada dos conteúdos. Além disso, o próprio documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância de desenvolver o pensamento geométrico e a capacidade de investigar propriedades matemáticas.

O objetivo principal deste material é explorar as medidas dos ângulos internos e externos de polígonos convexos, por meio de atividades que incentivam a investigação, a experimentação e a criação de conjecturas. Para isso, os estudantes são convidados a trabalhar com materiais concretos, utilizar o GeoGebra e trocar ideias com os colegas, construindo conhecimento de forma ativa e colaborativa. A sequência didática inclui um conjunto de atividades que vai desde a construção manual e digital de polígonos até a dedução da soma das medidas dos ângulos internos e externos em polígonos regulares.

Além de ajudar a construir conceitos geométricos, esse percurso incentiva os alunos a generalizar ideias matemáticas e a pensar de forma crítica sobre os resultados encontrados.

Palavras chave: sequência didática; estudo de polígonos convexos; construção de generalizações; Integração de geometria, aritmética e álgebra;

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática costuma ser apresentado de forma segmentada, com cada área tratada de maneira isolada. Esse formato, além de dificultar a conexão entre os diferentes conteúdos, pode levar à omissão de temas importantes, seja pela ênfase de certos tópicos em detrimento de outros, seja pela falta de tempo. Essa fragmentação afeta diretamente a compreensão da matemática como um campo integrado de ideias.

Diante disso, este trabalho propõe uma abordagem que integra geometria, álgebra e aritmética em uma sequência didática, permitindo que os estudantes percebam como essas áreas se relacionam. Essa integração busca ampliar a compreensão dos conceitos geométricos e, ao mesmo tempo, fortalecer o raciocínio lógico, a formulação de conjecturas e a capacidade de resolver problemas.

Para tanto, o produto didático utiliza atividades investigativas que incentivam os estudantes a observar padrões, levantar hipóteses e construir generalizações matemáticas a partir de suas descobertas. Essas atividades foram planejadas com o apoio de materiais concretos e ferramentas digitais, como o GeoGebra[1], conectando teoria e prática e criando um ambiente de aprendizagem dinâmica e colaborativa.

O material foi organizado em formato de sequência didática, em que cada atividade parte das descobertas anteriores, aprofundando e ampliando conceitos já trabalhados, promovendo uma construção gradual do conhecimento. Além disso, ao final de cada etapa, há momentos de discussão coletiva, nos quais os estudantes analisam suas próprias conjecturas e as dos colegas, promovendo a reflexão crítica e o diálogo matemático.

Por fim, é importante destacar que este produto didático é fruto de uma pesquisa[2] desenvolvida com o objetivo de investigar estratégias para integrar aritmética, geometria e álgebra no ensino de matemática. O foco central foi explorar como atividades investigativas e a construção de generalizações matemáticas podem favorecer essa integração. Essa combinação de materiais concretos, tecnologia digital e propostas investigativas incentiva a participação ativa e colaborativa dos estudantes, estimulando a troca de ideias, a formulação de hipóteses e a busca conjunta por explicações, fortalecendo o raciocínio matemático e a compreensão integrada dos conteúdos.

---

[1] Disponível em: https://www.geogebra.org/.
[2] Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7998&id2=171057803

JUSTIFICATIVA

Muitos estudantes sentem dificuldade em entender conceitos matemáticos mais abstratos, especialmente quando cada conteúdo é ensinado de forma compartimentada, sem mostrar as conexões entre eles. Isso acontece especialmente na geometria, que, em muitos casos, é apresentada como um tema separado, distante da aritmética e da álgebra. Essa separação dificulta que os alunos percebam a matemática como um todo conectado e cheio de sentido.

Essa preocupação com a integração entre diferentes áreas da matemática não é nova. Na reforma educacional de Francisco Campos, em 1931, a aritmética, a álgebra e a geometria, que antes eram ensinadas como disciplinas separadas, passaram a fazer parte de uma única disciplina (Miguel, Fiorentini e Miorim, 1992). Pavanello (1989) explica que essa reforma já trazia a ideia de que os alunos deveriam ser descobridores do conhecimento matemático, e não apenas memorizadores de regras. Além disso, o decreto recomendava abandonar a memorização sem raciocínio e apostar em um ensino de geometria mais intuitivo e experimental, valorizando o pensamento crítico e a compreensão real do que se aprende.

Mesmo com essa proposta interessante, a geometria acabou perdendo espaço nos currículos ao longo do tempo. Durante o movimento da matemática moderna, nos anos 1970, ela foi deixada de lado, como explicam Lorenzato (1995) e Pavanello (1989). Só no final do século XX e início do século XXI a geometria começou a voltar aos currículos, mas não atingindo ainda um grau satisfatório no ensino (Teixeira, Boni e Kirnev, 2017).

Hoje, sabemos que a geometria é fundamental, tanto para entender outros conteúdos matemáticos, quanto para conectar a matemática com o mundo ao nosso redor (Lorenzato, 2010). Esse valor da geometria também aparece na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca como é importante desenvolver o pensamento geométrico. Segundo a BNCC, esse pensamento envolve investigar propriedades, levantar hipóteses, construir explicações e entender como as formas e suas posições se relacionam no espaço (Brasil, 2017). Ou seja, a geometria não é só recomendada, mas é essencial para que os alunos realmente compreendam a matemática de forma completa.

Lorenzato resume bem essa ideia ao dizer que

> Sabemos que, por várias razões, a geometria não tem ocupado o seu devido lugar no ensino da matemática. Porém, é possível, desejável e necessário que o ensino

> dessa parte importante da matemática seja fortemente enfatizado, porque, como já vimos, sem experiência geométrica não se consegue raciocinar geometricamente e, por consequência, se constrói uma visão capenga, falaciosa e incompleta da matemática. (2010, p. 70)

Por isso, trabalhar a geometria junto com a aritmética e a álgebra não só ajuda a entender melhor os conceitos geométricos, mas também fortalece o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas, além de estimular o pensamento crítico dos estudantes.

Para que os alunos realmente investiguem e compreendam as propriedades geométricas, é fundamental que as atividades convidem à experimentação e à criação de hipóteses. Essa ideia é defendida por Skovsmose (2000), com sua proposta de cenários para investigação, e também por Lorenzato (2010), que destaca a importância de colocar "a mão na massa", trabalhando com materiais concretos e experiências práticas em geometria.

Esse produto didático se apoia diretamente na teoria dos cenários para investigação, que propõe que o professor e os alunos criem juntos um ambiente onde todos são incentivados a explorar, fazer perguntas e buscar respostas próprias para as questões matemáticas em estudo. Essa forma de aprender rompe com aquele jeito tradicional de só aplicar fórmulas e repetir procedimentos, trazendo os alunos para um papel ativo, em que eles investigam, levantam dúvidas e compartilham ideias com os colegas. Como afirma Skovsmose (2000, p. 15), "a rota ótima não pode ser determinada apressadamente, mas tem que ser decidida pelos alunos e pelo professor", mostrando que cada turma pode construir seu próprio caminho de descobertas.

Nesse processo, a experimentação é uma peça-chave. Ao manipular materiais, testar ideias, observar padrões e comparar estratégias, os alunos descobrem a matemática na prática. Essa vivência torna os conceitos mais concretos e significativos. E, ao unir essa postura investigativa de Skovsmose com a valorização da experimentação defendida por Lorenzato, este produto didático busca mostrar que aprender matemática é pensar, experimentar, criar e compartilhar ideias, de forma colaborativa e reflexiva.

OBJETIVOS

Objetivo Geral:

- Explorar formas de determinar as medidas dos ângulos externos e internos de polígonos convexos por meio de atividades que integram aritmética, geometria e álgebra.

Objetivos Específicos:

- Fazer com que os alunos entendam as propriedades dos polígonos convexos, usando atividades com materiais manipulativos.
- Incentivar os alunos a investigar padrões matemáticos e criar suas próprias conjecturas.
- Utilizar tecnologias, como o GeoGebra, para visualizar e explorar as propriedades dos polígonos.
- Desenvolver habilidades de generalização matemática, conectando diferentes áreas da matemática.

As atividades desse produto educacional foram pensadas para ajudar os alunos a perceber como aritmética, geometria e álgebra se conectam. Mas elas não são uma receita fechada — o professor pode (e deve) adaptar as atividades conforme a realidade da sua turma. Se a classe tem mais facilidade, dá para aprofundar as discussões. Se os alunos têm dificuldades com medições ou construções geométricas, o professor pode dedicar mais tempo a essas etapas.

Esse material é flexível justamente para que você, professor, ajuste as propostas ao seu jeito de ensinar e ao nível de compreensão da sua turma. Além disso, logo após a cada atividade comentada uma a uma, você encontra sugestões de respostas e comentários para te ajudar a acompanhar e avaliar o aprendizado dos alunos ao longo da sequência.

Esse conjunto de atividades foi organizado em formato de apostila[3], de um jeito que você possa seguir uma sequência lógica, onde cada etapa conversa com a anterior e prepara o terreno para a próxima. Todas as atividades foram pensadas para incentivar a interação entre os alunos, ajudando a construir uma matemática colaborativa, que nasce da troca de ideias e das descobertas coletivas.

Logo em seguida, você vai encontrar a descrição detalhada de cada atividade, com seus objetivos e orientações para aplicação. Tudo foi planejado para que fique claro o que fazer, como fazer e, principalmente, por que fazer. Assim, cada etapa contribui para que os alunos construam o conhecimento matemático de forma gradual, conectando o que aprenderam antes com o que estão descobrindo agora.

[3] A apostila versão do aluno se encontra no apêndice A

ATIVIDADES COMENTADAS UMA A UMA

Atividade Zero: Introdução aos Polígonos

- **Objetivo:**
  - Explorar as propriedades básicas dos polígonos
- **Materiais:**
  - Apostila impressa
  - Polígonos impressos (apêndice B)
- **Atividade:**
  - investigar relações entre número de lados, ângulos e vértices, nomenclaturas.
- **Duração:** estimada: 2 períodos (90 minutos)

O objetivo desta atividade é revisar com a turma o que são polígonos e como identificamos suas principais características. Sabemos que os alunos já viram esse tema em anos anteriores, então começamos resgatando o que eles lembram, para depois aprofundar com algumas definições mais formais.

O professor inicia a atividade em uma conversa aberta com a turma, perguntando o que eles sabem sobre polígonos. A partir das falas dos próprios estudantes, é possível mapear os conhecimentos prévios, que vão desde nomes de figuras até a noção de vértices, lados e ângulos.

Depois dessa conversa inicial, o professor pode projetar ou apresentar em slides algumas definições-chave:

- Vértices: Os vértices de um polígono são os pontos de interseção entre dois lados consecutivos. Para facilitar a identificação, eles serão representados por letras maiúsculas, seguindo uma ordem alfabética no sentido anti-horário do polígono.
- Lados: Os lados de um polígono são segmentos de reta que conectam dois vértices consecutivos. Cada lado será representado pelas letras que correspondem aos vértices de suas extremidades. Por exemplo, o segmento de reta que une os vértices A e B será denotado por AB.
- Ângulos: Os ângulos de um polígono são as regiões internas formadas por dois lados consecutivos. Para representar um ângulo, utilizaremos, por exemplo, a notação AÔB, onde O indica o vértice e as letras A e B correspondem aos vértices do polígono localizados nos lados do ângulo.

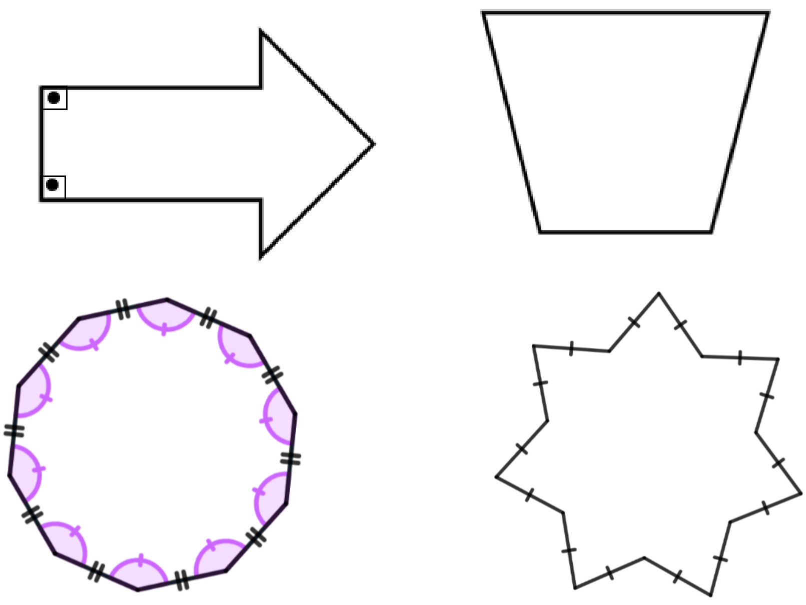
Essas definições, mesmo sendo formais, podem ser explicadas com exemplos práticos e visuais. Usar o projetor ou o quadro para desenhar e nomear polígonos é uma forma eficiente de reforçar esse conhecimento.

Outras definições importantes para o andamento das atividades, mas não tão usuais como as anteriores, também devem ser apresentadas e exploradas. Como esses conceitos costumam ser menos familiares, é importante que o professor os explique com calma, destacando cada detalhe.

- Um polígono será **equiângulo** quando todos os seus ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um polígono será **equilátero** quando todos os seus lados tiverem o mesmo comprimento, ou seja, todos os segmentos de reta que conectam vértices consecutivos possuírem a mesma medida.
- Um polígono será **convexo** quando, para qualquer par de pontos escolhidos no interior do polígono, o segmento de reta que os une está completamente contido na região poligonal e, caso contrário, será **côncavo**.

Junto da apresentação e discussão das definições mencionadas, foram projetados os polígonos ilustrados na figura 1 e suas características destacadas com o uso de canetas de cores distintas. Nesses polígonos foram identificados os vértices, ângulos e lados, foi analisada sua concavidade ou convexidade, bem como efetuada a classificação quanto a equiangularidade, equilateralidade e regularidade.

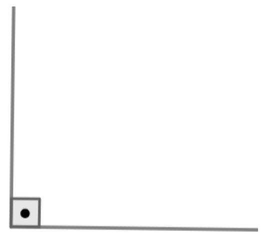
Figura 1 – Polígonos usados como exemplo



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Adicionalmente, destaca-se a relevância da notação utilizada, os "traços", para indicar a igualdade dos lados e dos ângulos, evidenciando que a uniformidade nessas características implica na igualdade de medidas correspondentes. Enfatiza-se, ainda, a notação própria utilizada para ângulo reto, aquele cuja medida é 90°, a qual indica-se como na figura x abaixo.

Figura 2 - Ângulo Reto



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Depois dessa introdução, cada aluno recebe um conjunto de 20 polígonos impressos (Pol.A, Pol.B… Pol.S – Apêndice B) e a tabela da Atividade 1 na apostila. A tarefa é observar cada figura, identificar suas características e preencher a tabela. Essa atividade ajuda a fixar o vocabulário e as propriedades discutidas.

Na Atividade 2, o foco é conversar sobre os nomes dos polígonos. O professor pode começar perguntando quais nomes os alunos já conhecem (triângulo, quadrilátero, pentágono...) e, a partir disso, mostrar que essas palavras vêm de prefixos gregos e latinos usados em outras áreas, como em "pentacampeão" ou "hexacampeão".

Em seguida, os alunos investigam a relação entre os nomes e a quantidade de lados, percebendo que os prefixos indicam esse número. A partir do item "k", quando aparecem polígonos com mais de dez lados, o professor pode explicar que usamos o prefixo seguido de "dec". Por exemplo, no caso do *pentadecágono*, a estrutura do nome reflete a soma:

Pentadecágono

5 +**10** = 15 lados

S Se algum nome ainda gerar dúvida, o professor pode sugerir que os alunos observem a sequência: se o hexadecágono vem logo após o pentadecágono, ele terá um lado a mais (16 lados). Assim, os alunos podem descobrir os nomes combinando conhecimento prévio, lógica sequencial e os próprios prefixos.

A correção dessa atividade pode (e deve) ser feita de forma coletiva, aproveitando o momento para promover uma discussão com toda a turma. O professor pode projetar quadro a tabela completa, e pedir para que os próprios alunos compartilhem suas observações e dúvidas durante esse momento. Ao comparar suas respostas com as apresentadas, os estudantes têm a oportunidade de revisar seus registros, esclarecer eventuais confusões e justificar suas escolhas.

Esse é um ótimo momento para valorizar diferentes estratégias e caminhos de raciocínio, mostrando que há diversas formas de observar e classificar polígonos. Além disso, caso apareçam erros ou interpretações diferentes, o professor pode usá-los como ponto de partida para novas perguntas investigativas, como: "O que nos fez pensar isso?", "Onde podemos ter nos confundido?" ou "Qual definição nos ajuda a resolver essa dúvida?". Assim, a correção se torna mais do que apenas conferir certo ou errado — ela vira parte ativa da aprendizagem.

ATIVIDADE ZERO: Introdução aos polígonos

1. Preencha a tabela a seguir de acordo com cada polígono:

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	. côncavo ou onvexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.A	*7*	*7*	*7*	*Sim*	*Sim*	*Convexo*	*Sim*	*É equiângulo e equilátero*
pol.B	*5*	*5*	*5*	*Não*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.C	*5*	*5*	*5*	*Não*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.D	*7*	*7*	*7*	*Não*	*Não*	*Côncavo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.E	*5*	*5*	*5*	*Não*	*Não*	*Côncavo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.F	*6*	*6*	*6*	*Sim*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equilátero*
pol.G	*6*	*6*	*6*	*Não*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.H	*8*	*8*	*8*	*Não*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.I	*4*	*4*	*4*	*Não*	*Sim*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo*

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	É côncavo ou convexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.J	*10*	*10*	*10*	*Não*	*Não*	*Côncavo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.K	*4*	*4*	*4*	*Não*	*Não*	*Côncavo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.L	*15*	*15*	*15*	*Sim*	*Sim*	*Convexo*	*Sim*	*É equiângulo e equilátero*
pol.M	*7*	*7*	*7*	*Não*	*Sim*	*Convexo*	*Não*	*Não é equilátero*
pol.N	*4*	*4*	*4*	*Sim*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo*
pol.O	*8*	*8*	*8*	*Não*	*Sim*	*Convexo*	*Não*	*Não é equilátero*
pol.P	*8*	*8*	*8*	*Sim*	*Sim*	*Convexo*	*Sim*	*É equiângulo e equilátero*
pol.Q	*8*	*8*	*8*	*Não*	*Não*	*Côncavo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.R	*10*	*10*	*10*	*Sim*	*Sim*	*Convexo*	*Sim*	*É equiângulo e equilátero*
pol.S	*11*	*11*	*11*	*Não*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*
pol.T	*12*	*12*	*12*	*Não*	*Não*	*Convexo*	*Não*	*Não é equiângulo nem equilátero*

2. Relacione o nome do polígono com seu número de lados

a) Triângulo
b) Quadrilátero
c) Pentágono
d) Hexágono
e) Heptágono
f) Octógono
g) Eneágono
h) Decágono
i) Undecágono
j) Dodecágono
k) Tridecágono
l) Tetradecágono
m) Pentadecágono
n) Hexadecágono
o) Heptadecágono
p) Octadecágono
q) Eneadecágono
r) Icoságono

(*d*) 6 lados
(*f*) 8 lados
(*o*) 17 lados
(*r*) 20 lados
(*i*) 11 lados
(*l*) 14 lados
(*a*) 3 lados
(*h*) 10 lados
(*n*) 16 lados
(*j*) 12 lados
(*e*) 7 lados
(*p*) 18 lados
(*b*) 4 lados
(*k*) 13 lados
(*q*) 19 lados
(*m*) 15 lados
(*c*) 5 lados
(*g*) 9 lados

3. Pergunta: o que foi novidade nessa aula, ou seja, o que você aprendeu? Explique com suas palavras.

*Resposta individual*____

Atividade 1: construção de um polígono convexo

- **Objetivos:**
  - Revisar e aprofundar o conceito de polígonos convexos.
  - Explorar medições de lados e ângulos usando régua e transferidor.
  - Incentivar o pensamento matemático investigativo, observando padrões e relações geométricas.
- **Materiais:**
  - Folha quadrada (20 cm de lado)
  - Lápis, borracha, régua e transferidor
  - Apostila impressa
  - Projetor (opcional)

- **Resumo:**
  - Construir um polígono convexo a ser utilizado como base para as próximas aulas, nomear os vértices e realizar as medições de cada lado e ângulo.
- **Duração estimada:** 3 períodos (135 minutos)

- **Sobre a Atividade**

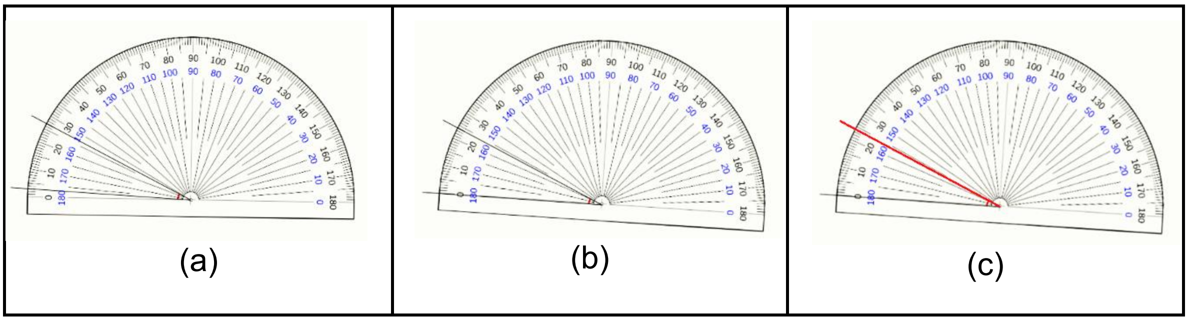
Nesta atividade, os alunos vão construir **seu próprio polígono convexo**, que será a base para várias descobertas nas próximas aulas. O ideal é formar **duplas ou trios**, para que os alunos possam discutir suas ideias e compartilhar estratégias desde o início.

Cada grupo recebe uma folha quadrada de 20 cm de lado e deve construir, nela, um polígono convexo com a quantidade de lados definida pelo professor. O professor pode sortear ou escolher esse número, mas com **cuidado**: polígonos com 7 ou 11 lados, por exemplo, geram medidas não inteiras nos ângulos; e polígonos com mais de 10 lados podem ser difíceis de construir com precisão.

💡 **Dica:** para evitar confusão, o professor pode organizar uma tabela no quadro com o nome de cada grupo e o número de lados do polígono de cada um.

Com o polígono construído, cada grupo passa para a etapa de medição. Eles vão usar régua e transferidor[4], para medir **os lados e os ângulos internos**, anotando tudo na tabela da questão 1.4 da apostila.

Figura 3 - etapas do processo de medição de um ângulo



Fonte: Teachablemath. Disponível em: <https://teachablemath.com/apps/protractor-practice-app/> Acesso em 2023.

Como ensinar a medir ângulos com o transferidor pode ser desafiador, o professor pode usar o projetor (ou o quadro mesmo) para demonstrar o processo:

i) Primeiro, sobrepõe-se o ponto no centro do transferidor com o vértice do ângulo (Figura 3 a).

ii) Mantendo o centro do transferidor fixo, posiciona-se o transferidor de forma que a linha de base (a linha horizontal inferior também chamada de linha de fé) coincida com um dos lados do ângulo (Figura 3 b).

iii) Verifica-se qual é a medida do ângulo no transferidor, observando onde a semirreta do outro lado do ângulo, indicado em vermelho na figura 3 (c), cruza a escala angular do transferidor. Ângulos são medidos em graus, logo, nesse exemplo, tem-se um ângulo de 24 graus, ou seja, 24º.

Mesmo após a explicação, é comum que surjam dúvidas, especialmente se for a primeira vez que utilizam o transferidor. Por isso, é importante que o professor acompanhe e observe a forma como os estudantes realizam as medições, esclarecendo possíveis dificuldades e garantindo que compreendam corretamente o procedimento. Caso perceba erros frequentes, é recomendável retomar a explicação para toda a turma ou exemplificar novamente utilizando um transferidor projetado no quadro. Além disso, para manter a dinâmica da aula, os grupos que concluírem essa etapa podem avançar

[4] Sugere-se o uso do site: https://teachablemath.com/apps/protractor-practice-app

para a próxima atividade, enquanto o professor continua auxiliando aqueles que ainda estiverem finalizando as medições.

É fundamental que o professor estimule a discussão sobre as perguntas propostas na apostila, incentivando os alunos a refletirem sobre padrões observados e a aprofundarem sua compreensão dos conceitos trabalhados. Esses debates contribuem para uma aprendizagem mais significativa, permitindo que os estudantes desenvolvam argumentação matemática e pensamento crítico. Um exemplo disso é a questão do item 1.5: *"Algum ângulo interno do seu polígono é maior ou igual a 180°? Por quê?"* O objetivo não é que a resposta se limite a um simples *"não, pois medi"*, mas que os alunos compreendam o motivo dessa característica. Para isso, o professor deve atuar como mediador, formulando perguntas que despertem a curiosidade dos estudantes. Nesse contexto, pode-se iniciar questionando diferentes grupos sobre suas medições, perguntando se algum deles encontrou um ângulo maior ou igual a 180° nesta atividade. Com a resposta negativa sendo recorrente, o professor pode incentivar a turma a refletir se isso acontece por acaso ou se há um motivo matemático para essa regularidade. Em seguida, pode-se propor a reflexão: *o que aconteceria se um dos ângulos internos fosse maior que 180°?* Esse questionamento levará os alunos a perceberem que, nesse caso, o polígono não seria convexo, o que contradiz a condição estabelecida no início da atividade.

Ressaltamos que, durante a discussão, podem surgir momentos de silêncio e até afirmações incorretas por parte dos alunos. Isso faz parte do processo investigativo, assim esses elementos fazem parte do processo de aprendizagem e devem ser encarados como oportunidades para reflexão e construção do conhecimento. O silêncio pode indicar que os estudantes estão processando a informação, enquanto respostas equivocadas oferecem ao professor a chance de instigar novas perguntas e direcionar a turma para um entendimento mais aprofundado do conceito. Dessa forma, é essencial que o professor conduza o diálogo de maneira acolhedora e incentivadora, estimulando os alunos a justificarem seus raciocínios e revisarem suas respostas à luz das discussões em grupo.

A postura do professor, aqui, faz toda a diferença: em vez de entregar respostas prontas, vale incentivar os alunos a justificarem suas ideias e revisarem suas respostas à luz da discussão coletiva. Isso desenvolve o hábito da argumentação matemática e do pensamento crítico.

ATIVIDADE 1: Construção de um Polígono Convexo

1. Siga as etapas a seguir:

1.1 Faça dupla com um colega. Vocês receberão uma folha de tamanho 20 cm x 20 cm. Vocês deverão construir um polígono convexo, com o número de lados definido pela professora.

1.2 Lembrando do que foi discutido na atividade anterior, qual o nome do polígono que você construiu (de acordo com o número de lados)? Resposta individual

1.3 Nomeie cada vértice (com letras maiúsculas e consecutivas, iniciando em A, no sentido anti-horário) .

1.4 Utilizando régua e transferidor, meça cada um dos lados e dos ângulos do seu polígono e preencha o quadro abaixo utilizando a quantidade de linhas e a notação adequada à sua construção.

Medida do lado	Medida do ângulo
$\overline{AB} =$	$A\hat{B}C =$
$\overline{BC} =$	$B\hat{C}D =$
$\overline{CD} =$	$C\hat{D}E =$
$\overline{DE} =$	$D\hat{E}F =$
$\overline{EF} =$	$E\hat{F}G =$
$\overline{FG} =$	$F\hat{G}H =$
$\overline{GH} =$	$G\hat{H}I =$
$\overline{HI} =$	$H\hat{I}J =$
$\overline{IJ} =$	$I\hat{J}K =$
$\overline{JK} =$	$J\hat{K}L =$
$\overline{KL} =$	$K\hat{L}M =$

Resposta individual.
Depende da
construção realizada.

1.5 Algum ângulo interno do seu polígono é maior ou igual a 180°? Por quê?

Esperamos que os alunos não tenham encontrado ângulos maiores ou iguais a 180°, pois, em polígonos convexos, todos os ângulos internos são sempre menores que 180°. Isso ocorre porque, por definição, em um polígono convexo, qualquer segmento que conecte dois pontos no interior do polígono estará completamente contido dentro da figura, garantindo essa propriedade.

1.6 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um lado (por exemplo, o lado $\overline{BC}$) do seu polígono.

A régua deve ser posicionada com o zero no vértice B e alinhada com o segmento que conecta os pontos B e C, garantindo que não haja desvios ou inclinações. Localize, na escala da régua, o ponto correspondente ao segundo vértice (neste caso, o vértice C). Verifique o número indicado na régua no ponto onde o vértice C está alinhado. Esse número corresponde ao comprimento do segmento BC.

1.7 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um ângulo (por exemplo, o ângulo $A\hat{B}C$) do seu polígono.

Posiciona-se o centro do transferidor exatamente no vértice B, de modo que a linha de base do transferidor fique alinhada com o segmento AB. Em seguida, lê-se a medida na escala do transferidor onde o segmento BC intercepta os números da graduação. A medida obtida corresponde à abertura do ângulo $A\hat{B}C$, que é então registrada com a unidade de graus (°).

No espaço abaixo, um aluno da dupla deverá guardar o polígono.

O polígono realizado pela dupla:

Importante deixar registrado onde ficará guardado o polígono.

☐ Ficará guardado nesta apostila.

☐ Ficará guardado na apostila do colega ____________________

(Nome do colega)

Neste local, deve haver uma espécie de pasta feita de papel, colada nas laterais da apostila, para que o aluno possa guardar o polígono de papel sem risco de perdê-lo.

Atividade 2: construção de um polígono convexo

- **Objetivos:**
  - Relacionar representações geométricas com expressões algébricas.
  - Reproduzir digitalmente um polígono convexo previamente construído no papel.
  - Explorar conceitos de medidas de lados e ângulos utilizando uma ferramenta digital.
  - Comparar a precisão das medições realizadas manualmente e digitalmente.
  - Desenvolver a autonomia dos alunos no uso do GeoGebra.
  - Estimular o pensamento crítico sobre possíveis variações nas medições realizadas nos diferentes meios.
- **Materiais Necessários**
  - Dispositivos com acesso à internet (Chromebooks ou computadores).
  - Conta Google para acesso ao GeoGebra.
  - Apostila de atividades
- **Duração estimada**
  - 3 períodos (135 minutos)
- **Resumo:**
  - Nesta atividade, os alunos vão reconstruir no GeoGebra o polígono convexo que eles criaram no papel na atividade anterior. Depois os estudantes serão convidados a comparar as medições feitas nos dois ambientes, refletindo sobre precisão, limitações e vantagens de cada método.

Sobre a Atividade

Depois de construir o polígono no papel (Atividade 1), chegou a hora de levar essa construção para o ambiente digital! Os alunos vão usar o GeoGebra para reconstruir o mesmo polígono convexo, explorando o uso de tecnologia para criar e medir figuras geométricas.

💡 Para facilitar o processo, os alunos acessam o GeoGebra com uma conta Google, garantindo que suas construções fiquem salvas e possam ser retomadas depois.

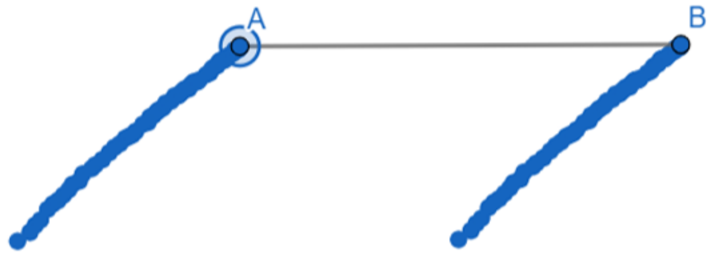
A apostila traz um manual ilustrado com o passo a passo para construir o polígono, o que permite que os próprios alunos conduzam boa parte da atividade com autonomia. Mas antes de começar a construção oficial, sugerimos uma breve atividade de exploração no GeoGebra, onde os alunos criam e movimentam segmentos e pontos, percebendo como o software lida com essas construções. Aqui, a ideia é experimentar antes de explicar — os alunos exploram livremente e descobrem as funcionalidades sozinhos, com o professor mediando e ajudando quando necessário.

