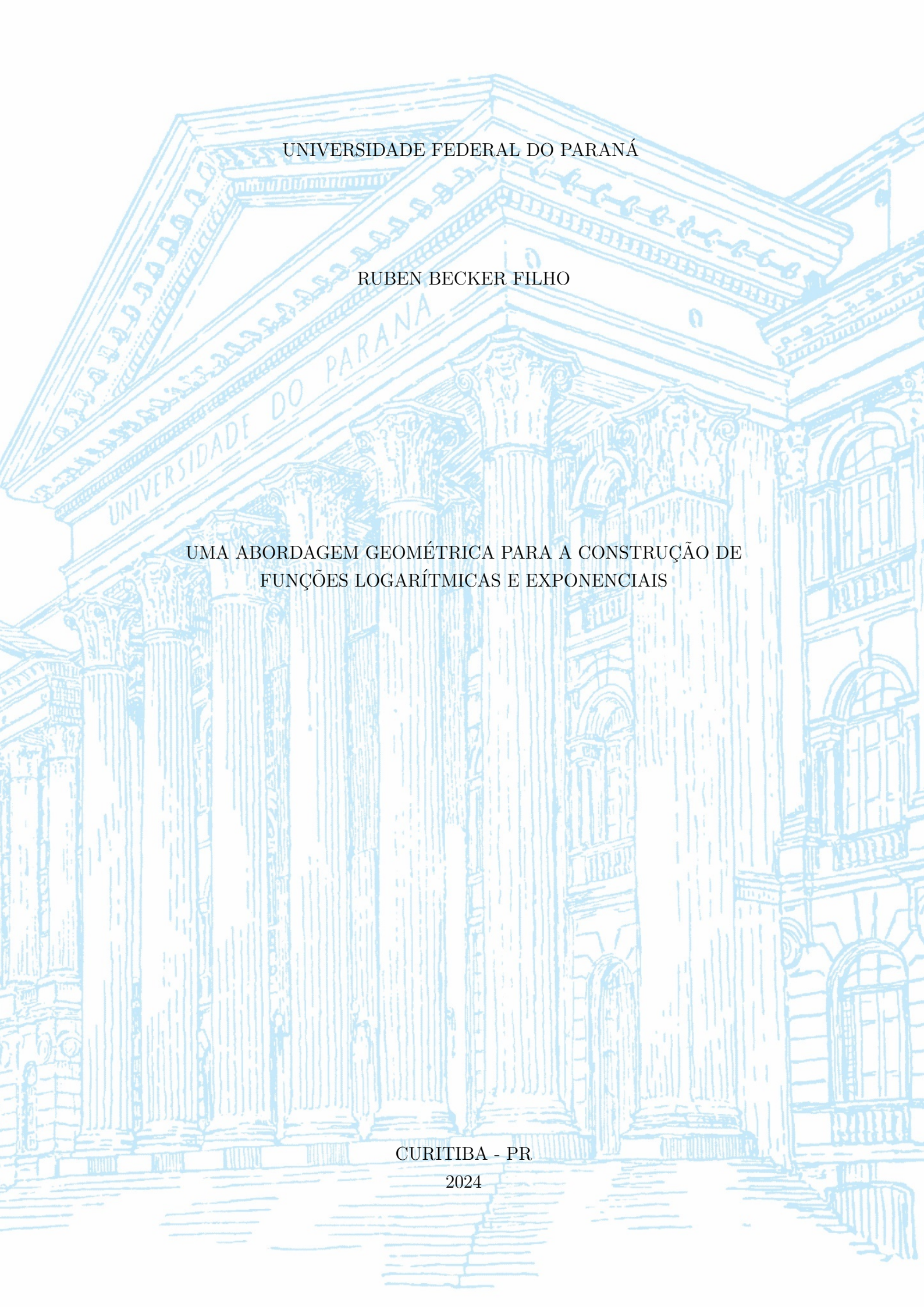


A detailed blue line drawing of the main facade of the University of Paraná building. The drawing shows a grand classical structure with a prominent portico supported by tall, fluted columns. The pediment above the columns is inscribed with the words 'UNIVERSIDADE DO PARANÁ'. To the right of the main portico, there are arched windows and balconies on upper floors. The drawing is executed in a sketchy, artistic style with fine lines and cross-hatching for shading.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RUBEN BECKER FILHO

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA A CONSTRUÇÃO DE
FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

CURITIBA - PR

2024

RUBEN BECKER FILHO

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA A CONSTRUÇÃO DE
FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio

CURITIBA - PR

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Becker Filho, Ruben

Uma abordagem geométrica para a construção de funções
logarítmicas e exponenciais. / Ruben Becker Filho. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede
Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio

1. Logaritmos. 2. Logaritmo natural. 3. Saint-Vincent, Grégoire de,
1584-1667. 4. Sarasa , Alphonse Antonio de, 1618-1667. I.
Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em
Matemática em Rede Nacional. III. Damázio, Pedro Danizete. IV.
Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

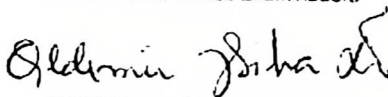
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de RUBEN BECKER FILHO intitulada: **UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA A CONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS**, sob orientação do Prof. Dr. PEDRO DANIZETE DAMAZIO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

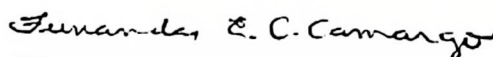
CURITIBA, 17 de Dezembro de 2024.



PEDRO DANIZETE DAMAZIO
Presidente da Banca Examinadora



ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



FERNANDA ESTER CAMILLO CAMARGO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ)

Dedico esta dissertação ao meu pai, Ruben, à
minha mãe, Luisa (*in memoriam*), e à Carmen,
minha esposa e companheira de jornada.

AGRADECIMENTOS

À Vida, que me conduziu nesta mágica jornada até aqui, através de grandes enredos, ricos cenários e notáveis personagens.

Ao meu pai, Ruben, que sempre esteve presente, dando-me todo o apoio e carinho. À minha mãe, Luisa, que já não está entre nós, mas deixou em mim o sorriso que abre portas. Aos meus irmãos Clara, Ricardo, Simone e Rose, os quais levo no meu coração. Aos demais familiares, que marcaram docemente a minha infância.

À minha esposa, Carmen, amada e dedicada companheira, que há mais de trinta anos segue caminhando ao meu lado. À Dona Ana Maria, minha querida sogra.

Aos meus professores do PROFMAT, Lucelina, Carlos e Eduardo, em especial ao professor Aldemir e suas inesquecíveis aulas de Geometria, e à professora Adriana, foto de perfil do nosso grupo de Whatsapp, cujas aulas também eram eventos de confraternização.

Aos meus queridos colegas da turma de 2019, Alaíde, Idalberto, Rodrigo, Ricardo, Sônia, Alessandra, Gessen, Ane, Gustavo, Adilson, Marco, Lucas e Steve, os quais tornaram o curso muito mais leve e divertido.

Ao professor Pedro Damázio, meu orientador, que, com muita dedicação e paciência, me ajudou a compreender os temas estudados para o desenvolvimento desta dissertação.

A todos aqueles que, apesar de não mencionados aqui, fazem parte da minha história, participando, desta forma, da construção de quem eu sou hoje.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é apresentar a função logarítmica e, a partir dela, a função exponencial, utilizando-se conceitos fundamentais e uma abordagem geométrica através da hipérbole de equação $y = 1/x$, contando-se ainda com o auxílio de conceitos de Análise Real. Para isso, elaborou-se a função logarítmica partindo-se da sua definição. A seguir, estudou-se a área sob a hipérbole no 1º quadrante, que resulta numa importante propriedade descoberta no século XVII pelo padre jesuíta Grégoire de Saint-Vincent, que define faixas da hipérbole com áreas iguais. Baseando-se nesta propriedade, o também padre jesuíta Alphonse Antonio de Sarasa, discípulo de Saint-Vincent, encontrou uma relação logarítmica entre as abscissas que delimitam as faixas da hipérbole e as áreas destas faixas, dando origem ao conceito de logaritmo natural e, conseqüentemente, à função logarítmica $y = \ln x$. Utilizando-se a hipérbole e o logaritmo natural, define-se o número e . Na sequência, verifica-se que $y = e^x$ é a inversa de $y = \ln x$, e, portanto, uma função exponencial. Através da mudança de base de logaritmos, obtém-se a função $y = \log_a x$ de base $a \neq e$, com particular atenção ao estudo dos logaritmos decimais. Baseando-se na definição, obtém-se a função exponencial $y = a^x$, com $a \neq e$. Por fim, é demonstrado o limite clássico $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$. Devido à utilização de sequências, séries e limites ao longo deste trabalho, fez-se necessário o estudo de Análise Real.

Palavras-chave: Logaritmos. Hipérbole. Logaritmo Natural. Número e . Exponenciais. Saint-Vincent. Antonio de Sarasa.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to present the logarithmic function and, from it, the exponential function, using fundamental concepts and a geometric approach through the hyperbola $f(x) = 1/x$, also by counting on the aid of concepts of Real Analysis. For this, the logarithmic function was elaborated starting from its definition. Next, the area under the 1st quadrant of the hyperbola was studied, which results in an important property discovered in the 17th century by the Jesuit priest Grégoire de Saint-Vincent, which defines bands of the hyperbola with equal areas. Based on this property, the Jesuit priest Alphonse Antonio de Sarasa, a disciple of Saint-Vincent, found a logarithmic relation between the abscissas that delimit the bands of the hyperbola and the areas of these bands, giving rise to the concept of natural logarithm and, consequently, to the logarithmic function $y = \ln x$. Using the hyperbola and the natural logarithm, the number e is defined. Next, it is verified that $y = e^x$ is the inverse of $y = \ln x$, and, therefore, an exponential function. By changing the base of logarithms, the function $y = \log_a x$ with base $a \neq e$ is obtained, with particular attention to the study of decimal logarithms. Based on the definition, the exponential function $y = a^x$ is elaborated, with $a \neq e$. Finally, the classical limit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$ is demonstrated. Due to the use of sequences, series and limits throughout this work, it was necessary to study Real Analysis.

Keywords: Logarithms. Hyperbola. Natural Logarithm. Number e . Exponentials. Saint-Vincent. Antonio de Sarasa.

SUMÁRIO

1	Introdução	11
1.1	Considerações Iniciais	11
1.2	Objetivo	11
2	Definições Preliminares	14
2.1	Progressão Aritmética (PA)	14
2.1.1	Termo Geral da PA	14
2.1.2	Soma de PA	14
2.2	Progressão Geométrica (PG)	15
2.2.1	Termo Geral da PG	15
2.2.2	Soma de PG	15
2.2.3	Soma de PG Infinita	16
2.3	Funções	16
2.3.1	Domínio, Contradomínio e Imagem	18
2.3.2	Gráfico de uma Função	19
2.3.3	Função Injetora	20
2.3.4	Função Sobrejetora	21
2.3.5	Função Bijetora	22
2.3.6	Valor Absoluto e Função Modular	23
2.3.7	Função Máximo Inteiro	25
2.3.8	Função Composta (Composição de Funções)	25
2.3.9	Função Inversa	27
2.3.10	Função Monótona	28
2.3.11	Concavidade de Gráficos de Funções	29
2.4	Hipérbole	32
3	A Função Logarítmica	35
3.1	Definição e Propriedades	35
3.2	Um Pouco de História	48
3.2.1	A Descoberta dos Logaritmos	48
3.2.2	As Tábuas de Cálculo de Napier	48
3.3	A Hipérbole H	50
3.4	A Área sob a Hipérbole H	51
3.4.1	Aproximação por Retângulos Inscritos	52
3.4.2	Aproximação por Retângulos Sobrescritos	53
3.4.3	Aproximação por Trapézios Secantes	55
3.4.4	Aproximação por Trapézios Tangentes	56
3.4.5	Comparativo das Aproximações	58

3.5	A Descoberta de Saint-Vincent	60
3.6	Propriedade Fundamental: Faixas da Hipérbole H de Mesma Área	62
3.7	A Relação entre a Hipérbole H e os Logaritmos	66
3.8	O Logaritmo Natural	67
3.9	O Gráfico da Função Logaritmo Natural	70
3.10	O Número e	72
4	A Função Exponencial	74
4.1	Definição e Propriedades	74
4.2	A Função Exponencial $f(x) = e^x$	79
4.3	O Gráfico da Função $f(x) = e^x$	81
5	Outras Bases de Logaritmos	84
5.1	Mudança de Base de Logaritmos	84
5.2	A Função Logarítmica $f(x) = \log_a x$	84
5.3	O Gráfico da Função $f(x) = \log_a x$	85
5.4	Logaritmos Decimais	87
5.4.1	Mantissa e Característica	87
5.4.2	O Gráfico da Função $f(x) = \log x$	89
5.4.3	Interpolação Linear	90
5.4.4	Exemplos de Cálculo de Logaritmos Decimais com as Tábuas do Apêndice F . . .	92
6	Outras Bases Exponenciais	95
6.1	A Função Exponencial $f(x) = a^x$	95
6.2	O Gráfico da Função $f(x) = a^x$	96
7	O Número e como Limite	101
7.1	Definição Clássica de e como Limite	101
7.2	Interpretação Geométrica do Limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	105
	Apêndice	108
A	Demonstração da Propriedade $L(x^n) = n \cdot L(x)$, com $n \in \mathbb{N}$, pelo <i>Princípio da Indução Finita</i>	108
B	Posição Relativa entre as Retas Secante e Tangente à Hipérbole H no Intervalo $[a, b]$	109
C	Concavidade do Gráfico da Hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$	112
D	Análise Real	115
D.1	Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos	115

D.1.1	Números Naturais	115
D.1.2	Conjuntos Finitos	116
D.1.3	Conjuntos Infinitos	116
D.1.4	Conjuntos Enumeráveis	117
D.2	Números Reais	117
D.2.1	$\mathbb{R}$ é um Corpo	117
D.2.2	$\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado	118
D.2.3	$\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado Completo	120
D.3	Sequências de Números Reais	121
D.3.1	Sequências Limitadas	121
D.3.2	Subsequências	121
D.3.3	Limite e Convergência de Sequências	122
D.3.4	Sequências Monótonas	123
D.3.5	Limites e Desigualdades	126
D.3.6	Operações com Limites	127
D.3.7	Limites Infinitos	128
D.4	Séries Numéricas	129
D.4.1	Reduzidas ou Somas Parciais	129
D.4.2	Convergência de Séries	129
D.4.3	Séries Absolutamente Convergentes	133
D.4.4	Testes de Convergência de Séries	135
D.4.5	Comutatividade e Reordenação de Séries	138
D.4.6	Séries Comutativamente Convergentes	139
D.5	Noções de Proximidade e Limite	139
D.5.1	Interior de um Conjunto	139
D.5.2	Vizinhança de um Ponto	140
D.5.3	Conjuntos Abertos	140
D.5.4	Ponto Aderente a um Conjunto	141
D.5.5	Fecho de um Conjunto	141
D.5.6	Conjuntos Fechados	142
D.5.7	Pontos de Acumulação	142
D.6	Limites de Funções	143
D.7	Limites Laterais	147
D.8	Funções Contínuas	151
E	Demonstração Alternativa do Lema 3.2	153
F	Tábuas de Logaritmos Decimais	155
	Referências Bibliográficas	157

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A presente dissertação é fruto de uma semente plantada em mim pela Matemática há alguns anos, quando iniciei o curso de graduação em Engenharia Mecânica da UFPR. No primeiro ano do curso (na época, em 1989, o período ainda era anual), por indicação de minha professora na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral A, utilizei, como fonte de estudo, o livro **“Cálculo Diferencial e Integral - Volume 1”** do matemático russo **Nikolai Piskounov**. Na Seção 7 do Capítulo II deste livro, o Prof. Piskounov apresenta o Teorema 1, onde enuncia que “*a variável $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tem um limite compreendido entre 2 e 3 quando $n \rightarrow \infty$* ”, e conclui definindo que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A beleza da demonstração deste teorema ficou marcada na minha memória, e tive a oportunidade de apresentá-la através do Exemplo D.15 da Seção D.3, no Apêndice D.

