

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Kaio Cruz e Silva

Pensamento Proporcional na matemática escolar: a noção de razão

Juiz de Fora

2024



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este  
trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license"  
href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons -  
Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```


Kaio Cruz e Silva

Pensamento Proporcional na matemática escolar: a noção de razão

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dr.^a Rosana de Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades Silva

Juiz de Fora

2024

SUMÁRIO

1	METODOLOGIA DE APLICAÇÃO	4
1.1	TAREFA 1	6
1.2	TAREFA 2 E TAREFA 3	6
2	CONSIDERAÇÕES FINAIS	13
	ANEXO A – Sequência Didática	14

1 METODOLOGIA DE APLICAÇÃO

As nossas tarefas foram divididas em 5 grupos. As tarefas do primeiro grupo foram denominadas de tarefas disparadoras. Tal denominação deu-se no sentido de que, com elas, inicia-se o processo de produção de significados dos alunos para o que eles constituirão, no final, como o objeto razão.

1.1 TAREFA 1

Na turma A de uma escola, existem 15 meninas e 20 meninos. Produza afirmações verdadeiras que informe a relação entre o número total de estudantes, o número de meninas e o número de meninos nesta sala de aula.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Com base em nossas aplicações, podemos constatar que os alunos produzem diversos significados, que são verdadeiros de acordo com o que se pede. Sendo assim, é importante proporcionar a esses estudantes espaços de apresentação e escuta dos seus modos de pensar sobre tal proposta, pois através de algumas dessas falas pode surgir um questionamento, apontamento, que possibilite a produção de significado dos alunos na direção da qual o professor está falando.

Nessa tarefa, não temos expectativas de que os alunos tomem o quociente do número de meninas pelo número total de estudantes. Como dissemos anteriormente, o objetivo dessa atividade é visualizar as produções de significados dos estudantes a partir dessa situação. Por isso, após a discussão, caso não tenha aparecido essa representação, o professor apresentará um modo de representar ou exibir os cálculos. Assim, acreditamos que seja essencial a sugestão da aplicação de tal modo pelos alunos:

a) =

b)

c)

d)

A partir dessa representação, esperamos que os estudantes internalizem os respectivos modos e os introduzam. Logo, pretendemos que eles apresentem a tarefa do seguinte modo:

$$= = = \longrightarrow$$

$$= = \longrightarrow$$

$$= = \longrightarrow$$

No entanto, não temos expectativa que todos os alunos façam a leitura do resultado considerando tantos para quantos. Assim, a proposta é abrir uma discussão de como analisar a resposta que foi encontrada.

Sugerimos, neste momento, uma nova intervenção do professor para apresentar uma leitura da letra (a) para que os discentes considerem aquele jeito de ler os números encontrados nos seguintes termos:

Os números querem dizer que, na turma A, a cada 7 estudantes, 3 são meninas, ou que existem 3 meninas a cada grupo de 7 estudantes

Após esta explicação, solicitamos aos alunos que tentem explicar o que quer dizer os resultados nas outras letras. A expectativa é que sejam verbalizados comentários como os seguintes:

(b) Nesta sala de aula, tem 4 meninos para cada 7 estudantes; a cada 7 estudantes, 4 são meninos;

(c) Na turma A, tem-se 3 meninas para 4 meninos; ou, a cada grupo de 7 alunos, 3 são meninas e 4 são meninos;

(d) Na sala de aula tem 4 meninas para 3 meninos ou a cada grupo de 7 alunos, 4 são meninos e 3 são meninas.

Após a análise da turma, podemos questioná-los ainda se as letras (c) e (d) nos informam a mesma coisa a ponto de podermos excluir uma delas nos próximos problemas.

Na sequência, sugerimos que o professor discuta com a turma a possibilidade de introduzir uma nova notação em que todos usem para ajudar a pensar sobre o assunto. Em seguida, o educador apresenta a seguinte proposta: (a:b):

$$= = = \rightarrow (3:7)$$

$$= = \rightarrow (4:7)$$

$$= = \rightarrow (3:4)$$

As duas próximas tarefas do grupo 1 têm o objetivo de observar o quanto eles internalizaram (no sentido proposto por Vigotski) da discussão anterior em relação à nova maneira de operar e segundo uma lógica das operações específicas. Por esse motivo, mantivemos a mesma “estrutura” da tarefa anterior nas duas tarefas seguintes.