Se a turma não tem muita familiaridade com o GeoGebra, o professor pode projetar a tela inicial e mostrar os comandos básicos. Essa demonstração rápida ajuda a reduzir inseguranças e tornar o processo mais fluido.

O professor deve circular pela sala, verificando se os alunos estão seguindo corretamente os passos e oferecer ajuda quando necessário. Alguns alunos podem ter dificuldades com a interface do GeoGebra ou com a inserção de medidas. Demonstre o processo no projetor ou ajude individualmente. Após a atividade, reúna a turma e peça que compartilhem suas observações, especialmente sobre as diferenças entre o polígono feito no papel e no software. Caso haja erros na construção, incentive os alunos a identificarem onde pode ter ocorrido a imprecisão.

A questão a seguir será discutida com base na pergunta do item 1.4 da Atividade 2 da apostila, que incentiva os alunos a observarem a diferença entre mover o ponto A e mover o ponto B. Após os alunos experimentarem essa movimentação, o professor pode habilitar o rastro desses dois pontos para visualizar melhor o comportamento resultante. Ao mover o ponto A, o ponto B se desloca mantendo a mesma angulação e sentido, evidenciando uma relação de dependência entre eles. Além disso, o ponto A permanece livre, permitindo que seja movido para qualquer posição no plano, como é representado na figura 4.

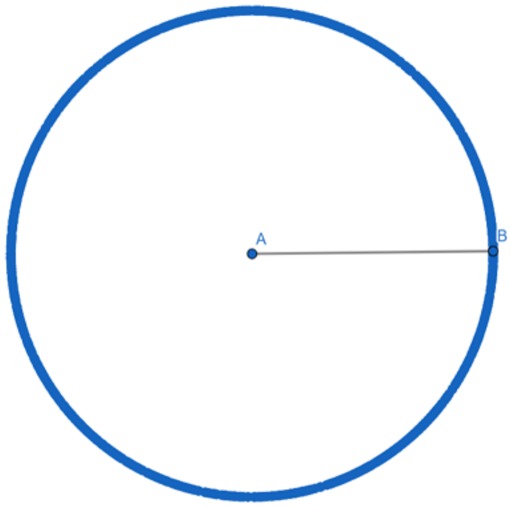
Figura 4 - Rastro ao mover o ponto A



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra (2024)

O mesmo procedimento pode ser seguido para a movimentação do ponto B (figura 5). Tornando evidente que o ponto A permanece estacionado. Isso ocorre devido à forma como o ponto B foi construído, mantendo uma distância fixa em relação ao ponto A. Portanto, o ponto B não pode ser movido independentemente para qualquer parte do plano. A "amarração" do ponto B a essa distância específica do ponto A é ilustrada pelo rastro (em azul), destacando todos os lugares pelos quais o ponto B pode se deslocar. Essa característica ressalta a limitação na movimentação do ponto B e realça a importância de compreender as restrições impostas pelos passos de construção na apostila.

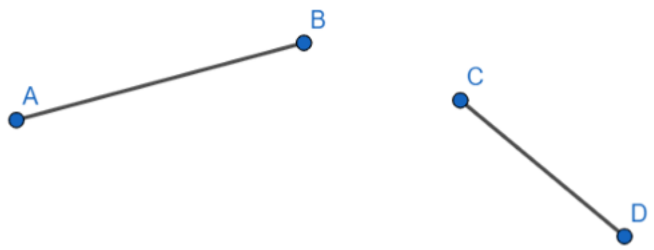
Figura 5 - Rastro ao mover o ponto B



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra (2024)

Um erro comum que pode ocorrer está ilustrado na Figura 5. Esse equívoco acontece porque, ao construir o segmento $\overline{BC}$, o aluno deveria utilizar o ponto B já existente no segmento $\overline{AB}$. No entanto, alguns estudantes, ao clicar fora do ponto B, acabam iniciando um novo segmento, gerando acidentalmente os pontos C e D e o segmento $\overline{CD}$. Essa situação pode levar a questionamentos sobre como unir os dois segmentos criados, evidenciando a importância de compreender corretamente cada etapa do processo de construção. Esse erro também permite retomar o conceito de segmentos consecutivos, destacando que o segmento $\overline{BC}$ deve ser iniciado exatamente no ponto B. Como consequência, não é possível unir os segmentos da maneira desejada, reforçando a necessidade de precisão ao selecionar os pontos no GeoGebra.

Figura 6 - Segmentos separados



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra (2024)

Outra questão que pode surgir está relacionada às medidas dos ângulos. Ao tentar replicar no GeoGebra o polígono construído no papel, os alunos podem enfrentar dificuldades em ajustar todos os ângulos exatamente às mesmas medidas. É provável que, mesmo com esforço, alguns desses ajustes não sejam possíveis. Nesse caso, a orientação deve ser para que o aluno ajuste os ângulos o mais próximo dos valores originais e, posteriormente, a turma discuta o que ocorreu. Essas discrepâncias podem gerar estranhamento ou preocupação para alguns alunos, por isso é essencial que o professor esclareça antecipadamente que pequenas diferenças são esperadas e fazem parte do processo. Isso ajudará a reduzir uma possível frustração e permitirá uma análise mais produtiva sobre os fatores que podem influenciar essas variações.

Após a atividade, incentive os alunos a compartilharem suas observações sobre as diferenças entre os polígonos. Pergunte se algum grupo encontrou dificuldades inesperadas e peça que expliquem como resolveram. Isso ajudará a consolidar o aprendizado, incentivar a troca de experiências. Por fim, algumas questões podem ser levantadas para fomentar o debate sobre as diferenças entre os dois polígonos construídos, promovendo a reflexão dos alunos. Exemplos de perguntas que podem guiar essa discussão incluem:

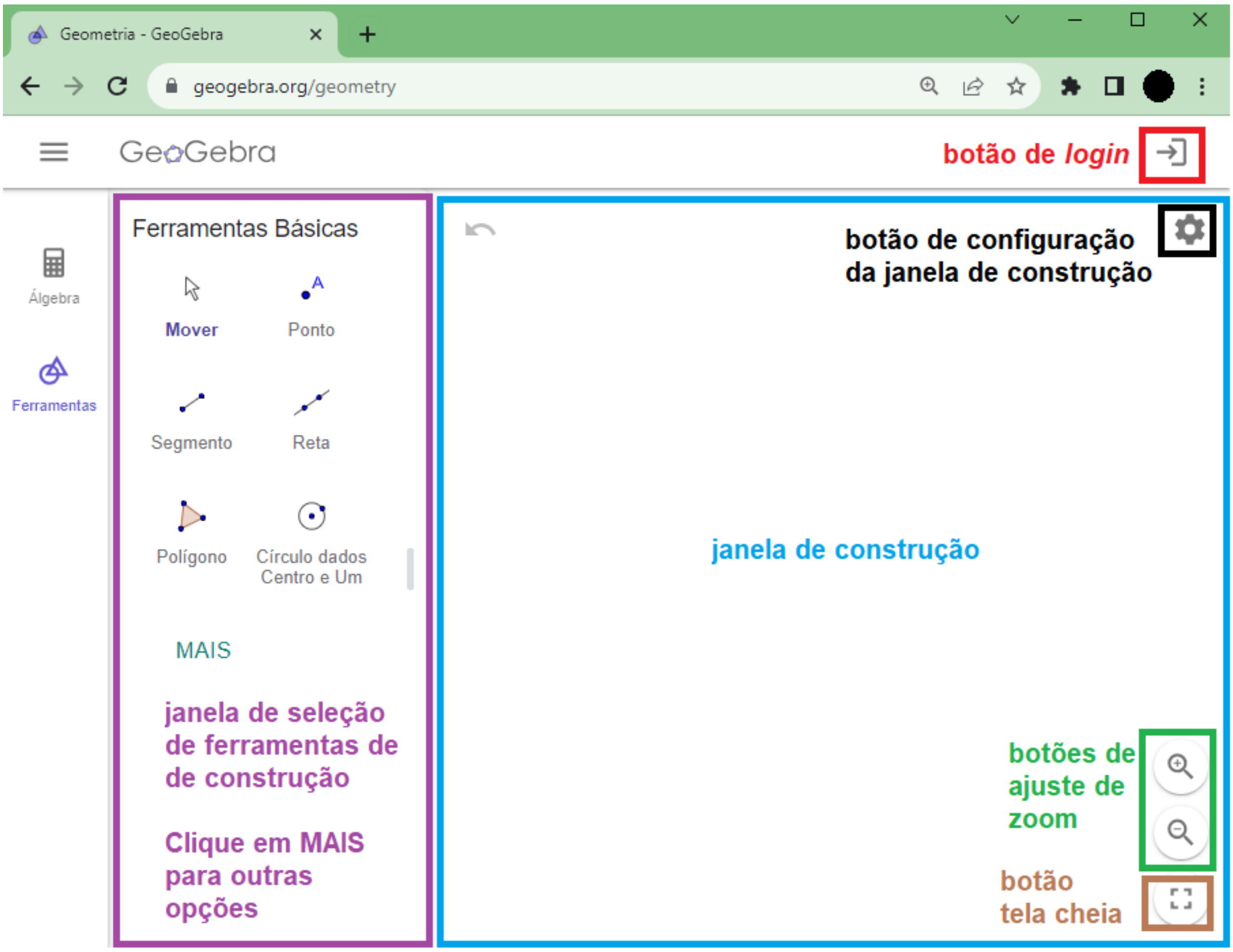
- “O que pode ter causado as diferenças?”. Os alunos podem identificar fatores como a precisão na medição, arredondamentos, pequenos erros na construção manual ou limitações ao ajustar os ângulos no GeoGebra.
- “Quais são as vantagens do uso de ferramentas digitais na geometria?”. Essa questão incentiva os alunos a compararem a construção manual com a digital, discutindo aspectos como a exatidão das medidas, a possibilidade de ajustes dinâmicos e a visualização mais clara das propriedades geométricas.

Essas reflexões ajudam a consolidar o aprendizado, destacando tanto as potencialidades quanto as limitações de cada método e fortalecendo a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

ATIVIDADE 2: Construção do polígono convexo no GeoGebra

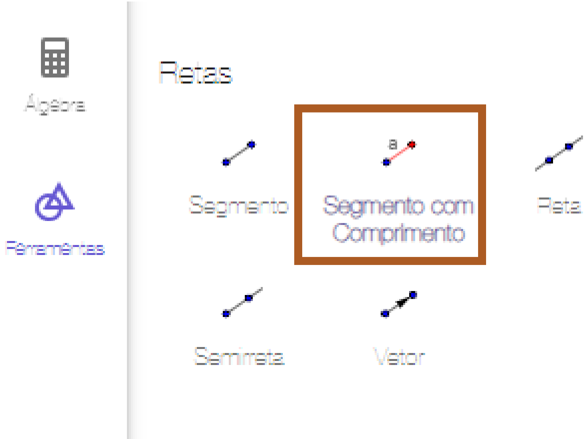
2.1. Faça o login e siga as etapas a seguir:

2.1.1. Acesse o site: https://www.geogebra.org/geometry



2.1.2. No canto superior direito, clique em entrar e acesse com a sua conta google institucional.

2.1.3. Na lateral esquerda, clique em **ferramentas**, e depois em **MAIS** para exibir todas as ferramentas disponíveis e, em seguida, selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**:



i. Clique em algum ponto na sua janela de construção (onde deseja iniciar sua construção) e irá abrir a seguinte janela:

ii. Digite a medida do $\overline{AB}$ da sua construção. O GeoGebra criará os pontos A e B de forma que o segmento tenha o comprimento informado.

Note que podemos mover esses pontos, mas a medida do segmento será mantida.

Vá em **Mover**:

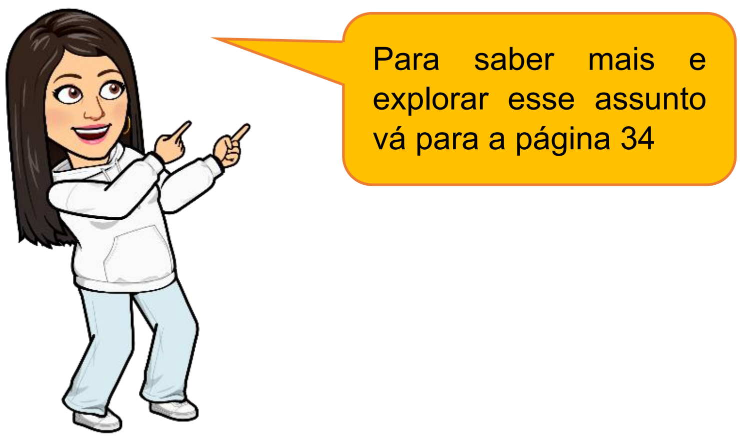
2.1.4. Responda:

a. Tente mover o ponto A. O que acontece com sua construção?

O segmento $\overline{AB}$ mantém o mesmo comprimento, mas sua posição no plano é alterada. Ao mover o ponto A, o ponto B se desloca de modo a preservar a direção (inclinação) e o comprimento do segmento AB. Nota-se que o ponto A é livre, podendo ser movido para qualquer parte do plano, enquanto o ponto B acompanha esse movimento de maneira vinculada devido à medida fixa do segmento $\overline{AB}$.

b. Mantenha o ponto A fixo e agora mova o ponto B. Explique com suas palavras a trajetória que é percorrida pelo ponto B em relação ao ponto A.

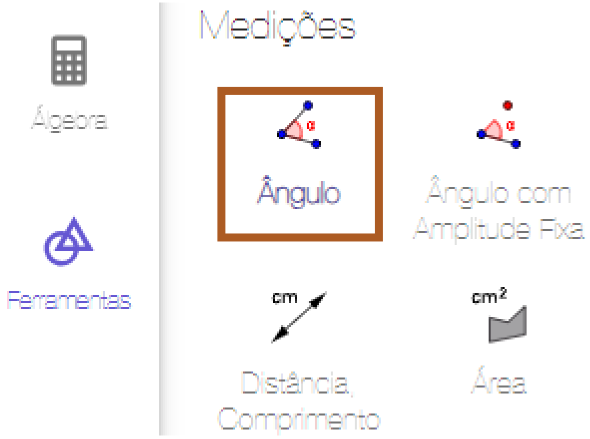
O ponto B descreve uma trajetória circular em torno do ponto A (que permanece estacionado). Essa trajetória é um círculo cujo centro é o ponto A e cujo raio é igual ao comprimento fixo do segmento $\overline{AB}$. Portanto, o ponto B não pode ser movido independentemente para qualquer parte do plano.



2.1.5. Novamente em **Segmento com Comprimento Fixo**, clicamos em B e indicamos o tamanho do segmento $\overline{BC}$. O GeoGebra criará o ponto C seguindo as recomendações.

2.1.6. No canto direito, clique no ícone de **engrenagem** e clique em **configurações**. Como na figura abaixo, clique na **engrenagem** e selecione **0 casas decimais** em **arredondamento**:

2.1.7. Na lateral esquerda, clique em **Ângulo**



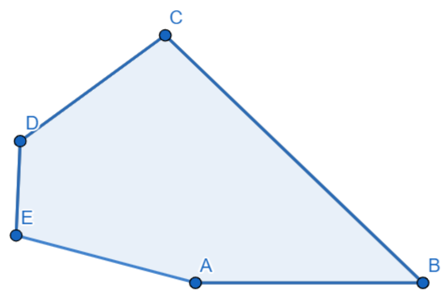
Clique no ponto C, depois no B e por último, no ponto A. O GeoGebra vai mostrar o valor do ângulo $A\hat{B}C$.

2.1.8. Em ferramentas, vá em **mover**

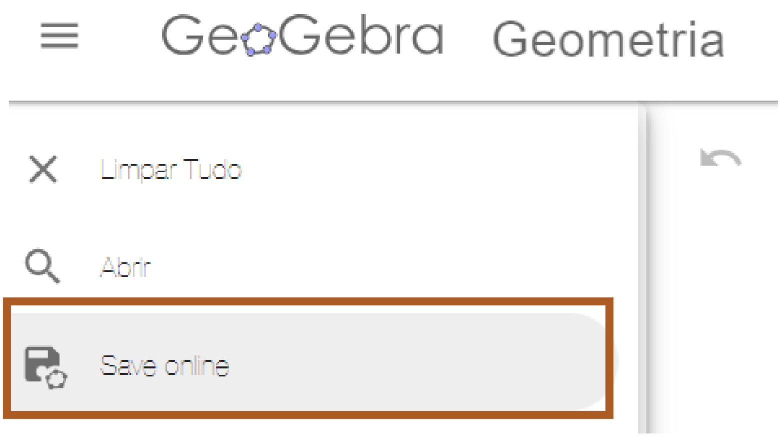
Agora mova o ponto C, até encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}C$ do polígono

2.1.9. Repetimos os passos 3, 6 e 7, criando todos os vértices, com as devidas medidas dos ângulos e dos lados do projeto que você e sua dupla elaboraram no papel.

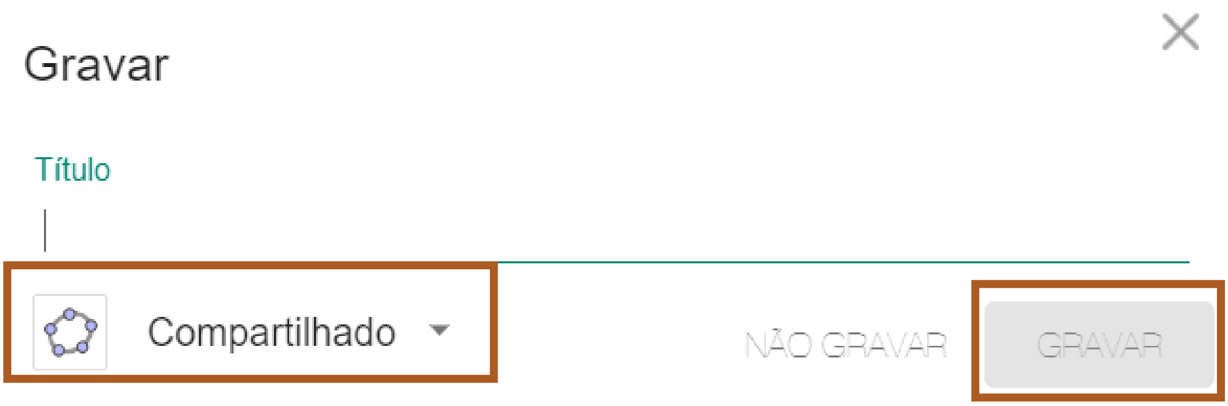
2.1.10. Vamos traçar nosso polígono, idêntico ao da atividade 1. Vá na ferramenta Polígono e clique, de forma consecutiva, em todos os vértices da sua construção, iniciando no ponto A e finalizando nele também, para "fechar" seu polígono. Em outras palavras, selecione a ferramenta polígono e clique no ponto A, depois no ponto B, e assim por diante. Depois de selecionar o último vértice, clique novamente no vértice A.



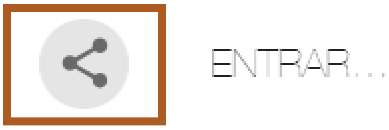
2.1.11. Vamos salvar o arquivo. Clique sobre as três barras no canto superior esquerdo, e em seguida **save online**:



Coloque os nomes da dupla para nomear arquivo, deixando a opção **Compartilhado** selecionada, e por fim, clique em **gravar**.



2.1.12. No canto superior direito, clique sobre o símbolo de compartilhar:



Abrirá uma janela com um link do seu arquivo. Envie o link no Google Classroom.

2.2. Perguntas:

2.2.1. O último segmento do polígono do papel tem comprimento ________.

2.2.2. O último segmento do polígono do GeoGebra tem comprimento ________.

2.2.3. O primeiro e o último ângulos do polígono do papel medem, respectivamente, _______ e _______.

2.2.4. O primeiro e o último ângulos do polígono do GeoGebra medem, respectivamente, ______ e ______.

Com exceção do último lado, todos os outros lados do polígono possuem a mesma medida definida pelo aluno (iguais ao polígono de papel) durante a construção. Em relação às medidas dos ângulos, o primeiro e o último ângulos são automaticamente determinados pelo GeoGebra com base nas condições impostas na construção. Esses três valores podem diferir das medidas correspondentes no polígono de papel, dependendo da precisão na construção manual.

2.2.5. Você identificou diferenças entre as medidas do polígono do papel e do GeoGebra? Descreva quais são.

Diferenças podem ser identificadas entre as medidas do polígono de papel e do GeoGebra devido à precisão dos métodos de construção. Espera-se que haja diferenças apenas no último segmento, bem como no primeiro ângulo e no último ângulo..

2.2.6. Se houver diferenças nas medidas dos dois polígonos, o que você acha que pode ter causado essa discrepância?

No polígono de papel, as medidas dos lados e ângulos podem variar ligeiramente devido a erros manuais no desenho ou na medição. Já no GeoGebra, as medidas são rigorosamente calculadas e obedecem às condições impostas durante a construção, garantindo maior exatidão. Em particular, as medidas dos ângulos no GeoGebra são determinadas automaticamente, o que pode gerar discrepâncias em relação às medidas feitas no polígono de papel.

Atividade 3: Ângulos externos

- **Objetivos da Atividade:**
  - Introduzir o conceito de ângulos externos de polígonos, permitindo que os alunos formulem suas próprias definições e hipóteses.
  - Mostrar como construir ângulos externos, utilizando exemplos visuais e ferramentas digitais como o GeoGebra.
  - Explorar e confirmar, por meio de experimentação, que a soma de um ângulo interno e seu respectivo ângulo externo é sempre 180°.
  - Promover o pensamento crítico ao investigar por que essa soma ocorre e se aplica a qualquer polígono convexo.
  - Estimular o debate sobre diferenças entre polígonos convexos e côncavos em relação aos ângulos externos.
- **Materiais Necessários:**
  - Apostila dos alunos (Atividade 3).
  - Computadores com acesso ao GeoGebra.
  - Projetor para demonstração do professor.
  - Régua
- **Resumo:**
  - Nesta atividade, os alunos vão explorar o conceito de ângulos externos. Vão construir e medir esses ângulos no GeoGebra, usando o polígono que criaram na Atividade 2. Depois, vão investigar e discutir padrões, levantando hipóteses sobre como os ângulos internos e externos se relacionam — especialmente em polígonos convexos. A ideia é que eles percebam, por conta própria, que essa soma é sempre 180°, e reflitam sobre o motivo dessa regularidade.
- **Duração estimada:** 3 períodos (135 minutos)

- **Sobre a Atividade**

A primeira etapa é provocativa: antes de apresentar qualquer definição formal, o professor pede que os alunos **escrevam uma definição inicial** sobre o que acham que é um ângulo externo. Eles podem se basear no próprio nome ("externo") e nas ideias que já possuem sobre polígonos.

⚠️ **Importante:** Deixe claro que essa primeira tentativa não precisa estar certa. Ela serve como ponto de partida para pensar e revisar depois. Assim, os alunos entendem que errar faz parte do processo investigativo.

Após esse momento inicial, o professor pode projetar polígonos na lousa, apresentar a definição formal e demonstrar a construção dos ângulos externos com exemplos concretos. Caso os alunos percebam que suas respostas estavam incorretas, esclareça que não é necessário apagar suas anotações, pois as primeiras perguntas foram intencionais para registrar suas hipóteses e reflexões.

Durante a explicação, explore a existência de dois prolongamentos possíveis (um para cada lado do polígono), mostrando que é possível construir dois ângulos externos para cada vértice. Esse momento também pode ser aproveitado para abordar o conceito de **ângulos opostos pelo vértice**, evidenciando que a escolha do lado a ser prolongado não altera as propriedades dos ângulos externos.

Antes da atividade do item 3.3 , o professor pode projetar alguns exemplos no quadro e mostrar **como construir ângulos externos**, prolongando um dos lados do polígono no GeoGebra. Os alunos, então, abrem o arquivo do polígono que criaram na Atividade 2 e salvam uma cópia para preservar o original. Com essa cópia aberta, constroem os ângulos externos de cada vértice seguindo as orientações da apostila e do professor.

Um erro comum ocorre quando os alunos selecionam os pontos na ordem errada ao construir o **ângulo** no GeoGebra, resultando no ângulo suplementar ao que se desejava. Explique que a sequência de cliques influencia o valor apresentado pelo software.

Os alunos devem preencher a tabela da apostila, registrando:

- Medidas dos ângulos internos (já feitas antes).
- Medidas dos ângulos externos recém-construídos.
- Soma de cada par (interno + externo).

Permita que eles descubram por conta própria que a **soma do ângulo interno com o ângulo externo é sempre 180°**. E se um aluno não obtiver essa soma para todos os vértices, investigue com ele se houve algum erro.

Antes mesmo do fim do preenchimento da tabela, espera-se que os estudantes percebam que há um padrão. Peça para que o aluno faça a soma de cada ângulo interno e externo para que confirme sua observação e, após isso, conduza uma discussão coletiva com perguntas como:

- **"O que vocês notaram sobre a soma do ângulo interno e externo de cada vértice?".** Ao somar o ângulo interno e o ângulo externo de cada vértice, percebe-se que o resultado foi sempre 180°
- **"Isso acontece com todos os polígonos?"**. Esperamos que isso tenha acontecido com todos grupos presentes na sala de aula. E de fato é o que se parece é que sim, essa propriedade se aplica a qualquer polígono **convexo**, pois, em todos os casos, o ângulo externo é construído pelo prolongamento de um lado e forma um ângulo suplementar (de 180°) com o ângulo interno correspondente.
- **"Por que isso acontece?".** Retomamos o próprio processo de construção: o ângulo externo foi formado **ao prolongar um lado do polígono**. Isso significa que o ângulo interno e o externo compartilham uma semirreta e formam, juntos, um ângulo raso — ou seja, 180°. Essa explicação visual ajuda os alunos a consolidar o conceito.
- **"O que podemos afirmar sobre a soma dos ângulos externos de um polígono convexo?".** Ao somar o ângulo interno e o ângulo externo de cada vértice, percebe-se que o resultado foi sempre 180°.
- **"O mesmo ocorre para um polígono concavo?".** Essa relação pode não se manter, pois alguns ângulos internos são maiores que 180°, alterando a construção dos ângulos externos. Nesses casos, a ideia de prolongar o lado para fora pode se tornar confusa, mostrando que essa propriedade é **típica dos convexos** — mais uma forma de conectar definições, propriedades e classificações geométricas.

Esta atividade permite que os alunos explorem ativamente os conceitos geométricos, promovendo a compreensão da relação entre ângulos internos e externos por meio da experimentação. O papel do professor não é fornecer respostas diretas, mas sim guiar a investigação, incentivando os estudantes a formular hipóteses, testar ideias e construir conhecimento matemático de forma significativa.

Com essa atividade, os alunos não só aprendem a definir e medir ângulos externos, mas também percebem como propriedades geométricas nascem das próprias construções matemáticas. Essa conexão entre definição, construção e experimentação é essencial para desenvolver um pensamento matemático mais profundo e autônomo.

Atividade 3: Ângulos externos

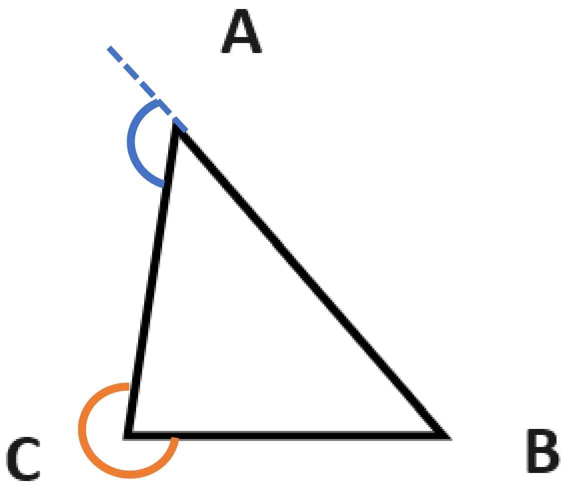
3.1. Explorando o conceito de ângulo externo

3.1.1. O que vocês acreditam que é ângulo externo?

A resposta é individual e pessoal, pois pergunta-se o que o aluno acredita. É comum que a nomenclatura "ângulo externo" leve os alunos a acreditarem que se trata da região externa ao polígono delimitada por suas extensões, sem perceber que ele é complementar ao ângulo interno em cada vértice. Essa confusão ocorre devido à associação imediata com a palavra externo.

3.1.2. De acordo com a definição que você escreveu acima, desenhe os ângulos externos do triângulo ABC:

A resposta é individual e baseada nas crenças e concepções prévias de cada aluno, portanto, não há uma resposta única ou considerada correta neste momento. O objetivo é explorar as ideias e percepções iniciais sobre o assunto.

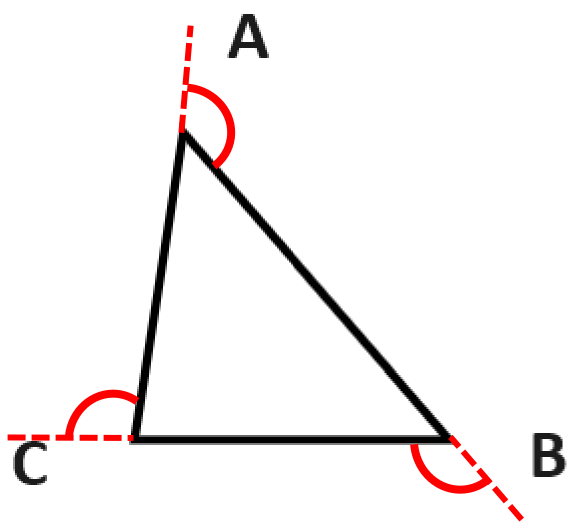


Em azul está a resposta que seria considerada "correta", enquanto em laranja destacamos o que frequentemente os alunos acreditam ser o ângulo externo: toda a parte que não corresponde ao ângulo interno. Mais adiante, será trabalhada a definição de ângulo externo.

3.2. Apresentando o conceito de ângulo externo.

Preste atenção na explicação da professora que irá projetar exemplos de ângulos externos em um triângulo, e em um quadrilátero, mostrando como encontrar os ângulos externos de cada vértice.

3.2.1. Agora, vamos refazer a atividade anterior. Desenhe os ângulos externos do triângulo abaixo. Use as semirretas suportes.

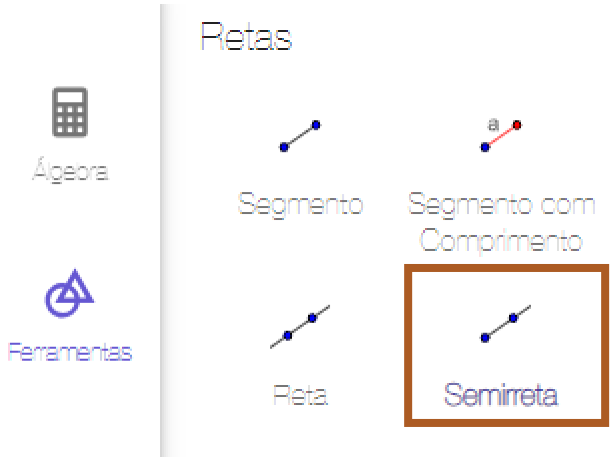


3.3. Construindo os ângulos externos do polígono no GeoGebra

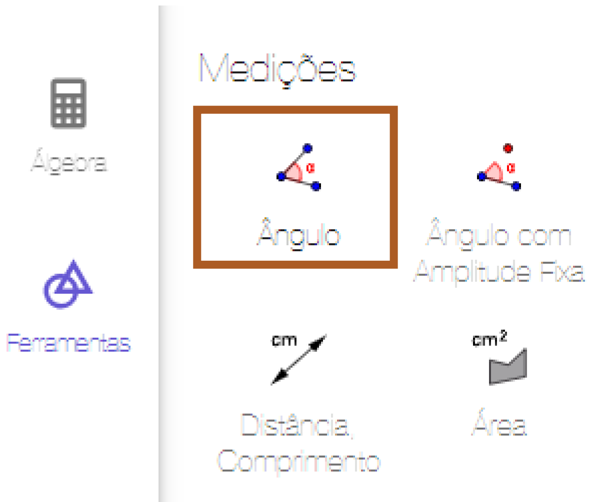
3.3.1. Abra o GeoGebra e localize o arquivo da atividade anterior que contém o polígono desenhado.