Há dois anos, quando ainda não tinha pista alguma sobre o tema da dissertação, deparei-me com o vídeo **“The History of the Natural Logarithm - How was It Discovered?”** de **Tarek Said**, disponível na plataforma **YouTube**, que inspirou este trabalho. Já no início deste vídeo, o autor afirma que “*o logaritmo natural foi descoberto décadas antes do número e* ”. Por se tratar de uma informação totalmente nova para mim, acompanhei atentamente os dezoito minutos seguintes, onde Said mostra, com riqueza de gráficos e referências bibliográficas, a influência determinante que o estudo da *hipérbole* $f(x) = 1/x$ teve no surgimento do *logaritmo natural*.

Ao final do vídeo, a semente plantada há tempos já havia começado a germinar, tomando forma através do trabalho e culminando no fruto, que é a presente dissertação.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma construção da *função logarítmica* e, a partir dela, a *função exponencial*, utilizando-se conceitos fundamentais e uma abordagem geométrica através da *hipérbole* de equação $y = 1/x$, com o auxílio de conceitos de Análise Real. Deve-se ressaltar que o livro **“Logaritmos”** de **Elon Lages Lima** teve importância fundamental para a elaboração desta dissertação.

Para tal propósito, inicialmente elabora-se a *função logarítmica* partindo-se da sua definição e das propriedades fundamentais **(A)** e **(B)** apresentadas na Seção 3.1, das quais decorrem as demais propriedades, mostradas na mesma seção.

A seguir, nas Seções 3.3, 3.4 e 3.5, estuda-se a área sob o ramo positivo da hipérbole de equação $y = 1/x$, denominada hipérbole H neste trabalho.

O estudo anterior resulta numa importante propriedade que define faixas de mesma área da hipérbole, que é apresentada e demonstrada na Seção 3.6.

Baseando-se nesta propriedade, e como descrito na Seção 3.7, faixas adjacentes da hipérbole H são delimitadas por intervalos adequadamente configurados, estabelecendo-se, assim, uma relação logarítmica entre as abscissas que limitam estes intervalos e as áreas das faixas da hipérbole H .

Por conta desta relação logarítmica, define-se, na Seção 3.8, o *logaritmo natural* através da hipérbole H , cujas propriedades são apresentadas na mesma seção, sendo que o gráfico da função $f(x) = \ln x$ é estudado na Seção 3.9.

Partindo-se do conceito de logaritmo natural, e utilizando-se a hipérbole H , define-se o número e , base dos logaritmos naturais, como apresentado na Seção 3.10.

Na Seção 4.1, define-se a *função exponencial* a partir da função logarítmica, sendo que, desta definição, decorrem propriedades que são apresentadas e demonstradas na mesma seção.

Na Seção 4.2, define-se o número e^x através da hipérbole H , e, baseando-se na definição da Seção 4.1, verifica-se que $f(x) = e^x$ é uma função exponencial, sendo apresentadas as suas propriedades na mesma seção, e cujo gráfico é estudado na Seção 4.3.

Na Seção 5.1, estuda-se a mudança de base de logaritmos, que é utilizada na Seção 5.2 para se construir a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ de base $a \neq e$, apresentando-se suas propriedades, e cujo gráfico é estudado na Seção 5.3.

Em particular, devido à sua importância, dedica-se a Seção 5.4 ao estudo dos *logaritmos decimais*, o qual inclui a definição de *mantissa* e *característica*, a apresentação do gráfico da função logarítmica $f(x) = \log x$, e o método de cálculo de logaritmos decimais por *interpolação linear*, com exemplos de cálculo que fazem uso das tábuas de logaritmos do Apêndice F.

Na Seção 6.1, verifica-se, a partir da definição da Seção 4.1, que $f(x) = a^x$ é uma função exponencial, sendo apresentadas suas propriedades, e cujo gráfico é estudado na Seção 6.2.

Na Seção 7.1, são demonstrados os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad ,$$

utilizando-se a hipérbole H , a definição da Seção 3.8 e conceitos de limites laterais abordados no Apêndice D.

Na Seção 7.2, apresenta-se uma interpretação geométrica do limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, através da hipérbole H , dos estudos desenvolvidos nas Seções 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8, e conceitos de limites tratados no Apêndice D.

Os Apêndices A, B, C e E apresentam demonstrações de tópicos do texto da dissertação.

O Apêndice D trata de conceitos de Análise Real.

Observação. Ainda que não façam parte do escopo desta dissertação, as aplicações práticas dos *logaritmos* e das *funções exponenciais* são variadas. Os *logaritmos* são utilizados, por exemplo, na determinação da magnitude de abalos sísmicos através da *Escala Richter*, na determinação da acidez, alcalinidade ou neutralidade de uma substância através do *pH*, e no cálculo do nível sonoro em *decibéis*, uma vez que, nestas três aplicações, as escalas de medição são logarítmicas. Já as *funções exponenciais* são utilizadas, por exemplo, no cálculo de *juros contínuos*, na determinação da *taxa de crescimento de bactérias numa colônia*, e no *método de datação por Carbono-14*.

2 Definições Preliminares

O propósito deste Capítulo 2 é abordar, de forma simples, temas que serão mencionados nos próximos capítulos, servindo assim de ferramenta para melhor compreensão deste trabalho.

A elaboração das Seções 2.1 (PA) e 2.2 (PG) teve, como referência, o livro **“Matemática Discreta”** da **Coleção PROFMAT**, de **Augusto César Morgado** e **Paulo Cezar Pinto Carvalho**.

Para o desenvolvimento da Seção 2.3 (Funções), utilizou-se, como referência, o livro **Números e Funções Reais”** também da **Coleção PROFMAT**, de **Elon Lages Lima**. Particularmente, a elaboração da Subseção 2.3.11 (Concavidade de Gráficos de Funções) teve, como referência, o vídeo **“Convexidade e concavidade”** de **Sacha Friedli**, disponível no **YouTube**.

O desenvolvimento da Seção 2.4 (Hipérbole) teve, como referência, o livro **“Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 7: Geometria Analítica”** de **Gelson Iezzi**.

2.1 Progressão Aritmética (PA)

Definição. Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica (vide Subseção D.3 do Apêndice D), finita ou infinita, onde a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante. Esta diferença constante é chamada de razão da PA, representada pela letra r .

2.1.1 Termo Geral da PA

O termo geral da PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é calculado pela fórmula

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \quad , \quad (1)$$

onde a_n é o n -ésimo termo da PA, obtido avançando-se $(n - 1)$ termos a partir de a_1 (1º termo).

2.1.2 Soma de PA

A soma dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad . \quad (2)$$

Exemplo 2.1. A sequência $(5, 8, 11, 14, \dots)$ é uma PA infinita de razão 3, cujo 1º termo vale

5. Portanto, o 13º termo desta PA vale

$$a_{13} = 5 + (13 - 1) \times 3 = 5 + 12 \times 3 = 5 + 36 \Rightarrow a_{13} = 41 ,$$

e a soma dos 13 primeiros termos é dada por

$$S_{13} = \frac{(a_1 + a_{13}) \times 13}{2} = \frac{(5 + 41) \times 13}{2} = \frac{46 \times 13}{2} = \frac{598}{2} \Rightarrow S_{13} = 299 .$$

Exemplo 2.2. A sequência $(11, 9, 7, 5, 3, 1, -1)$ é uma PA de 7 termos e razão -2 , cuja soma vale

$$S_7 = \frac{[11 + (-1)] \times 7}{2} = \frac{10 \times 7}{2} = \frac{70}{2} \Rightarrow S_7 = 35 .$$

O conceito de PA aparece na Seção 3.2, pois, como será explicado, fazia parte das primeiras tábuas de logaritmos. Justamente por esta razão, a PA é mencionada nas Seções 3.5 e 3.7, sendo peça fundamental na relação entre a hipérbole e os logaritmos. A PA também aparece na Seção D.3, em exemplo de sequência numérica.

2.2 Progressão Geométrica (PG)

Definição. Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica, finita ou infinita, onde o quociente entre dois termos consecutivos é constante. Este quociente constante é chamado de razão da PG, representada pela letra q .

2.2.1 Termo Geral da PG

O termo geral da PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é dado por

$$a_n = a_1 q^{n-1} , \tag{3}$$

onde a_n é o n -ésimo termo da PG, obtido avançando-se $(n - 1)$ termos a partir de a_1 (1º termo).

2.2.2 Soma de PG

A soma dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão $q \neq 1$, é

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} . \tag{4}$$

Exemplo 2.3. A sequência $(2, 6, 18, 54, 162, \dots)$ é uma PG infinita de razão 3, cujo 1º termo vale 2. Logo, o 10º termo desta PG vale

$$a_{10} = 2 \times 3^{10-1} = 2 \times 3^9 = 2 \times 19683 \Rightarrow a_{10} = 39366 ,$$

e a soma dos 10 primeiros termos é dada por

$$S_{10} = \frac{2 \times (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \times (59049 - 1)}{2} \Rightarrow S_{10} = 59048 .$$

2.2.3 Soma de PG Infinita

Nas PG's infinitas em que $|q| < 1$, a quantidade de termos n se estende indefinidamente. Sendo assim, à medida que n aumenta, o valor de q^n se aproxima cada vez mais de zero, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 ,$$

sendo que o conceito de limite de sequências numéricas será abordado na Subseção D.3.5 do Apêndice D. Logo, a fórmula da soma dos termos é obtida fazendo-se n tender a infinito na fórmula (4), ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} . \quad (5)$$

Exemplo 2.4. A sequência $(1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots)$ é uma PG infinita de razão $1/2$, e o limite da soma dos seus termos é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 .$$

O conceito de PG é utilizado nas Seções 3.2, 3.5 e 3.7 pelos mesmos motivos que a PA (vide Seção 2.1). Além disso, a PG é mencionada nas Seções D.3 e D.4, em exemplos de sequências e séries numéricas.

2.3 Funções

Definição. Dados os conjuntos A e B , uma função de A em B é uma regra f que define como associar, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $y \in B$, também denotado por $f(x)$. A notação para uma função f definida de A em B é $f : A \rightarrow B$ (lê-se f de A em B). A expressão do termo genérico $f(x)$ é chamada de Lei de Definição de f .

A Figura 1 apresenta exemplos, através de *Diagramas de Flechas*, onde a relação f é uma função, e a Figura 2, exemplos onde f não é uma função.

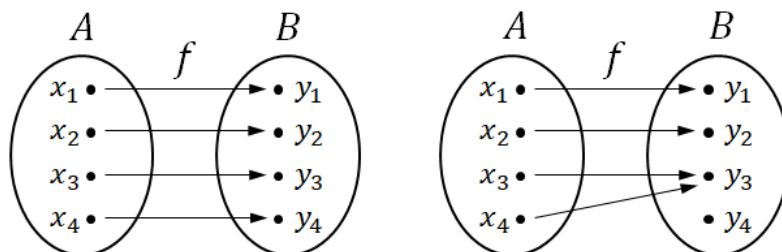


Figura 1: Exemplos onde f é uma função

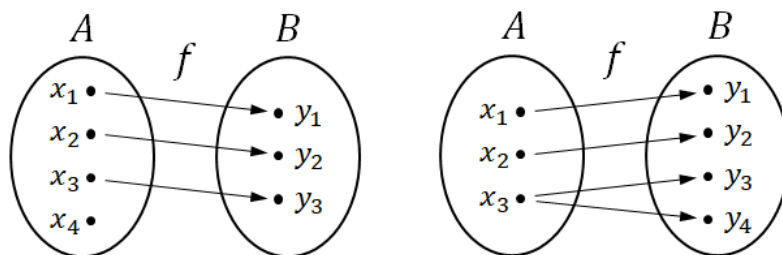


Figura 2: Exemplos onde f não é uma função

A definição de *função* e, por conseguinte, de *domínio*, *contradomínio* e *imagem*, bem como de *função injetora*, *sobrejetora* e *bijetora* (Subseções 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4 e 2.3.5, respectivamente), constituem base fundamental para a construção das funções logarítmicas e exponenciais tratadas nos Capítulos 3, 4, 5 e 6.

A definição de *função composta* (Subseção 2.3.8) embasa a de *função inversa* (Subseção 2.3.9), que, por sua vez, é aplicada na construção da função exponencial partindo-se da função logarítmica, sendo utilizada, portanto, nas Seções 4.1, 4.2 e 6.1 dos Capítulos 4 e 6, respectivamente.