1.2 TAREFA 2 E TAREFA 3

Tarefa 2

Na turma B há 14 meninos e 21 meninas. Produza afirmações verdadeiras que informe, nessa sala de aula:

- (a) A relação entre o número de meninas e o número total de estudantes;*
- (b) A relação entre o número de meninos e o número total de estudantes;*
- (c) A relação entre o número de meninas e o número de meninos.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Tarefa 3

Na turma C há 36 estudantes dos quais 18 são meninas. Produza afirmações verdadeiras que informe nessa sala de aula:

(a) A relação entre o número de meninas e o número total de estudantes.

(b) A relação entre o número de meninos e o número total de estudantes.

(c) A relação entre o número de meninos e o número de meninas.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Após toda a discussão, o professor poderá apresentar sua resolução como forma de fechar tais tarefas. Em seguida, introduziremos mais um elemento novo à discussão a fim de observar que alteração pode acontecer quando uma nova informação é incorporada à produção de significados dos alunos, que são as noções de *parte-todo* e *parte-parte*.

Na próxima tarefa, será proposto ao estudante comparar as tarefas 1, 2 e 3. Um dos possíveis modos de iniciar esta discussão é:

a) Quando falamos de total de estudantes de uma turma e o número de meninas e meninos; quem é o todo e quais são as partes, nas turmas A, B e C?

b) Quando vocês fizeram as contas, em quais casos teve uma relação parte-todo e em quais casos temos uma relação parte/parte?

c) Você conseguiria fazer um desenho da tarefa 1 indicando um todo e como seria as partes dentro do todo?

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Na letra c, temos como objetivo que os alunos esbocem o que visualizam sobre os itens anteriores.

Os momentos de discussão possibilitarão ao professor entender o que os alunos estão falando a respeito e se eles estão operando na mesma direção.

Então, passaremos agora às tarefas **do grupo 2**, que têm como objetivo continuar explorando da noção de razão, porém sem defini-la ainda, em diferentes contextos. Durante a

execução dessas tarefas, surgirão elementos da matemática escolar, estudados em outro momento anterior, envolvendo a simplificação de fração, divisão de números dentre outros, que talvez exija do professor uma intervenção no decorrer.

Tarefa 1

Uma cidade com 120.000 habitantes possui 30.000 habitantes na faixa de 50 a 60 anos e 5.000 com 60 anos ou mais. Qual é a relação entre:

- a) O número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos e o número total de habitantes?*
- b) O número de habitantes com 60 anos ou mais e o número total de habitantes?*
- c) O número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos e o número de habitantes com 60 anos ou mais?*
- d) O número de habitantes com 60 anos ou mais e o número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos?*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Em todos os casos, diga o que informam os resultados encontrados.

A resposta do professor seria:

$$= = \longrightarrow (1:4)$$

O que as contas informam é que, na cidade, temos que, a cada 4 habitantes, 1 está na faixa dos 50 a 60 anos:

$$= = \longrightarrow (1:24)$$

O resultado nos diz que, na cidade, temos que, a cada 24 habitantes, 1 está com 60 anos ou mais ou que existe um habitante com 60 anos ou mais em um grupo de 24 habitantes:

$$= = \longrightarrow (6:1)$$

Os números encontrados nos dizem que o número de habitantes da cidade na faixa de 50 a 60 anos é 6 vezes maior do que o de habitantes de 60 anos ou mais.

Ou, ainda, podemos também dizer que, para cada habitante com 60 anos ou mais, tem na cidade 6 habitantes na faixa de 50 a 60 anos.

Tarefa 2

Em uma cidade de 240.000 habitantes existem 120 dentistas e 480 médicos para atender a população.

- a) Qual é a relação de números de habitantes por dentista na cidade? E de número de habitantes por médico?*
- b) Nessa cidade há quantos dentistas para cada 8.000 habitantes?*
- c) Numa pequena cidade de 6.000 habitantes existem 4 dentistas e 6 médicos para atender a população. Esta cidade está melhor servida de dentistas e médicos que a cidade de 240 mil habitantes?*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Tarefa 3

Em sua festa de aniversário, Lucas convidou 20 amigos do time de Vôlei. Sua mãe pretende servir suco da região onde mora. Para calcular o número de garrafas que deve comprar, Lucas verificou que cada garrafa de suco tem a capacidade 2000 ml e cada copo descartável da festa tem a capacidade de 250 ml. Quantas garrafas de suco sua mãe deverá comprar para garantir que todos os convidados tomem 4 copos de suco cada?