3.3.2. Clique em “Arquivo” no menu superior e escolha “Salvar como...” ou “Salvar uma cópia como...” para criar uma cópia do arquivo. Dê um novo nome para a cópia e clique em “Salvar”.

3.3.3. Trace uma semirreta com origem em A e passando por B.



3.3.4. Clique em ângulo, e depois selecione a semirreta criada no passo anterior e o lado $\overline{BC}$.



O GeoGebra vai criar o ângulo externo de $\hat{B}$

3.3.5. Repita os passos 3 e 4 do processo acima, criando todos ângulos externos do polígono.

3.4. Responda

3.4.1. De acordo com os vértices do seu polígono, complete a tabela com as medidas dos ângulos internos e externos. Por fim, faça o cálculo da soma do ângulo interno com o ângulo externo de cada um dos vértices.

	Medida do ângulo interno	Medida do ângulo externo	Soma do ângulo interno com o externo
$\hat{A}$	Resposta individual	Resposta individual	180°
$\hat{B}$			180°
$\hat{C}$			180°
$\hat{D}$			180°
$\hat{E}$			180°

3.4.2. O que você pode afirmar sobre a soma dos ângulos internos e externos (os resultados encontrados na última coluna da tabela)?

A soma dos ângulos internos e externos em cada vértice de um polígono é sempre igual a 180°, pois os ângulos interno e externo são suplementares.

3.4.3. Verifique se seus colegas também concluíram o mesmo:

Os alunos devem verificar se seus colegas também concluíram que, em cada vértice do polígono, a soma dos ângulos interno e externo é igual a 180°, devido à relação de suplementaridade entre eles.

3.4.4. Será que isso acontece para qualquer polígono?

Espera-se que os alunos concluam que sim, essa propriedade ocorre para qualquer polígono convexo. A soma dos ângulos interno e externo em cada vértice será sempre igual a 180°, pois eles são suplementares.

3.4.5. Por que isso acontece?

Isso acontece pela forma como o ângulo externo é construído. Ele é determinado pela extensão do lado do polígono, formando um par suplementar com o ângulo interno. Essa construção garante que, em cada vértice, a soma dos ângulos interno e externo seja sempre 180° em polígonos convexos.

Atividade 4: Reprodução em MDF

- **Objetivo:**
    - Esta atividade tem como propósito proporcionar aos alunos uma experiência concreta e visual no estudo dos ângulos internos e externos de um polígono. Para isso, os estudantes irão reproduzir, em MDF, os polígonos previamente construídos no GeoGebra, além de recortar os ângulos externos para uma atividade posterior. A utilização de materiais físicos permite uma melhor compreensão das propriedades geométricas e facilita a visualização das relações entre os ângulos.
- **Materiais Necessários:**
    - Computadores ou Chromebooks para acessar o GeoGebra.
    - Cortadora a laser.
    - Placas de MDF (ou material similar).
    - Tintas e pincéis para colorir os ângulos internos e externos.
    - Papel impresso com a construção do polígono de cada aluno no GeoGebra.
- **Resumo:**
    - Nesta atividade, os alunos vão ver seus polígonos "ganharem vida". Eles irão transferir suas construções digitais para o MDF, criando peças físicas que podem ser manipuladas, coloridas e analisadas de perto. Esse processo aproxima os conceitos geométricos da realidade concreta, ajudando a consolidar o entendimento das propriedades trabalhadas.
- **Duração estimada:** 4 períodos (180 minutos)

- **Sobre a Atividade**

O professor deve providenciar a impressão em folha de papel de cada construção. Há possibilidade de usar a **"Previsão da Impressão"** dentro do GeoGebra, onde é possível ajustar a **Escala** da impressão, configurando **1 unidade do GeoGebra para equivaler a 1 cm**. Dessa forma, ao imprimir o arquivo, a proporção das medidas será mantida, evitando distorções. É importante que configure para mostrar o valor de cada ângulo, pois usaremos em outra atividade essas medidas.

Para garantir a segurança durante o uso da cortadora a laser, recomenda-se que apenas o professor manuseie o equipamento durante a execução dos cortes. Além disso, recomenda-se que apenas o grupo responsável pelo polígono que está sendo cortado deva permanecer próximo à máquina, enquanto os demais alunos aguardam sua vez.

Para manter a organização e otimizar o tempo, os estudantes que ainda não foram chamados podem aproveitar esse momento para colorir suas impressões em papel.

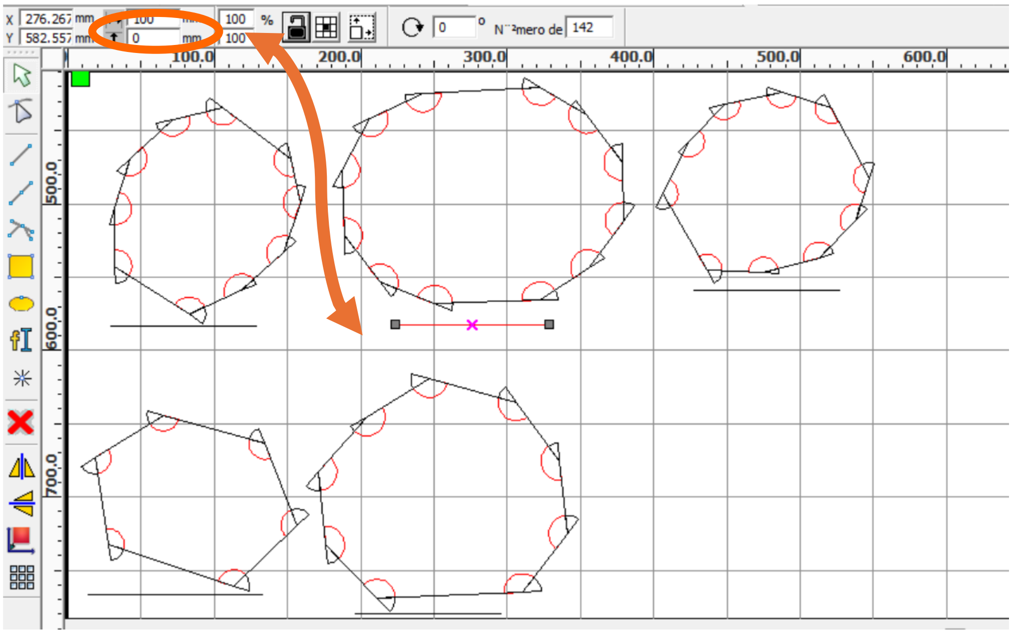
É importante destacar que o GeoGebra não utiliza centímetros como unidade padrão em suas construções geométricas. No entanto, é interessante garantir que os polígonos sejam reproduzidos nas mesmas medidas que foi planejado. Para garantir isso, o professor pode adicionar um segmento de medida fixa junto à construção do aluno do GeoGebra. Por exemplo, pode-se criar um segmento de **10 cm (100 mm)** dentro do arquivo do GeoGebra, garantindo um ponto de referência para a escala. Assim usaremos a proporção desejada para que seja mantida ao importar a construção para o programa **RDWorks**.

Após essa etapa, o professor pode fazer o **download do arquivo em formato SVG** diretamente do GeoGebra e importá-lo para o ***RDWorks***. Dentro do software de corte, é possível ajustar a escala de toda a construção tomando como base esse segmento fixo. Para isso, é necessário um cálculo comparando o tamanho desse segmento fixo com o valor que desejamos. Assim é possível redimensioná-la até que o segmento tenha exatamente **100 mm**, o que assegura que todas as demais proporções do polígono sejam mantidas no tamanho correto[5].

A figura 7 ilustra esse processo, onde cada polígono aparece com o segmento fixo abaixo. A seta laranja indica a seleção de um segmento e a exibição de sua medida dentro do software, mostrando que a escala já está devidamente ajustada. Em seguida, o professor pode excluir esse segmento de referência, garantindo que apenas a construção original do aluno seja utilizada para o corte a laser.

[5] A construção de um segmento que servirá de referência, assim como o cálculo que envolve regra de três, pode ser uma tarefa para o seu aluno.

Figura 7 - Usando o RDWorks para configurar o corte



Fonte: Encaixe das Construções dos alunos no RDWorks, 2022.

Recomenda-se o uso de diferentes cores para demarcar as linhas presentes no arquivo. Como podemos verificar na figura acima, a cor preta foi aplicada aos lados do polígono e aos ângulos externos, pois foi usada para realizar cortes completos no material. Já para os ângulos internos, foi utilizada a cor vermelha, pois essas linhas devem ser apenas gravadas na superfície do MDF, sem atravessá-lo. Ou seja:

- Linhas pretas: cortes completos
- Linhas vermelhas: gravações superficiais

Além disso, é recomendável que o professor faça um teste de corte com um modelo antes de liberar os alunos para a etapa final, garantindo que a escala esteja correta e que as peças sejam recortadas conforme o esperado. Isso evita desperdício de material e reduz o risco de erros durante a produção das peças em MDF.

Seguindo essas etapas, o professor assegura que os polígonos construídos digitalmente no GeoGebra sejam fielmente reproduzidos no corte a laser, permitindo uma experiência prática e enriquecedora para os alunos no estudo das propriedades geométricas. Após todos os cortes e pinturas, promova uma roda de conversa com os grupos para compartilhar descobertas e dificuldades do processo. Algumas perguntas que podem guiar essa conversa:

- "O polígono ficou exatamente do tamanho esperado? Por que sim ou por que não?"
- "Vocês notaram algo interessante ao manusear o polígono físico?"

- "Como foi perceber o que antes estava só na tela e no papel se transformar em algo concreto?"

Esse momento de reflexão ajuda a dar **sentido matemático** à atividade prática, fechando o ciclo de experimentação com análise crítica e valorizando o percurso investigativo.

Caso a escola não disponha ou não tenha acesso a uma cortadora a laser ou ao MDF, essa atividade pode ser facilmente adaptada para outros materiais, como cartolina, papel cartão ou papelão. Nessas versões alternativas, os alunos podem recortar manualmente seus polígonos utilizando régua e tesoura, e as marcações de ângulos internos e externos podem ser feitas diretamente no papel, com o auxílio de lápis de cor ou canetas coloridas. Embora o acabamento final seja diferente, a essência da atividade — que é permitir aos alunos manusearem, observarem e analisarem seus polígonos em formato físico — permanece preservada. Essa adaptação amplia as possibilidades de aplicação do produto didático, tornando-o acessível a diferentes contextos escolares, independentemente da infraestrutura disponível.

Atividade 4: Reprodução em MDF

4.1. Nesta etapa, você utilizará uma cortadora a laser para criar peças de MDF que representam os polígonos que desenhamos anteriormente no GeoGebra. Além disso, você também cortará peças de MDF para representar os ângulos externos que medimos no passo anterior.

4.1.2. Para facilitar a identificação dos ângulos externos e internos, você pintará cada par de ângulos, interno e externo, que compartilham o mesmo vértice, com cores correspondentes. Utilizaremos uma cor específica para cada vértice, de forma que os ângulos externos e internos do mesmo vértice tenham cores iguais. Diferentes vértices terão cores distintas, o que tornará a análise visual mais intuitiva para você.

4.1.3. Cada aluno receberá o polígono que criou no GeoGebra, impresso em papel. Agora, sua tarefa é pintar cada ângulo interno e externo do mesmo vértice com as mesmas cores que foram utilizadas no passo 2. Por exemplo, se você pintou os ângulos externo e interno do vértice A de rosa no passo 2, faça exatamente o mesmo aqui, pintando ambos os ângulos do vértice A de rosa.

4.1.4. Deixe suas peças secando.

Lembre-se de manusear a cortadora a laser com cuidado e seguir todas as orientações de segurança fornecidas pelos professores e instrutores responsáveis. A precisão na identificação dos ângulos será fundamental para o sucesso das próximas atividades e sua compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

Divirta-se explorando os polígonos em MDF e descobrindo algumas de suas propriedades!

Atividade 5: Dedução da Soma das Medidas dos Ângulos Externos

- **Objetivo**
  - Guiar os alunos a investigar e deduzir a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo. O objetivo principal é que os alunos percebam, por meio da experimentação e manipulação, que a soma dessas medidas é sempre 360°. Além disso, pretende-se fortalecer a compreensão da relação entre os ângulos internos e externos dos polígonos.
- **Materiais Necessários:**
  - Polígonos recortados em MDF (da Atividade 4).
  - Apostila impressa (Atividade 5).
- **Resumo:**
  - Nesta atividade, os alunos vão transformar seus polígonos em um verdadeiro quebra-cabeça matemático**.** Com suas peças de MDF em mãos, o desafio é organizar os ângulos externos de modo que eles se encaixem formando uma figura conhecida — e é justamente essa montagem que vai revelar a soma total das medidas.
  - **Duração estimada:** 2 períodos (90 minutos)

Sobre a Atividade

O professor começa relembrando com a turma o que são ângulos internos e externos, reforçando como eles foram construídos e medidos nas atividades anteriores. Cada grupo recebe seu polígono em MDF, junto com as peças que representam seus ângulos externos e os alunos devem ler as instruções da atividade na apostila em conjunto. Explique que o objetivo da atividade é identificar um padrão na soma dos ângulos externos. Pergunte aos alunos se eles já suspeitam de alguma relação entre esses ângulos nos polígonos e incentive-os a compartilhar suas observações.

Pode haver alguma resistência inicial à atividade, pois ela exige um raciocínio mais subjetivo. Como não há uma instrução exata sobre como os ângulos devem ser encaixados, cabe ao aluno descobrir a solução. Para incentivá-los, compare a atividade a um quebra-cabeça, onde as peças devem ser organizadas até formar uma figura reconhecível. Nesse caso, os ângulos são representados por setores circulares de mesmo raio e, ao serem dispostos corretamente, os raios se alinham, formando um círculo completo, como ilustrado na Figura 8.

Figura 8 - Exemplos de encaixes

Montagem elaborada pela autora (2024).

Após o encaixe dos ângulos, os alunos devem responder à questão do item 5.2.1 na apostila. Em seguida, cada grupo deve apresentar aos colegas sua estratégia de encaixe e a figura resultante. Isso permitirá que avancem para as próximas questões da apostila, registrando suas descobertas.

Ao final da atividade, o professor pode promover um debate para consolidar o aprendizado. Espera-se que os alunos tenham compreendido intuitivamente a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo. A expectativa é que os alunos percebam que os ângulos externos, ao serem dispostos lado a lado, formam **um círculo completo de 360°**. O professor deve ficar atento para que todos os estudantes participem ativamente do processo investigativo.

É fundamental que os alunos organizem e guardem corretamente todas as peças para evitar extravios. Para manter a organização, recomenda-se o uso de sacos plásticos separados para cada polígono, onde devem ser armazenados o polígono recortado em MDF, seus ângulos externos e a folha impressa do polígono contendo os nomes dos integrantes do grupo. Essa organização garante que o material possa ser reutilizado em atividades futuras, além de criar uma relação de cuidado e pertencimento dos alunos com suas produções.

O professor pode conduzir uma discussão com toda a turma para consolidar essa descoberta. Algumas perguntas podem orientar essa conversa:

- “O que vocês perceberam ao encaixar os ângulos externos?”
- “O formato final se repetiu em todos os grupos? Por quê?”
- “Isso vale para qualquer polígono convexo?”
- “E se o polígono fosse côncavo? Essa propriedade se manteria?”

Esse momento de troca é essencial para conectar a prática com a teoria e transformar a atividade em uma verdadeira **construção de significado matemático**.

Dedução da soma dos ângulos externos

5.1. Nesta atividade, iremos explorar os ângulos externos dos polígonos que desenhamos no GeoGebra usando as peças de MDF cortadas. Siga os passos abaixo:

5.1.1. Sente-se junto com sua dupla. Não se esqueça que a dupla deverá trabalhar em conjunto. Você e seu colega deverão revezar na manipulação das peças e no registro das descobertas, incentivando o diálogo e a colaboração entre os membros da dupla.

5.1.2. Deixe sua mesa livre: permanecerá apenas esta apostila, lápis e borracha.

5.1.3. Receba suas peças de MDF e coloque sobre sua mesa, para que você possa manipulá-las facilmente.

5.1.4. Posicione os ângulos externos, de acordo com sua cor, conferindo se você recebeu todas as peças corretamente. Certifique-se de alinhar cada ângulo externo de forma que eles se encaixem perfeitamente com os ângulos internos do polígono.

5.1.5. Retire o polígono, deixando apenas os ângulos externos sobre a mesa.

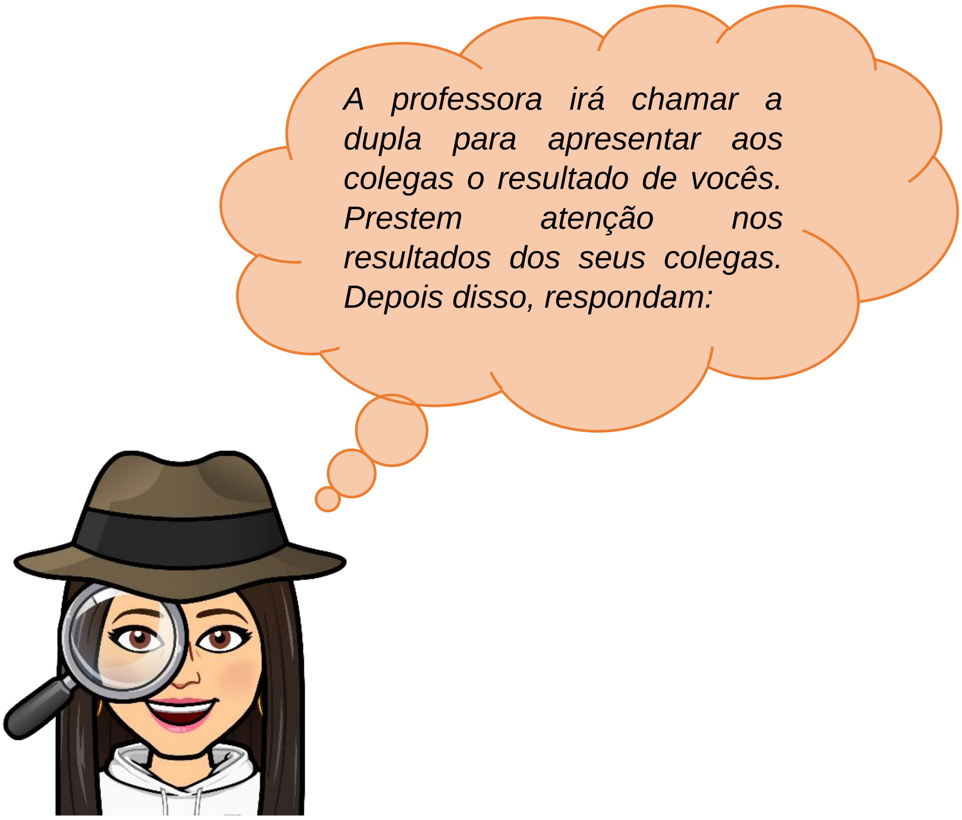
5.1.6. Agora tente encaixar todos os ângulos externos unindo todos os vértices desses ângulos.

5.1.7. Dialogue com sua dupla e tentem descobrir o que formam esses ângulos. Estou animada para ver suas descobertas!

5.2 EXERCÍCIOS

5.2.1 Complete:

Os ângulos externos se alinham formando um ___*círculo*___. A soma dos ângulos externos do seu polígono é ___*360°*___ graus.



5.2.2 Os resultados da outra dupla que fez o polígono de mesma quantidade de lados foram iguais? Por quê?

Sim, os resultados das outras duplas que construíram o polígono com a mesma quantidade de lados devem ser iguais, desde que o polígono seja convexo e as medidas dos ângulos internos e externos tenham sido determinadas corretamente. Caso haja discrepâncias nos resultados, pode ter havido algum erro na construção ou na medição que precisa ser revisado.

5.2.3 E em relação aos outros colegas, vocês percebem alguma semelhança nos resultados obtidos por eles?

Os alunos devem perceber que, independentemente da quantidade de lados do polígono, a soma dos ângulos externos é sempre 360°. Essa é uma propriedade comum a todos os polígonos convexos, independentemente do número de lados. Assim, embora os valores individuais dos ângulos variem conforme o número de lados, as propriedades gerais das somas dos ângulos externos permanecem iguais a 360°.

5.2.4 O que vocês podem concluir sobre a soma dos ângulos externos de polígonos convexos?

A conclusão esperada é que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo, independentemente do número de lados, é sempre igual a 360°. Essa propriedade é uma característica fundamental dos polígonos convexos e reflete a ideia de que, ao percorrer todos os vértices do polígono, os ângulos externos completam uma volta inteira ao redor da figura.

Atividade 6: Dedução da Soma dos Ângulos Internos de um Polígono

- **Objetivos da Atividade**
    - Descobrir e compreender a soma dos ângulos internos de um triângulo e de outros polígonos.
    - Relacionar a soma dos ângulos internos com o número de lados do polígono.
    - Estimular a experimentação e a formulação de conjecturas matemáticas por meio da manipulação de materiais concretos.
    - Integrar conceitos geométricos à construção de generalizações matemáticas.
    - Formalizar as relações entre o número de lados, diagonais e triângulos de um polígono.
    - Estimular o pensamento matemático por meio do preenchimento colaborativo de um cartaz.
    - Fomentar a generalização

- **Materiais Necessários**
    - Apostila dos alunos
    - Triângulos de MDF com ângulos destacáveis (para demonstração)
    - Papel, régua, tesoura e cola
    - Lápis de cor ou canetas coloridas
    - Computador ou projetor para demonstrar no GeoGebra
    - Cartaz com tabela pronta (para preenchimento coletivo)
- **Resumo:**
    - Nesta atividade, os alunos vão investigar e descobrir a **fórmula da soma dos ângulos internos** de um polígono convexo. O processo começa com a análise de triângulos, passa pela decomposição de polígonos em triângulos e termina com a construção de uma **tabela coletiva**, que revela o padrão, ou seja, o primeiro passo em busca da generalização da relação entre o número de lados e a soma dos ângulos internos.
- **Duração Estimada:** 3 períodos (135 minutos)

Atividade 6.1: Descobrindo a Soma das Medidas dos Ângulos Internos de um Triângulo

O professor deve iniciar a atividade apresentando um triângulo em MDF com ângulos destacáveis e pedir que os alunos observem e reflitam sobre a soma de seus ângulos internos.

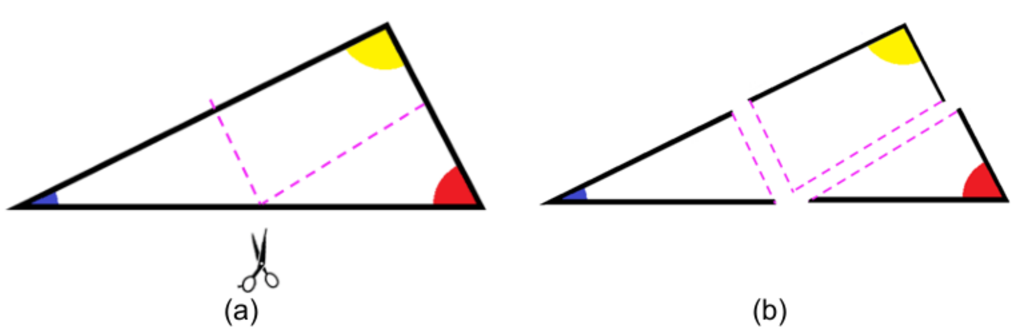
- Questões para fomentar o debate:
    - O que podemos inferir sobre a soma dos ângulos internos desse triângulo?
    - Movimente os ângulos internos do triângulo para tentar descobrir o valor da soma dessas medidas.
    - Será que esse resultado vale para qualquer triângulo?

Após o debate inicial, os alunos devem responder à questão 6.1.1 da apostila e registrar como chegaram à sua conclusão. A questão 6.1.3 pode gerar um pequeno debate entre as respostas, mas não é necessário que o professor explique a resposta correta pois é uma pergunta que serve para gerar a dúvida sobre a questão. Ou seja, o intuito é faze-los refletir sobre isso.

Atividade 6.2: Descobrindo a Soma das medidas dos Ângulos internos de outros Triângulos

Nessa etapa, os alunos recortarão um triângulo em papel, destacando em três partes contendo seus ângulos e reorganizando-os sobre uma linha reta. É importante que o professor auxilie a turma em cada instrução da apostila. As instruções são complementadas com essas figuras que podem ser projetadas ou representadas no quadro pelo professor.

Figura 9 - Recorte ao triângulo



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Durante a atividade o professor deve estimular a experimentação, observação e a discussão sobre o assunto. Algumas questões que podem ser exploradas são:

- Qual o valor da soma da medida dos três ângulos? Por que?
- Outros colegas encontraram o mesmo?
- O que acontece se fizermos esse processo com triângulos de diferentes formatos?
- A soma dos ângulos internos muda?
- Será que é possível construir um triângulo que a soma das medidas dos ângulos internos seja diferente de 180°?

Para reforçar que a propriedade acima é válida para qualquer triângulo, o professor pode apresentar uma construção[6] de um triângulo no GeoGebra, no qual a exibe da soma das medidas de seus ângulos internos. Dessa forma, ao mover os vértices do triângulo, os alunos poderão observar que essa soma permanece constante e sempre igual a 180°, independentemente das alterações no formato do triângulo. Além disso, é interessante permitir que os próprios alunos experimentem e manipulem os vértices, pois isso os motiva a testar suas próprias ideias e verificar o comportamento da soma dos ângulos na prática. O professor pode ainda compartilhar a construção digital para que cada estudante explore individualmente e valide a propriedade observada.

Atividade 6.3: Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo

Os alunos devem calcular a soma das medidas dos ângulos internos do polígono que construíram, através da impressão em papel que contém a medida de cada ângulo. A soma pode ser realizada usando a calculadora e o professor deve ficar atento para possíveis erros de cálculo e até de aproximação do próprio GeoGebra. Lembrando ao professor que a soma dos ângulos internos é sempre múltipla de 180.

Atividade 6.4: Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos do Polígono Através de triângulos

Agora, os alunos devem encontrar a mesma soma dos ângulos internos que calcularam na atividade anterior, porém utilizando uma abordagem diferente: a divisão do polígono em triângulos, o que significa que a soma total dos ângulos internos do polígono será equivalente à soma dos ângulos internos de todos os triângulos formados.

[6] O arquivo com a construção deste triângulo manipulável pode ser encontrado em: https://www.geogebra.org/m/tgdqbk9x

Como já foi mostrado, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é **180°**. Agora basta multiplicar esse valor pelo número de triângulos obtidos na decomposição do polígono.

Perguntas para Reflexão:

- O número de triângulos formados depende do número de lados do polígono?
- Existe uma relação entre a quantidade de lados do polígono e a soma de seus ângulos internos?

É natural que surjam dúvidas, e o professor deve estar atento para conduzir um debate que explore as questões abordadas. Uma estratégia é construir, junto com os alunos, uma tabela na lousa contendo os dados encontrados, relacionando o número de lados de cada polígono com o número de triângulos formados e o número de diagonais, como no modelo a seguir:

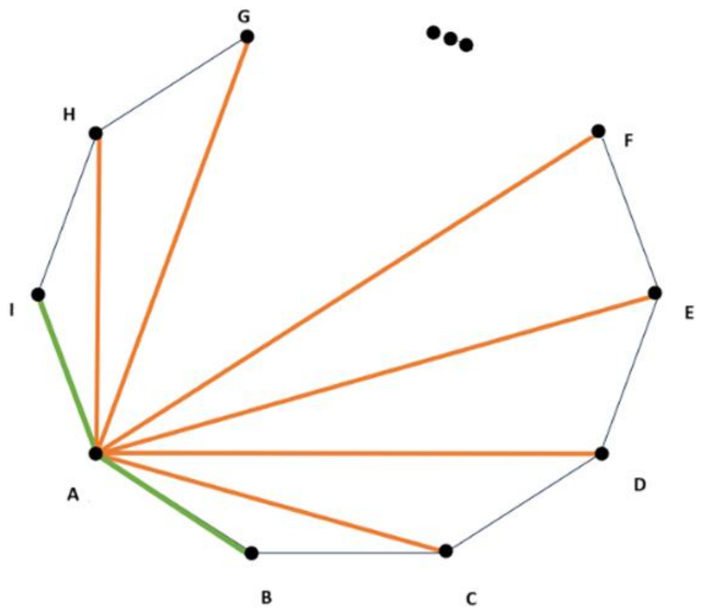
Número de Lados (n)	Número de Triângulos	Número de Diagonais
3	1	0
4	2	1
5	3	2
6	4	3
7	5	4
8	6	5
9	7	6
10	8	7
...		

Essa tabela pode ser o ponto de partida para incentivar os alunos a identificar e discutir relações entre os dados apresentados. O professor pode instigar observações, como:

- As sequências numéricas que surgem verticalmente.
- A relação entre o número de triângulos e diagonais (o número de triângulos é sempre um a mais que o número de diagonais).
- O fato de que o número de diagonais é sempre três a menos que o número de lados.
- O número de triângulos formados é sempre dois a menos que o número de lados.

O professor deve incentivar os alunos a refletirem sobre o motivo dessas relações. Para isso, pode-se começar desenhando um polígono "aberto" na lousa, sem fechá-lo, permitindo a adição de mais lados. Essa abordagem visual ajuda a ilustrar que, para cada lado adicionado, surge uma nova diagonal.

Figura 10 - Polígono Genérico e Relações com as Diagonais

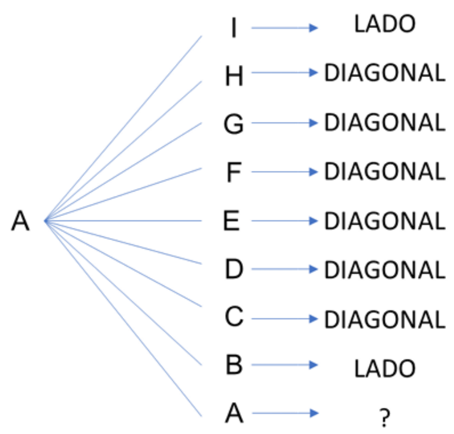


Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Para explicar a relação entre o número de diagonais e o número de lados (ou vértices), o professor pode convidar os alunos a fixarem um vértice de um polígono e traçarem segmentos ligando esse vértice a todos os outros. Essa construção pode ser representada na figura 11, que indica se ele representa um lado ou uma diagonal. Essa visualização facilita a compreensão de que três vértices não geram diagonais:

1. O próprio vértice fixo.
2. Os dois vértices adjacentes a ele.

Figura 11 - Esquema de verificação de diagonais e lados



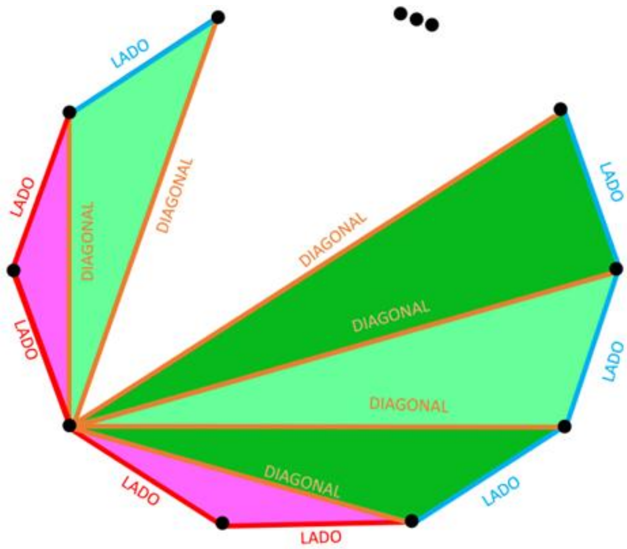
Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Essa visualização ajuda a consolidar a compreensão de que o número de diagonais traçadas a partir de um vértice é sempre **três a menos** que o número de vértices do polígono. Essa é a chave para entender a relação da quantidade de diagonais de um polígono e seus lados (ou vértices)

Em seguida, o professor pode ampliar essa análise ao mostrar que cada diagonal traçada forma um novo triângulo dentro do polígono. Para tornar isso visível, o professor pode construir junto com os alunos uma sequência de diagonais, cada uma gerando um novo triângulo. Assim é possível perceber que há dois tipos de triângulos:

- Triângulos formados por duas diagonais e um lado (representados em tons de verde na figura 12).
- Triângulos formados por dois lados e uma diagonal (em tons de rosa na figura 12).