Os conceitos de *valor absoluto* e *função modular* (Subseção 2.3.6), são utilizados nas Seções D.3, D.4, D.6, D.7 e D.8 do Apêndice D, principalmente onde se trata de convergência de séries e onde são definidos os limites de sequências e funções.

Os conceitos de *gráfico* e *concavidade de uma função* (Subseções 2.3.2 e 2.3.11, respectivamente) são aplicados ao longo da dissertação para ilustrar o comportamento de funções no plano cartesiano, destacando-se os gráficos de funções logarítmicas e exponenciais apresentados nas Seções 3.9, 4.3, 5.4.2 e 6.2 dos Capítulos 3, 4, 5 e 6, respectivamente, bem como o estudo da concavidade da hipérbole $f(x) = 1/x$ apresentado no Apêndice C.

O conceito de *máximo inteiro* (Subseção 2.3.7) é mencionado na Propriedade 6 de funções logarítmicas, na Seção 3.1 do Capítulo 3.

O conceito de *função monótona* é utilizado na definição de funções logarítmicas, como apresentado nas Seções 3.1 e 3.8 do Capítulo 3. A noção de *monotonia* também é aplicada ao estudo de sequências numéricas, como exposto na Subseção D.3.4 do Apêndice D.

2.3.1 Domínio, Contradomínio e Imagem

Definição. Dada uma função $f : A \rightarrow B$, o conjunto A é chamado de Domínio (Dom), e o conjunto B , de Contradomínio (CDom) da função f .

Uma função é caracterizada por 3 elementos: domínio, contradomínio e lei de definição. Sendo assim, por exemplo,

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = e^x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & g(x) = e^x \end{array}$$

são funções diferentes.

Observação. Caso o domínio e o contradomínio de uma função tenham sido omitidos, pode-se considerá-los os mais amplos possíveis.

Um elemento $y \in B$ associado a um elemento $x \in A$, tal que $y = f(x)$, recebe o nome de *imagem* de x pela função f . Agrupando-se todas as imagens dos elementos de A , tem-se o conjunto *Imagem* da função f , que é um subconjunto do contradomínio, e cuja notação é

$$\text{Im}(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\} \quad (6)$$

Exemplo 2.5. Seja a função $f : A \rightarrow B$ definida pela relação $f(x) = x + 2$, onde $\text{Dom}(f) = A = \{1, 2, 3\}$ e $\text{CDom}(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Pelos valores da imagem de f , calculados na Tabela 1 e ilustrados na Figura 3, conclui-se que $\text{Im}(f) = \{3, 4, 5\}$.

Tabela 1: Imagem de $f : A \rightarrow B$

Domínio x	Função $f(x) = x + 2$	Imagem y
1	$f(x) = 1 + 2$	3
2	$f(x) = 2 + 2$	4
3	$f(x) = 3 + 2$	5

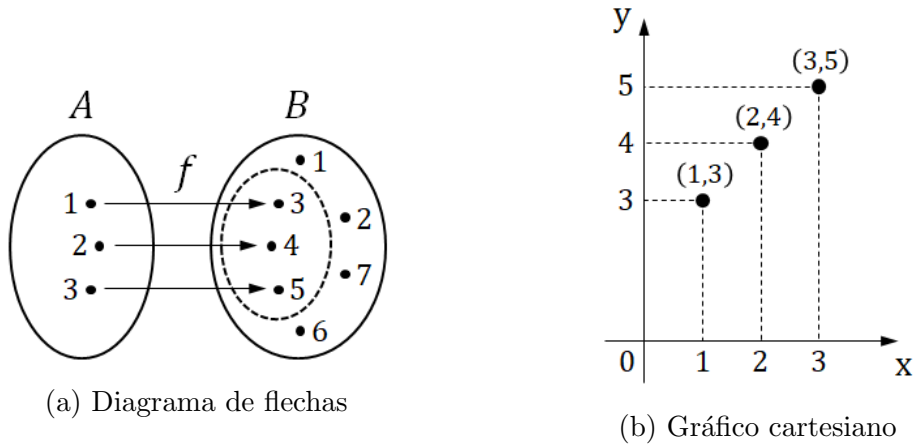


Figura 3: Representações gráficas da função $f : A \rightarrow B \mid f(x) = x + 2$

Exemplo 2.6. *Seja a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $h(x) = x^2 + 3$, ou seja, $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$, $\text{CDom}(h) = \mathbb{R}^+$ e $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$, como pode ser visto no gráfico de $h(x)$ na Figura 4.*

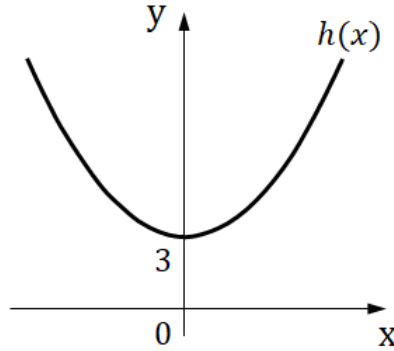


Figura 4: Gráfico da função $h(x) = x^2 + 3$

2.3.2 Gráfico de uma Função

Definição. O gráfico de uma função f é a representação no plano cartesiano da relação (Lei de Definição) entre os elementos x do Domínio e os elementos y da Imagem da função. Algebricamente, o gráfico de f pode ser expresso na forma

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}, \quad (7)$$

ou seja, o gráfico de f é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ em que x percorre o Domínio da função f , representados no *Sistema de Coordenadas Cartesiano*.

Observação. O *Sistema de Coordenadas Cartesiano* é um sistema gráfico para representação de pontos no plano, denominado *plano cartesiano*, e formado por dois eixos perpendiculares entre si, cujo ponto de interseção é a *origem* O , sendo o eixo horizontal Ox das *abscissas*, e o vertical Oy das *ordenadas*.

Cada ponto no gráfico é definido por um *par ordenado* $(x, f(x))$, onde x é o valor de entrada e corresponde à projeção ortogonal de tal ponto no eixo das abscissas, e $f(x)$ é o resultado da relação definida pela função e corresponde à projeção ortogonal do mesmo ponto no eixo das ordenadas. Vide exemplo na Figura 5.

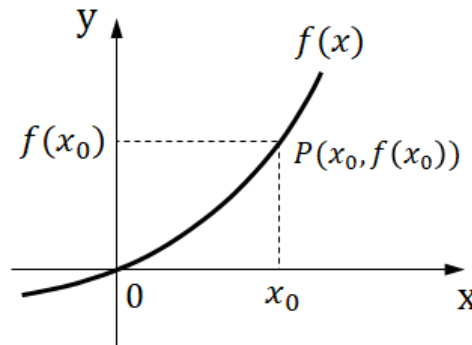
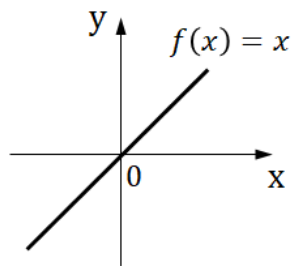
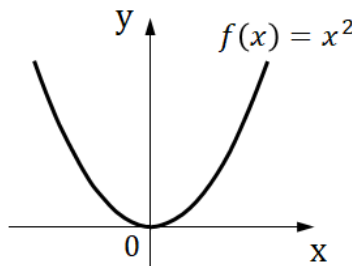


Figura 5: O ponto P representado pelo par ordenado $(x_0, f(x_0))$ no gráfico

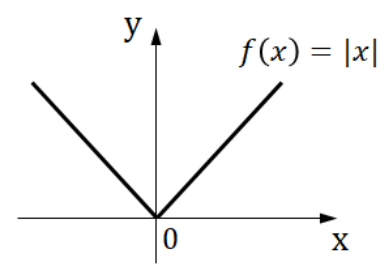
O gráfico permite avaliar o comportamento da função. Na Figura 6 encontram-se exemplos de gráficos de algumas funções.



(a) Função Identidade
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x$



(b) Função Quadrática
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f(x) = x^2$



(c) Função Modular
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f(x) = |x|$

Figura 6: Gráficos de funções

2.3.3 Função Injetora

Definição. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *injetora* se todos os elementos distintos de A tiverem imagens distintas em B , ou seja, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Ou, equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.)

No diagrama de flechas, uma função é injetora se cada elemento de B for atingido por, no máximo, uma flecha, como exemplificado na Figura 7. Já a Figura 8 apresenta um exemplo de função que não é injetora.

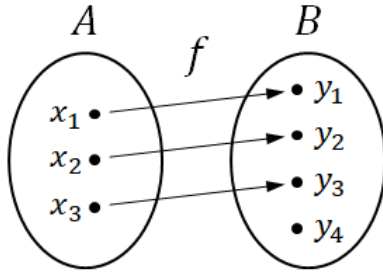


Figura 7:
 $f : A \rightarrow B$ é injetora

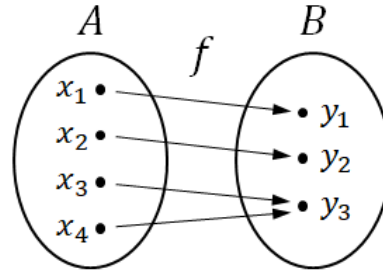


Figura 8:
 $f : A \rightarrow B$ não é injetora

As Figuras 9 e 10 são exemplos de função injetora no plano cartesiano, e a Figura 11 é exemplo de uma função que não é injetora.

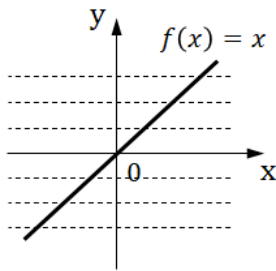


Figura 9:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x$
é injetora

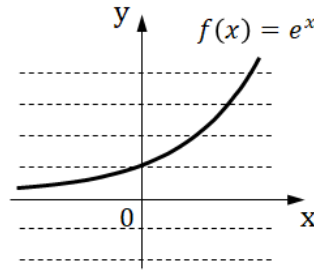


Figura 10:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = e^x$
é injetora

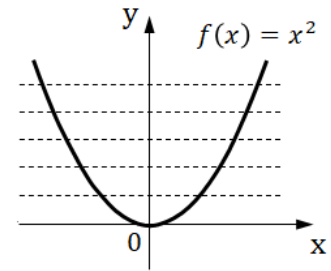


Figura 11:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f(x) = x^2$
não é injetora

Nota-se que, nas Figuras 9 e 10, as linhas horizontais interceptam o gráfico de uma função injetora no máximo em um ponto. Por outro lado, na Figura 11, as linhas pontilhadas horizontais interceptam o gráfico da função em dois pontos, não sendo, portanto, injetora.

2.3.4 Função Sobrejetora

Definição. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejetora* quando o seu conjunto-imagem for igual ao contradomínio (B), ou seja, $\text{Im}(f) = \text{CDom}(f)$.

No diagrama de flechas, uma função é sobrejetora se todos os elementos de B forem atingidos por pelo menos uma flecha, como ilustrado nas Figuras 12 e 13.

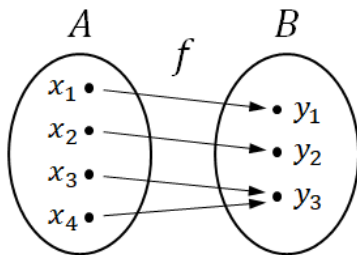


Figura 12:
 $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora

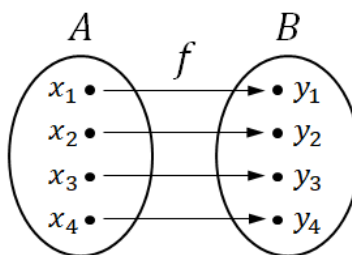


Figura 13:
 $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora

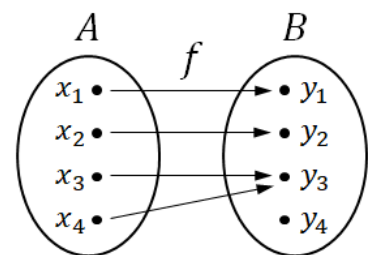


Figura 14:
 $f : A \rightarrow B$ não é sobrejetora

As Figuras 15 e 16 são exemplos de função sobrejetora no plano cartesiano.

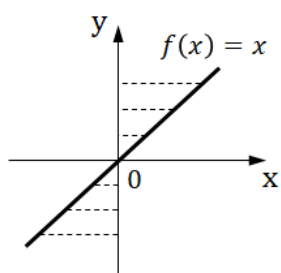


Figura 15:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x$
 é sobrejetora pois
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = \text{CDom}(f)$

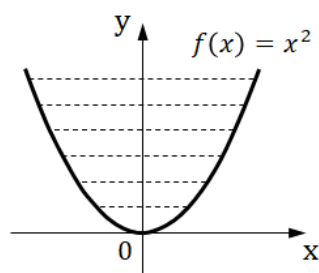


Figura 16:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f(x) = x^2$
 é sobrejetora pois
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = \text{CDom}(f)$

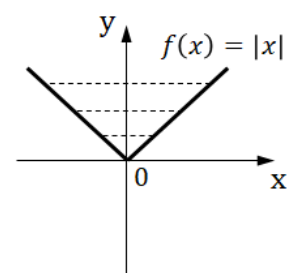


Figura 17:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = |x|$
 não é sobrejetora pois
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ \neq \text{CDom}(f)$

Nas Figuras 15 e 16, percebe-se que a projeção do gráfico de uma função sobrejetora sobre o eixo y (imagem) é igual ao seu contradomínio, o que não ocorre com o gráfico da Figura 17.

2.3.5 Função Bijetora

Definição. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *bijetora* quando for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

No diagrama de flechas, uma função é bijetora se todos os elementos de B forem atingidos por apenas uma flecha, como exemplificado pela Figura 18).