Em seguida, iremos apresentas as tarefas do **grupo 3**, que têm como objetivo colher o que os estudantes entenderam de razão a partir das tarefas propostas anteriormente:

Tarefa 1 – Em busca de uma definição Texto para leitura e discussão

Em matemática tem-se o hábito de dar nome as coisas da matemática para podermos nos referir a elas quando precisarmos. Por exemplo, falamos de fração, número natural, triângulo e assim todo mundo sabe do que se trata. A partir de agora, vamos dar dois nomes para as coisas que estamos usando nas nossas tarefas até este momento.

Recordamos, que nas tarefas anteriores, tomamos várias vezes quociente, isto é, fizemos cálculos do tipo:

,

*Assim, n° de meninas, n° total de estudantes, n° de habitantes, temperatura, ...são chamadas de **grandeza** ou **quantidade**.*

Então definimos grandeza ou quantidade assim:

Grandeza ou **Quantidade** é tudo aquilo que pode ser medido ou contado, usando números para isso.

Além disso, pedimos a vocês que calculassem várias relações em várias tarefas: a relação entre o número de meninas e o número de estudantes; a relação entre o número de dentistas e o número de habitantes de uma cidade. Como neste caso, esta relação é feita de um jeito especial porque ela nos dá informações importantes, usamos chamar esta relação de **RAZÃO**. Mas agora deixaremos para você definir o que é razão.

Com estas informações, vocês devem:

- Exibir 5 exemplos de coisas que são grandezas;
- Definir com suas palavras o que é razão.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nossa expectativa é que eles tentarão apresentar exemplos e formular uma definição que, depois de discutida por todos, o(a) professor(a) auxiliará a turma a concluir a definição.

O que queremos verificar nesta tarefa é se, ao final do processo, a noção de grandeza e razão vai parecer mais natural para eles do que quando o professor apresenta uma definição pronta para a turma.

Em seguida, passaremos às tarefas do **grupo 4**, cujo objetivo é inverter o sentido da pergunta. Em vez de pedir aos alunos para analisar a relação de grandezas para informar “tantos para quantos”, apresentamos a conclusão no sentido de buscar os valores das grandezas que satisfazem a razão:

Tarefa 1

Numa classe de 32 alunos, a **razão** entre o número de meninas e número de meninos é de $3/5$. Quantas são as meninas?

Tarefa 2

Numa classe de 36 alunos, a **razão** entre o número de meninos e número total de alunos é de $3/4$. Quantas são as meninas?

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

As tarefas do **grupo 5** têm como objetivo introduzir mais um objeto na discussão em sala de aula sobre razões entre grandezas: a noção de porcentagem, entendida também como uma razão.

Tarefa 1

Alice estava olhando o álbum de fotografias de sua família e observou que das 80 fotos colocadas lá, 32 são coloridas. Lembrando das nossas

aulas, ela então perguntou: - qual a relação entre o número de fotos coloridas para o total de fotos do álbum?

Ela então apresentou a seguinte resolução para nos mostrar:

A razão entre o número de fotos coloridas pelo total de fotos é:

$$= =$$

Logo, concluímos que a cada 5 fotos, duas são coloridas.

Uma outra pergunta que podemos fazer sobre esta situação apresentada por Alice é: como podemos interpretar de uma outra maneira o fato de que temos 32 fotos coloridas em um total de 80 fotos? Esta pergunta muitas vezes será feita a vocês da seguinte maneira: qual é a porcentagem de fotos coloridas? Mas o que é mesmo porcentagem?

Para responder a esta outra pergunta, vamos refazer as contas acima da seguinte maneira:

$$= =$$

E, em matemática, decidiu-se que toda vez que o denominador for 100 em uma fração podemos usar uma notação expressa pelo símbolo % acompanhando do numerador; que neste caso é 40. Assim, escrevemos:

$$= = = 40\%$$

Podemos também fazer as contas assim:

$$= 0,4 = 40\%$$

Que se lê: de um total de 80 fotos, que em porcentagens representa 100% das fotos, 40% (32 fotos) são coloridas.