Figura 82 - Triângulos formados pelos lados e diagonais traçadas a partir de um vértice fixo

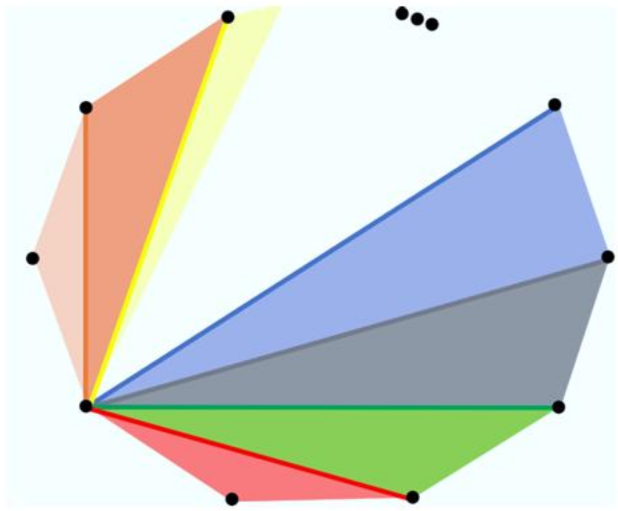


Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Com essa abordagem deseja-se explicar que, exceto pelos dois lados adjacentes ao vértice fixo de onde foram traçadas as diagonais, todos os outros lados geram um novo triângulo, consolidando a compreensão da relação entre o número de lados, triângulos e diagonais de um polígono.

Sob outra perspectiva, é possível contar cada triângulo formado à medida que as diagonais são traçadas. A Figura 12 ilustra esse processo, começando com a primeira diagonal, em vermelho, que forma o primeiro triângulo destacado na mesma cor.

Figura 9 - Processo de formação de triângulos a partir do traçado das diagonais de um polígono



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

O mesmo ocorre com as diagonais subsequentes — representadas em verde, cinza, azul e amarelo — sendo que o triângulo amarelo é formado por um lado, pela diagonal anterior e pela nova diagonal traçada. No espaço em branco previamente discutido, cada novo lado acrescentado gera uma nova diagonal, resultando na formação de mais um triângulo. Por fim, a última diagonal traçada, em laranja, forma dois triângulos (também destacados em tons de laranja). Assim, conclui-se que o número de triângulos formados será sempre um a mais do que o número de diagonais. Como o número de diagonais é igual ao número de lados menos três, o total de triângulos será sempre igual ao número de lados menos dois. Ou seja, traduzindo para a linguagem algébrica, onde a quantidade de triângulos é T, de diagonais D e de lados L, obtemos:

$$\begin{cases} T = D + 1 \\ D = L - 3 \end{cases}$$

Ao se substituir a segunda equação na primeira obtemos:

$$T = L - 3 + 1$$

$$T = L - 2$$

Para que essa sequência seja realmente didática e significativa, é fundamental que as figuras e construções sejam feitas junto com os alunos, e não apenas apresentadas prontas no quadro ou na tela. Quando os alunos participam da construção, adicionando uma diagonal de cada vez e observando a formação progressiva dos triângulos, o raciocínio fica muito mais claro e a compreensão se torna concreta. Esse movimento de construir junto é mais poderoso do que apenas observar uma figura estática. Além disso, ao criar as figuras no próprio ritmo da turma, o professor pode perceber dúvidas, propor perguntas e adaptar o ritmo conforme a necessidade.

Atividade 6.5: Explorando Polígonos e Suas Propriedades

Esta atividade tem como foco sistematizar e formalizar, preparando o terreno para a próxima atividade onde o foco será generalizar os conceitos explorados ao longo das investigações anteriores. Os alunos podem perceber padrões matemáticos e construírem relações generalizáveis entre as propriedades dos polígonos convexos. O cartaz colaborativo funciona como um recurso pedagógico essencial, pois permite que o conhecimento seja construído coletivamente, com base em dados reais, obtidos a partir das medições e experimentações realizadas pelos próprios estudantes.

O professor deve trazer um cartaz com a tabela preparada, que será preenchida coletivamente pelos alunos. Ao preencher o cartaz, o professor pode incentivar os alunos a observarem e discutirem as relações formalizadas, como:

- O número de triângulos é sempre dois a menos que o número de lados.
- O número de diagonais está relacionado ao número de lados menos três.

Sugira perguntas como:

- Por que, ao adicionar um lado, aumenta-se o número de diagonais?
- Como podemos expressar essas relações matematicamente?

No item 6.5.2, espera-se que os alunos sejam capazes de relacionar a soma das medidas dos ângulos internos ao número de triângulos formados, percebendo que essa relação se mantém constante para diferentes polígonos. No item 6.5.3 os alunos devem copiar para sua apostila os dados presentes no cartaz.

O cartaz preenchido colaborativamente servirá como um recurso visual de fácil acesso, auxiliando na retomada de conceitos ao longo das aulas subsequentes e consolidando o aprendizado sobre as propriedades dos polígonos.

Esse diálogo investigativo valoriza a matemática como um campo conectado e lógico, em que padrões numéricos e relações geométricas são descobertos pelos próprios estudantes. Assim, essa tabela, que pode parecer apenas um registro técnico, se transforma em uma ferramenta de raciocínio matemático, ajudando a consolidar conceitos fundamentais da geometria plana.

Além disso, o cartaz coletivo pode ser fixado na sala ou mantido visível ao longo das próximas aulas, servindo como um registro histórico da construção desse conhecimento, reforçando a ideia de que o aprendizado é um processo contínuo e colaborativo.

Atividade 6: Dedução da soma dos ângulos internos

6.1. Descobrindo a Soma das Medidas dos Ângulos Internos de um Triângulo

A professora irá apresentar um triângulo em MDF cujos ângulos internos podem ser destacados. Nosso objetivo é debater e descobrir qual a soma dos ângulos internos desse triângulo. Traga suas ideias e vamos debater sobre essa questão. Depois dessa conversa, responda:

6.1.1. A soma dos ângulos internos desse triângulo é _180°_ graus.

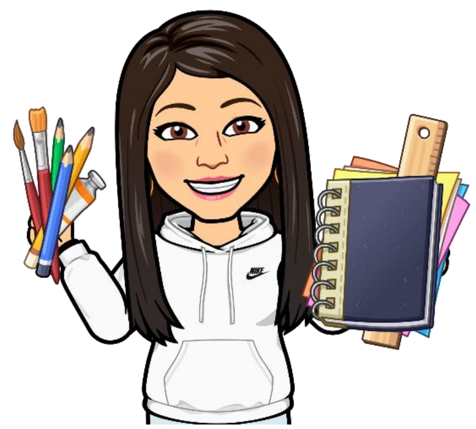
6.1.2. Explique, com suas palavras, como você chegou à conclusão do valor preenchido no item anterior. Justifique detalhadamente e apresente uma argumentação que sustente o valor atribuído.

Para chegar a essa conclusão, os ângulos internos do triângulo em MDF foram destacados e, ao posicioná-los lado a lado, modo que ficassem consecutivos adjacentes formando um ângulo raso, que mede exatamente 180 graus. Essa observação foi confirmada pelo ajuste perfeito dos ângulos em uma linha reta, formando um semicírculo.

6.1.3. Será que outros triângulos terão o mesmo valor para a soma das medidas dos seus ângulos internos? Explique:

Resposta individual.

Lembre-se de que o objetivo dessa atividade é estimular a curiosidade, a reflexão e o pensamento crítico. Divirta-se explorando os ângulos e suas propriedades geométricas.



6.2. Descobrindo a Soma das medidas dos Ângulos internos de outros Triângulos

Nesta atividade, você irá explorar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Materiais necessários:

- Régua
- Tesoura
- Cola
- Lápis de cor ou canetas coloridas

Passo a passo:

6.2.1. Recorte um triângulo: Comece desenhando um triângulo com auxílio de uma régua e depois o **recorte** cuidadosamente. Note que este triângulo deve ser menor que o retângulo da página 20. Se necessário, peça ajuda ao professor.

6.2.2. Agora, desenhe o contorno desse triângulo no ESPAÇO 1 reservado na página 20.

6.2.3. Pinte cada ângulo de uma cor diferente: use lápis de cor ou canetas coloridas para pintar cada ângulo com uma cor **diferente.** Pinte também os ângulos do triângulo contornado utilizando as mesmas cores do triângulo recortado.

O triângulo recortado e o triângulo desenhado possuem ângulos e lados correspondentes de mesma medida, assim

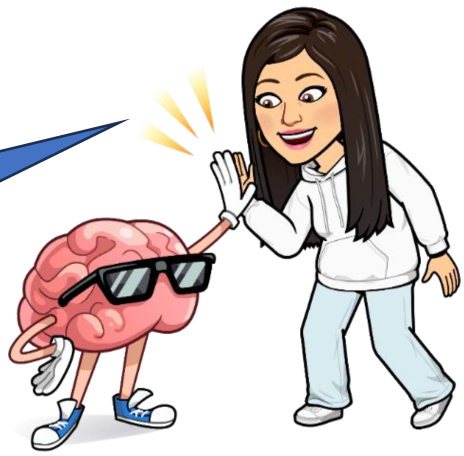
6.2.4. Recorte o triângulo em três partes: Nesta etapa, você irá dividir o triângulo em três partes, cada uma contendo um dos ângulos pintados previamente. Para fazer isso, você pode escolher um dos lados do triângulo como base e fixá-la. Em seguida, trace dois segmentos iniciando próximo ao ponto médio da base e finalizando em cada um dos pontos médios dos outros lados. Veja o passo a passo mostrado pelo professor no projetor.

6.2.5. Analise as partes recortadas: Após recortar o triângulo em três pedaços, observe atentamente as três partes separadas. Cada uma contém um dos ângulos que você pintou previamente.

6.2.6. Vamos encaixar os três ângulos previamente pintados, lado a lado, posicionando os três vértices sobre o mesmo ponto. Para tanto, escolha um dos ângulos, localize o seu vértice sobre o ponto marcado no ESPAÇO 2 (próxima página) e alinhe um de seus lados com uma das semirretas de origem nesse ponto. Em seguida, escolha outro pedaço do seu triângulo. Posicione o vértice no mesmo ponto e alinhe o lado desse ângulo com o lado do ângulo anterior, como se fosse juntar os dois ângulos, um na sequência do outro. Faça o mesmo com o terceiro pedaço do triângulo recortado, considerando agora que o lado desse deve alinhar-se na sequência do segundo ângulo posicionado por você. (Tente fazer essa construção lendo as orientações e você poderá confirmar se entendeu aguardando a projeção no quadro que será realizada pela professora na sequência).

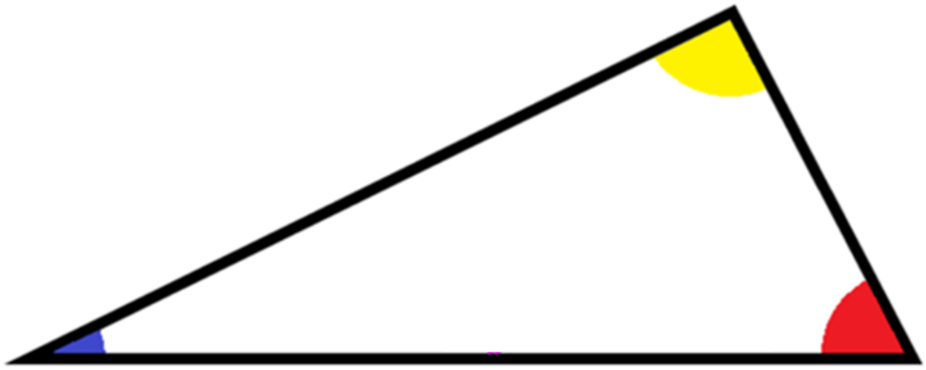
6.2.7. Após a explicação da professora, cole a montagem realizada acima no espaço a seguir, na próxima página.

Acompanhe o debate, e responda as perguntas a seguir



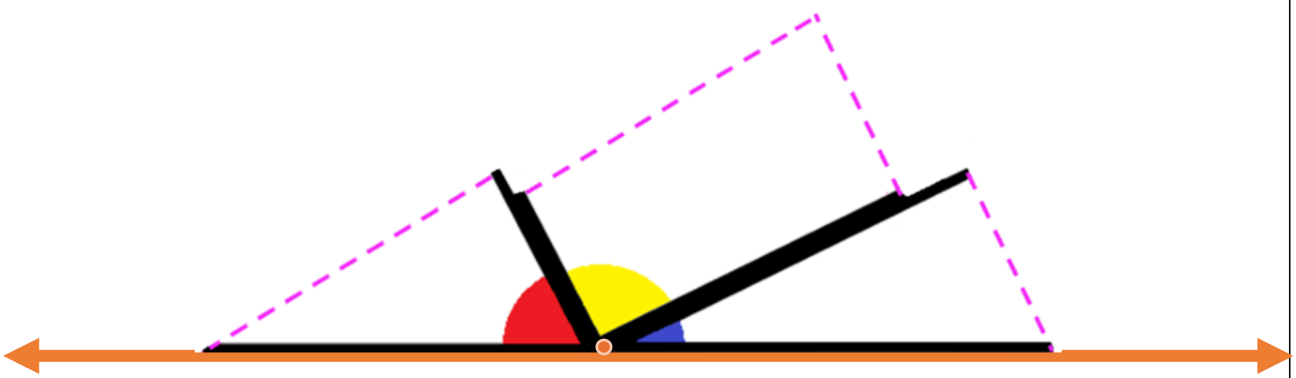
Contorne do seu triângulo no espaço abaixo antes do recorte:

ESPAÇO 1



Cole abaixo a montagem sobre a reta:

ESPAÇO 2



6.2.8. Perguntas:

a) A soma das medidas dos três ângulos internos do seu triângulo é igual a ___*180°*___ graus.

b) Essa descoberta se aplica a todos os triângulos, independentemente do tamanho ou tipo? Explique.

Após realizar a atividade prática, recomenda-se o acesso a construção interativa (ao lado) de um triângulo no qual os vértices podem ser movidos, verificando-se que a soma das medidas dos ângulos internos permanece constante, independentemente do tamanho ou tipo do triângulo. Espera-se que, com essa observação, os alunos fiquem convencidos de que a descoberta se aplica

6.3. Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo

Nesta atividade, iremos explorar a soma dos ângulos internos do polígono construído no GeoGebra. Materiais necessários:

- Impressão do polígono feito no GeoGebra, com os ângulos coloridos.

- Régua e lápis.

6.3.1. Junte-se a sua dupla.

6.3.2. Vocês receberão a impressão do polígono construído por vocês no GeoGebra, que já está colorido para facilitar a identificação dos ângulos.

6.3.3. Agora calcule a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. Registre abaixo como você fez.

Cálculos realizados:

Resposta individual, de acordo com o polígono do aluno.

A soma das medidas dos ângulos internos do meu polígono é ___________°.

Resposta individual, de acordo com o polígono do aluno.

6.4. Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos do Polígono Através de triângulos

Nesta atividade, iremos explorar as diagonais de um polígono a partir de um vértice específico. Utilizaremos a impressão do polígono que você recebeu na atividade anterior.

Materiais necessários:

- Impressão do polígono feito no GeoGebra, com os ângulos coloridos. - Régua e lápis.

Passo a passo:

6.4.1. Introdução: Nessa atividade iremos explorar as diagonais de um polígono a partir de um de seus vértices.

6.4.2. Selecionando um Vértice: Escolha um vértice do polígono para iniciar a atividade.

6.4.3. Traçando as Diagonais: Com a régua e o lápis, trace as diagonais do polígono a partir do vértice escolhido. Eles deverão conectar esse vértice aos demais vértices do polígono que não sejam adjacentes a ele.

6.4.4. Agora você deve responder:

a. Quantos vértices tem o seu polígono?

Respostas individuais, de acordo com o polígono do aluno.

b. Quantas diagonais partindo do vértice escolhido você conseguiu traçar?

c. Note que ao traçar essas diagonais dividimos o polígono em triângulos. Quantos triângulos você obteve? ____

d. Tente explicar com suas palavras porque foi esse o número de triângulos obtidos por ti? Dica: observe como cada triângulo ficou determinado, considerando os lados do polígono e as diagonais que você traçou!

Ao traçar as diagonais a partir de um único vértice, cada nova diagonal conecta esse vértice a outro, formando um triângulo com dois lados adjacentes do polígono. Como dois vértices do polígono já pertencem ao lado inicial e não podem ser usados para formar novas diagonais, o número total de triângulos é reduzido em dois.

e. Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre ___*180*___°. Com essa informação e observando a quantidade de triângulos que você obteve do seu polígono podemos calcular a soma das medidas dos ângulos internos do seu polígono.

Calcule o valor da soma dos ângulos internos do seu polígono, utilizando agora essa ideia da divisão do polígono em triângulos, e explique com suas palavras como você pensou:

Use a ideia de que cada triângulo tem soma de ângulos igual a 180°. Multiplique 180° pelo número de triângulos obtidos, esse método funciona porque a soma total dos ângulos internos de um polígono é formada pela soma dos ângulos internos de todos os triângulos criados ao traçar diagonais a partir de um único vértice. Assim, o valor encontrado reflete a soma total dos ângulos internos do polígono.

f. Você encontrou o mesmo valor que encontramos na atividade anterior? Explique

Sim, o valor encontrado é o mesmo obtido na atividade anterior. Isso ocorre porque estamos calculando a mesma propriedade utilizando métodos diferentes. Além disso, ambos os métodos são baseados nas mesmas propriedades geométricas, o que garante que os resultados sejam equivalentes, independentemente da abordagem escolhida.

6.5. Explorando Polígonos e Suas Propriedades

A professora apresentará uma tabela cujo objetivo é preenchê-la com o número de lados do seu polígono, a soma das medidas dos ângulos internos e externos, o número de diagonais traçadas e o número de triângulos formados a partir das diagonais adjacentes. Vocês irão compartilhar esses dados com os colegas por meio de um cartaz e a partir daí vamos tentar generalizar os conceitos envolvidos.

Os alunos ainda não chegaram à conclusão nessa forma genérica. No entanto, o professor pode revisar e analisar os valores obtidos pelos alunos usando esta relação, substituindo L pelo número de lados.

Responda:

6.5.1. Use os dados que coletamos nas atividades anteriores para preencher a tabela abaixo com as informações do seu polígono: *Resposta individual, de acordo com o polígono*

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono
L	*360°*	$(L-2)\times 180$	$L-3$	$L-2$

Após o preenchimento da tabela acima vocês estarão preparados para escrever no cartaz colaborativo suas descobertas.

6.5.2. Será que existe alguma relação do número de triângulos com a soma dos ângulos internos?

Sim, existe uma relação direta entre o número de triângulos formados ao dividir um polígono e a soma dos ângulos internos. Cada triângulo tem uma soma de ângulos internos igual a 180°e o número de triângulos formados é sempre igual ao número de lados do polígono menos dois (n−2).

6.5.3. Agora siga o modelo do cartaz e preencha a tabela a seguir

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono
3	*360°*	*180°*	*0*	*1*
4	*360°*	*360°*	*1*	*2*
5	*360°*	*540°*	*2*	*3*
6	*360°*	*720°*	*3*	*4*
7	*360°*	*900°*	*4*	*5*
8	*360°*	*1080°*	*5*	*6*
9	*360°*	*1260°*	*6*	*7*
10	*360°*	*1440°*	*7*	*8*
11	*360°*	*1620°*	*8*	*9*
12	*360°*	*1800°*	*9*	*10*

Neste espaço você pode anotar suas percepções, anotações e conclusões sobre as atividades realizadas hoje, a partir das discussões realizadas em aula e da análise dos dados disponibilizados no cartaz da turma. *Resposta individual*

____

____

____

____

____

Atividade 7: Soma dos Ângulos Externos de um Polígono

- **Objetivos da Atividade:**
  - Obter uma expressão algébrica que forneça a soma das medidas dos ângulos internos em função do número de lados do polígono.
  - Estimular o pensamento investigativo ao comparar as observações feitas pelos alunos.
  - Desenvolver o raciocínio algébrico e a capacidade de generalizar propriedades geométricas.
  - Promover a colaboração e a argumentação matemática, com base nos dados coletados pela turma.

- **Materiais Necessários:**
  - Apostila
  - Novo cartaz colaborativo ou projetor
- **Resumo:**
  - Nesta atividade, os alunos vão consolidar o que aprenderam sobre ângulos internos e externos e, a partir disso, deduzir uma fórmula geral para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com qualquer número de lados. Esse momento conecta o trabalho prático realizado nas atividades anteriores com o pensamento algébrico e generalizador, promovendo uma verdadeira investigação matemática. A atividade é desenvolvida em conjunto com o professor, valorizando a participação coletiva e a troca de ideias entre os grupos.
- **Duração Estimada**: 2 períodos (90 minutos)

Sobre a atividade

Antes de começar, retome com a turma o conceito fundamental de ângulos externos e internos, destacando que:

- Em cada vértice, o ângulo interno e o ângulo externo são suplementares (somam 180°).
- A soma de todos os ângulos externos de qualquer polígono convexo é sempre 360° (uma propriedade já vista na Atividade 5).

As perguntas da apostila podem ser lidas em voz alta pelos alunos (ou pelo professor), com breves pausas para o professor esclarecer dúvidas ou destacar pontos importantes. Esse momento de leitura compartilhada ajuda a manter todos envolvidos e garante que ninguém fique perdido.

No item 7.1.2 (A), o professor pode desenhar um polígono na lousa e exemplificar com números para tornar mais acessível a explicação apresentada no balão com o índice "j". É importante demonstrar que, para qualquer par i_j e e_j, estamos nos referindo ao mesmo vértice j. Por exemplo, o professor pode ilustrar que e_7 e i_7 representam os ângulos externo e interno do vértice 7, respectivamente, facilitando a compreensão dos alunos.

No item 7.1.2 (C), é importante ressaltar aos alunos que "n" representa o número de lados do polígono. Explique que o uso de "n" permite representar qualquer polígono, já que cada grupo construiu polígonos com diferentes números de lados. Assim, "n" generaliza o valor para todos os polígonos. Também é importante lembrar que neste polígono de "n" lados teremos "n" ângulos internos e "n" ângulos externos.

No item 7.1.2 (E), o professor deve orientar os alunos a perceberem qual valor está sendo multiplicado por 180 para encontrar a soma dos ângulos internos e externos ($Si + Se$). Essa observação pode não ser trivial, por isso, incentive os alunos a encontrarem esse valor, inclusive utilizando a calculadora se necessário, para facilitar o processo e garantir que compreendam o raciocínio envolvido. Além disso, o professor deve promover o compartilhamento dos resultados entre os grupos, perguntando a cada um o valor encontrado. Essa troca permitirá que os alunos percebam que o valor procurado é exatamente o mesmo número de lados e vértices daquele polígono, consolidando a compreensão da relação entre esses elementos.

No item 7.1.2 (F), o professor deve destacar que estamos utilizando um polígono genérico com "n" lados para representar qualquer polígono. Explique que cada ângulo interno e externo é associado ao mesmo vértice, e que vamos reagrupar cada par de ângulos (interno e externo) do mesmo vértice, pois sabemos que essa soma é sempre 180°. Esse reagrupamento de cada par de ângulos interno e externo, faz com que surja uma soma com todas parcelas sejam iguais a 180, que pode ser representado como uma multiplicação. Explique que, como há "n" vértices, teremos "n" parcelas de 180°, permitindo expressar a soma total como 180 × n, reforçando o conceito de generalização para todos os polígonos.

No item 7.1.2 (G), o professor deve orientar os alunos a substituírem S_e pelo seu valor numérico. Como essa soma dos ângulos externos é invariável, independentemente do número de lados do polígono convexo, pode ser substituído pelo valor de 360.

No item 7.1.2 (H), o professor deve orientar os alunos a isolarem o termo S_i na expressão encontrada. Explique que S_e é 360° e que 360 pode ser reescrito como 2 × 180. Dessa forma, os alunos poderão usar o 180 como fator comum para reescrever a expressão, facilitando a manipulação algébrica e a compreensão da relação entre as somas dos ângulos internos e externos. O professor também deve destacar que os alunos descobriram uma expressão que fornece a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer usando apenas a quantidade de lados para esse cálculo. Incentive-os a utilizar essa expressão com os dados fornecidos no cartaz colaborativo, verificando sua validade para diferentes polígonos.

Por fim, os itens 7.1.2 (J) e (K) questionam o termo (n-2). O valor (n-2) representa a quantidade de triângulos formados dentro de um polígono de n lados. Cada um desses (n-2) triângulos possui 180° como soma de seus ângulos internos, justificando por que o termo aparece multiplicado por 180 na expressão final.

Atividade 7: Soma das medidas dos Ângulos Internos de um polígono convexo (Abordagem Algébrica)

7.1. Nesta atividade, propomos um diálogo sobre a soma dos ângulos internos de um polígono convexo e sua interligação com outros elementos do triângulo.

7.1.1. Preencha o quadro abaixo, seguindo o modelo, de acordo com o número de vértices do seu polígono: *Resposta individual, de acordo com o polígono do aluno.*

VÉRTICE	MEDIDA DO ÂNGULO INTERNO	MEDIDA DO ÂNGULO EXTERNO	SOMA DAS MEDIDAS DO ÂNGULO INTERNO E EXTERNO NESTE VÉRTICE
Vértice 1	$i_1 =$	$e_1 =$	*180°*
Vértice 2	$i_2 =$	$e_2 =$	*180°*
Vértice 3	$i_3 =$	$e_3 =$	*180°*
Vértice 4	$i_4 =$	$e_4 =$	*180°*
	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS INTERNOS:	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS EXTERNOS: *360°*	

O símbolo "♥" é usado para representar o número de vértices, lados e ângulos do polígono correspondente a cada aluno nas respostas. Esse valor pode variar de

7.1.2. Com base na tabela acima, responda:

A) Em cada vértice do polígono, se você somar a medida do ângulo interno com a do ângulo externo irá obter: ___*360°*___°. Podemos escrever: $i_j + e_j =$___*360°*___

j é um número natural. Assim e i_j e e_j representam os ângulos interno e externo do vértice j. Como por exemplo, para j=5, temos i_5 e e_5, que são os ângulos interno e externo do vértice 5.

B) Como seu polígono possui __❤__ vértices, na tabela acima, esse valor do item A aparecerá __❤__ vezes.

C) Note que a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n =$ __360__°.

Se seu polígono tem 10 lados, temos que n = 10

D) Podemos chamar a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$ de S_e. Logo $S_e =$ __360__°

Da mesma forma podemos dizer que $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = S_i$.

E) Para o seu polígono de __❤__ vértices (e lados) temos $S_i + S_e$ = __❤__ $\times 180°$.

F) Assim, para um polígono de **n vértices** (e lados) temos que:

$$S_i + S_e = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n + e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$$

$$S_i + S_e = i_1 + e_1 + i_2 + e_2 + i_3 + e_3 + \cdots + i_n + e_n$$

$$S_i + S_e = \underline{\quad n \quad} \times 180°$$

G) Considerando que o valor de S_e é igual para todos os polígonos, podemos reescrever a expressão do item F como:

$$S_i + \underline{360°} = \underline{n \times 180°}$$

H) Agora tente isolar S_i na expressão anterior:

$$S_i = n \times 180° - 360°$$
$$S_i = n \times 180° - 2 \times 180°$$
$$S_i = (n-2) \times 180°$$

Note que $360 = 2 \cdot 180$

Logo, $S_i =$ ____ $S_i = (n-2) \times 180°$ ____. Observe que você encontrou uma fórmula que fornece a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n vértices (lados).

I) Você já conhecia essa fórmula, não é mesmo? Em qual atividade anterior essa fórmula já apareceu?

Sim, essa fórmula já apareceu em atividades anteriores, especificamente nas que envolviam o cálculo da soma dos ângulos internos do polígono. Na atividade em que os alunos dividiram o polígono em triângulos ao traçar diagonais a partir de um vértice, foi apresentada a relação de forma subjetiva.

J) Você consegue explicar o significado geométrico do termo (n-2)?

O termo (n−2) representa a quantidade de triângulos que podem ser formados ao dividir um polígono convexo em triângulos traçando diagonais a partir de um único vértice.

K) E por que aparece o valor 180 multiplicando (n-2)?

Porque cada triângulo tem a soma de seus ângulos internos igual a 180°. Como (n−2) representa a quantidade de triângulos formados, multiplicar por 180 fornece a soma total dos ângulos internos de todos os triângulos, que corresponde à soma dos ângulos internos do polígono.

L) Use a fórmula obtida no item H para calcular a soma dos ângulos internos do polígono do seu projeto inicial e compare com o resultado obtido na segunda coluna da tabela inicial.

Resposta individual. Os alunos devem utilizar a fórmula $S_i = (n-2) \times 180°$, *onde n é o número de lados do polígono, para calcular a soma dos ângulos internos do polígono do projeto inicial. Após realizar o cálculo, espera-se que os alunos comparem o valor encontrado com o resultado registrado na segunda coluna da tabela inicial. Ambos os valores devem ser iguais, pois a fórmula reflete corretamente a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo, confirmando a consistência dos resultados*

Atividade 8: Polígonos Regulares

- **Objetivos da Atividade:**
    - Aprofundar o entendimento sobre as propriedades que definem um polígono regular, reforçando a construção das características necessárias para um polígono ser classificado dessa forma
    - Aplicar estratégias para calcular a medida dos ângulos internos de polígonos regulares.
    - Incentivar a análise de erros e dificuldades durante o processo de construção, promovendo a reflexão sobre as soluções.
    - Generalizar o cálculo de cada medida de ângulo interno usando expressões algébricas
    - Promover o debate e a justificativa de estratégias adotadas, fortalecendo o pensamento crítico e a comunicação matemática.

- **Materiais Necessários:**
    - Apostila dos alunos (Atividade 8).
    - Régua, transferidor, lápis e borracha.
- **Atividade:**
    - Nesta atividade, os alunos vão se aprofundar no estudo de **polígonos regulares**. A ideia é conectar as propriedades geométricas já exploradas em atividades anteriores com estratégias de cálculo e generalização algébrica. Além disso, os estudantes terão a oportunidade de revisar conceitos de ângulos internos e externos e experimentar diferentes formas de chegar às medidas dos ângulos, comparando métodos e analisando vantagens e limitações de cada um.
- **Duração Estimada**: 3 períodos (135 minutos)

Sobre a atividade

Comece relembrando a turma sobre o que define um **polígono regular**, retomando as discussões da **Atividade Zero**. Pergunte aos alunos: "O que faz um polígono ser considerado regular?" e incentive-os a recuperar, em suas próprias palavras, as características essenciais — lados com a mesma medida e ângulos internos congruentes.

Essa retomada é essencial para garantir que todos partam de um entendimento comum. Em seguida, os alunos serão desafiados a construir um polígono regular com o mesmo número de lados do polígono inicial. Dificuldades e erros são esperados, especialmente na escolha da medida correta do ângulo, mas o professor deve permitir que essas dificuldades sejam exploradas e discutidas posteriormente em um debate, onde os alunos compartilharão os problemas enfrentados e as soluções encontradas.