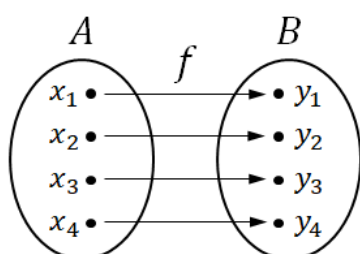


Figura 18:
 f é bijetora

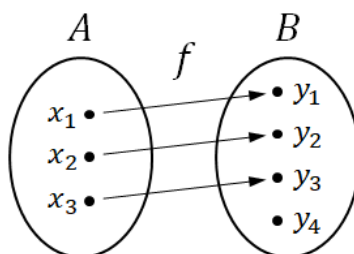


Figura 19:
 f não é bijetora

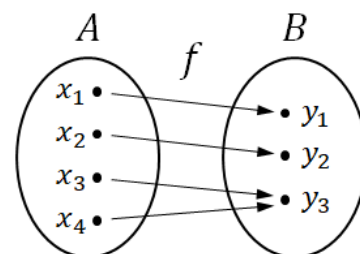


Figura 20:
 f não é bijetora

Na Figura 21, encontra-se um exemplo de função bijetora no plano cartesiano.

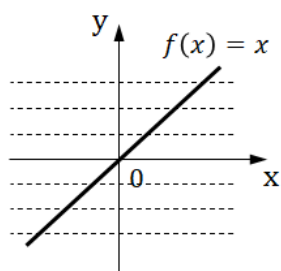


Figura 21:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetora

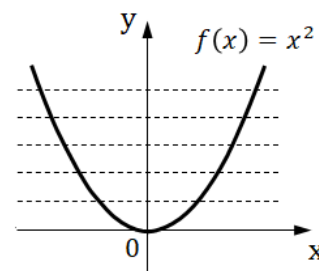


Figura 22:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ não é bijetora

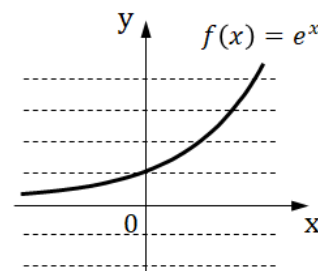


Figura 23:
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é bijetora

Pela Figura 21, observa-se que, numa função bijetora, o gráfico é interceptado pelas linhas horizontais no máximo em um ponto, e sua projeção sobre o eixo y (imagem) é igual ao contradomínio. Na Figura 22, há linhas horizontais que interceptam o gráfico da função em dois pontos, e, na Figura 23, há linhas horizontais que não interceptam o gráfico da função, e, portanto, estas funções não são bijetoras.

2.3.6 Valor Absoluto e Função Modular

Definição. O *valor absoluto* (ou *módulo*) de um número real x apresenta a notação $|x|$, e é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad (8)$$

ou ainda como

$$|x| = \max \{x, -x\}, \quad (9)$$

isto é, o valor absoluto de x é o maior dos números x e $-x$, que pode ser entendido como a distância entre os números x e 0.

Resultam desta definição as seguintes propriedades:

Propriedade 1. $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Propriedade 2. $|x + y| \leq |x| + |y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Como $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$, então $x + y \leq |x| + |y|$. Da mesma forma, como $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$, então $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Portanto,

$$\max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y| \leq |x| + |y|. \quad \square$$

Propriedade 3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Como os dois membros da igualdade $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ são não-negativos, é suficiente provar que seus quadrados são iguais. Sendo assim,

$$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2. \quad \square$$

Interpretação Geométrica do Módulo. O valor $|x|$ também pode ser interpretado como a distância entre x e zero no eixo real. Seguindo-se o mesmo raciocínio, a distância entre x e y é representada por $|x - y|$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ (Figura 24).

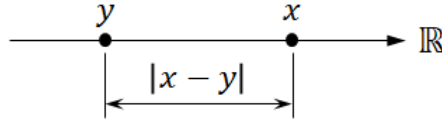


Figura 24: Interpretação geométrica de $|x - y|$

Exemplo 2.7. A igualdade $|x - 7| = 4$ significa que o número x está a uma distância 4 do número 7. Portanto, $x = 3$ (se x estiver à esquerda de 7) ou $x = 11$ (se x estiver à direita de 7), como ilustrado na Figura 25.

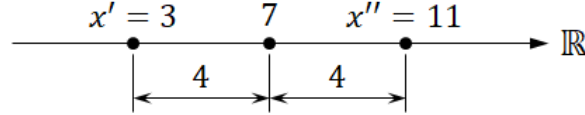


Figura 25: Interpretação geométrica da equação $|x - 7| = 4$

De maneira análoga, para $a, x, \delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$, a desigualdade $|x - a| < \delta$ significa que a distância de x ao ponto a é menor do que δ (Figura 26). Logo, x está entre $a - \delta$ e $a + \delta$, ou seja,

$$|x - a| < \delta \iff x \in (a - \delta, a + \delta) . \quad (10)$$

A Figura 26 ilustra a desigualdade (10), ou seja, x pertencente ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ de centro a e de raio δ .

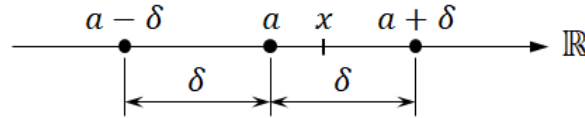


Figura 26: Interpretação geométrica de $|x - a| < \delta$

Em contrapartida,

$$|x - a| > \delta \iff x < a - \delta \text{ ou } x > a + \delta .$$

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *modular* quando $f(x) = |M(x)|$, onde $M(x)$ é uma expressão na variável x . (Note-se que a função modular $f(x) = |x|$ já foi mencionada na Figura 6 da Subseção 2.3.2 e na Figura 17 da Subseção 2.3.4.)

Exemplo 2.8. Seja dada a função $g(x) = |x^2 - 1|$, definida como segue:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x^2 - 1 \geq 0 \\ -x^2 + 1, & \text{se } x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x^2 + 1, & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases} . \quad (11)$$

A Figura 27 apresenta os gráficos das funções modulares (8) e (11).

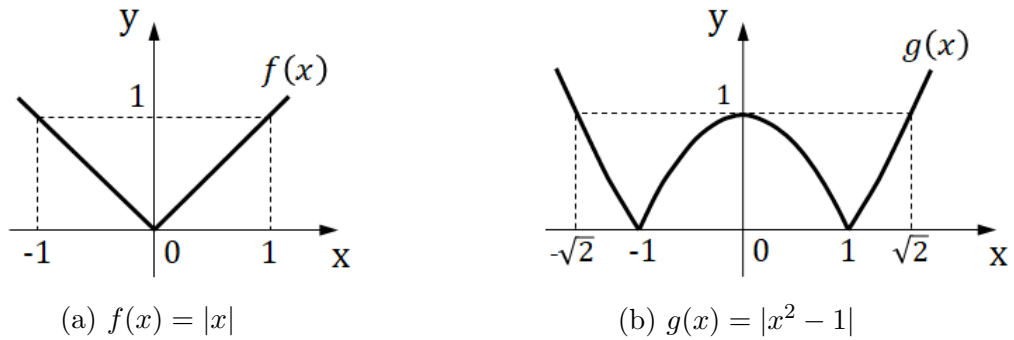


Figura 27: Gráficos de funções modulares

2.3.7 Função Máximo Inteiro

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada *função máximo inteiro* quando associa, a cada elemento $x \in \mathbb{R}$, o elemento $\llbracket x \rrbracket$, que é o maior inteiro menor que ou igual a x , ou seja,

$$\llbracket x \rrbracket = \max\{p \in \mathbb{Z} ; p \leq x\} .$$

O gráfico de $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ é mostrado na Figura 28.

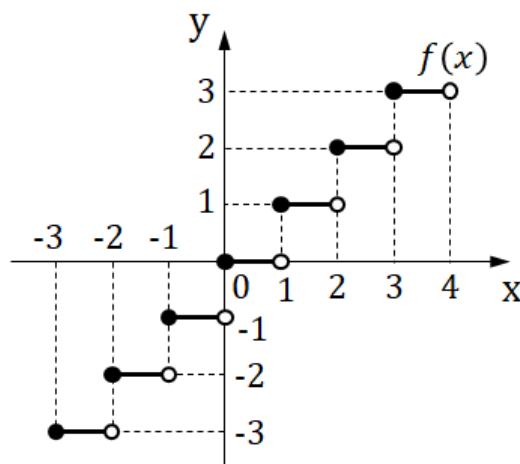


Figura 28: Gráfico da função $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

2.3.8 Função Composta (Composição de Funções)

Definição. Dadas as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, então a *função composta de g com f* é a função $h : A \rightarrow D$ definida por

$$h(x) = g(f(x))$$

para todo $x \in A$, e sempre que $Im(f) \subseteq C$.

Observação. A função composta h também apresenta a notação $g \circ f$ (lê-se: g composta

com f ou g “bola” f), ou seja,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) ,$$

e pode ser representada pelo diagrama da Figura 29 a seguir.

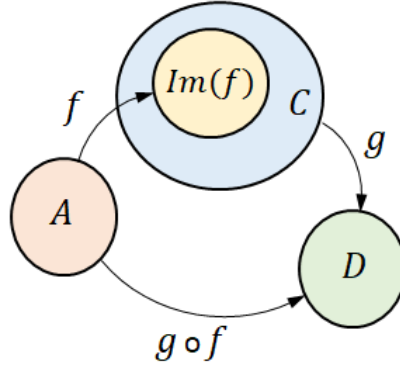


Figura 29: Diagrama da função composta
 $g \circ f : A \rightarrow D$

Exemplo 2.9. Dadas as funções reais $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + K$, o valor de K para que se tenha $f \circ g = g \circ f$ é calculado da seguinte forma:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow 3 \cdot g(x) + 2 = 2 \cdot f(x) + K \Rightarrow$$

$$3(2x + K) + 2 = 2(3x + 2) + K \Rightarrow 6x + 3K + 2 = 6x + 4 + K \Rightarrow K = 1 .$$

Exemplo 2.10. Sejam dadas as funções reais

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{tal que } f(x) = x^2 - 1 \\ k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{tal que } k(x) = 1 - x^2 \\ g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ & \text{tal que } g(x) = \sqrt{x} \end{cases} ,$$

onde $Im(f) = [-1, +\infty)$, $Im(k) = (-\infty, 1]$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+$.

Como $Im(f) \not\subseteq Dom(g)$, então a composta $(g \circ f)$ não está definida. Portanto, é necessário redefinir a função f para $\tilde{f}$, de forma que $Im(\tilde{f}) \subseteq Dom(g)$, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \tilde{f} : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+ & \text{tal que } \tilde{f}(x) = x^2 - 1 \\ g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ & \text{tal que } g(x) = \sqrt{x} \end{cases} .$$

Note-se que a função composta $(g \circ \tilde{f})$ está definida, e apresenta a seguinte lei de correspondência:

$$g(\tilde{f}(x)) = \sqrt{x^2 - 1} .$$

A função composta $(g \circ k)$ também não está definida, pois $Im(k) \not\subseteq Dom(g)$. Portanto, é necessário redefinir a função k para $\tilde{k}$, de forma que $Im(\tilde{k}) \subseteq Dom(g)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \tilde{k} : [-1, 1] \rightarrow [0, 1] & \text{tal que } \tilde{k}(x) = 1 - x^2 \\ g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ & \text{tal que } g(x) = \sqrt{x} \end{cases}.$$

Sendo assim, a função composta $(g \circ \tilde{k})$ fica definida, com a lei de correspondência a seguir:

$$g(\tilde{k}(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

2.3.9 Função Inversa

Definição. Dada uma função $f : X \rightarrow Y$, diz-se que f é *inversível* se existir uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. A função inversa de f também é representada pela notação f^{-1} . Sendo assim, pela definição, g é inversa de f se, e somente se, f é a inversa de g , ou seja,

$$g = f^{-1} \iff f = g^{-1}.$$

Observação. Para que uma função seja inversível, ela deve ser bijetora.

Gráfico da Função Inversa. Sejam dados os pontos $P(x, y)$ e $Q(y, x)$ pertencentes ao plano cartesiano. Seja dada também a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x$. Nota-se que o gráfico de h é a reta formada pelos pontos (x, x) que têm abscissa e ordenada iguais, também chamada de *função identidade*. Na Figura 30, os pontos $R(x, x)$ e $S(y, y)$ pertencem ao gráfico da reta h , e correspondem a uma diagonal do quadrado cujos vértices são $P(x, y)$, $R(x, x)$, $Q(y, x)$ e $S(y, y)$, e seus lados, $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$, $\overline{QS}$ e $\overline{SP}$. Como as diagonais $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ do quadrado são perpendiculares entre si, e o segmento $\overline{IS}$ pertence a $\overline{RS}$, então os ângulos $\widehat{PIS}$ e $\widehat{QIS}$ são retos. Verifica-se, portanto, que os triângulos PIS e QIS são congruentes, pois $\overline{PS} = \overline{QS}$, com o lado $\overline{IS}$ comum a ambos. Consequentemente, $\overline{PI} = \overline{QI}$, e conclui-se que o ponto $P(x, y)$ é simétrico ao ponto $Q(y, x)$ em relação ao gráfico da reta h .

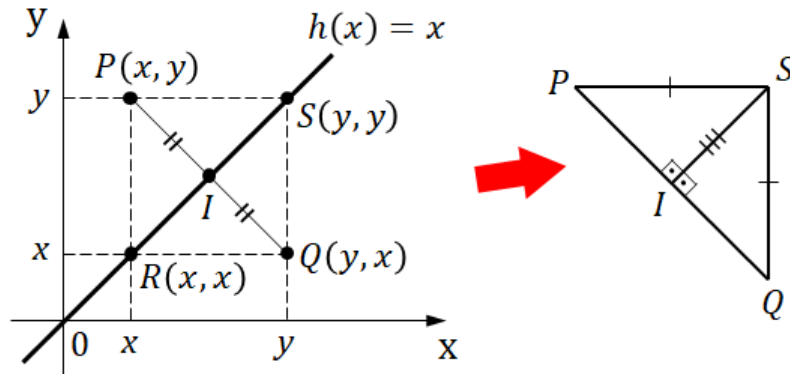


Figura 30: Os pontos P e Q são simétricos em relação ao gráfico da reta $h(x) = x$

Logo, se X e Y são conjuntos de números reais e $g : Y \rightarrow X$ é a inversa da função $f : X \rightarrow Y$,

então o gráfico da função g é simétrico ao de f em relação à reta h .

Exemplo 2.11. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 6$, então sua inversa $g = f^{-1}$ é dada por $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sua lei de definição é obtida através do conceito de função inversa, ou seja,

$$f(g(x)) = x \Rightarrow 2 \cdot g(x) - 6 = x \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

A Figura 31 apresenta os gráficos de $f(x)$ e sua inversa $g(x)$.