Assim, para saber qual a porcentagem das fotos em preto e branco fazemos $100\% - 40\% = 60\%$.

Podemos verificar isso observando que $80 \text{ fotos} - 32 \text{ fotos} = 48 \text{ fotos}$ (60% de todas as 80 fotos).

De fato, as contas nos informam a mesma coisa:

$$= = = 60\%$$

Com base no que você acabou de ler responda:

Você concorda com a afirmação da Alice que conclui, depois de fazer as contas que a cada 5 fotos, duas são coloridas?

Você pode explicar com suas palavras o que entendeu do que é porcentagem?

O que você pode dizer desta razão: = ?

Você pode usar porcentagem no cálculo desta razão? Por quê?

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Durante a realização desta última tarefa, pretendemos introduzir a discussão a respeito da noção de porcentagem, a partir do contexto no qual os estudantes operam. Logo, finalizamos assim a nossa sequência didática. Em seguida, registraremos as considerações finais, com possíveis indicações para professores e demais situações que possam ocorrer durante à aplicação.

2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sendo assim, propomos aos professores que forem utilizar este material que leiam a dissertação que originou este Produto Educacional, pois nela se encontra a nossa fundamentação teórica e metodológica, principalmente, o capítulo intitulado “A pesquisa de campo”. Nesse capítulo, apresentamos as respectivas enunciações que surgiram ao longo de uma aplicação e seus respectivos desdobramentos para que o professor/leitor saiba o que poderá surgir ao longo do percurso. No entanto, ressaltamos que cada aluno é único e que pode até ser que surjam elementos distintos, ou então iguais, mas a solução não será a mesma tomada na pesquisa, pois cada sujeito tem um modo de internalizar.

O papel do professor durante a aplicação é de suma importância, uma vez que a proposta deste material não se limita ao docente corrigir ou dizer se está certo ou errado. Em cada tarefa, espera-se que o estudante tenha tempo de refletir e pensar, inclusive desenvolver seus próprios modos de resolver e pensar. Aqui, o professor deverá proporcionar ambientes de discussão e realizar suas respectivas intervenções quando achar necessário.

Sendo assim, durante a aplicação, propõe-se um novo modo de organização da sala de aula. Nesse caso, os estudantes trabalham de modo cooperativo, de modo que todos dialoguem, participem e auxiliem uns aos outros durante o processo de ensino e aprendizagem, pois, em ambientes assim, os estudantes se sentem mais confiantes em falar e expressar suas respectivas opiniões, sem que haja um juízo de valor (certo ou errado). Além disso, nesta proposta, todos participam de forma ativa e todas as falas são valorizadas.

ANEXO A – Fichas de trabalho para uso na pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/NIDDEM**Ficha de Trabalho – Grupo 1****Tarefa 1**

Na turma A, existem 15 meninas e 20 meninos. Produza afirmações verdadeiras que informe a relação entre o número total de estudantes, o número de meninas e o número de meninos.

Tarefa 2

Na turma B, há 14 meninos e 21 meninas. Produza afirmações verdadeiras que informe, nessa sala de aula:

- (a) A relação entre o número de estudantes e o número de meninas;
- (b) A relação entre o número de estudantes e o número de meninos nessa sala de aula;
- (c) A relação entre o número de meninas e o número de meninos.

Tarefa 3

Na turma C, há 36 estudantes dos quais 18 são meninas. Produza afirmações verdadeiras que informe nessa sala de aula:

- (a) A relação entre o número de meninas e o número de estudantes;
- (b) A relação entre o número de meninos e o número de estudantes;
- (c) A relação entre o número de meninos e o número de meninas.