Na Atividade 8.2, os alunos aprenderão duas formas de calcular o ângulo interno de um polígono regular: uma usando a soma dos ângulos internos dividida pelo número de lados, e outra utilizando a soma dos ângulos externos dividida pelo número de lados para encontrar o ângulo externo e, posteriormente, seu suplemento como ângulo interno.

Para o item 8.2.1, os alunos devem escolher uma das estratégias para generalizar o cálculo do ângulo interno de um polígono regular com n lados. Na Atividade 8.3.1, são convidados a refazer a construção anterior.

Espera-se que consigam realizar essa construção utilizando uma das estratégias apresentadas para calcular a medida do seu ângulo interno, aprimorando sua precisão. Cada grupo escolhe qual estratégia prefere e refaz a construção do polígono regular com base nesse cálculo. Essa etapa favorece a reflexão sobre como a matemática oferece **caminhos diferentes** para chegar ao mesmo resultado, o que amplia a compreensão e incentiva o pensamento crítico.

Na Atividade 8.4.1, os alunos construirão novamente um polígono regular, trabalhando suas habilidades e confiança. Caso surjam polígonos com ângulos internos não inteiros (como em polígonos de 7, 11, 13 ou 14 lados), o professor pode sugerir números de lados que resultem em ângulos inteiros e evitando construções muito complexas (acima de 12 lados).

Na Atividade 8.5, os alunos preencherão tabelas na apostila para generalizar as estratégias aprendidas: a tabela laranja usará a soma dos ângulos externos e a azul, a soma dos ângulos internos. Posteriormente, essas tabelas formarão cartazes colaborativo, permitindo que os alunos identifiquem padrões para o cálculo dos ângulos internos de polígonos regulares.

No item 8.5.3, os alunos calcularão a medida do ângulo interno para um polígono de n lados, substituindo a quantidade de lados por “n” nas expressões. Por fim, serão incentivados a explicar, com suas palavras, como realizaram esses cálculos e qual estratégia consideraram mais simples, concluindo com um debate para compartilhar ideias e reflexões. Essa troca final é uma oportunidade para consolidar a aprendizagem e valorizar as diferentes formas de pensar e resolver problemas matemáticos.

Atividade 8: Polígonos Regulares

8.1. Definição e Construção 1:

8.1.1. Volte na atividade zero. Escreva, abaixo, quais características da tabela são necessárias para que um polígono possa ser classificado como polígono regular?

*Todos os lados do polígono devem ter a **mesma medida** e todos os ângulos internos devem ter a **mesma medida**. Ou seja, ser equilátero e equiângulo.*

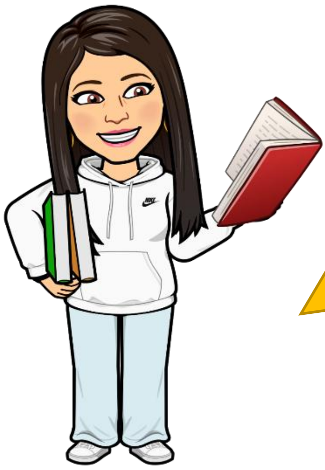
8.1.2. Conclusão: um polígono convexo é regular quando:

É equilátero e equiângulo

8.1.3 Desafio final: Usando régua e transferidor construa um polígono regular com o mesmo número de vértices do seu polígono da atividade 1. Escreva o passo a passo da sua construção e seu raciocínio.

Os alunos devem ser encorajados a construir o polígono regular da maneira que acreditarem ser correta, utilizando régua e transferidor. Deixe-os explorarem livremente e fazerem conjecturas sobre possíveis construções. Na atividade seguinte eles irão sistematizar e avaliar se suas conjecturas estavam adequadas. Incentive-os a tentarem.

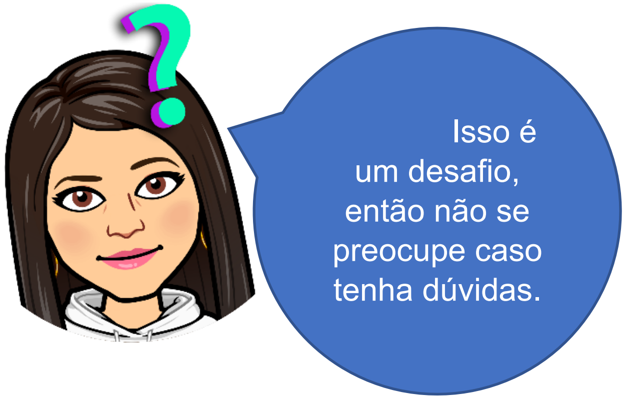
8.2. Refletindo Sobre Ângulos Internos de um Polígono Regular



Conforme você já concluiu, um polígono regular tem todos os ângulos internos com a mesma medida.
Para obter a medida de cada ângulo interno, você pode seguir qualquer um dos dois caminhos:

Caminho 1:	**Caminho 2:**
Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos interno S_i de um polígono convexo é dado por: $S_i = (n-2) \times 180°$	Você já sabe que a soma dos ângulos externos S_e de qualquer polígono convexo é: *360°*
Assim, a soma da medida dos ângulos internos do seu polígono é Individual, de acordo com o polígono.	Seu polígono possui $\heartsuit$ lados, $\heartsuit$ ângulos e $\heartsuit$ vértices.
Seu polígono possui $\heartsuit$ lados, $\heartsuit$ ângulos e $\heartsuit$ vértices.	Como os ângulos externos de um polígono regular terão medidas iguais, então cada ângulo externo do seu polígono deve ser $\frac{360°}{\heartsuit}$.
Como os ângulos internos de um polígono regular terão medidas iguais, então o ângulo interno do seu polígono deve medir $\frac{(n-2) \times 180°}{\heartsuit}$	Como $i + e = 180°$, o valor de cada ângulo interno do seu polígono é $180° - \frac{360°}{\heartsuit}$

8.2.1 Desafio: Você saberia escrever uma expressão que fornece a medida do ângulo interno para um polígono regular de n lados? Registre abaixo suas ideias!



$\frac{(n-2)\times 180°}{n}$ *Ou* $180° - \frac{360°}{n}$

8.3. 2° Construção

8.3.1. Na construção proposta em 8.1.3 não sabíamos a medida do ângulo interno. Agora que descobrimos o valor de cada ângulo interno de um polígono regular, você deverá refazer a construção proposta anteriormente de forma precisa.

O ideal seria seguir um processo estruturado como:

1. *Determinar o número de vértices e lados do polígono.*
2. *Calcular a medida do ângulo interno do polígono regular.*
3. *Escolher o comprimento dos lados do polígono.*
4. *Desenhar o primeiro lado com a régua.*
5. *Construir o ângulo no vértice:*
    - *Posicionar o transferidor no final do lado desenhado (primeiro vértice).*
    - *Marcar a medida do ângulo interno calculado.*
    - *Traçar o próximo lado conectando ao ponto marcado.*
6. *Repetir o processo até fechar o polígono.*

Segue uma tabela com o número de lados e os ângulos internos e externos correspondentes para polígonos regulares:

Número de lados	**Ângulo Interno (°)**	**Ângulo Externo (°)**
4	90	90
5	108	72
6	120	60
7	128,57	51,43
8	135	45
9	140	40
10	144	36
11	147,27	32,73
12	150	30
13	152,31	27,69
14	154,29	25,71
15	156	24

8.4. 3° Construção

8.4.1 Agora você deverá construir um polígono regular com 3 lados a mais do polígono construído na etapa anterior.

Espera-se que o aluno demonstre autonomia no processo de construção, aplicando os conceitos e técnicas desenvolvidos nas etapas anteriores. Caso o aluno tenha dificuldade em calcular o ângulo interno ou construir o polígono, incentive-o a rever os passos realizados nas atividades anteriores. Lembre-o de que o raciocínio geométrico desenvolvido é o mesmo, apenas com um número diferente de lados. Ofereça apoio, mas mantenha o foco em desenvolver a autonomia do aluno.

Atenção aos casos especiais:

Caso o número de lados do novo polígono resulte em ângulos internos com valores não inteiros (por exemplo, polígonos com 7, 11, 13 ou 14 lados), o professor pode sugerir outra quantidade de lados para facilitar a construção. Nesse caso, opte por números que resultem em ângulos mais fáceis de trabalhar.

8.4.2. Você compreendeu as duas formas de calcular o valor do ângulo interno do polígono proposto em 8.2? Teve alguma dificuldade? Explique

*Resposta individual.*____

____

____

____

____

8.4.3. Qual das opções citadas em 8.2 que você achou mais fácil para calcular o valor do ângulo interno do polígono regular? Por quê?

*Resposta individual.*____

____

____

____

____

8.5. Generalização

8.5.1 Preencha as tabelas a seguir de acordo com as medidas do polígono proposto na construção anterior : *Resposta individual, de acordo com o número de lados do polígono.*

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno

Assim como já fizemos anteriormente, a professora irá chamá-lo para preencher uma tabela colaborativa com os dados acima.

8.5.2. Siga o modelo, e preencha de acordo com a tabela colaborativa:

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno
8	*360°*	$\frac{360°}{8} = 45°$	$180° - 45° = 135°$
9	*360°*	$\frac{360°}{9} = 40°$	$180° - 40° = 140°$
10	*360°*	$\frac{360°}{10} = 36°$	$180° - 36° = 144°$
12	*360°*	$\frac{360°}{12} = 30°$	$180° - 30° = 150°$
15	*360°*	$\frac{360°}{15} = 24°$	$180° - 24° = 156°$

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno
8	$S_i = (8 - 2) \times 180° = 6 \times 180° = 1080°$	$\frac{1080°}{8} = 135°$
9	$S_i = (9 - 2) \times 180° = 7 \times 180° = 1260°$	$\frac{1260°}{9} = 140°$
10	$S_i = (10 - 2) \times 180° = 8 \times 180° = 1440°$	$\frac{1440°}{10} = 144°$
12	$S_i = (12 - 2) \times 180° = 10 \times 180° = 1800°$	$\frac{1800°}{12} = 150°$
15	$S_i = (15 - 2) \times 180° = 13 \times 180° = 2340°$	$\frac{2340°}{15} = 156°$

8.5.3. O que acontece com as tabelas acima para um número de lados n?

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno
n	*360°*	$\frac{360°}{n}$	$180° - \frac{360°}{n}$

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno
n	$S_i = (n-2) \times 180°$	$\frac{(n-2) \times 180°}{n}$

8.5.4. Explique com suas palavras como foi possível obter as expressões gerais das tabelas acima?

Para os ângulos externos, sabemos que a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é sempre 360°. Dividindo esse valor pelo número de lados (n), encontramos a medida de cada ângulo externo, e o seu suplementar será o ângulo interno.
Já utilizando a fórmula que calcula a soma das medidas dos ângulos internos e dividindo pelo número de lados (n), obtemos a medida de cada ângulo interno.

8.5.5. Qual forma você acredita ser mais simples de ser lembrada para obter a medida do ângulo interno de um polígono regular? Explique

Resposta individual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2017.

LORENZATO, Sergio Apparecido. **Por que não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. 3 ed. Campinas, SP. Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores).

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, Â. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? Pró-Posições, Campinas, v. 3, n. 1, p.39-54, 1992.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono de ensino de geometria: uma visão histórica.** 1989. 196f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível https://hdl.handle.net/20.500.12733/1576649. Acesso em: 13 ago. 2023.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação.** Bolema. Rio Claro, n 14, 2000. Disponível em:<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022 > Acesso em: 20 ago. 2023.

TEIXEIRA, L. A.; BONI, K. T.; KIRNEV, D. C. B. **Metodologia do ensino da matemática**. Londrina: Editora e distribuidora educacional S. A, 2017.

Apostila de Matemática

Nome:_____________________________

Turma: 8°_____

Professora: Isaura Linde

3° Trimestre

Nome:____

ATIVIDADE ZERO: Introdução aos polígonos

1. Preencha a tabela a seguir de acordo com cada polígono:

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	É côncavo ou convexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.A								
pol.B								
pol.C								
pol.D								
pol.E								
pol.F								
pol.G								
pol.H								
pol.I								

Nome:____

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	É côncavo ou convexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.J								
pol.K								
pol.L								
pol.M								
pol.N								
pol.O								
pol.P								
pol.Q								
pol.R								
pol.S								
pol.T								

Nome:____

2. Relacione o nome do polígono com seu número de lados

a) Triângulo	( ) 6 lados
b) Quadrilátero	( ) 8 lados
c) Pentágono	( ) 17 lados
d) Hexágono	( ) 20 lados
e) Heptágono	( ) 11 lados
f) Octógono	( ) 14 lados
g) Eneágono	( ) 3 lados
h) Decágono	( ) 10 lados
i) Undecágono	( ) 16 lados
j) Dodecágono	( ) 12 lados
k) Tridecágono	( ) 7 lados
l) Tetradecágono	( ) 18 lados
m) Pentadecágono	( ) 4 lados
n) Hexadecágono	( ) 13 lados
o) Heptadecágono	( ) 19 lados
p) Octadecágono	( ) 15 lados
q) Eneadecágono	( ) 5 lados
r) Icoságono	( ) 9 lados

3. Pergunta: o que foi novidade nessa aula, ou seja, o que você aprendeu? Explique com suas palavras.

____
____
____
____
____
____
____

Nome:____

ATIVIDADE 1: Construção de um Polígono Convexo

1. Siga as etapas a seguir:

1.1 Faça dupla com um colega. Vocês receberão uma folha de tamanho 20 cm x 20 cm. Vocês deverão construir um polígono convexo, com o número de lados definido pela professora.

1.2 Lembrando do que foi discutido na atividade anterior, qual o nome do polígono que você construiu (de acordo com o número de lados)? ____________________________

1.3 Nomeie cada vértice (com letras maiúsculas e consecutivas, iniciando em A, no sentido anti-horário) .

1.4 Utilizando régua e transferidor, meça cada um dos lados e dos ângulos do seu polígono e preencha o quadro abaixo utilizando a quantidade de linhas e a notação adequada à sua construção.

Medida do lado	Medida do ângulo
$\overline{AB} =$	$A\hat{B}C =$
$\overline{BC} =$	$B\hat{C}D =$
$\overline{CD} =$	$C\hat{D}E =$

1.5 Algum ângulo interno do seu polígono é maior ou igual a 180°? Por quê?

____
____
____
____

1.6 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um lado (por exemplo, o lado $\overline{BC}$) do seu polígono.

____
____
____
____
____

Nome:____

1.7 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um ângulo (por exemplo, o ângulo $A\hat{B}C$) do seu polígono.

____

____

____

____

____

No espaço abaixo, um aluno da dupla deverá guardar o polígono.

O polígono realizado pela dupla:

☐ Ficará guardado nesta apostila.

☐ Ficará guardado na apostila do colega _______________________

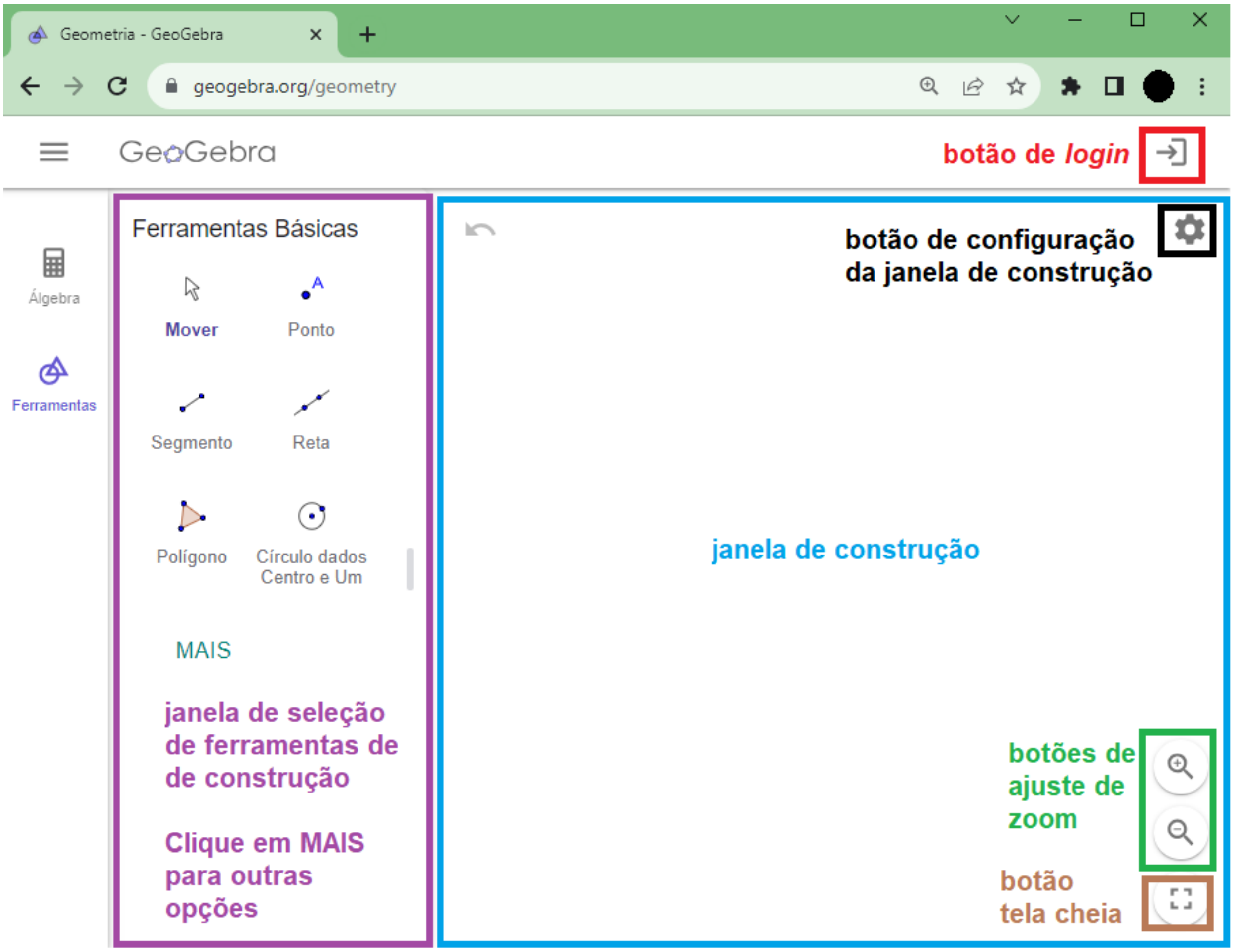
(Nome do colega)

Nome:____

ATIVIDADE 2: Construção do polígono convexo no GeoGebra

2.1. Faça o login no Chromebook e siga as etapas a seguir:

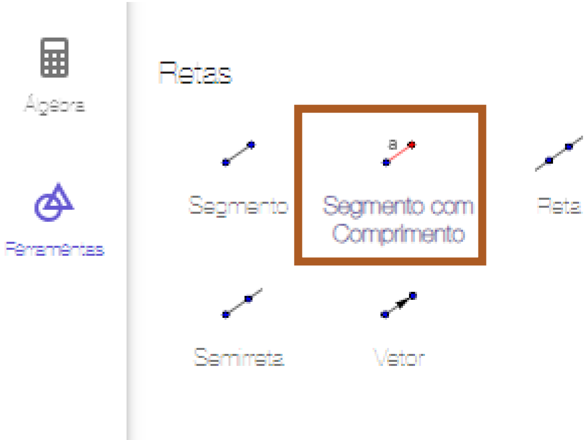
2.1.1. Acesse o site: https://www.geogebra.org/geometry



2.1.2. No canto superior direito, clique em entrar e acesse com a sua conta google institucional.

Nome:____

2.1.3. Na lateral esquerda, clique em **ferramentas**, e depois em **MAIS** para exibir todas as ferramentas disponíveis e, em seguida, selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**:



i. Clique em algum ponto na sua janela de construção (onde deseja iniciar sua construção) e irá abrir a seguinte janela:

ii. Digite a medida do $\overline{AB}$ da sua construção. O GeoGebra criará os pontos A e B de forma que o segmento tenha o comprimento informado.

Note que podemos mover esses pontos, mas a medida do segmento será mantida.

Vá em **Mover**:

Nome:____

2.1.4. Responda:

a. Tente mover o ponto A. O que acontece com sua construção?

____

____

____

____

b. Mantenha o ponto A fixo e agora mova o ponto B. Explique com suas palavras a trajetória que é percorrida pelo ponto B em relação ao ponto A.

____

____

____

____

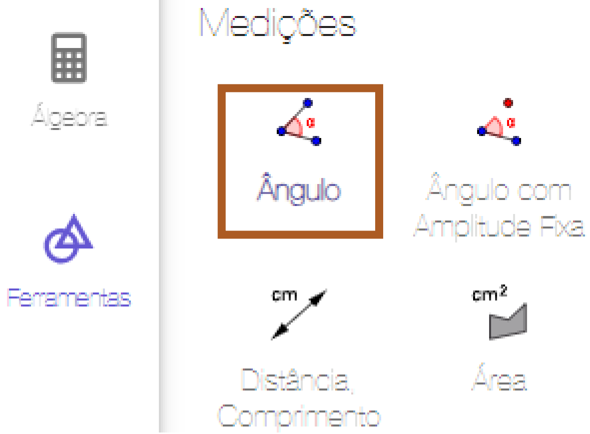
Para saber mais e explorar esse assunto vá para a página 34

2.1.5. Novamente em **Segmento com Comprimento Fixo**, clicamos em B e indicamos o tamanho do segmento $\overline{BC}$. O GeoGebra criará o ponto C seguindo as recomendações.

2.1.6. No canto direito, clique no ícone de **engrenagem** e clique em **configurações**. Como na figura abaixo, clique na **engrenagem** e selecione **0 casas decimais** em **arredondamento**:

Nome:____

2.1.7. Na lateral esquerda, clique em **Ângulo**



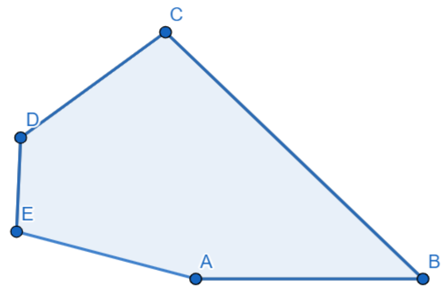
Clique no ponto C, depois no B e por último, no ponto A. O GeoGebra vai mostrar o valor do ângulo $A\hat{B}C$.

2.1.8. Em ferramentas, vá em **mover**

Agora mova o ponto C, até encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}C$ do polígono

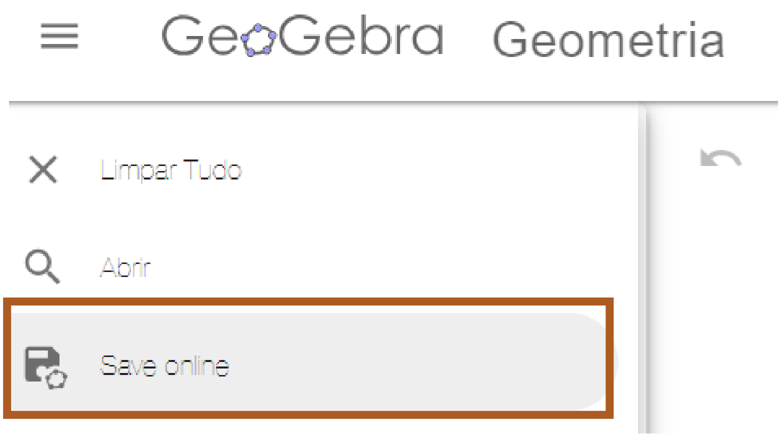
2.1.9. Repetimos os passos 3, 6 e 7, criando todos os vértices, com as devidas medidas dos ângulos e dos lados do projeto que você e sua dupla elaboraram no papel.

2.1.10. Vamos traçar nosso polígono, idêntico ao da atividade 1. Vá na ferramenta Polígono e clique, de forma consecutiva, em todos os vértices da sua construção, iniciando no ponto A e finalizando nele também, para "fechar" seu polígono. Em outras palavras, selecione a ferramenta polígono e clique no ponto A, depois no ponto B, e assim por diante. Depois de selecionar o último vértice, clique novamente no vértice A.

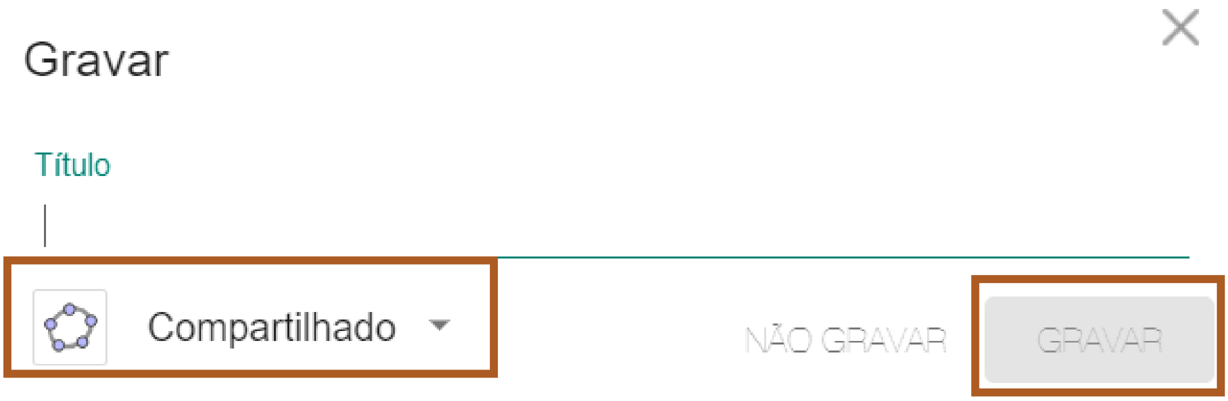


Nome:____

2.1.11. Vamos salvar o arquivo. Clique sobre as três barras no canto superior esquerdo, e em seguida **save online**:



Coloque os nomes da dupla para nomear arquivo, deixando a opção **Compartilhado** selecionada, e por fim, clique em **gravar**.



2.1.12. No canto superior direito, clique sobre o símbolo de compartilhar:

Abrirá uma janela com um link do seu arquivo. Envie o link no Google Classroom.

2.2. Perguntas:

2.2.1. O último segmento do polígono do papel tem comprimento ________.

2.2.2. O último segmento do polígono do GeoGebra tem comprimento ________.

2.2.3. O primeiro e o último ângulos do polígono do papel medem, respectivamente, _______ e _______.

2.2.4. O primeiro e o último ângulos do polígono do GeoGebra medem, respectivamente, ______ e ______.

Nome:____

2.2.5. Você identificou diferenças entre as medidas do polígono do papel e do GeoGebra? Descreva quais são.

____
____
____
____
____

2.2.6. Se houver diferenças nas medidas dos dois polígonos, o que você acha que pode ter causado essa discrepância?

____
____
____
____
____

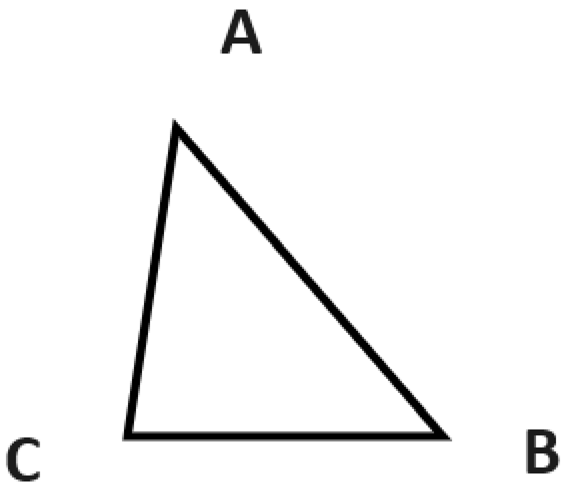
Atividade 3: Ângulos externos

3.1. Explorando o conceito de ângulo externo

3.1.1. O que vocês acreditam que é ângulo externo?

____
____
____
____
____

3.1.2. De acordo com a definição que você escreveu acima, desenhe os ângulos externos do triângulo ABC:

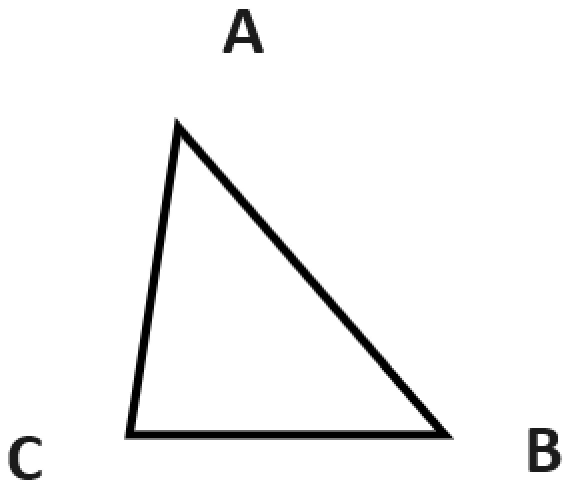


Nome:____

3.2. Apresentando o conceito de ângulo externo.

Preste atenção na explicação da professora que irá projetar exemplos de ângulos externos em um triângulo, e em um quadrilátero, mostrando como encontrar os ângulos externos de cada vértice.

3.2.1. Agora, vamos refazer a atividade anterior. Desenhe os ângulos externos do triângulo abaixo. Use as semirretas suportes.

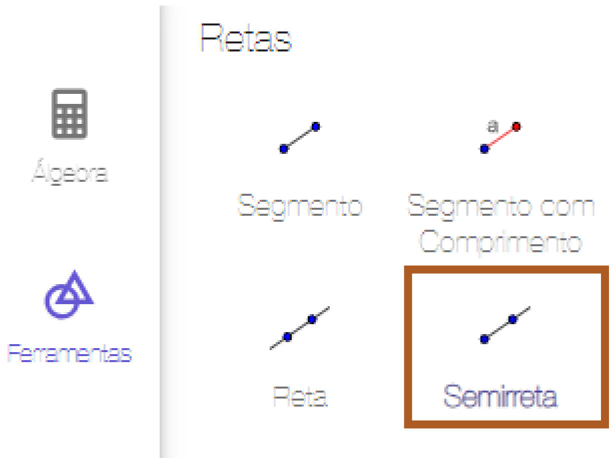


3.3. Construindo os ângulos externos do polígono no GeoGebra

3.3.1. Abra o GeoGebra e localize o arquivo da atividade anterior que contém o polígono desenhado.

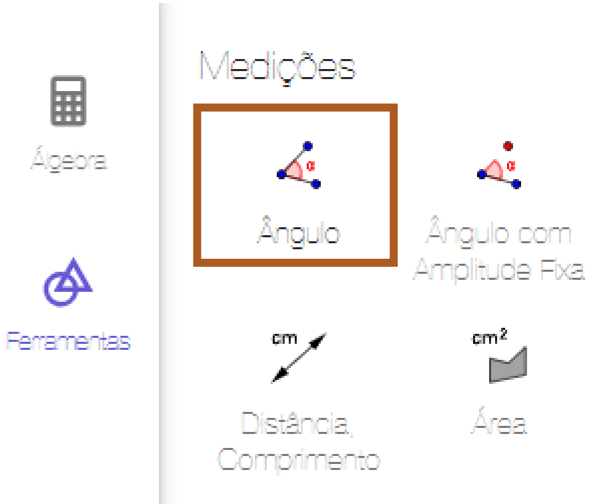
3.3.2. Clique em "Arquivo" no menu superior e escolha "Salvar como..." ou "Salvar uma cópia como..." para criar uma cópia do arquivo. Dê um novo nome para a cópia e clique em "Salvar".

3.3.3. Trace uma semirreta com origem em A e passando por B.



Nome:____

3.3.4. Clique em ângulo, e depois selecione a semirreta criada no passo anterior e o lado $\overline{BC}$.



O GeoGebra vai criar o ângulo externo de $\hat{B}$

3.3.5. Repita os passos 3 e 4 do processo acima, criando todos ângulos externos do polígono.

3.4. Responda

3.4.1. De acordo com os vértices do seu polígono, complete a tabela com as medidas dos ângulos internos e externos. Por fim, faça o cálculo da soma do ângulo interno com o ângulo externo de cada um dos vértices.