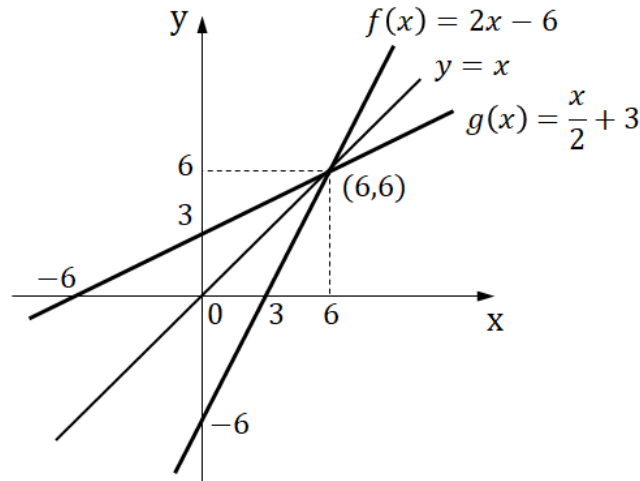


Figura 31: Gráficos de $f(x) = 2x - 6$ e sua inversa $g(x) = \frac{x}{2} + 3$

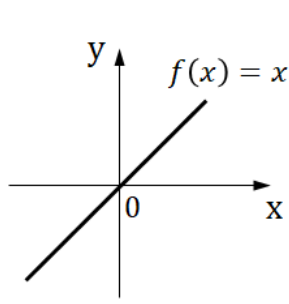
2.3.10 Função Monótona

Definição. A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$, é denominada

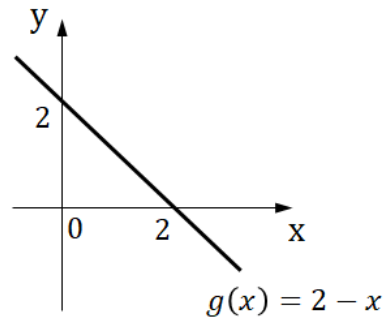
- **crescente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- **decrecente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
- **não-decrecente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **não-crescente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,

para todos $x_1, x_2 \in X$. Em qualquer um destes casos, a função f chama-se *monótona*.

Observação. Quando f é *crescente* ou *decrecente*, diz-se que f é *estritamente monótona*.

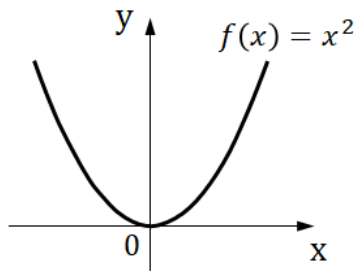


(a) Função Identidade
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x$

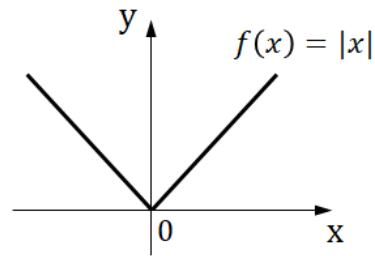


(b) Função Afim
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 2 - x$

Figura 32: Exemplos de gráficos de funções monótonas



(a) Função Quadrática
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f(x) = x^2$



(b) Função Modular
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f(x) = |x|$

Figura 33: Exemplos de gráficos de funções não-monótonas

2.3.11 Concavidade de Gráficos de Funções

Definição. Dadas a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um intervalo $I \subseteq X$, diz-se que

(a) f é **côncava** no intervalo I se, para quaisquer $a, b \in I$, tem-se

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2};$$

(b) f é **convexa** no intervalo I se, para quaisquer $a, b \in I$, tem-se

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

A seguir, será deduzida a equação da reta $s(x)$ secante ao gráfico da função $f(x)$ nas extremidades do intervalo $[a, b]$.

Se $f(x)$ é crescente e não há mudança de concavidade no gráfico da função no intervalo $[a, b]$, considere-se os gráficos das Figuras 34 e 35.

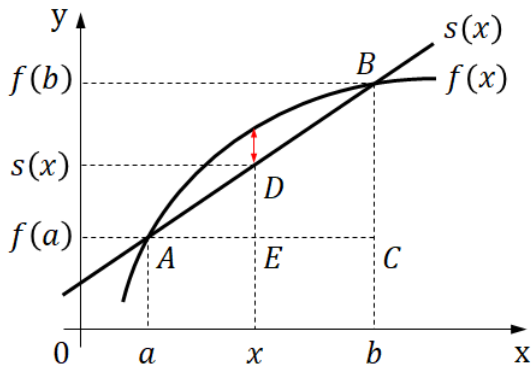


Figura 34: Gráfico da função $f(x)$ crescente e côncava no intervalo $[a, b]$

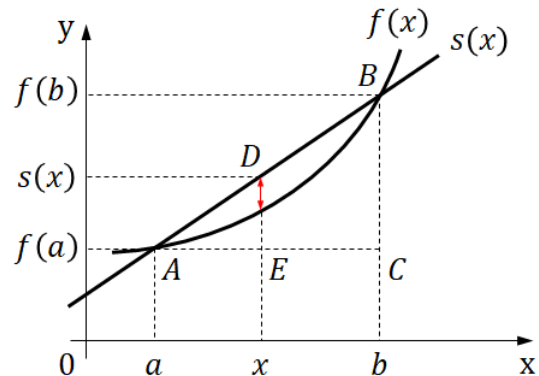


Figura 35: Gráfico da função $f(x)$ crescente e convexa no intervalo $[a, b]$

Para se determinar a equação da reta $s(x)$ nas Figuras 34 e 35, tome-se os triângulos formados pelos pontos A , B , $C(b, f(a))$, $D(x, s(x))$ e $E(x, f(a))$, conforme a Figura 36, onde o ponto D também pertence à reta $s(x)$.

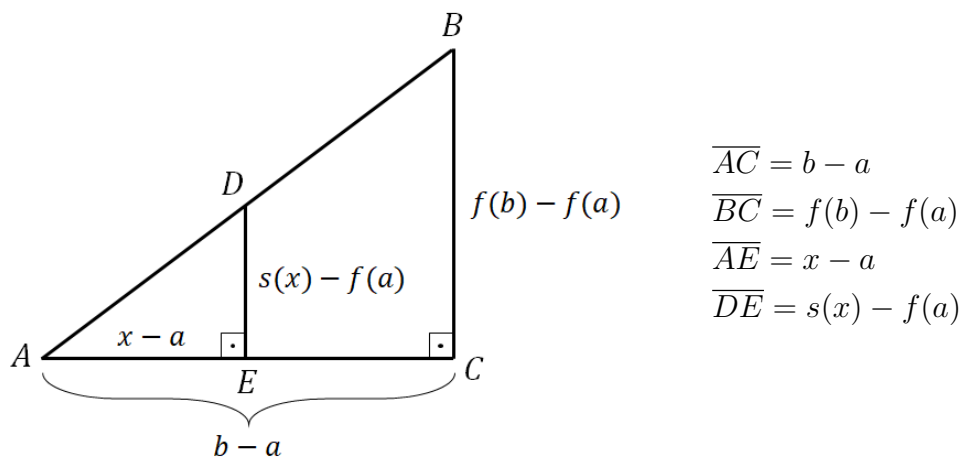


Figura 36: Triângulos retângulos ABC e ADE

Observe-se que os triângulos ABC e ADE , retângulos em C e E , respectivamente, são semelhantes. Sendo assim, é válida a equivalência

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{s(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \\ s(x) - f(a) &= \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) \Rightarrow \\ s(x) &= f(a) + \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) \end{aligned} \quad (12)$$

onde (12) é a equação da reta secante $s(x)$. Note-se que, como $s(x)$ é crescente, tem-se $f(a) < f(b)$ e, portanto, o coeficiente angular de $s(x)$ é positivo.

Se $f(x)$ é decrescente e não há mudança de concavidade no gráfico da função no intervalo

$[a, b]$, considere-se os gráficos das Figuras 37 e 38.

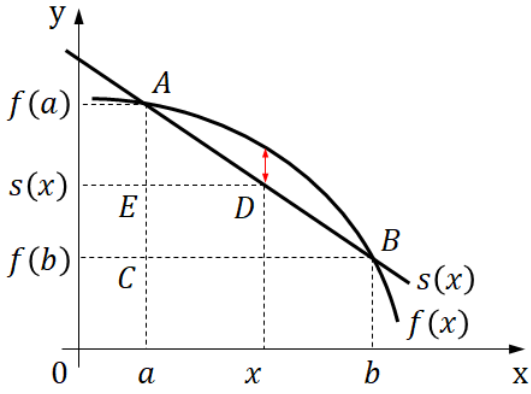


Figura 37: Gráfico da função $f(x)$ decrescente e côncava no intervalo $[a, b]$

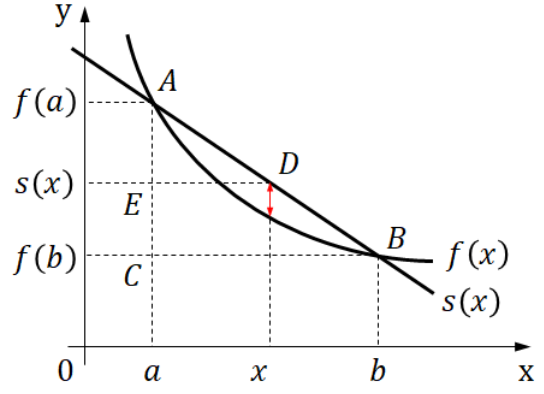


Figura 38: Gráfico da função $f(x)$ decrescente e convexa no intervalo $[a, b]$

Nas Figuras 37 e 38, a equação da reta $s(x)$ pode ser determinada tomando-se os triângulos formados pelos pontos A , B , $C(a, f(b))$, $D(x, s(x))$ e $E(a, s(x))$, conforme a Figura 39, onde o ponto D pertence à reta $s(x)$.

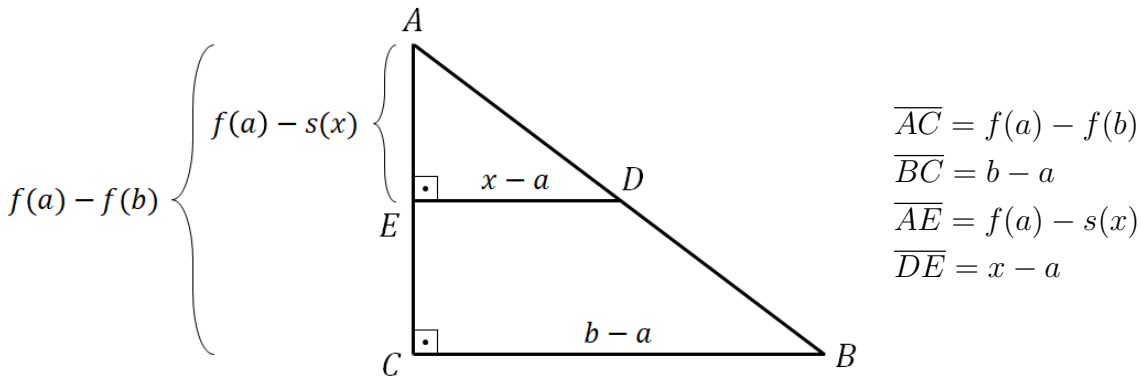


Figura 39: Triângulos retângulos ABC e ADE

Os triângulos ABC e ADE , retângulos em C e E , respectivamente, são semelhantes. Logo, vale a equivalência

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} &\Rightarrow \frac{f(a) - s(x)}{x - a} = \frac{f(a) - f(b)}{b - a} \Rightarrow \frac{s(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \\ s(x) - f(a) &= \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) \Rightarrow s(x) = f(a) + \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) , \end{aligned}$$

que é a mesma equação (12) para $f(x)$ crescente. Neste caso, como $s(x)$ é decrescente, então $f(a) > f(b)$ e, sendo assim, o coeficiente angular de $s(x)$ é negativo.

Em outras palavras, pode-se afirmar que, se $f(x)$ é **côncava** no intervalo $[a, b]$, então

$$f(x) \geq s(x) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) \quad (13)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Em contrapartida, se $f(x)$ é **convexa** no intervalo $[a, b]$, então

$$f(x) \leq s(x) \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) \quad (14)$$

para todo $x \in [a, b]$.

2.4 Hipérbole

As *cônicas* são figuras geométricas planas obtidas pela interseção entre um cone duplo de revolução e um plano, que podem ser parábolas, elipses, circunferências, hipérbolas ou retas concorrentes (Figura 40). Caso o plano seccione o cone duplo paralelamente ao seu eixo de revolução sem conter este mesmo eixo, a curva resultante é uma *hipérbole*.

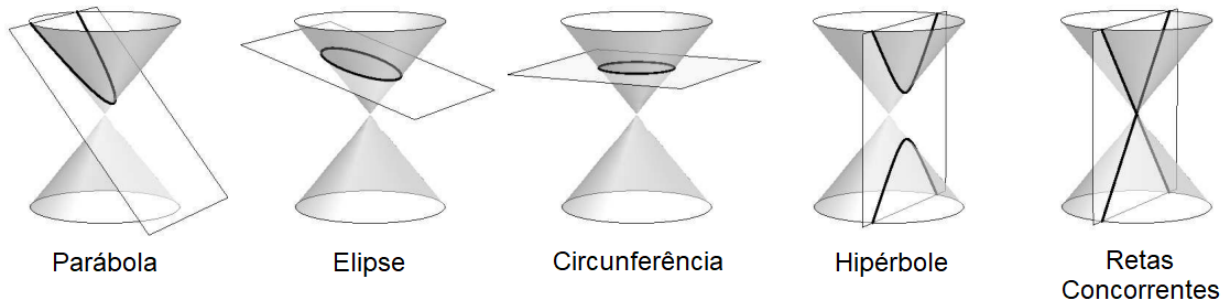


Figura 40: Cônicas

Nesta seção será deduzida a equação da hipérbole $y = 1/x$, a qual será utilizada no decorrer desta dissertação.