Tarefa 4

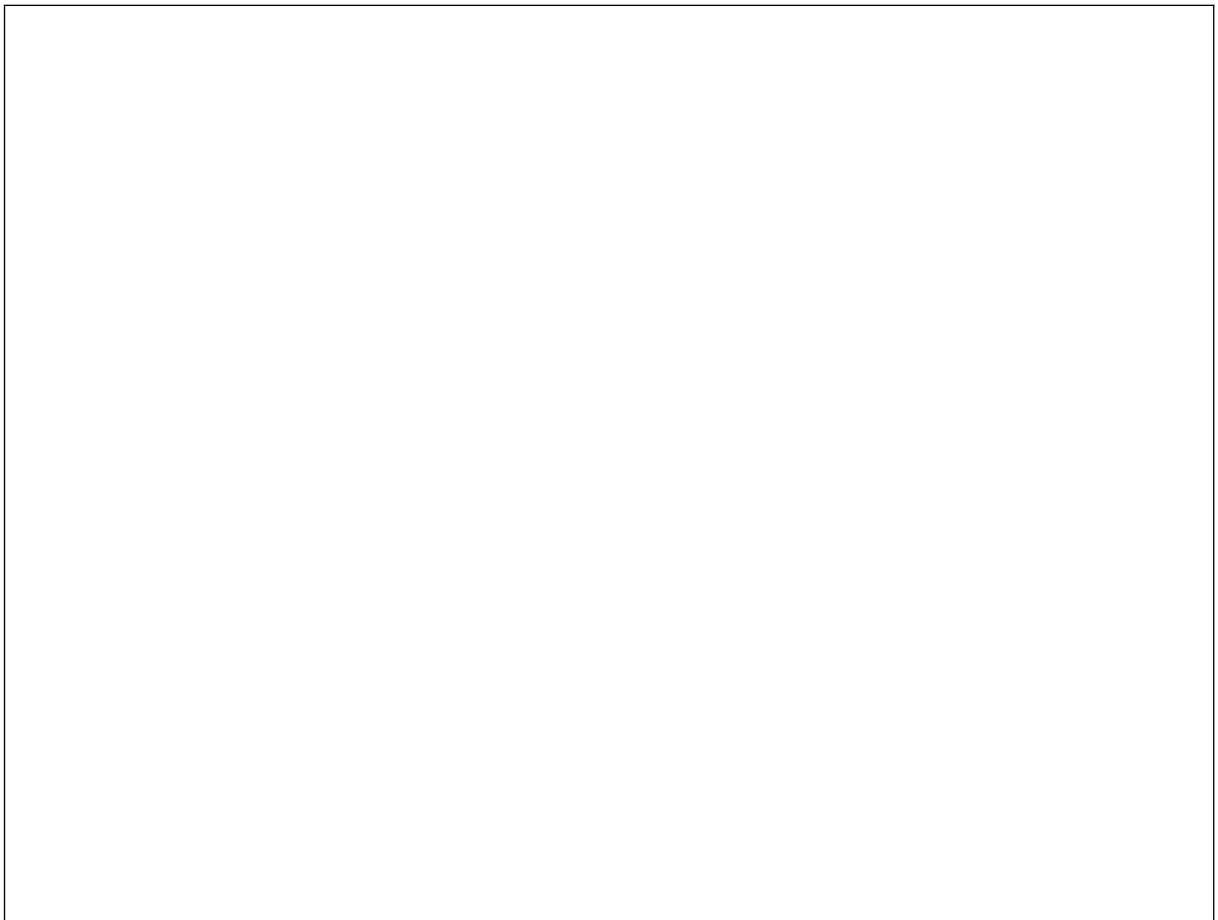
Vamos olhar novamente para as contas que fizemos nas tarefas 1, 2 e 3. Tem uma coisa que vocês não observaram e que a gente deveria discutir. Então, perguntamos:

a) Quando falamos de total de estudantes de uma turma e o número de meninas e meninos, quem é o todo e quais são as partes nas turmas A?

b) Quando vocês fizeram as contas, em quais casos houve uma relação parte-todo e em quais casos temos uma relação parte/parte?

c) Você conseguiria fazer um desenho da tarefa 1 indicando um todo e como seria as partes dentro do todo?

,

A large empty rectangular box with a thin black border, intended for a student to draw a diagram illustrating the relationship between a whole and its parts as described in the questions above.

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/NIDDEM

Ficha de Trabalho – Grupo 2

Tarefa 1

Uma cidade com 120.000 habitantes possui 30.000 habitantes na faixa de 50 a 60 anos e 5.000 com 60 anos ou mais. Qual é a relação entre:

- a) o número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos e o número total de habitantes?
- b) o número de habitantes com 60 anos ou mais e o número total de habitantes?
- c) o número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos e o número de habitantes com 60 anos ou mais?
- d) o número de habitantes com 60 anos ou mais e o número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos?