	Medida do ângulo interno	Medida do ângulo externo	Soma do ângulo interno com o externo
$\hat{A}$			
$\hat{B}$			
$\hat{C}$			
$\hat{D}$			
$\hat{E}$			

3.4.2. O que você pode afirmar sobre a soma dos ângulos internos e externos (os resultados encontrados na última coluna da tabela)?

____

____

____

____

Nome:____

3.4.3. Verifique se seus colegas também concluíram o mesmo:

3.4.4. Será que isso acontece para qualquer polígono?

3.4.5. Por que isso acontece?

Atividade 4: Reprodução em MDF

4.1. Nesta etapa, você utilizará uma cortadora a laser para criar peças de MDF que representam os polígonos que desenhamos anteriormente no GeoGebra. Além disso, você também cortará peças de MDF para representar os ângulos externos que medimos no passo anterior.

4.1.2. Para facilitar a identificação dos ângulos externos e internos, você pintará cada par de ângulos, interno e externo, que compartilham o mesmo vértice, com cores correspondentes. Utilizaremos uma cor específica para cada vértice, de forma que os ângulos externos e internos do mesmo vértice tenham cores iguais. Diferentes vértices terão cores distintas, o que tornará a análise visual mais intuitiva para você.

4.1.3. Cada aluno receberá o polígono que criou no GeoGebra, impresso em papel. Agora, sua tarefa é pintar cada ângulo interno e externo do mesmo vértice com as mesmas cores que foram utilizadas no passo 2. Por exemplo, se você pintou os ângulos externo e interno do vértice A de rosa no passo 2, faça exatamente o mesmo aqui, pintando ambos os ângulos do vértice A de rosa.

4.1.4. Deixe suas peças secando.

Lembre-se de manusear a cortadora a laser com cuidado e seguir todas as orientações de segurança fornecidas pelos professores e instrutores responsáveis. A precisão na identificação dos ângulos será fundamental para o sucesso das próximas atividades e sua compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

Divirta-se explorando os polígonos em MDF e descobrindo algumas de suas propriedades!

Nome:____

Atividade 5: Dedução da soma dos ângulos externos

5.1. Nesta atividade, iremos explorar os ângulos externos dos polígonos que desenhamos no GeoGebra usando as peças de MDF cortadas. Siga os passos abaixo:

5.1.1. Sente-se junto com sua dupla. Não se esqueça que a dupla deverá trabalhar em conjunto. Você e seu colega deverão revezar na manipulação das peças e no registro das descobertas, incentivando o diálogo e a colaboração entre os membros da dupla.

5.1.2. Deixe sua mesa livre: permanecerá apenas esta apostila, lápis e borracha.

5.1.3. Receba suas peças de MDF e coloque sobre sua mesa, para que você possa manipulá-las facilmente.

5.1.4. Posicione os ângulos externos, de acordo com sua cor, conferindo se você recebeu todas as peças corretamente. Certifique-se de alinhar cada ângulo externo de forma que eles se encaixem perfeitamente com os ângulos internos do polígono.

5.1.5. Retire o polígono, deixando apenas os ângulos externos sobre a mesa.

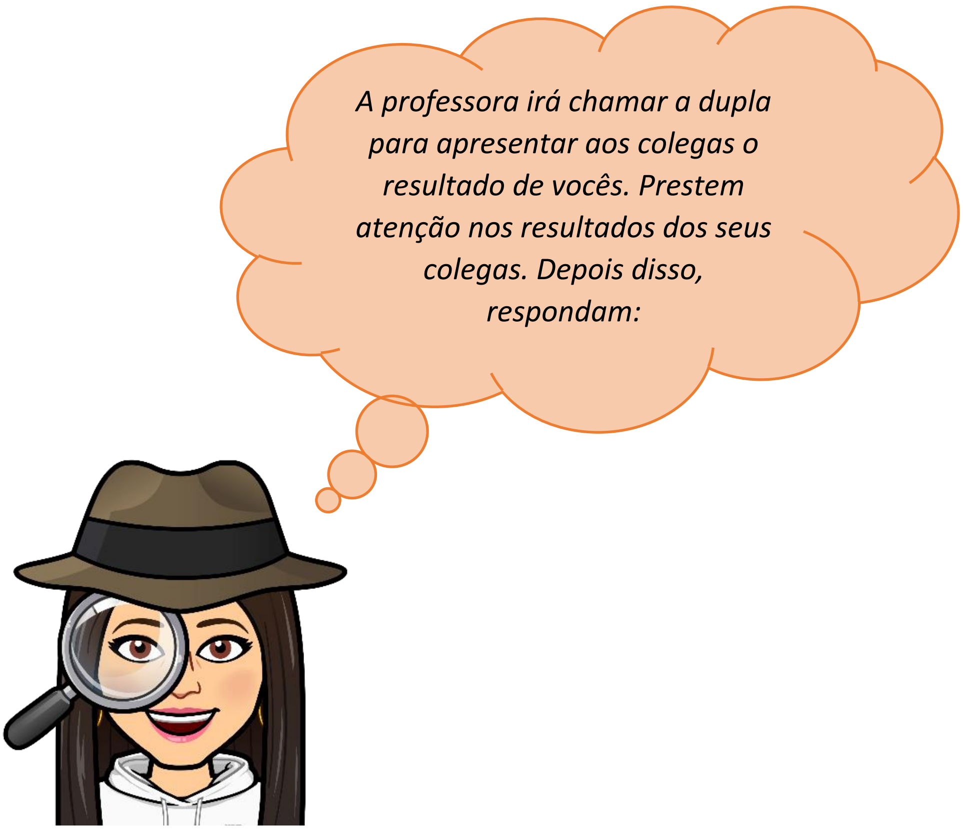
5.1.6. Agora tente encaixar todos os ângulos externos unindo todos os vértices desses ângulos.

5.1.7. Dialogue com sua dupla e tentem descobrir o que formam esses ângulos. Estou animada para ver suas descobertas!

5.2 EXERCÍCIOS

5.2.1 Complete:

Os ângulos externos se alinham formando um __________________. A soma dos ângulos externos do seu polígono é __________ graus.



Nome:____

5.2.2 Os resultados da outra dupla que fez o polígono de mesma quantidade de lados foram iguais? Por quê?

____
____
____
____
____

5.2.3 E em relação aos outros colegas, vocês percebem alguma semelhança nos resultados obtidos por eles?

____
____
____
____
____

5.2.4 O que vocês podem concluir sobre a soma dos ângulos externos de polígonos convexos?

____
____
____
____
____

Atividade 6: Dedução da soma dos ângulos internos

6.1. Descobrindo a Soma das Medidas dos Ângulos Internos de um Triângulo

A professora irá apresentar um triângulo em MDF cujos ângulos internos podem ser destacados. Nosso objetivo é debater e descobrir qual a soma dos ângulos internos desse triângulo. Traga suas ideias e vamos debater sobre essa questão. Depois dessa conversa, responda:

6.1.1. A soma dos ângulos internos desse triângulo é _______ graus.

6.1.2. Explique, com suas palavras, como você chegou à conclusão do valor preenchido no item anterior. Justifique detalhadamente e apresente uma argumentação que sustente o valor atribuído.

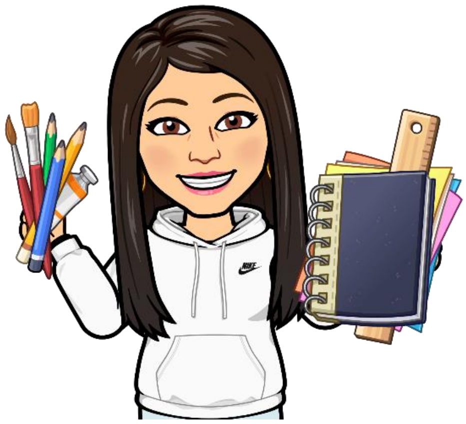
____
____
____
____
____
____
____

Nome:____

6.1.3. Será que outros triângulos terão o mesmo valor para a soma das medidas dos seus ângulos internos? Explique:

____
____
____
____
____

> *Lembre-se de que o objetivo dessa atividade é estimular a curiosidade, a reflexão e o pensamento crítico. Divirta-se explorando os ângulos e suas propriedades geométricas.*



6.2. Descobrindo a Soma das medidas dos Ângulos internos de outros Triângulos

Nesta atividade, você irá explorar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Materiais necessários:

- Régua
- Tesoura
- Cola
- Lápis de cor ou canetas coloridas

Passo a passo:

6.2.1. Recorte um triângulo: Comece desenhando um triângulo com auxílio de uma régua e depois o **recorte** cuidadosamente. Note que este triângulo deve ser menor que o retângulo da página 20. Se necessário, peça ajuda ao professor.

6.2.2. Agora, desenhe o contorno desse triângulo no ESPAÇO 1 reservado na página 20.

6.2.3. Pinte cada ângulo de uma cor diferente: use lápis de cor ou canetas coloridas para pintar cada ângulo com uma cor **diferente.** Pinte também os ângulos do triângulo contornado utilizando as mesmas cores do triângulo recortado.

Nome:____

O triângulo recortado e o triângulo desenhado possuem ângulos e lados correspondentes de mesma medida, assim podemos dizer que eles são congruentes.

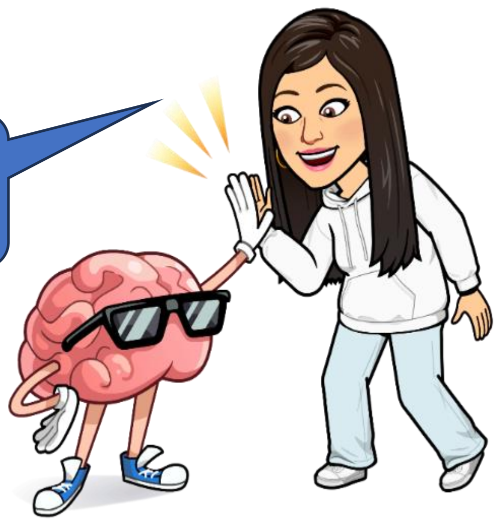
6.2.4. Recorte o triângulo em três partes: Nesta etapa, você irá dividir o triângulo em três partes, cada uma contendo um dos ângulos pintados previamente. Para fazer isso, você pode escolher um dos lados do triângulo como base e fixá-la. Em seguida, trace dois segmentos iniciando próximo ao ponto médio da base e finalizando em cada um dos pontos médios dos outros lados. Veja o passo a passo mostrado pelo professor no projetor.

6.2.5. Analise as partes recortadas: Após recortar o triângulo em três pedaços, observe atentamente as três partes separadas. Cada uma contém um dos ângulos que você pintou previamente.

6.2.6. Vamos encaixar os três ângulos previamente pintados, lado a lado, posicionando os três vértices sobre o mesmo ponto. Para tanto, escolha um dos ângulos, localize o seu vértice sobre o ponto marcado no ESPAÇO 2 (próxima página) e alinhe um de seus lados com uma das semirretas de origem nesse ponto. Em seguida, escolha outro pedaço do seu triângulo. Posicione o vértice no mesmo ponto e alinhe o lado desse ângulo com o lado do ângulo anterior, como se fosse juntar os dois ângulos, um na sequência do outro. Faça o mesmo com o terceiro pedaço do triângulo recortado, considerando agora que o lado desse deve alinhar-se na sequência do segundo ângulo posicionado por você. (Tente fazer essa construção lendo as orientações e você poderá confirmar se entendeu aguardando a projeção no quadro que será realizada pela professora na sequência).

6.2.7. Após a explicação da professora, cole a montagem realizada acima no espaço a seguir, na próxima página.

Acompanhe o debate, e responda as perguntas a seguir



Nome:____

Contorne do seu triângulo no espaço abaixo antes do recorte:

ESPAÇO 1

Cole abaixo a montagem sobre a reta:

ESPAÇO 2

Nome:____

6.2.8. Perguntas:

a) A soma das medidas dos três ângulos internos do seu triângulo é igual a _______ graus.
b) Essa descoberta se aplica a todos os triângulos, independentemente do tamanho ou tipo? Explique.

____
____
____
____
____

6.3. Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo

Nesta atividade, iremos explorar a soma dos ângulos internos do polígono construído no GeoGebra. Materiais necessários:

- Impressão do polígono feito no GeoGebra, com os ângulos coloridos.

- Régua e lápis.

6.3.1. Junte-se a sua dupla.

6.3.2. Vocês receberão a impressão do polígono construído por vocês no GeoGebra, que já está colorido para facilitar a identificação dos ângulos.

6.3.3. Agora calcule a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. Registre abaixo como você fez.

Cálculos realizados:

A soma das medidas dos ângulos internos do meu polígono é __________°.

Nome:____

6.4. Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos do Polígono Através de triângulos

Nesta atividade, iremos explorar as diagonais de um polígono a partir de um vértice específico. Utilizaremos a impressão do polígono que você recebeu na atividade anterior.

Materiais necessários:

- Impressão do polígono feito no GeoGebra, com os ângulos coloridos. - Régua e lápis.

Passo a passo:

6.4.1. Introdução: Nessa atividade iremos explorar as diagonais de um polígono a partir de um de seus vértices.
6.4.2. Selecionando um Vértice: Escolha um vértice do polígono para iniciar a atividade.
6.4.3. Traçando as Diagonais: Com a régua e o lápis, trace as diagonais do polígono a partir do vértice escolhido. Eles deverão conectar esse vértice aos demais vértices do polígono que não sejam adjacentes a ele.
6.4.4. Agora você deve responder:

a. Quantos vértices tem o seu polígono?
b. Quantas diagonais partindo do vértice escolhido você conseguiu traçar?
c. Note que ao traçar essas diagonais dividimos o polígono em triângulos. Quantos triângulos você obteve? ____
d. Tente explicar com suas palavras porque foi esse o número de triângulos obtidos por ti? Dica: observe como cada triângulo ficou determinado, considerando os lados do polígono e as diagonais que você traçou!

____
____
____
____

e. Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre __________°. Com essa informação e observando a quantidade de triângulos que você obteve do seu polígono podemos calcular a soma das medidas dos ângulos internos do seu polígono.

Calcule o valor da soma dos ângulos internos do seu polígono, utilizando agora essa ideia da divisão do polígono em triângulos, e explique com suas palavras como você pensou:

____
____
____
____
____

Nome:____

f. Você encontrou o mesmo valor que encontramos na atividade anterior? Explique

____

____

____

____

6.5. Explorando Polígonos e Suas Propriedades

A professora apresentará uma tabela cujo objetivo é preenchê-la com o número de lados do seu polígono, a soma das medidas dos ângulos internos e externos, o número de diagonais traçadas e o número de triângulos formados a partir das diagonais adjacentes. Vocês irão compartilhar esses dados com os colegas por meio de um cartaz e a partir daí vamos tentar generalizar os conceitos envolvidos.

Responda:

6.5.1. Use os dados que coletamos nas atividades anteriores para preencher a tabela abaixo com as informações do seu polígono:

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono

Após o preenchimento da tabela acima vocês estarão preparados para escrever no cartaz colaborativo suas descobertas.

6.5.2. Será que existe alguma relação do número de triângulos com a soma dos ângulos internos?

____

____

____

____

Nome:____

6.5.3. Agora siga o modelo do cartaz e preencha a tabela a seguir

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono

Neste espaço você pode anotar suas percepções, anotações e conclusões sobre as atividades realizadas hoje, a partir das discussões realizadas em aula e da análise dos dados disponibilizados no cartaz da turma.

____
____
____
____
____

Nome:____

Atividade 7: Soma das medidas dos Ângulos Internos de um polígono convexo (Abordagem Algébrica)

7.1. Nesta atividade, propomos um diálogo sobre a soma dos ângulos internos de um polígono convexo e sua interligação com outros elementos do triângulo.

7.1.1. Preencha o quadro abaixo, seguindo o modelo, de acordo com o número de vértices do seu polígono:

VÉRTICE	MEDIDA DO ÂNGULO INTERNO	MEDIDA DO ÂNGULO EXTERNO	SOMA DAS MEDIDAS DO ÂNGULO INTERNO E EXTERNO NESTE VÉRTICE
Vértice 1	$i_1 =$	$e_1 =$	
Vértice 2	$i_2 =$	$e_2 =$	
Vértice 3	$i_3 =$	$e_3 =$	
Vértice 4	$i_4 =$	$e_4 =$	
	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS INTERNOS:	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS EXTERNOS:	

7.1.2. Com base na tabela acima, responda:

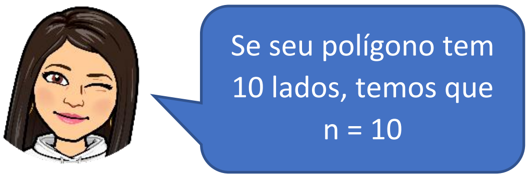
A) Em cada vértice do polígono, se você somar a medida do ângulo interno com a do ângulo externo irá obter: ___________°. Podemos escrever: $i_j + e_j =$__________

j é um número natural. Assim e i_j e e_j representam os ângulos interno e externo do vértice j. Como por exemplo, para j=5, temos i_5 e e_5, que são os ângulos interno e externo do vértice 5.

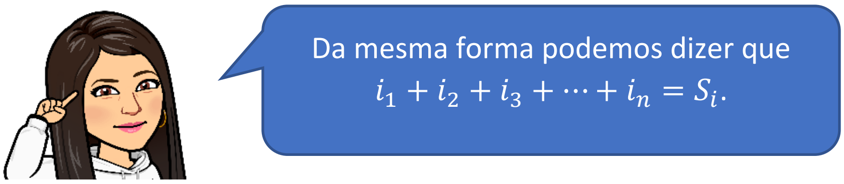
Nome:____

B) Como seu polígono possui _______ vértices, na tabela acima, esse valor do item A aparecerá _______ vezes.

C) Note que a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n =$_________°.



D) Podemos chamar a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$ de S_e. Logo $S_e =$_________°



E) Para o seu polígono de _____ vértices (e lados) temos $S_i + S_e$ = _______$\times 180°$.

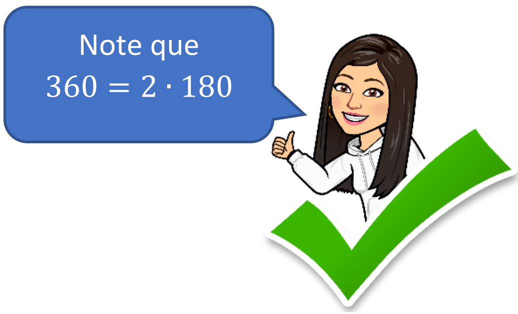
F) Assim, para um polígono de n vértices (e lados) temos que:

$$S_i + S_e = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n + e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$$
$$S_i + S_e = i_1 + e_1 + i_2 + e_2 + i_3 + e_3 + \cdots + i_n + e_n$$
$$S_i + S_e = \_\_\_\_\_\_\_ \times 180°$$

G) Considerando que o valor de S_e é igual para todos os polígonos, podemos reescrever a expressão do item F como:

$$S_i + \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_ \times 180°$$

H) Agora tente isolar S_i na expressão anterior:



Logo, $S_i =$_____________________________________. Observe que você encontrou uma fórmula que fornece a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n vértices (lados).

Nome:____

I) Você já conhecia essa fórmula, não é mesmo? Em qual atividade anterior essa fórmula já apareceu?

____

____

____

J) Você consegue explicar o significado geométrico do termo (n-2)?

____

____

____

K) E por que aparece o valor 180 multiplicando (n-2)?

____

____

____

L) Use a fórmula obtida no item H para calcular a soma dos ângulos internos do polígono do seu projeto inicial e compare com o resultado obtido na segunda coluna da tabela inicial.

Atividade 8: Polígonos Regulares

8.1. Definição e Construção 1:

8.1.1. Volte na atividade zero. Escreva, abaixo, quais características da tabela são necessárias para que um polígono possa ser classificado como polígono regular?

____

____

____

____

____

8.1.2. Conclusão: um polígono convexo é regular quando:

____

____

____

____

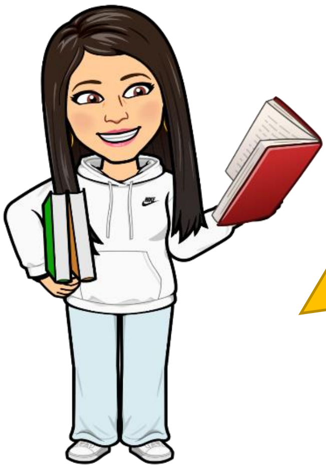
____

Nome:____

8.1.3 Desafio final: Usando régua e transferidor construa um polígono regular com o mesmo número de vértices do seu polígono da atividade 1. Escreva o passo a passo da sua construção e seu raciocínio.

Nome:____

8.2. Refletindo Sobre Ângulos Internos de um Polígono Regular



Conforme você já concluiu, um polígono regular tem todos os ângulos internos com a mesma medida.
Para obter a medida de cada ângulo interno, você pode seguir qualquer um dos dois caminhos:

Caminho 1:	**Caminho 2:**
Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos interno S_i de um polígono convexo é dado por: _____________ Assim, a soma da medida dos ângulos internos do seu polígono é___________. Seu polígono possui ____ lados, ____ ângulos e _____ vértices. Como os ângulos internos de um polígono regular terão medidas iguais, então o ângulo interno do seu polígono deve medir _______.	Você já sabe que a soma dos ângulos externos S_e de qualquer polígono convexo é:______ Seu polígono possui ____ lados, ____ ângulos e _____ vértices. Como os ângulos externos de um polígono regular terão medidas iguais, então cada ângulo externo do seu polígono deve ser _______. Como $i + e = 180°$, o valor de cada ângulo interno do seu polígono é _____

8.2.1 **Desafio:** Você saberia escrever uma expressão que fornece a medida do ângulo interno para um polígono regular de n lados? Registre abaixo suas ideias!

Isso é um desafio, então não se preocupe caso tenha dúvidas.

Nome:____

8.3. 2° Construção

8.3.1. Na construção proposta em 8.1.3 não sabíamos a medida do ângulo interno. Agora que descobrimos o valor de cada ângulo interno de um polígono regular, você deverá refazer a construção proposta anteriormente de forma precisa.

Nome:____

8.4. 3° Construção

8.4.1 Agora você deverá construir um polígono regular com 3 lados a mais do polígono construído na etapa anterior.

Nome:____

8.4.2. Você compreendeu as duas formas de calcular o valor do ângulo interno do polígono proposto em 8.2? Teve alguma dificuldade? Explique

____
____
____
____
____

8.4.3. Qual das opções citadas em 8.2 que você achou mais fácil para calcular o valor do ângulo interno do polígono regular? Por quê?

____
____
____
____
____

8.5. Generalização

8.5.1 Preencha as tabelas a seguir de acordo com as medidas do polígono proposto na construção anterior :

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno

Assim como já fizemos anteriormente, a professora irá chamá-lo para preencher uma tabela colaborativa com os dados acima.

Nome:____

8.5.2. Siga o modelo, e preencha de acordo com a tabela colaborativa:

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno

Nome:____

8.5.3. O que acontece com as tabelas acima para um número de lados n?

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno

8.5.4. Explique com suas palavras como foi possível obter as expressões gerais das tabelas acima?

____
____
____
____
____
____

8.5.5. Qual forma você acredita ser mais simples de ser lembrada para obter a medida do ângulo interno de um polígono regular? Explique

____
____
____
____
____
____

Nome:____

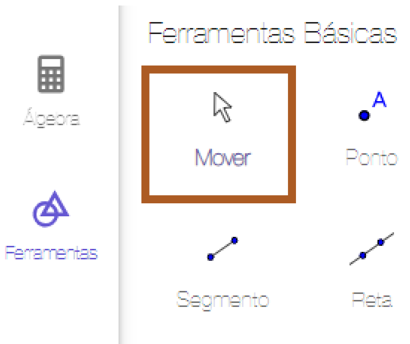
Saiba Mais

No terceiro passo da atividade, criamos o segmento de reta $\overline{AB}$ com um comprimento fixo. Agora, vamos explorar o movimento do ponto B e entender qual é a trajetória que ele percorre quando o movemos. Para isso, siga as seguintes instruções:

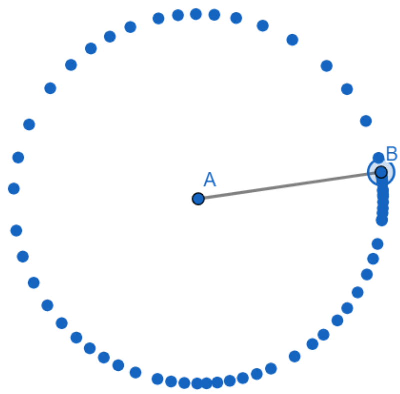
1) Clique com o botão esquerdo do mouse (ou com dois dedos sobre o touchpad) no ponto B.

2) Uma janela será aberta e você deve selecionar a opção "Exibir Rastro".

3) Agora, na barra de ferramentas do menu esquerdo, vá até a opção "Mover".

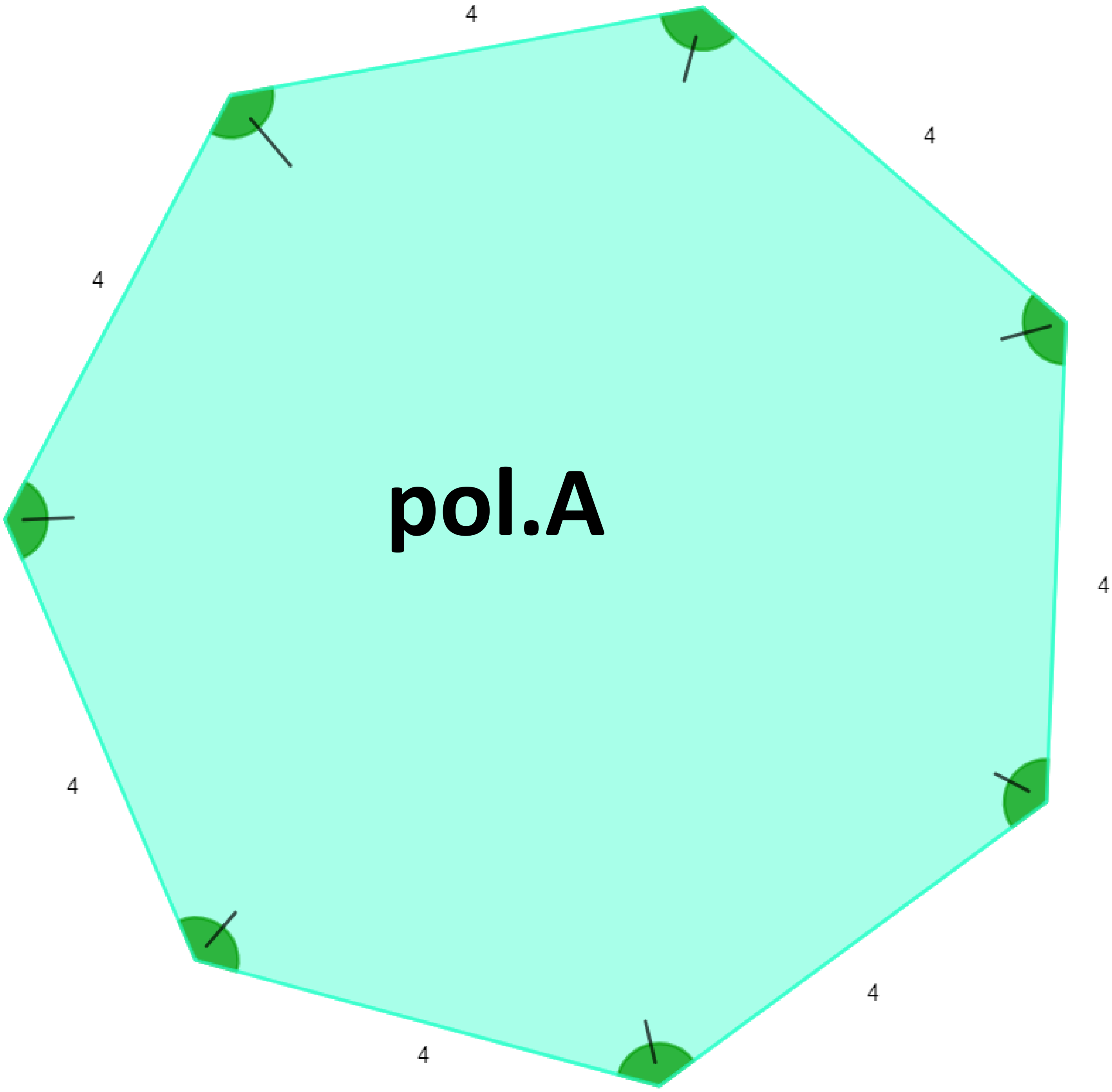


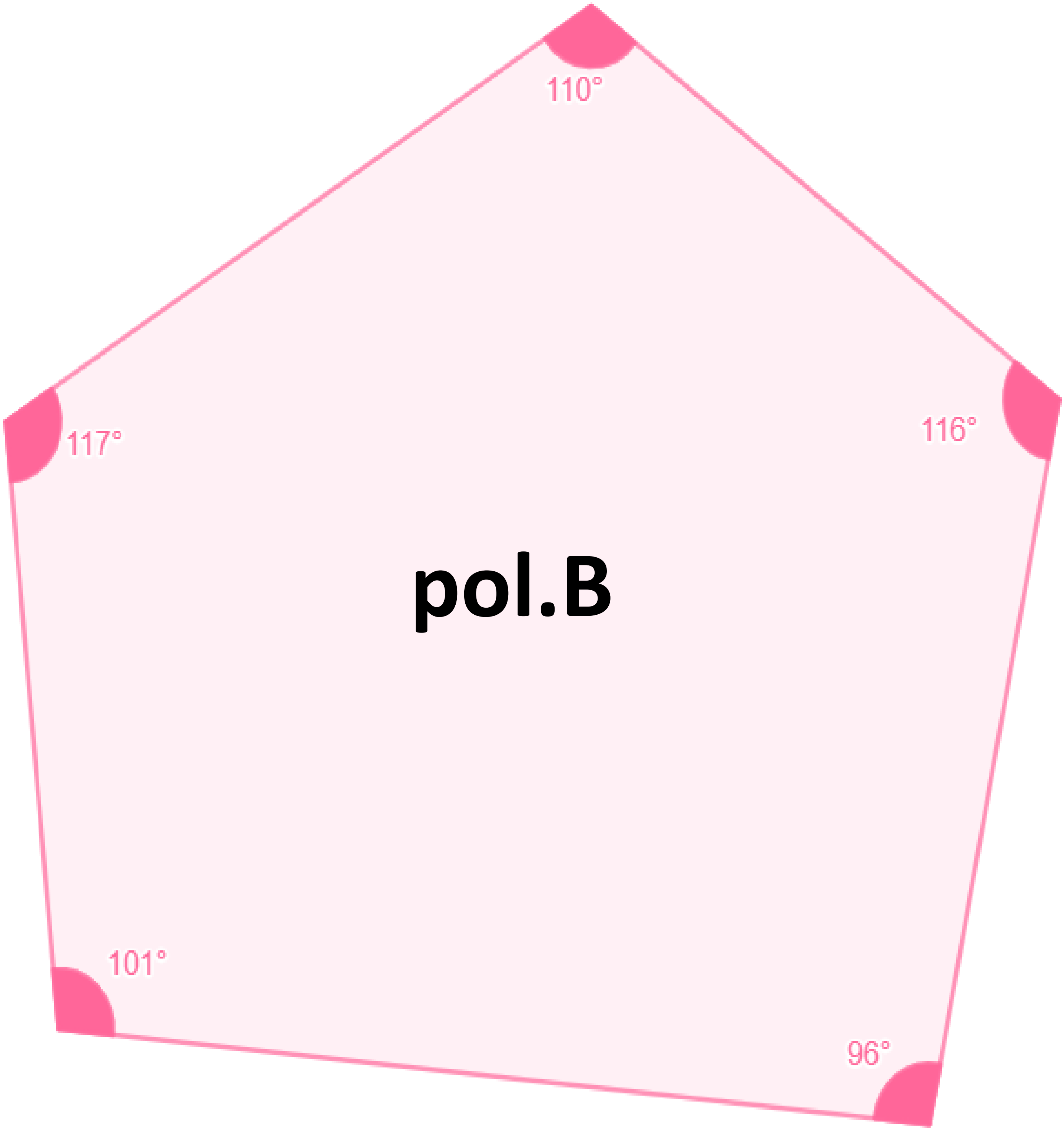
4) Arraste o ponto B e mova-o para diferentes posições. Você notará que é possível dar uma volta completa em torno do ponto A.