Definição. Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 , e um número real positivo a , a *hipérbole de focos* F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos P cuja diferença absoluta entre as suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, ou seja,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a .$$

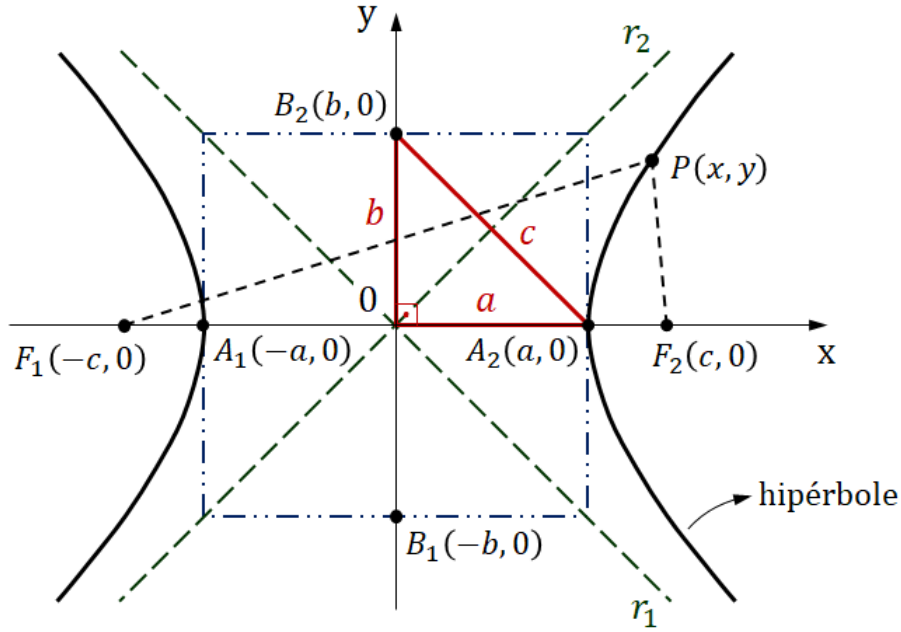


Figura 41: Gráfico de uma hipérbole

A Figura 41 ilustra o gráfico de uma hipérbole com as seguintes características:

- Focos: F_1 e F_2 (localizados no eixo x) ;
- Distância Focal: $|d(F_1, F_2)| = 2c$;
- Centro: 0 ;
- Vértices: A_1 e A_2 ;
- Eixo Real (ou Transverso): $\overline{A_1A_2}$, cujo comprimento é dado por $d(A_1, A_2) = 2a$;
- Eixo Imaginário (ou Conjugado): $\overline{B_1B_2}$, cujo comprimento é dado por $d(B_1, B_2) = 2b$;
- Assíntotas: retas r_1 e r_2 , cujas equações são

$$r_1 = -\frac{b}{a} \cdot x \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{b}{a} \cdot x ;$$

- Relação entre a Distância Focal e os Eixos: $c^2 = a^2 + b^2$.

Pela definição, e supondo-se que $d(P, F_1) > d(P, F_2)$, tem-se

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$

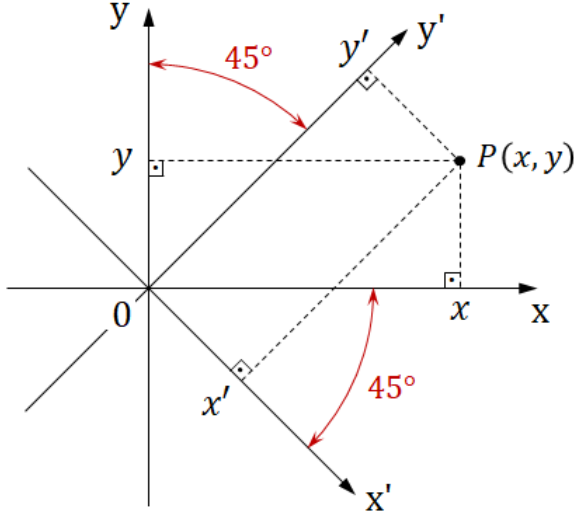
$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow (cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \Rightarrow \underbrace{(c^2 - a^2)}_{=b^2}x^2 - a^2y^2 = a^2 \underbrace{(c^2 - a^2)}_{=b^2} \Rightarrow \\
b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \Rightarrow \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (15)
\end{aligned}$$

que é a equação da hipérbole. Se $d(P, F_1) < d(P, F_2)$, o raciocínio é o mesmo do anterior, e chega-se à mesma equação (15).

Em particular, rotacionando-se os eixos coordenados em 45° , conforme a Figura 42, tem-se



$$x = x' \cdot \cos 45^\circ + y' \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y') \quad (16)$$

$$y = y' \cdot \cos 45^\circ - x' \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (y' - x') \quad (17)$$

Figura 42: Rotação dos eixos x e y em 45°

Substituindo-se (16) e (17) em (15), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \Rightarrow \frac{(x' + y')^2}{2a^2} - \frac{(y' - x')^2}{2b^2} = 1 \Rightarrow \\
\frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2a^2} - \frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{2b^2} &= 1 \Rightarrow \\
\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + x'y' \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) &= 1. \quad (18)
\end{aligned}$$

Fazendo-se $a = b = \sqrt{2}$ em (18), tem-se

$$x'y' \left[\frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right] = 1 \Rightarrow x'y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{x'},$$

sendo esta a equação da hipérbole que será vista na Seção 3.3 do Capítulo 3.

De forma totalmente análoga, se os focos estiverem sobre o eixo y , deduz-se a equação da hipérbole como sendo

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

3 A Função Logarítmica

O objetivo deste Capítulo 3 é definir a função logarítmica e estudá-la partindo-se de suas propriedades fundamentais.

Na Seção 3.1, define-se a função logarítmica e são apresentadas as suas propriedades fundamentais.

Na Seção 3.3, apresenta-se a hipérbole de equação $y = 1/x$, passando-se a chamar o ramo positivo do seu gráfico de hipérbole H .

Na Seção 3.4, são estudados métodos de cálculo da área sob a hipérbole H por aproximação com retângulos e trapézios.

Na Seção 3.5, apresenta-se a descoberta do padre jesuíta Grégoire de Saint-Vincent, que relaciona a área sob a hipérbole H com o logaritmo natural.

Na Seção 3.6, apresenta-se a propriedade que define faixas da hipérbole H de mesma área.

Na Seção 3.7, relaciona-se a área sob a hipérbole H com os logaritmos.

Na Seção 3.8, define-se logaritmo natural a partir da área sob a hipérbole H , e estuda-se a função logaritmo natural através das suas propriedades.

Na Seção 3.9, estuda-se o comportamento da função logaritmo natural através do seu gráfico.

Na Seção 3.10, define-se o número e a partir da área sob a hipérbole H .

3.1 Definição e Propriedades

Definição. Chama-se **função logarítmica** a função real $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+^*$, e que tem as seguintes propriedades fundamentais:

$$(A) \quad L(xy) = L(x) + L(y) \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}_+^* ; \quad (19)$$

(B) L é uma função monótona crescente ou decrescente (vide Subseção 2.3.10), ou seja, se $x < y$, então $L(x) < L(y)$ quando crescente e $L(x) > L(y)$ quando decrescente.

O número $L(x)$ chama-se **logaritmo de x** , para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Observação. Se a função L fosse definida para $x \geq 0$, teria-se, pela Propriedade Fundamental (A),

$$L(0) = L(x \cdot 0) \Rightarrow L(0) = L(x) + L(0) \Rightarrow L(x) = L(0) - L(0) \Rightarrow L(x) = 0 ,$$

ou seja, L seria uma função constante, identicamente nula, contrariando assim a Propriedade Fundamental (B). Portanto, L não está definida para $x = 0$.

Da definição de função logarítmica, decorrem as seguintes propriedades:

Propriedade 1. *A função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora, ou seja, números positivos diferentes tem logaritmos diferentes.*

Demonstração: Se $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que $x \neq y$, então $x < y$ ou $x > y$. Se L for crescente, então $x < y$ resulta em $f(x) < f(y)$ e $x > y$ resulta em $f(x) > f(y)$. Se L for decrescente, então $x < y$ resulta em $f(x) > f(y)$ e $x > y$ resulta em $f(x) < f(y)$. Em qualquer dos casos, conclui-se que $x \neq y$ resulta em $L(x) \neq L(y)$. Portanto, L é uma função injetora. $\square$

Propriedade 2. *O logaritmo de 1 é zero.*

Demonstração: Pela Propriedade Fundamental (A), tem-se

$$L(1) = L(1 \cdot 1) \Rightarrow L(1) = L(1) + L(1) \Rightarrow L(1) = 2 \cdot L(1) \Rightarrow L(1) = 0 . \quad \square$$

Propriedade 3. *Para L crescente, os números maiores que 1 tem logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 tem logaritmos negativos. Em contrapartida, para L decrescente, os números maiores que 1 tem logaritmos negativos e os números positivos menores do que 1 tem logaritmos positivos.*

Demonstração: Se L é crescente, tem-se

$$0 < x < 1 < y \Rightarrow L(x) < L(1) < L(y) \iff L(x) < 0 < L(y) ,$$

e, se L é decrescente, tem-se

$$0 < x < 1 < y \Rightarrow L(x) > L(1) > L(y) \iff L(x) > 0 > L(y) . \quad \square$$

Propriedade 4. *Para todo $x > 0$, tem-se $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.*

Demonstração: Pela Propriedade Fundamental (A) e pela Propriedade 2 desta Seção 3.1, tem-se

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow L\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = L(1) \Rightarrow L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x) . \quad \square$$

Propriedade 5. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.*

Demonstração: Pela Propriedade Fundamental (A) e pela Propriedade 4 desta Seção 3.1,

tem-se

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y) . \quad \square$$

Propriedade 6. Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ e todo número real r , tem-se $L(x^r) = r \cdot L(x)$.

Demonstração: Para se demonstrar esta propriedade, inicialmente deve-se observar que a Propriedade Fundamental (A) vale para um número qualquer de fatores. Por exemplo:

$$L(x \cdot y \cdot z) = L[(xy) \cdot z] = L(x \cdot y) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z) .$$

(i) Para $r = n$, com $n \in \mathbb{N}$, e pela Propriedade Fundamental (A), tem-se:

$$L(x^n) = L(\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fatores}}) = \underbrace{L(x) + L(x) + \dots + L(x)}_{n \text{ parcelas}} \Rightarrow L(x^n) = n \cdot L(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja, a Propriedade 6 é válida quando r é um **número natural**. (Esta propriedade é demonstrada pelo *Princípio da Indução Finita* no Apêndice A.)

(ii) Para $r = 0$ e pela Propriedade 2 desta Seção 3.1, tem-se:

$$x^0 = 1 \Rightarrow L(x^0) = L(1) = 0 \Rightarrow L(x^0) = 0 \cdot L(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja, a Propriedade 6 é válida quando r é **nulo**.

(iii) Para $r = -n$, com $n \in \mathbb{N}$, pela Propriedade Fundamental (A) e pela Propriedade 2 desta Seção 3.1, tem-se:

$$x^n \cdot x^{-n} = 1 \Rightarrow L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0 \Rightarrow L(x^{-n}) = -L(x^n) \Rightarrow L(x^{-n}) = -n \cdot L(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja, a Propriedade 6 é válida quando r é um **número inteiro**.

(iv) Para $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p \Rightarrow L[(x^r)^q] = L(x^p) \Rightarrow q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x) \Rightarrow L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x) \Rightarrow$$

$$L(x^r) = r \cdot L(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja, a Propriedade 6 é válida quando r é um **número racional**.

(v) Para se provar que a Propriedade 6 é válida para $r = \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, considere-se, inicialmente, α representado no formato decimal

$$\alpha = a_0 , a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots , \quad (20)$$

onde a_0 é o máximo inteiro de α , ou seja, $a_0 = \llbracket \alpha \rrbracket = \max\{x \in \mathbb{Z} ; x \leq \alpha\}$ (*), $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_n \leq 9$.

(*) A função máximo inteiro é tratada na Subseção 2.3.7.

Tome-se, agora, o número racional α_n , que pode ser expresso como

$$\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right), \quad (21)$$

onde $j \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_j \leq 9$.

Observação. Note-se que, para $\alpha_n < 0$, o formato decimal permanece o mesmo, apenas acrescentando-se o sinal negativo em todas as parcelas. Desta forma, as demonstrações a seguir serão feitas para α_n positivo, de modo que, caso α_n seja negativo, basta-se inverter os sinais das desigualdades influenciadas por esta mudança.

Devido ao formato decimal, pode-se entender (α_n) como uma sequência (**) cujo termo geral é definido pela igualdade (21), que é uma soma de parcelas positivas, onde a quantidade de parcelas cresce com n . Portanto, $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, e, assim, (α_n) é monótona não-decrescente.

(**) Sequências numéricas são apresentadas na Seção D.3 do Apêndice D.