Tarefa 2

Em uma cidade de 240.000 habitantes, existem 120 dentistas e 480 médicos para atender a população.

a) Qual é a relação de números de habitantes por dentista na cidade? E de número de habitantes por médico?

b) Nessa cidade, há quantos dentistas para cada 8.000 habitantes?

c) Numa pequena cidade de 6.000 habitantes, existem 4 dentistas e 6 médicos para atender a população. Esta cidade está mais bem servida de dentistas e médicos que a cidade de 240 mil habitantes?

Tarefa 3

Em sua festa de aniversário, Lucas convidou 20 amigos do time de Vôlei. Sua mãe pretende servir suco da região onde mora. Para calcular o número de garrafas que deve comprar, Lucas verificou que cada garrafa de suco tem a capacidade 2000 ml e cada copo descartável da festa tem a capacidade de 250 ml. Quantas garrafas de suco sua mãe deverá comprar para garantir que todos os convidados tomem 4 copos de suco cada?

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/NIDDEM

Ficha de Trabalho – Grupo 3

Tarefa 1 – Em busca de uma definição

Texto para leitura e discussão

Em matemática, tem-se o hábito de dar nome às coisas da matemática para podermos nos referir a elas quando precisarmos. Por exemplo, falamos de fração, número natural, triângulo, e assim todo mundo sabe do que se trata. A partir de agora, vamos dar dois nomes para as coisas que estamos usando nas nossas tarefas até este momento.

Recordamos que, nas tarefas anteriores, tomamos várias vezes quociente, isto é, fizemos cálculos do tipo:

,

Assim, nº de meninas, nº total de estudantes, nº de habitantes, temperatura e outros são chamadas de **grandeza** ou **quantidade**.

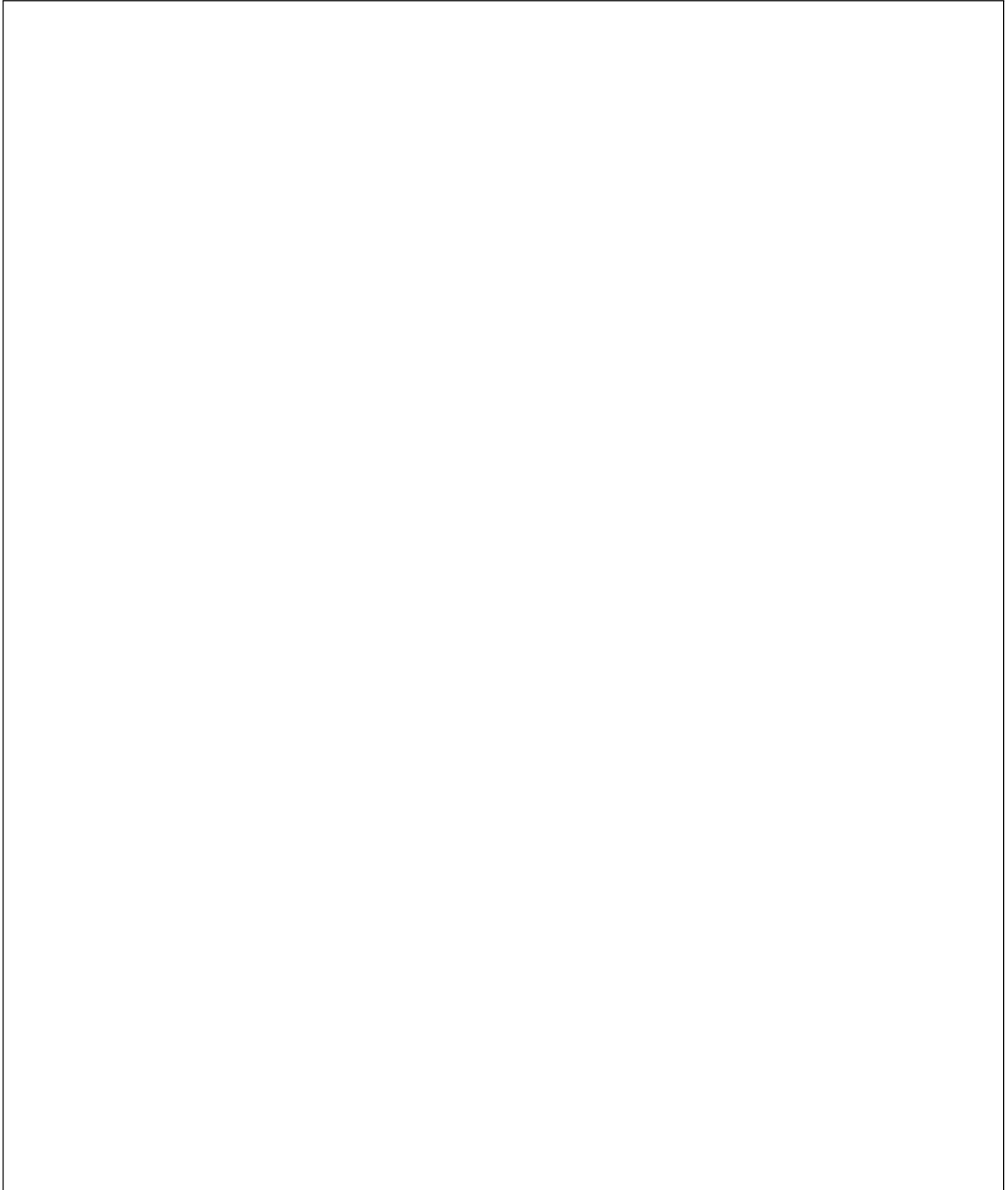
Então, definimos grandeza ou quantidade assim:

Grandeza ou **Quantidade** é tudo aquilo que pode ser medido, contado, usando números para isso.

Além disso, pedimos a vocês que calculassem várias relações em várias tarefas: a relação entre o número de meninas e o número de estudantes; a relação entre o número de dentistas e o número de habitantes de uma cidade. Como, neste caso, essa relação é feita de um jeito especial porque ela nos dá informações importantes, usamos chamar esta relação de **RAZÃO**. Mas agora deixaremos para você definir o que é razão:

- a) Exibir 5 exemplos de coisas que são grandezas;
- b) Definir com suas palavras o que é razão.

--



Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/NIDDEM**Ficha de Trabalho - grupo 4****Tarefa 1**

Numa classe de 32 alunos, a **razão** entre o número de meninas e número de meninos é de $3/5$. Quantas são as meninas?

Tarefa 2

Numa classe de 36 alunos, a **razão** entre o número de meninos e número total de alunos é de $\frac{3}{4}$. Quantas são as meninas?

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/NIDDEM

Ficha de Tarefas - grupo 5

Tarefa 1

Alice estava olhando o álbum de fotografias de sua família e observou que, das 80 fotos colocadas lá, 32 são coloridas. Se lembrando das nossas aulas, ela então perguntou:

– Qual a relação entre o número de fotos coloridas para o total de fotos do álbum?

Assim, Alice apresentou a seguinte resolução para nos mostrar:

A razão entre o número de fotos coloridas pelo total de fotos é:

= =

Logo, concluímos que, a cada 5 fotos, duas são coloridas.

Uma outra indagação que podemos fazer sobre esta situação apresentada por Alice é: como podemos interpretar de uma outra maneira o fato de que temos 32 fotos coloridas em um total de 80 fotos? Essa pergunta muitas vezes será feita a vocês da seguinte maneira: qual é a porcentagem de fotos coloridas? Mas o que é mesmo porcentagem?

Para responder a esta questão, vamos refazer as contas acima da seguinte maneira:

= =

E, em matemática, decidiu-se que, toda vez que o denominador for 100 em uma fração, podemos usar uma notação expressa pelo símbolo % acompanhando do numerador, que neste caso é 40. Assim, escrevemos:

= = = 40%

Que se lê: de um total de 80 fotos, que em porcentagens representa 100% das fotos, 40% (32 fotos) são coloridas.

Dessa forma, para saber qual a porcentagem das fotos em preto e branco, fazemos $100\% - 40\% = 60\%$.

Podemos verificar isso observando que $80 \text{ fotos} - 32 \text{ fotos} = 48 \text{ fotos}$ (60% de todas as 80 fotos).

De fato, as contas nos informam a mesma coisa:

= = = 60%

Com base no que você acabou de ler responda:

- Você concorda com a afirmação da Alice que conclui, depois de fazer as contas que a cada 5 fotos, duas são coloridas?

b) Você pode explicar com suas palavras o que entendeu do que é porcentagem?

c) O que você pode dizer desta razão: $= ?$

Você pode usar porcentagem no cálculo desta razão? Por quê?