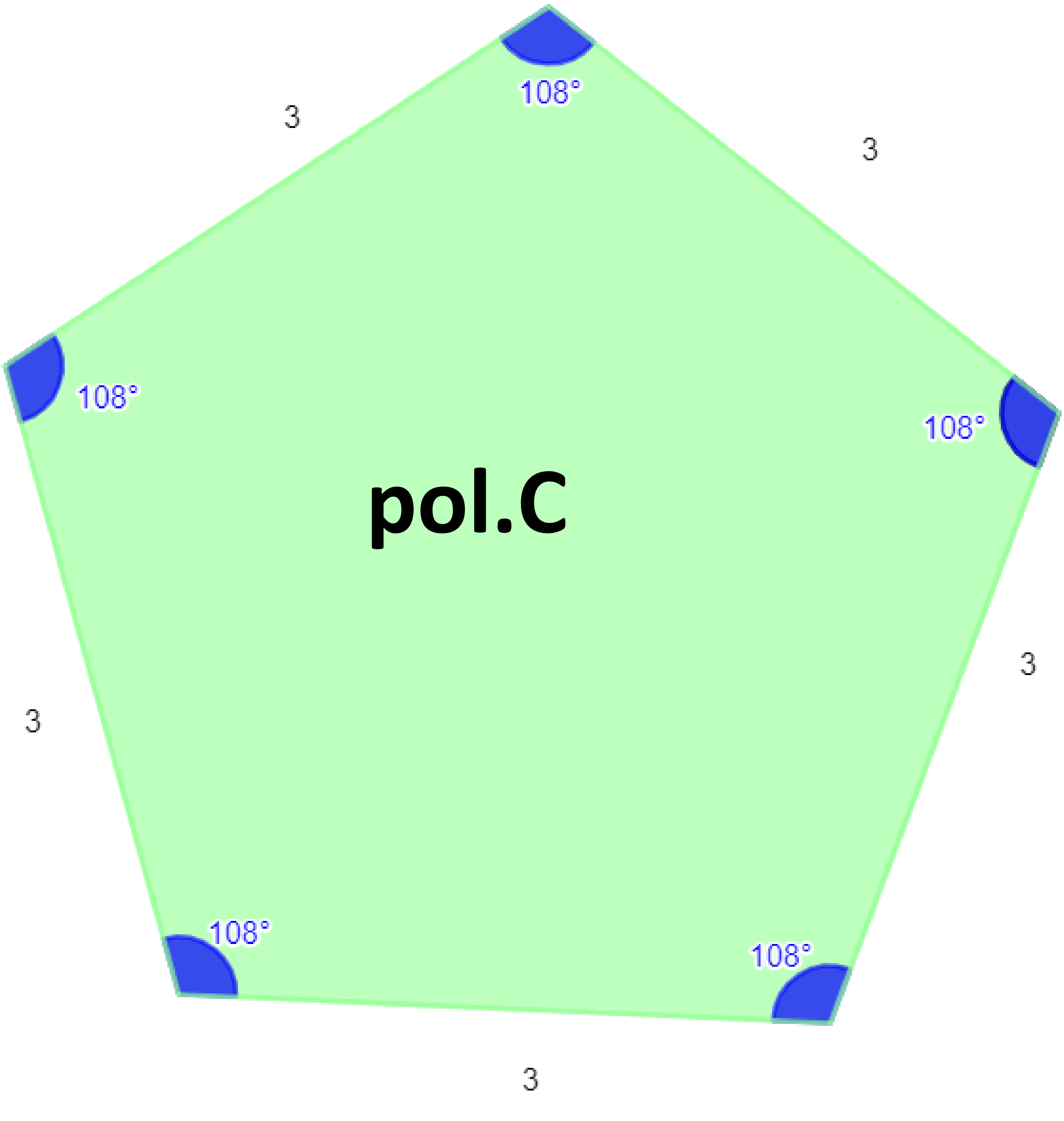


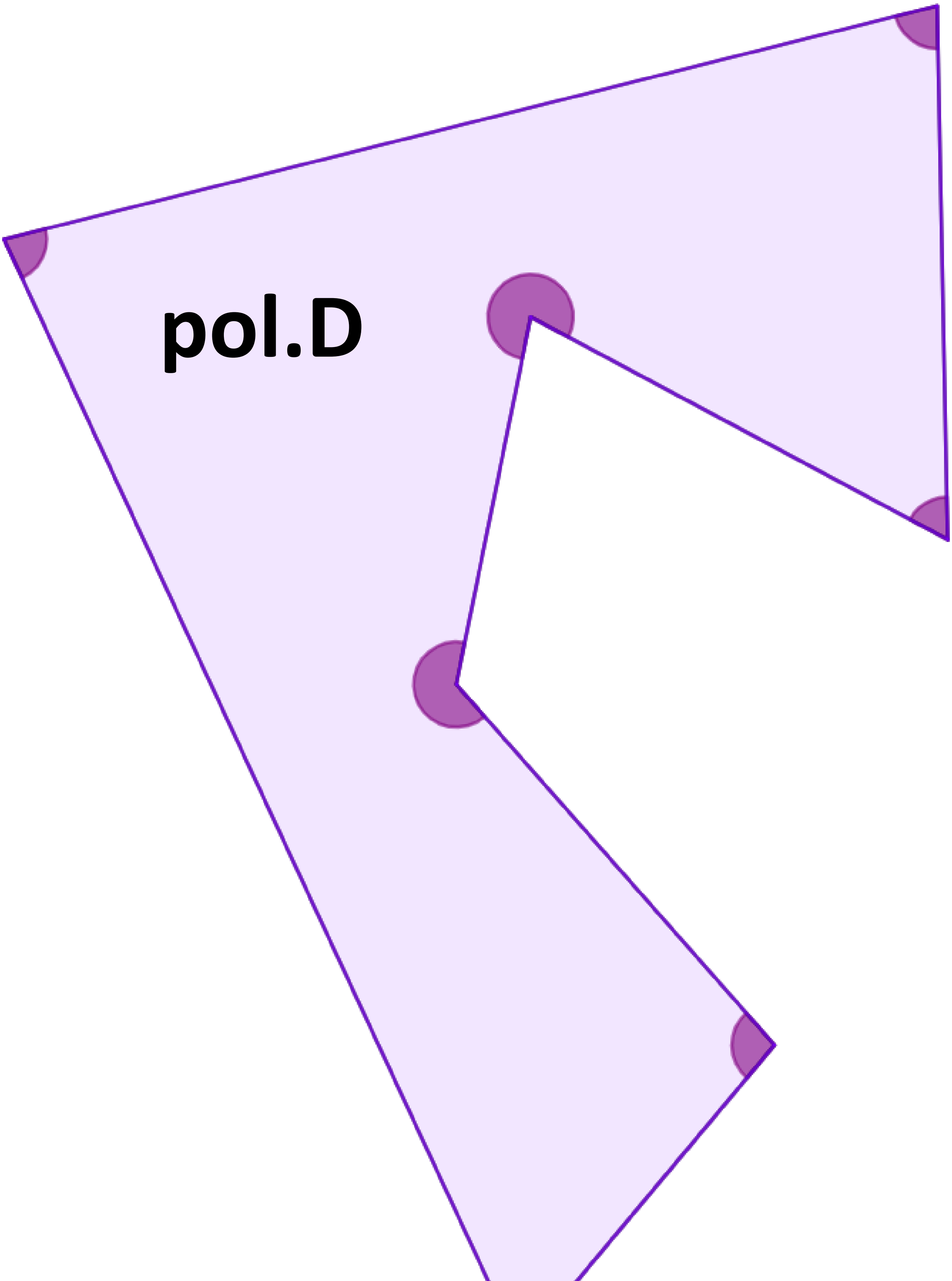
Através dessa observação, podemos perceber que o conjunto de pontos que equidistam em relação ao ponto A forma uma circunferência. Essa constatação nos permite compreender a relação geométrica entre o segmento $\overline{AB}$, o ponto A e a circunferência que o envolve.

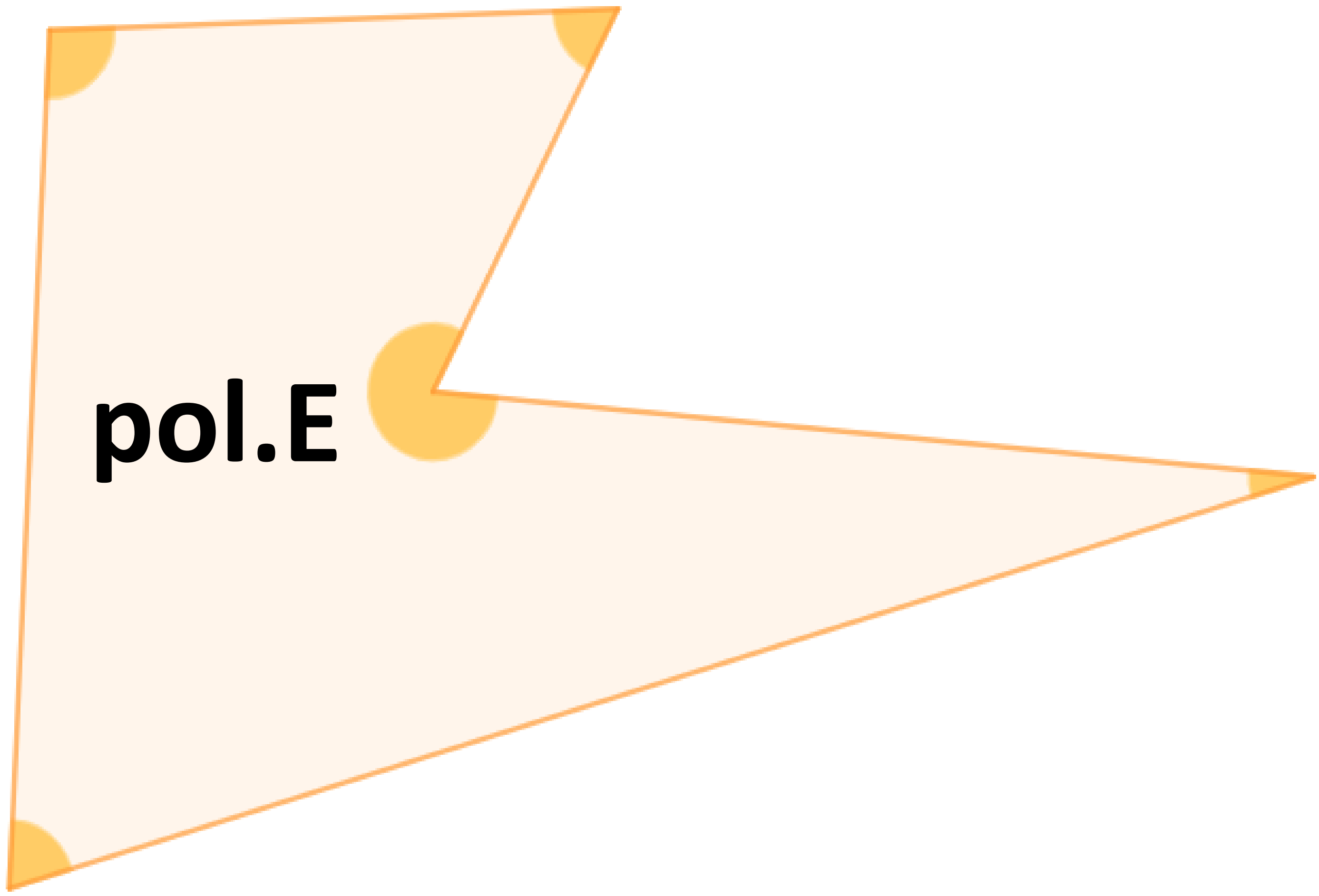
Apêndice B: Modelo de polígonos (atividade zero)