Verifica-se também que

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right) \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{9}{10^j} \right), \quad (22)$$

onde $\sum_{j=1}^n \left(\frac{9}{10^j} \right) = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n}$ é a soma S_n de uma PG de 1º termo $t_1 = \frac{9}{10}$ e razão $q = \frac{1}{10}$. Logo, o valor de S_n é dado por:

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{9}{10^j} \right) = \frac{t_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{\frac{9}{10} \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)}{\frac{9}{10}} \Rightarrow$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{10^n}. \quad (23)$$

Substituindo-se (23) em (22), e utilizando-se os conceitos de limites estudados na Subseção D.3.7 do Apêndice D, tem-se:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right) \leq S_n \Rightarrow 0 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \Rightarrow$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \Rightarrow 0 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$a_0 \leq \underbrace{a_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right)}_{\alpha_n} \leq a_0 + 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 \leq \alpha_n \leq a_0 + 1 , \quad (24)$$

ou seja, a sequência (α_n) é limitada. Logo, pelo Teorema D.4 da Subseção D.3.4, (α_n) é convergente, tendo-se então

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n . \quad (25)$$

Se a função L é *crescente*, considerando-se o literal (iii) desta Propriedade 6, e tornando-se os termos da desigualdade (24) expoentes de base x , tem-se

- para $x > 1$, $x^{a_0} \leq x^{\alpha_n} \leq x^{a_0+1} \Rightarrow L(x^{a_0}) \leq L(x^{\alpha_n}) \leq L(x^{a_0+1}) \Rightarrow$
 $a_0 \cdot L(x) \leq L(x^{\alpha_n}) \leq (a_0 + 1) \cdot L(x) ,$
- para $0 < x < 1$, $x^{a_0} \geq x^{\alpha_n} \geq x^{a_0+1} \Rightarrow L(x^{a_0+1}) \leq L(x^{\alpha_n}) \leq L(x^{a_0}) \Rightarrow$
 $(a_0 + 1) \cdot L(x) \leq L(x^{\alpha_n}) \leq a_0 \cdot L(x) ,$

e, se L é *decrecente*, tem-se

- para $x > 1$, $x^{a_0} \leq x^{\alpha_n} \leq x^{a_0+1} \Rightarrow (a_0 + 1) \cdot L(x) \leq L(x^{\alpha_n}) \leq a_0 \cdot L(x) ,$
- para $0 < x < 1$, $x^{a_0} \geq x^{\alpha_n} \geq x^{a_0+1} \Rightarrow a_0 \cdot L(x) \leq L(x^{\alpha_n}) \leq (a_0 + 1) \cdot L(x) ,$

sendo que, em todos estes casos, a sequência (k_n) definida por $k_n = L(x^{\alpha_n})$ é limitada. Como $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, se L é *crescente*, então

- para $x > 1$, $x^{\alpha_n} \leq x^{\alpha_{n+1}} \Rightarrow L(x^{\alpha_n}) \leq L(x^{\alpha_{n+1}}) ,$
- para $0 < x < 1$, $x^{\alpha_n} \geq x^{\alpha_{n+1}} \Rightarrow L(x^{\alpha_n}) \geq L(x^{\alpha_{n+1}}) ,$

e, se L é *decrecente*, tem-se

- para $x > 1$, $x^{\alpha_n} \leq x^{\alpha_{n+1}} \Rightarrow L(x^{\alpha_n}) \geq L(x^{\alpha_{n+1}}) ,$
- para $0 < x < 1$, $x^{\alpha_n} \geq x^{\alpha_{n+1}} \Rightarrow L(x^{\alpha_n}) \leq L(x^{\alpha_{n+1}}) .$

Portanto, (k_n) é monótona, e, sendo também limitada, então, pelo Teorema D.4 da Subseção D.3.4, (k_n) é convergente, e seu limite é dado por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(x^{\alpha_n}) \stackrel{(*)}{=} L \left(x^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n} \right) = L(x^\alpha) . \quad (26)$$

(*) Esta passagem é válida devido à continuidade da função logarítmica em todos os pontos do seu domínio, que é apresentada no Teorema D.32 do Apêndice D.

Agora, multiplicando-se os membros da desigualdade (24) por $L(x)$, tem-se

- para $L(x) > 0$, $a_0 \cdot L(x) \leq \alpha_n \cdot L(x) \leq (a_0 + 1) \cdot L(x) ,$

- para $L(x) < 0$, $(a_0 + 1) \cdot L(x) \leq \alpha_n \cdot L(x) \leq a_0 \cdot L(x)$,

e, sendo assim, a sequência (t_n) dada por $t_n = \alpha_n \cdot L(x)$ é limitada. Como $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, então

$$\alpha_n \cdot L(x) \leq \alpha_{n+1} \cdot L(x) \text{ se } L(x) > 0 \quad \text{e} \quad \alpha_n \cdot L(x) \geq \alpha_{n+1} \cdot L(x) \text{ se } L(x) < 0 .$$

Logo, (t_n) é monótona e, como também é limitada, então, pelo Teorema D.4, é convergente, sendo seu limite dado por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\alpha_n \cdot L(x)] \stackrel{(*)}{=} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \right) \cdot L(x) = \alpha \cdot L(x) . \quad (27)$$

(*) Esta passagem é válida devido à continuidade da função logarítmica em todos os pontos do seu domínio, como justificado no Teorema D.32 do Apêndice D.

Como α_n é racional, então, pelo item (iv) desta Propriedade 6, tem-se

$$L(x^{\alpha_n}) = \alpha_n \cdot L(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} L(x^{\alpha_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\alpha_n \cdot L(x)] . \quad (28)$$

Substituindo-se (26) e (27) em (28), tem-se

$$L(x^\alpha) = \alpha \cdot L(x) ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, e, portanto, a Propriedade 6 é válida quando r é um **número real**. $\square$

Propriedade 7. A função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração: A Propriedade 7 será demonstrada para L crescente e L decrescente.

(i) L é crescente. Neste caso, para provar que a função $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente, tome-se um número real qualquer β e encontre-se um número $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(x) > \beta$. Para isto, considere-se um número natural n suficientemente grande de modo que $n > \frac{\beta}{L(2)}$. Como, pela Propriedade 3, tem-se $L(2) > 0$, e considerando-se a Propriedade 6, então

$$n > \frac{\beta}{L(2)} \Rightarrow n \cdot L(2) > \beta \Rightarrow L(2^n) > \beta ,$$

ou seja, se $x = 2^n$, tem-se $L(x) > \beta$ para qualquer real β , demonstrando assim que L é ilimitada superiormente.

Para se provar que L é ilimitada inferiormente, tome-se um número real qualquer α e, seguindo-se o procedimento anterior, pode-se encontrar um número $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(x) > -\alpha$. Pela Propriedade 4, e fazendo-se $y = \frac{1}{x}$, tem-se

$$L(x) > -\alpha \Rightarrow -L(x) < \alpha \Rightarrow L\left(\frac{1}{x}\right) < \alpha \Rightarrow L(y) < \alpha \text{ para qualquer real } \alpha .$$

(ii) L é decrescente. Neste caso, para provar que a função $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente, tome-se um número real qualquer β e encontre-se um número $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(x) > \beta$. Para tal, considere-se um número natural n suficientemente grande de modo que $n > \frac{\beta}{L(1/2)}$. Como, pela Propriedade 3, tem-se $L(1/2) > 0$, e considerando-se a Propriedade 6, então

$$n > \frac{\beta}{L(1/2)} \Rightarrow n \cdot L\left(\frac{1}{2}\right) > \beta \Rightarrow L\left(\frac{1}{2^n}\right) > \beta ,$$

ou seja, se $x = \frac{1}{2^n}$, tem-se $L(x) > \beta$ para qualquer real β , mostrando assim que L é ilimitada superiormente.

Para se provar que L é ilimitada inferiormente, o procedimento é exatamente o mesmo utilizado para L crescente. $\square$

Teorema 3.1. Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante real c tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.

Demonstração:

(i) Inicialmente, será demonstrado que, se as funções logarítmicas L e M coincidem em dois pontos distintos, então $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$. Pela Propriedade 2, tem-se que $L(1) = M(1) = 0$. A seguir, seja $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Se L é crescente, então

$$a > 1 \Rightarrow L(a) > 0 \Rightarrow M(a) > 0 ,$$

e, conseqüentemente, M também é crescente. Se L é decrescente, então

$$a > 1 \Rightarrow L(a) < 0 \Rightarrow M(a) < 0 ,$$

e, sendo assim, M também é decrescente. Para $0 < a < 1$, o raciocínio é o mesmo, considerando-se apenas que os sinais de desigualdade se invertem.

Suponha-se, agora, que existe algum número $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$, isto é, $L(b) < M(b)$ ou $L(b) > M(b)$.

- Se $L(b) < M(b)$, então existe algum número real r tal que

$$L(b) < r \cdot L(a) < M(b) \Rightarrow L(b) < L(a^r) < M(b) . \quad (29)$$

Como $L(a) = M(a)$, então

$$r \cdot L(a) = r \cdot M(a) \Rightarrow L(a^r) = M(a^r) ,$$

que, substituída na desigualdade (29), resulta em

$$L(b) < L(a^r) = M(a^r) < M(b) .$$

Se L é crescente, a desigualdade $L(b) < L(a^r)$ implica $b < a^r$, e, como M também é crescente, então $M(a^r) < M(b)$ implica $a^r < b$, que são resultados contraditórios. Se L é decrescente, a desigualdade $L(b) < L(a^r)$ implica $b > a^r$, e, como M também é decrescente, então $M(a^r) < M(b)$ implica $a^r > b$, que também resultam em contradição. Estas duas contradições mostram que b não existe.

• Se, por outro lado, $L(b) > M(b)$, o raciocínio é totalmente análogo à demonstração anterior, chegando-se à mesmas contradições, mostrando-se então que b também não existe para este caso.

Como não há um número b que satisfaça a desigualdade $L(b) \neq M(b)$, deve-se ter, portanto, $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

(ii) Sejam dadas as funções logarítmicas arbitrárias L e M , e o número real c tal que

$$c = \frac{M(2)}{L(2)} .$$

Considerando-se agora a função logarítmica $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $N(x) = c \cdot L(x)$, tem-se que

$$N(2) = c \cdot L(2) = \frac{M(2)}{L(2)} \cdot L(2) \Rightarrow N(2) = M(2) .$$

Logo, pelo item (i) desta demonstração, como $N(x) = M(x)$ é válida para $x = 2$, então vale para todo $x > 0$. Portanto,

$$M(x) = N(x) \Rightarrow M(x) = c \cdot L(x)$$

para todo $x > 0$. □

Observação. Pelo Teorema 3.1, todas as funções logarítmicas são obtidas multiplicando-se L por uma constante conveniente.

O Lema 3.1 a seguir será utilizado na demonstração do Lema 3.2.

Lema 3.1. Seja $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais u e v tais que $u < v$, então existe $x > 0$ tal que $u < L(x) < v$.

Demonstração: Tome-se um número natural n tal que

$$n > \frac{L(2)}{v-u} \Rightarrow \frac{L(2)}{n} < v-u \Rightarrow c < v-u , \quad \text{onde} \quad c = \frac{L(2)}{n} .$$

Os múltiplos inteiros de c definidos por

$$m \cdot c = m \cdot \frac{L(2)}{n} = \frac{m}{n} \cdot L(2) = L(2^{m/n}) , \quad \text{com } m \in \mathbb{Z} ,$$

delimitam a reta real em intervalos justapostos de comprimento c , conforme a Figura 43.

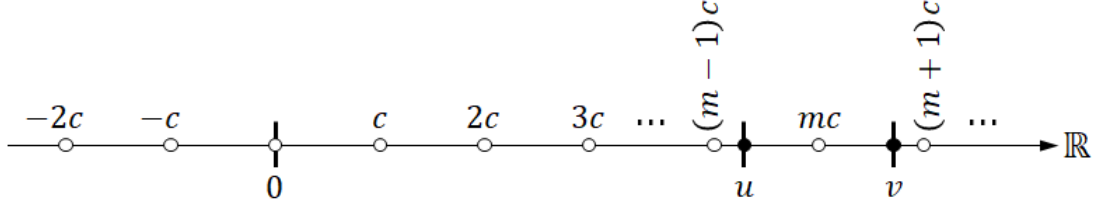


Figura 43: Divisão do eixo $\mathbb{R}$ em intervalos justapostos de comprimento c

Como $c < v - u$, então o comprimento c é menor do que o comprimento $(v - u)$ do intervalo $I = (u, v)$. Desta forma, pelo menos um dos múltiplos $m \cdot c = L(2^{m/n})$ fica dentro do intervalo $I = (u, v)$, ou seja,

$$u < m \cdot c < v \Rightarrow u < L(2^{m/n}) < v .$$

Fazendo-se $x = 2^{m/n}$, tem-se

$$u < L(x) < v .$$

□

Observação. O Lema 3.1 mostra que qualquer intervalo aberto $I = (u, v)$ contém pelo menos um valor $L(x)$ da função logarítmica L .

Lema 3.2. Toda função logarítmica L é sobrejetora, ou seja, dado qualquer número real k , existe sempre um número real positivo x tal que $L(x) = k$.

Demonstração:

(i) Primeiramente, considere-se o número real α representado pela igualdade (20) apresentada na Propriedade 6 desta Seção 3.1, isto é,

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots ,$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_n \leq 9$.

Tome-se também o número racional α_n expresso pela igualdade (21) mostrado na mesma Seção 3.1, ou seja,

$$\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right) ,$$

onde $j \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_j \leq 9$.

Observação. As demonstrações a seguir serão feitas para α_n positivo. Como o formato decimal permanece o mesmo para $\alpha_n < 0$, apenas acrescentando-se o sinal negativo nas parcelas, basta-se inverter os sinais das desigualdades influenciadas por esta mudança.

Comparando-se α_n e α , nota-se que $\alpha_n \leq \alpha$ e, sendo assim,

$$\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} \quad \text{para todo } n \geq 0 . \quad (30)$$

Considerando-se x um número real tal que $x < \alpha$, então existe algum $n \geq 0$ tal que $x < \alpha_n \leq \alpha$. De fato, como x e α são reais e $x < \alpha$, então $(\alpha - x)$ é um número real positivo. Tomando-se, agora, um n suficientemente grande de modo que

$$\frac{1}{10^n} < \alpha - x , \quad (31)$$

então, comparando-se (30) e (31), tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} < \alpha - x &\Rightarrow \alpha - \alpha_n < \alpha - x \Rightarrow x < \alpha_n \Rightarrow \\ x < \alpha_n &\leq \alpha . \end{aligned} \quad (32)$$

(ii) Dado um número real arbitrário b , deve-se obter um número real positivo α tal que $L(\alpha) = b$. Considerando-se a representação decimal de α apresentada em (i), ou seja,

$$\alpha = a_0 , a_1 a_2 \dots a_n \dots ,$$

será utilizado o “método do elemento celestial” para encontrar-se α , que consiste em determinar-se, um a um, os números inteiros não-negativos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, para, em seguida, mostrar-se que se tem $L(\alpha) = b$ tanto para L crescente quanto para L decrescente.