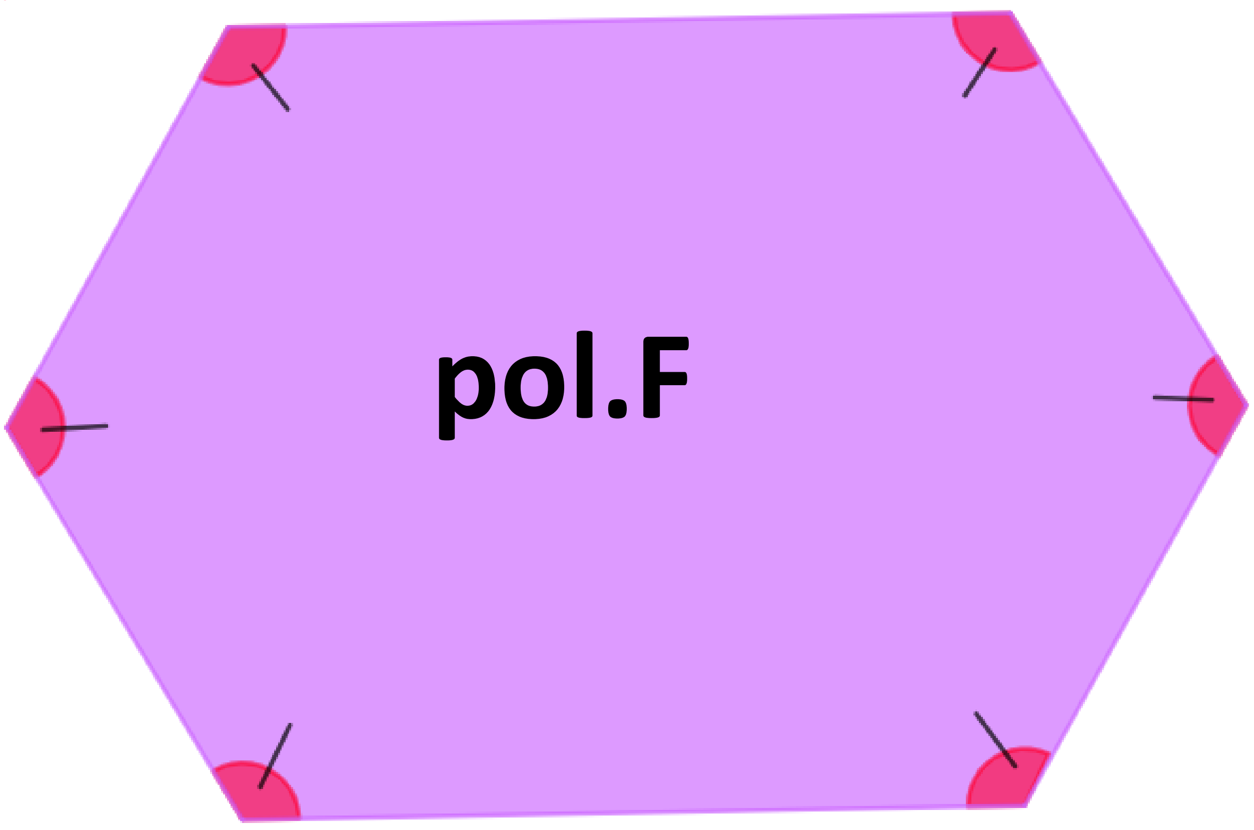


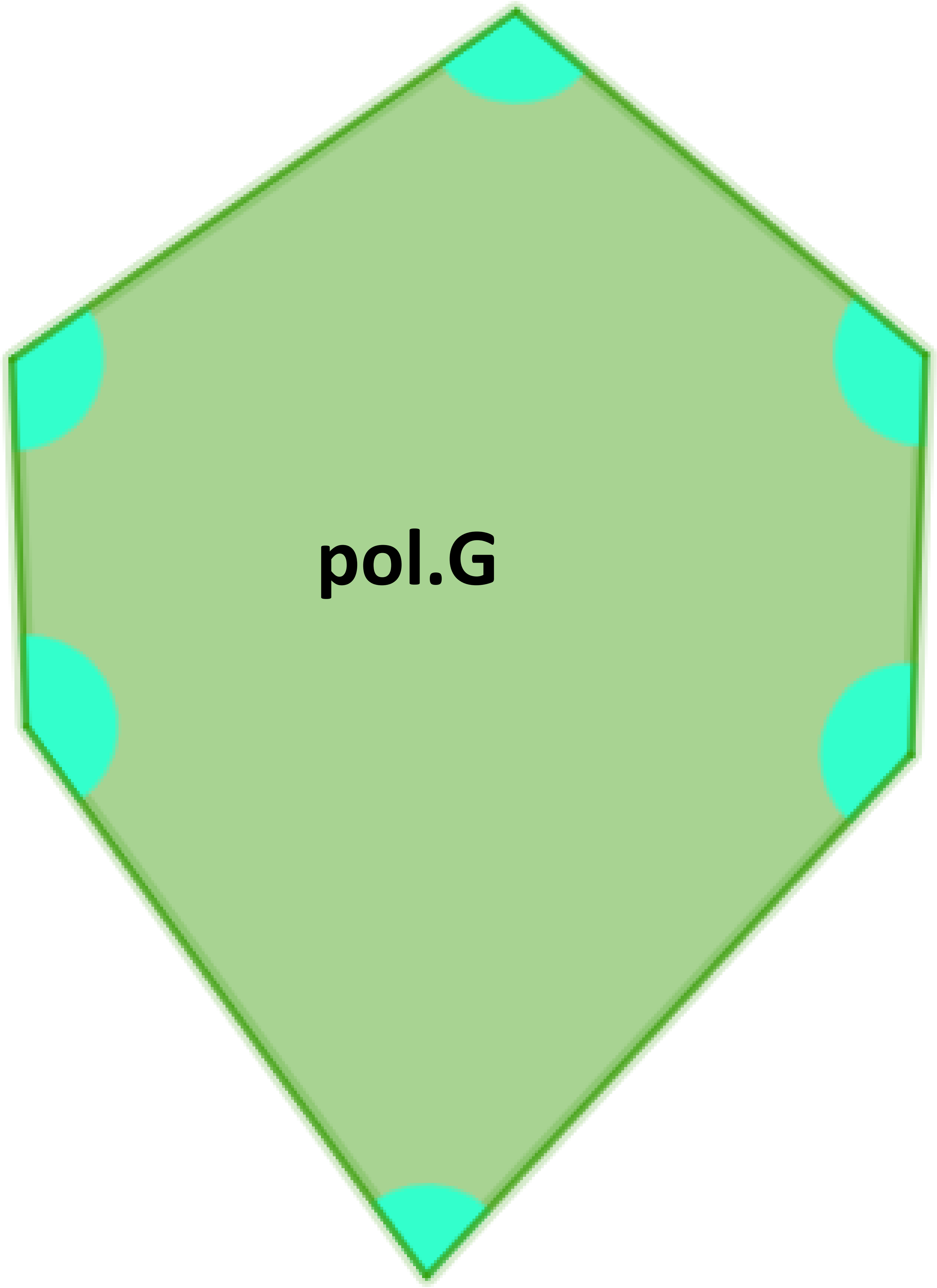

110°
117°
116°
pol.B
101°
96°

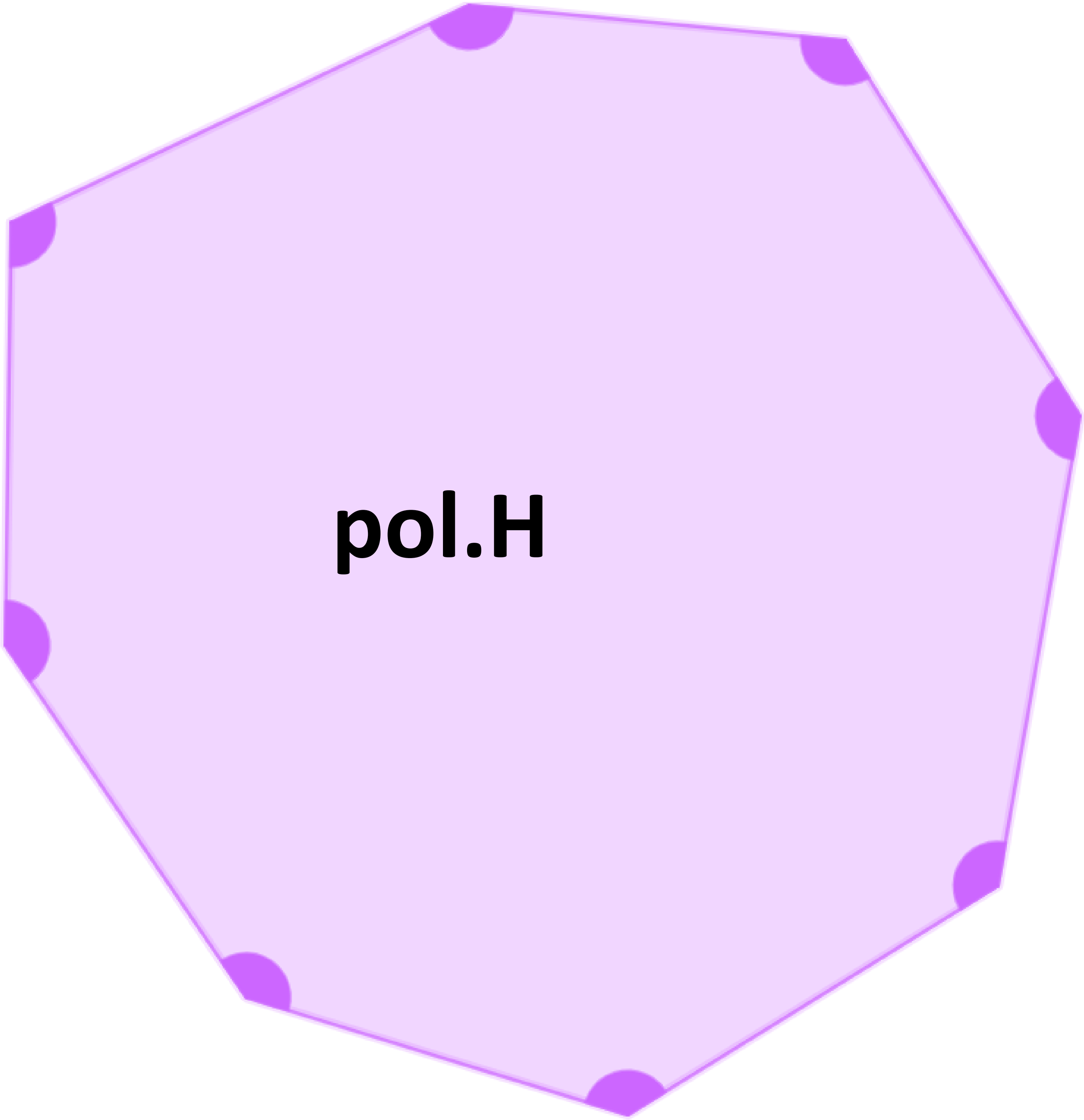

pol.C
108°
108°
108°
108°
108°
3
3
3
3
3

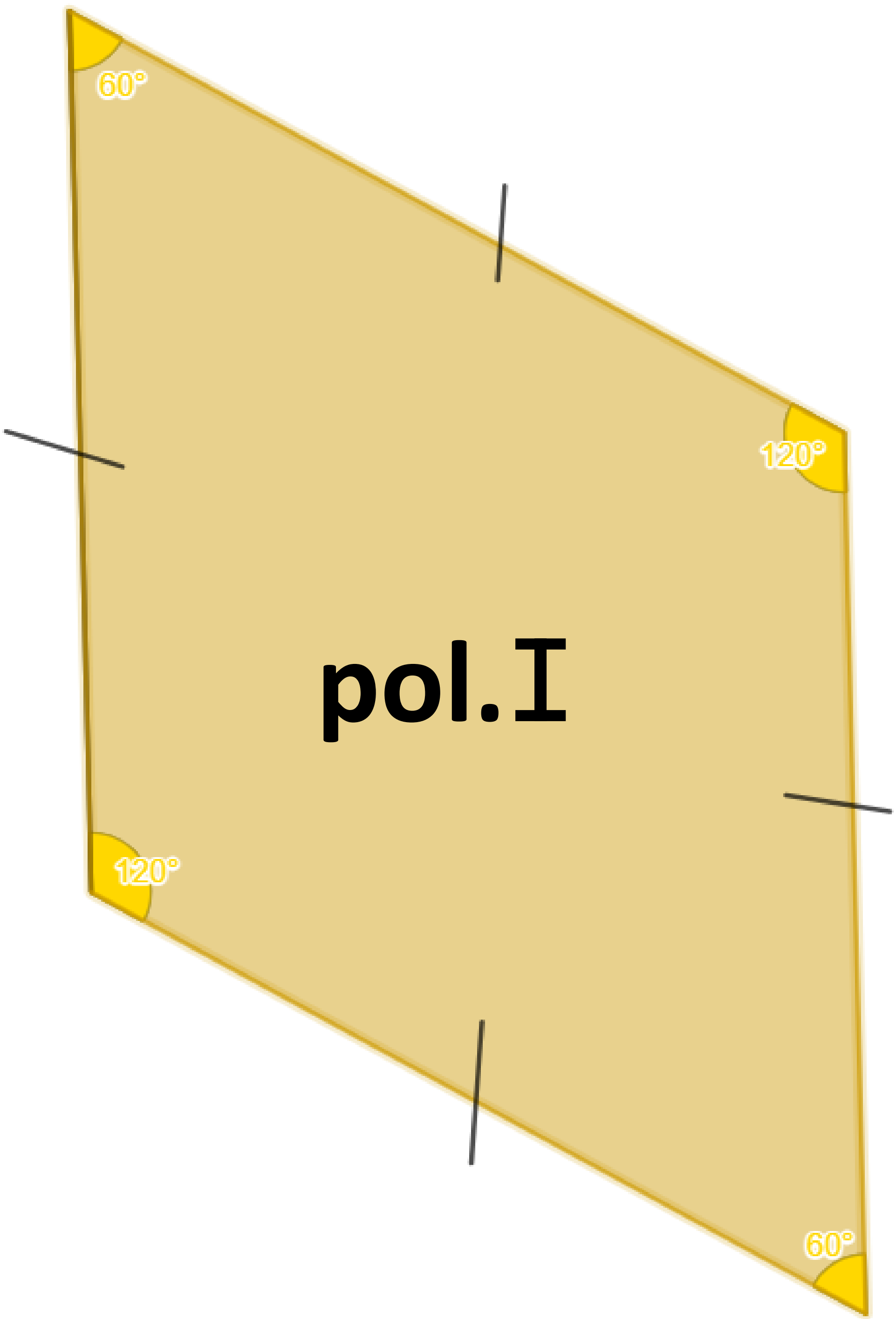

pol.D


pol.E

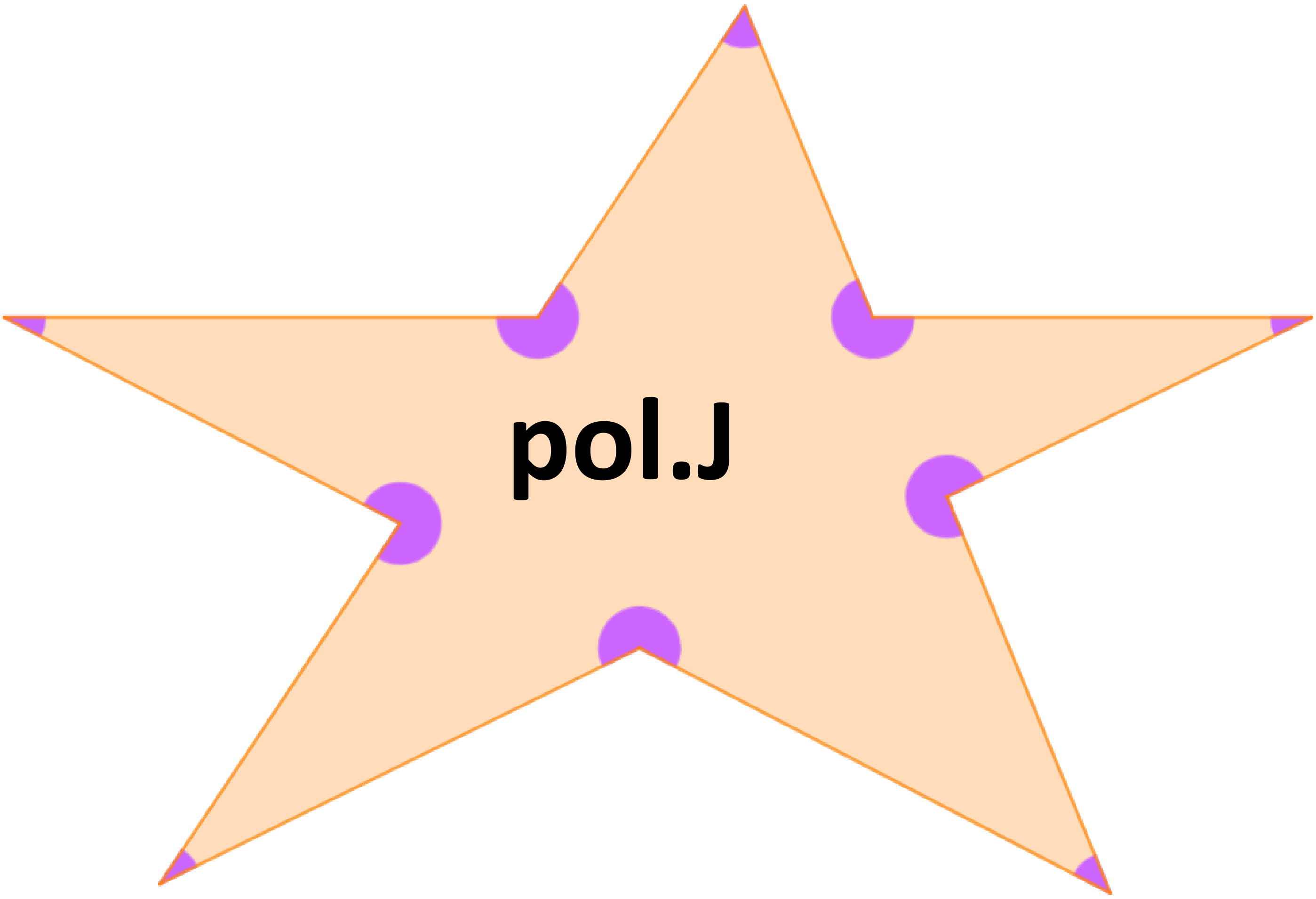

pol.F

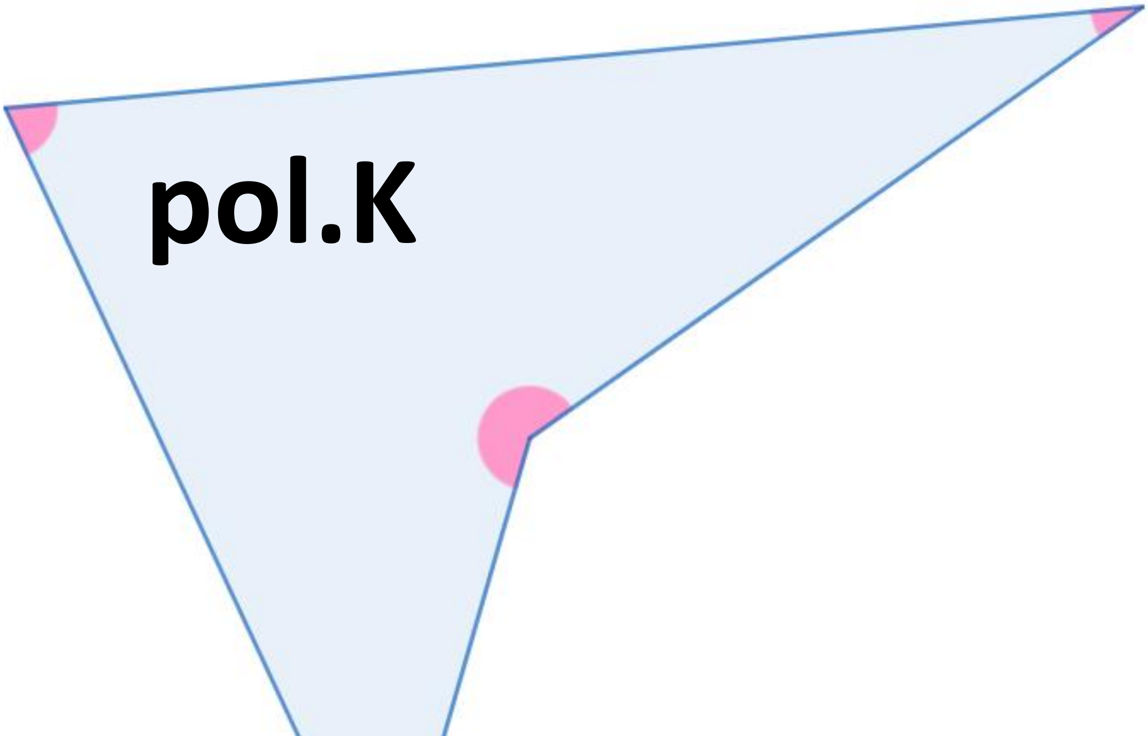

pol.G

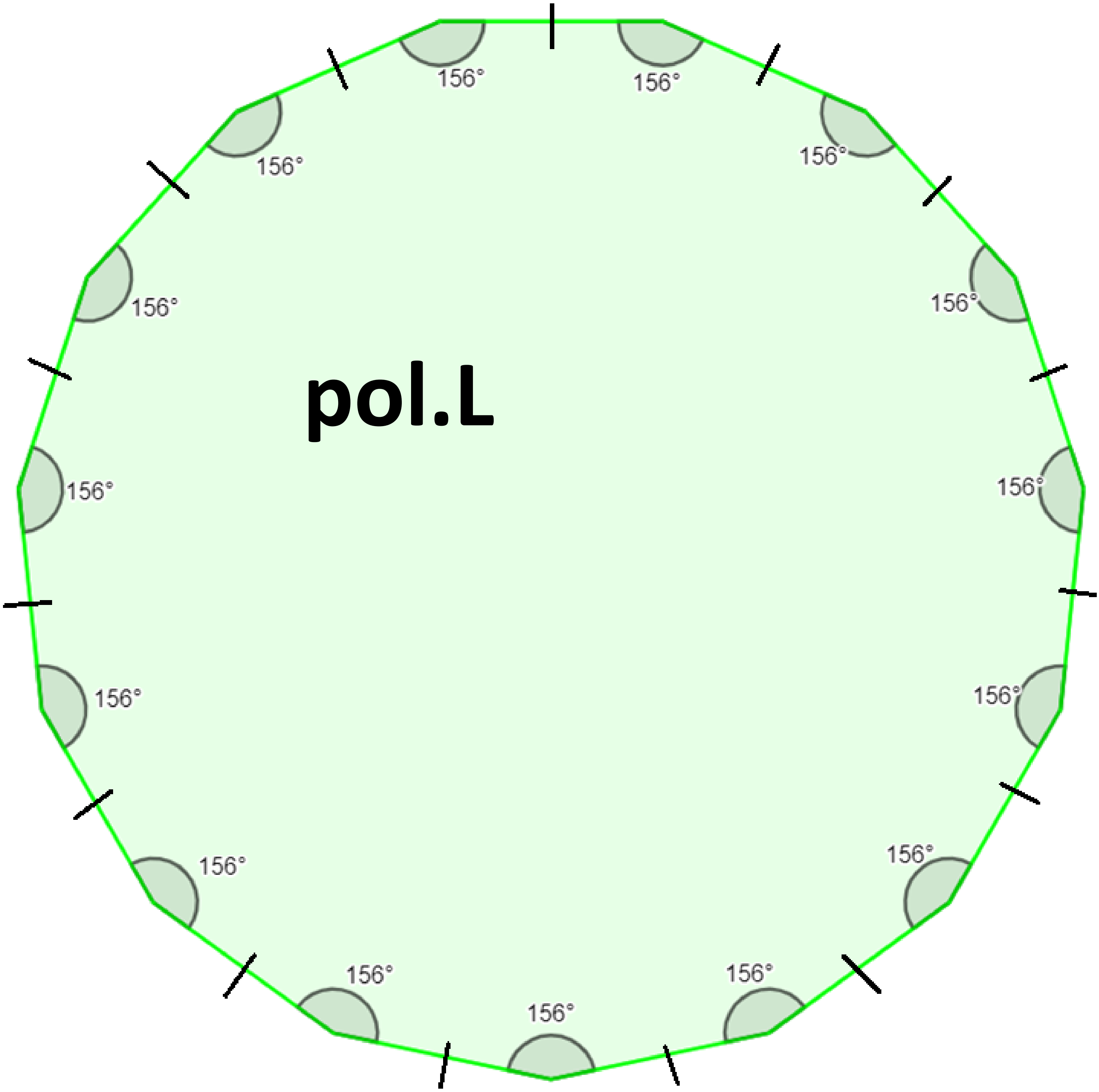

pol.H

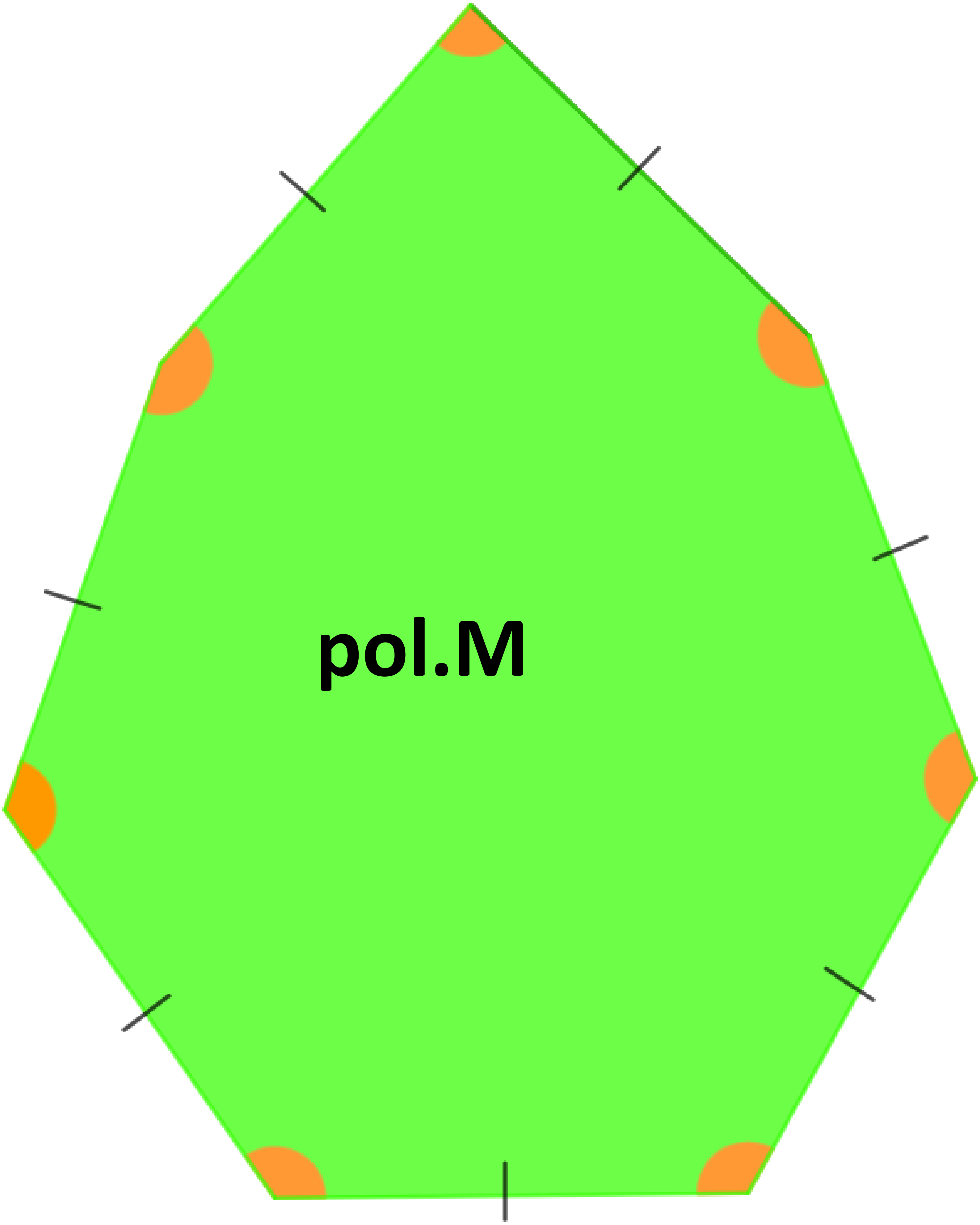


60°
120°
pol.I
120°
60°

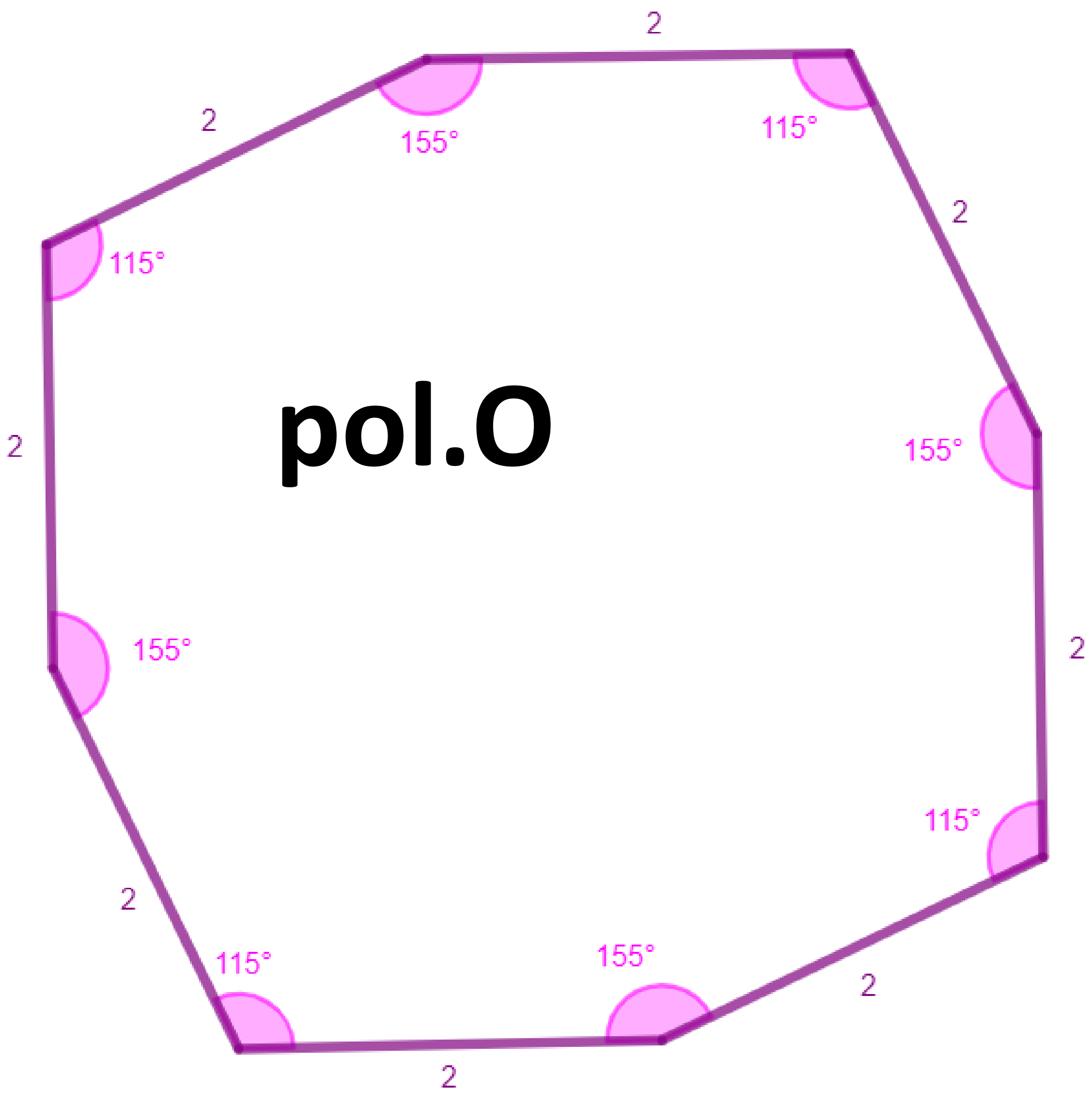

pol.J

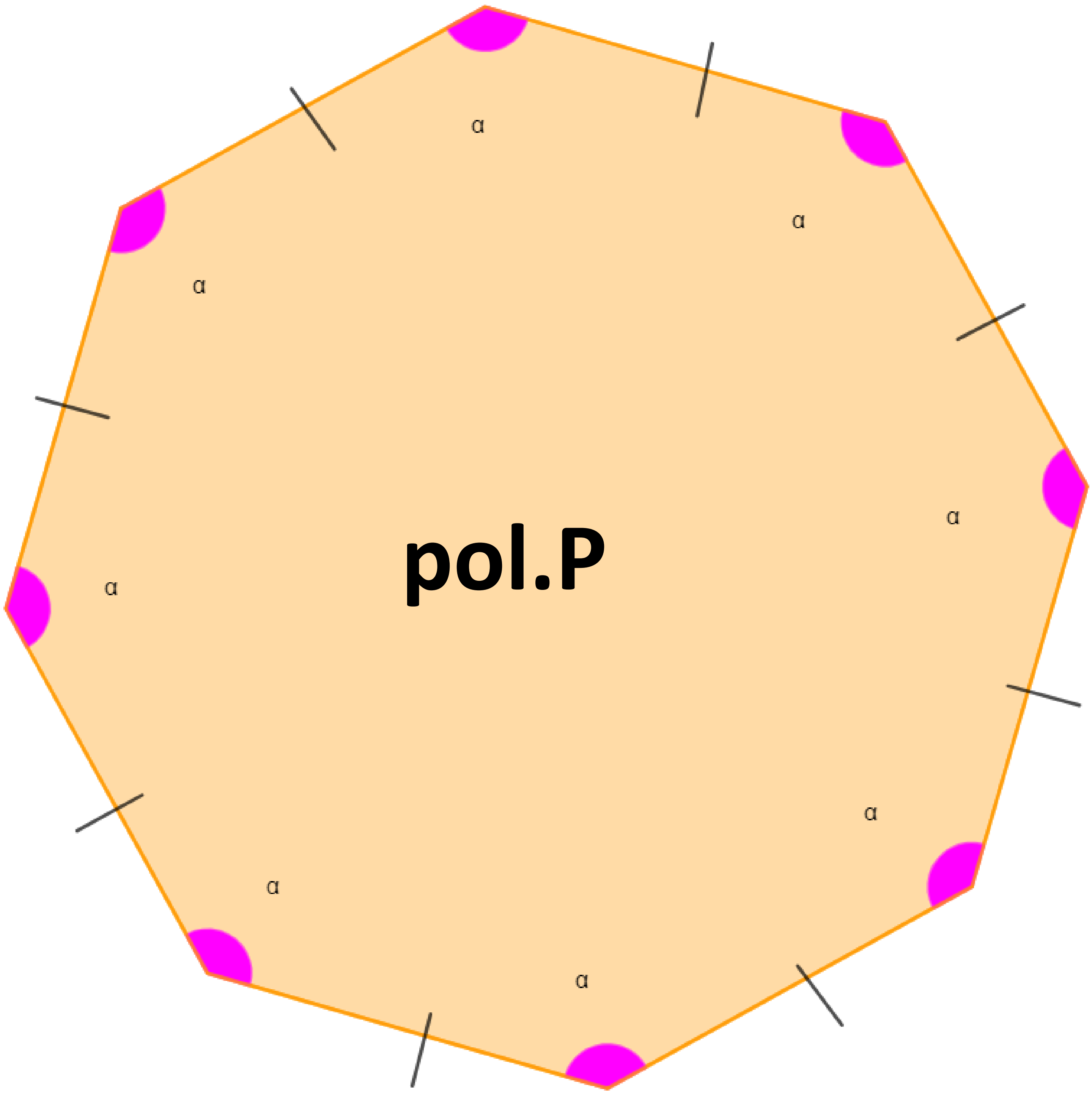

pol.K

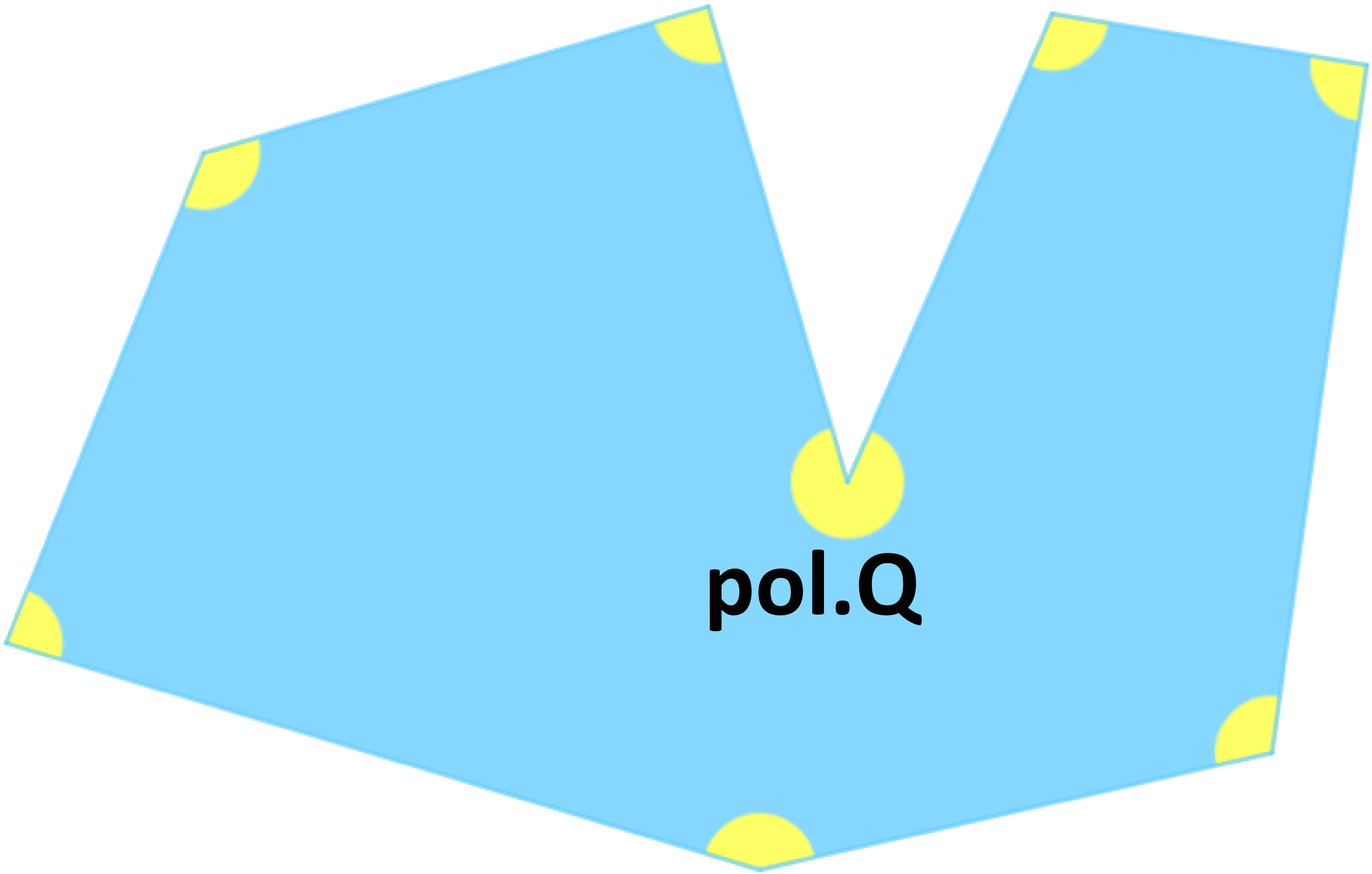

pol.L
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°

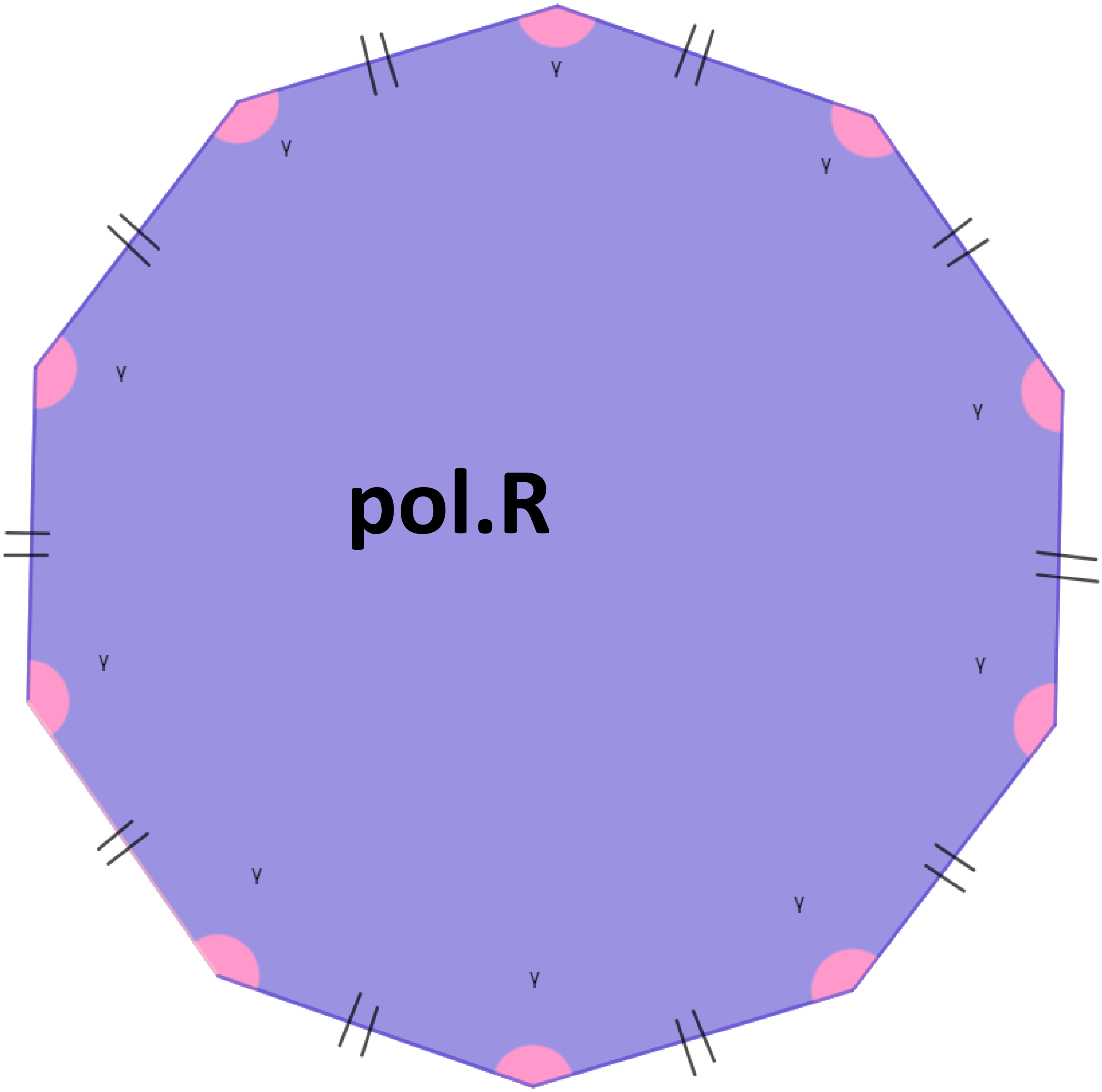

pol.M

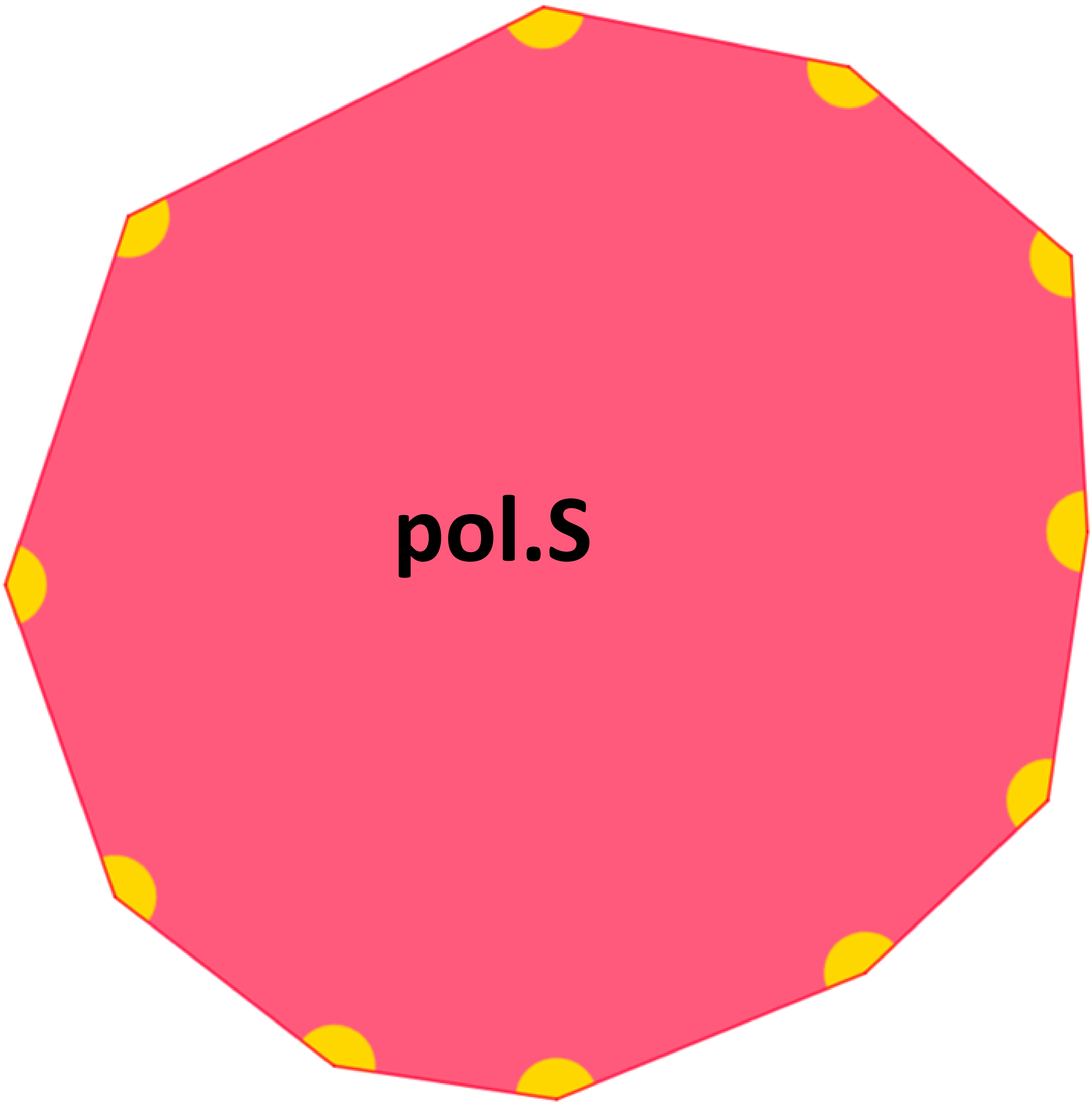

pol.N

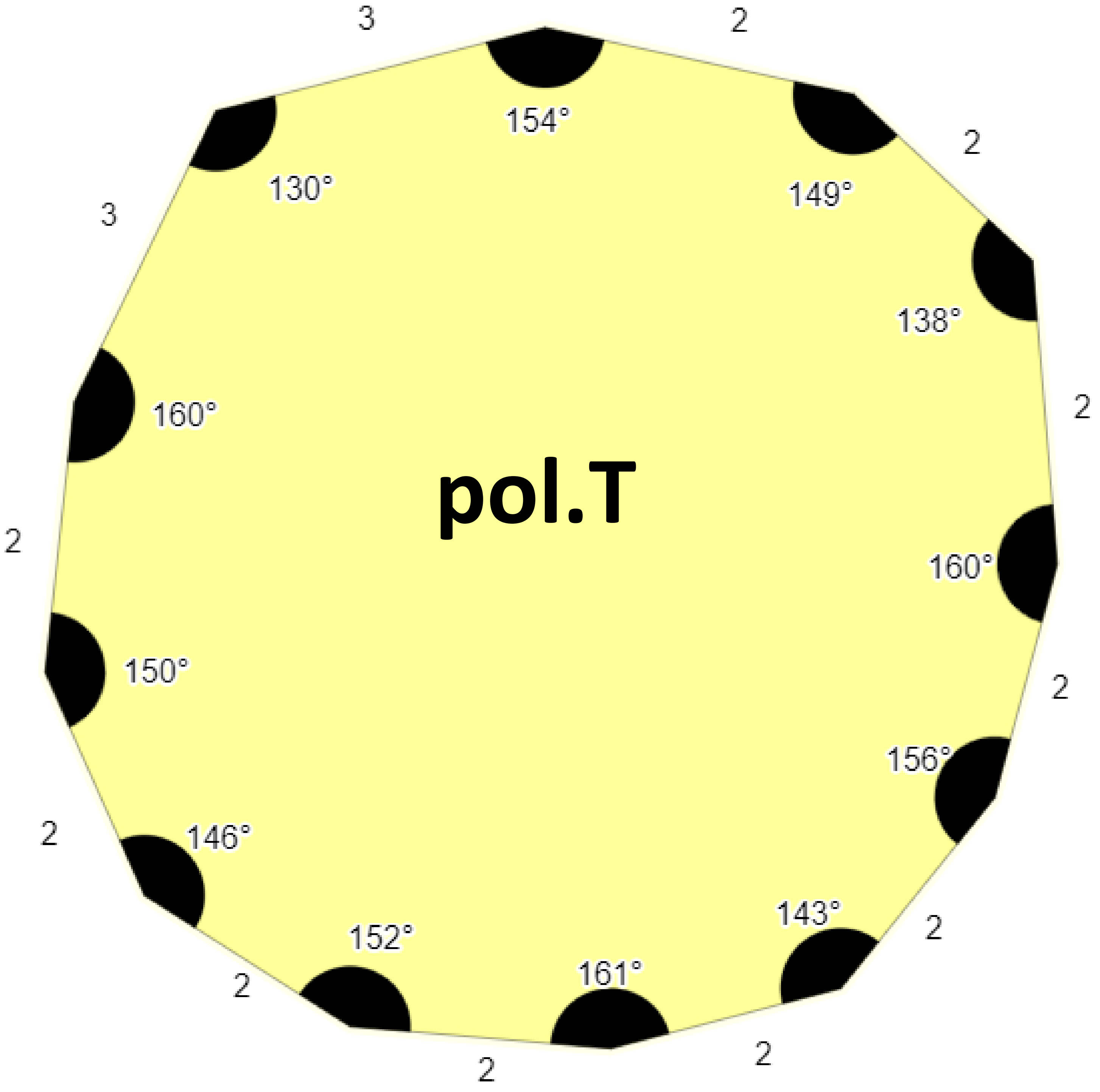

pol.O
2
2
2
2
2
2
2
2
155°
115°
115°
155°
155°
115°
115°
155°


pol.P
α
α
α
α
α
α
α
α


pol.Q


γ
γ
γ
γ
γ
γ
γ
γ
γ
γ
γ
pol.R


pol.S



3
2
154°
130°
2
149°
3
138°
160°
2
pol.T
2
160°
150°
2
156°
146°
2
143°
152°
161°
2
2
2