• Para **L crescente**, e sendo L monótona ilimitada, existem infinitos números inteiros k tais que $L(k) > b$. Considerando-se $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$, tem-se

$$L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1) .$$

Como $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$, então existem dois números α_1 e $\alpha_1 + 1/10$ tais que $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + 1/10)$. Neste caso, divide-se o intervalo $[a_0, a_0 + 1]$ em 10 partes iguais, resultando nas abscissas

$$a_0 , a_0 + \frac{1}{10} , a_0 + \frac{2}{10} , \dots , a_0 + \frac{9}{10} , a_0 + 1 .$$

Logo, existe um número inteiro não-negativo a_1 , com $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que, escrevendo-se

$$\alpha_1 = a_0 , a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \geq a_0 ,$$

onde

$$\alpha_1 + \frac{1}{10} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} = a_0 + \frac{(a_1 + 1)}{10} \leq a_0 + 1 ,$$

tem-se

$$a_0 \leq \alpha_1 < \alpha_1 + \frac{1}{10} \leq a_0 + 1 \Rightarrow L(\alpha_1) \leq b < L\left(\alpha_1 + \frac{1}{10}\right) .$$

Pelo mesmo raciocínio, como $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + 1/10)$, então existem dois números α_2 e $\alpha_2 + 1/10^2$ tais que $L(\alpha_2) \leq b < L(\alpha_2 + 1/10^2)$. Nesta situação, divide-se o intervalo $[\alpha_1, \alpha_1 + 1/10]$ também em 10 partes iguais, resultando nas abscissas

$$\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, \dots, \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10} .$$

Sendo assim, existe um inteiro não-negativo a_2 , com $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que, fazendo-se

$$\alpha_2 = a_0, a_1 a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} = \alpha_1 + \frac{a_2}{10^2} \geq \alpha_1 ,$$

onde

$$\alpha_2 + \frac{1}{10^2} = \alpha_1 + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} = \alpha_1 + \frac{(a_2 + 1)}{10^2} \leq \alpha_1 + \frac{1}{10}$$

tem-se

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 < \alpha_2 + \frac{1}{10^2} \leq \alpha_1 + \frac{1}{10} \Rightarrow L(\alpha_2) \leq b < L\left(\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right) .$$

Procedendo-se de forma análoga, conclui-se que existe um inteiro não-negativo a_n , com $0 \leq a_n \leq 9$, tal que, escrevendo-se

$$\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} ,$$

tem-se

$$L(\alpha_n) \leq b < L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \quad (33)$$

para todo $n \geq 0$.

Na sequência, será demonstrado que $L(\alpha) = b$. Supondo-se, por absurdo, que $L(\alpha) < b$, então utiliza-se o Lema 3.1 para obter-se $x > 0$ tal que

$$L(\alpha) < L(x) < b , \quad (34)$$

que implicaria $\alpha < x$ para L crescente. Logo, para algum n suficientemente grande, tem-se

$$\begin{aligned} x - \alpha > \frac{1}{10^n} &\Rightarrow x > \alpha + \frac{1}{10^n} \Rightarrow x > \alpha + \frac{1}{10^n} \geq \alpha_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow \\ x > \alpha_n + \frac{1}{10^n} , \end{aligned} \quad (35)$$

que, para L crescente, e considerando-se a desigualdade (33), implicaria

$$L(x) > L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) > b \Rightarrow L(x) > b ,$$

que é absurdo, pois x foi obtido de modo que $L(x) < b$, conforme a desigualdade (34).

De forma análoga, supondo-se que $L(\alpha) > b$, utiliza-se o Lema 3.1 para obter-se $x > 0$ tal que

$$b < L(x) < L(\alpha) , \quad (36)$$

que implicaria $x < \alpha$ para L crescente, e, conforme a desigualdade (32) do item (i) desta demonstração, teria-se $x < \alpha_n$ para algum n . Logo, para L crescente, e considerando-se a desigualdade (33), teria-se

$$L(x) < L(\alpha_n) \leq b \Rightarrow L(x) < b ,$$

que também é absurdo, pois x foi obtido de modo a atender $b < L(x)$, conforme a desigualdade (36).

Portanto, para L crescente, tem-se $L(\alpha) = b$.

• Para **L decrescente**, existem infinitos números inteiros k tais que $L(k) < b$. Considerando-se $a_0 + 1$ o maior inteiro tal que $L(a_0 + 1) < b$, tem-se

$$L(a_0 + 1) < b \leq L(a_0) ,$$

que, através do mesmo procedimento utilizado para L crescente, resulta em

$$L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) < b \leq L(\alpha_n) \text{ para todo } n \geq 0 . \quad (37)$$

Supondo-se que $L(\alpha) < b$, então o número $x > 0$ é obtido através do Lema 3.1 de modo que

$$L(\alpha) < L(x) < b , \quad (34)$$

que implicaria $x < \alpha$ para L decrescente, e, pela desigualdade (32) do item (i) desta demonstração, teria-se $x < \alpha_n$ para algum n . Desta forma, para L decrescente, e considerando-se a desigualdade (37), teria-se

$$b \leq L(\alpha_n) < L(x) \Rightarrow L(x) > b ,$$

que é uma contradição, pois x foi obtido para satisfazer $L(x) < b$, conforme a desigualdade (34).

Agora, supondo-se que $L(\alpha) > b$, o número $x > 0$ é obtido pelo Lema 3.1 de forma que

$$b < L(x) < L(\alpha) , \quad (36)$$

que implicaria $\alpha < x$ para L decrescente. Logo, utilizando-se a desigualdade (35), para algum n suficientemente grande, tem-se

$$x > \alpha_n + \frac{1}{10^n} , \quad (35)$$

que, para L decrescente, e pela desigualdade (37), implicaria

$$L(x) < L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) < b \Rightarrow L(x) < b ,$$

que é absurdo, pois x foi obtido para atender $b < L(x)$, conforme a desigualdade (36).

Portanto, também tem-se $L(\alpha) = b$ para L decrescente, concluindo-se, assim, a demonstração do Lema 3.2. $\square$

Observação. No Apêndice E é apresentada uma demonstração alternativa do Lema 3.2, utilizando-se conceitos de limites de sequências, conforme Subseção D.3.7 do Apêndice D.

Pela Propriedade 1 e pelo Lema 3.2, chega-se ao enunciado do Teorema 3.2 a seguir.

Teorema 3.2. Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetora.

Demonstração: Da Propriedade 1, conclui-se que a função $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora, e, do Lema 3.2, que é sobrejetora. Portanto, a função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetora.

Bases de Logaritmos. Pelo Teorema 3.2, dada uma função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único número $0 < a \neq 1$ tal que $L(a) = 1$. O número a é chamado de *base* do sistema de logaritmos L . Para evidenciar a base, costuma-se utilizar a notação $\log_a x$ ao invés de $L(x)$, ou seja:

$$L(x) = \log_a x . \quad (38)$$

Se $\log_a$ e $\log_b$ são funções logarítmicas (de bases a e b respectivamente), então $\log_a a = \log_b b = 1$ e o Teorema 3.1 garante a existência de uma constante c tal que

$$\log_b x = c \cdot \log_a x \quad (39)$$

para todo $x > 0$. Fazendo-se $x = a$, obtém-se

$$\log_b a = c \cdot \log_a a \Rightarrow c = \log_b a ,$$

e substituindo-se em (39), tem-se

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \quad (40)$$

para todo $x > 0$. Esta é a fórmula de *mudança de base* de logaritmos, que também será tratada na Seção 5.1.

As bases de logaritmos mais comuns são 10 (pois nosso sistema de numeração é decimal) e o número $e = 2,718281\dots$, base dos logaritmos naturais, que será estudado nos próximos capítulos. Os logaritmos de base 10, ou decimais, serão estudados na Subseção 5.4.

3.2 Um Pouco de História

3.2.1 A Descoberta dos Logaritmos

Os logaritmos foram descobertos antes do conceito de função ser introduzido na Matemática, e surgiram como tábuas de cálculo cujo propósito era transformar operações de multiplicação em adição, divisão em subtração e cálculo de raiz n -ésima em divisão por n .

Por exemplo, considere-se a seguinte lista de números aleatórios:

123456
345678
567891
198765
876543
654321 .

Note-se que o trabalho de multiplicar estes números é consideravelmente mais demorado que somá-los.

Como tais cálculos extensos se tornaram cada vez mais necessários ao final do século 16 e início do século 17, especialmente devido à astronomia e à navegação, as tábuas de logaritmos constituíram-se num artifício extremamente valioso, pois a adição, subtração e divisão por n são operações muito mais rápidas que a multiplicação, divisão e cálculo da raiz n -ésima, respectivamente.

Foi nesta época que o matemático escocês John Napier (1550 - 1617) descobriu os logaritmos.

3.2.2 As Tábuas de Cálculo de Napier

Nesta época, Napier concebeu tábuas de cálculo que associavam uma progressão geométrica (PG) a uma progressão aritmética (PA). Na primeira coluna destas tábuas encontravam-se números em PG (também chamados de *números de entrada* nesta seção), e, na segunda coluna, os números correspondentes em PA, denominados *logaritmos* (*). A coluna da PG se refere às operações de multiplicação, divisão e cálculo da raiz n -ésima, e a coluna da PA, às operações de adição, subtração e divisão, respectivamente.

(*) A palavra *logaritmo* é a junção das palavras gregas *logos* (razão) e *arithmos* (número), que pode ser traduzida como *número proporcional*.

Para se entender como a associação destas duas progressões reduz a dificuldade de cálculos extensos, tome-se a Tabela 2 como exemplo de uma tábua de cálculo com esta configuração, onde a coluna da esquerda é uma PG de razão 3 e a da direita é uma PA de razão 1.

Para se calcular o produto 27×243 utilizando-se esta tabela, deve-se inicialmente localizar os fatores 27 e 243 da multiplicação na coluna da PG e seus correspondentes na coluna da PA, que são 3 e 5, respectivamente, como apresentado na Tabela 3. A seguir, efetua-se a soma $3 + 5$, cujo resultado é 8. Finalmente, localiza-se o número 8 (resultado da soma) na coluna da PA e seu correspondente na coluna da PG, que é 6561, resultado do produto 27×243 .

Tabela 2: Exemplo de Tábua de Cálculo

	PG	PA	
	1	0	
$\times 3$	3	1	$+ 1$
$\times 3$	9	2	$+ 1$
$\times 3$	27	3	$+ 1$
$\times 3$	81	4	$+ 1$
$\times 3$	243	5	$+ 1$
$\times 3$	729	6	$+ 1$
$\times 3$	2187	7	$+ 1$
$\times 3$	6561	8	$+ 1$

Tabela 3: Conversão entre multiplicação e soma através da Tábua de Cálculo

	PG	PA	
	1	0	
	3	1	
	9	2	
$\times$	27	3	$+$
	81	4	
$=$	243	5	$+$
	729	6	
	2187	7	$=$
	6561	8	

Para se calcular o quociente $2187 \div 81$, o primeiro passo é localizar-se os números 2187 e 81 na coluna da PG e seus correspondentes na coluna da PA, que são 7 e 4, respectivamente, como ilustrado na Tabela 4. Na sequência, efetua-se a diferença $7 - 4$, cujo resultado é 3. Por fim, localiza-se o número 3 (resultado da diferença) na coluna da PA e seu correspondente na coluna da PG, que é 27, resultado do quociente $2187 \div 81$.

Tabela 4: Conversão entre divisão e subtração através da Tábua de Cálculo

	PG	PA	
	1	0	
	3	1	
	9	2	
$=$	27	3	$=$
$\div$	81	4	$-$
	243	5	
	729	6	
	2187	7	
	6561	8	

Tabela 5: Conversão entre raiz quarta e divisão através da Tábua de Cálculo

	PG	PA	
	1	0	
	3	1	
	9	2	
	27	3	
	81	4	
	243	5	
	729	6	
	2187	7	
$\sqrt[4]{}$	6561	8	$\div 4$

A Tabela 5 ilustra o cálculo da raiz quarta $\sqrt[4]{6561}$, que é feito primeiramente encontrando-se o número 6561 na coluna da PG e seu correspondente na coluna da PA, o número 8. Em seguida, efetua-se a divisão de 8 por 4, que é o índice da raiz quarta, cujo resultado é 2. Por último, localiza-se o número 2 na coluna da PA e seu correspondente na coluna da PG, que é 9, o resultado de $\sqrt[4]{6561}$.

Note-se, entretanto, que existem lacunas entre os termos da PG, as quais aumentam expo-

nencialmente com o crescimento da PG. Na Tabela 2, por exemplo, devido à razão 3, há uma lacuna de 161 números entre 243 e 81, para os quais não aparecem seus logaritmos correspondentes.

No sentido de reduzir estas lacunas, Napier elaborou suas tábuas de logaritmos com os números de entrada em PG de razão $(1 - 1/10^7) = 0,9999999$ e primeiro termo igual a $10^7 = 10000000$, e, na coluna dos logaritmos, utilizou uma PA de razão 1 e primeiro termo 0.

O trabalho de John Napier sobre logaritmos foi publicado pela primeira vez em 1614 sob o título *“Mirifici logarithmorum canonis descriptio”*, que pode ser traduzido como *“Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos”*.

Para um aprofundamento deste assunto, recomenda-se a leitura do artigo intitulado *“Logarithms: The Early History of a Familiar Function - John Napier Introduces Logarithms”* escrito por Kathleen M. Clark (The Florida State University) e Clemency Montelle (University of Canterbury).

Também serviu de referência para a elaboração desta Seção 3.2 o vídeo *“The History of the Natural Logarithm - How was it discovered?”* de Tarek Said, disponível no YouTube.

3.3 A Hipérbole H

A hipérbole de equação $y = 1/x$, apresentada na Seção 2.4, tem o seu gráfico contido no primeiro e terceiro quadrantes do plano cartesiano, conforme a Figura 44.

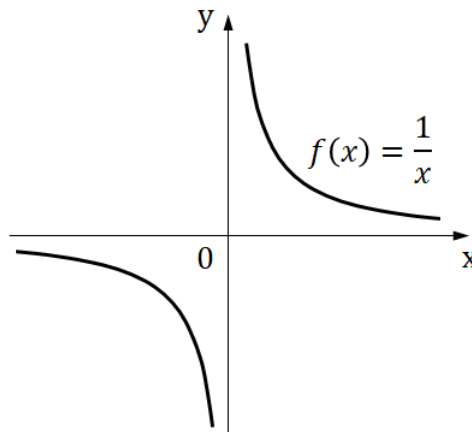


Figura 44: A hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$

O ramo positivo do gráfico da hipérbole $y = 1/x$, ou seja, a região do seu gráfico contida no primeiro quadrante (Figura 45), será chamado, daqui em diante, de *hipérbole H* . Em outras palavras,

$$H = \left\{ (x, y); x > 0, y = \frac{1}{x} \right\} . \quad (41)$$

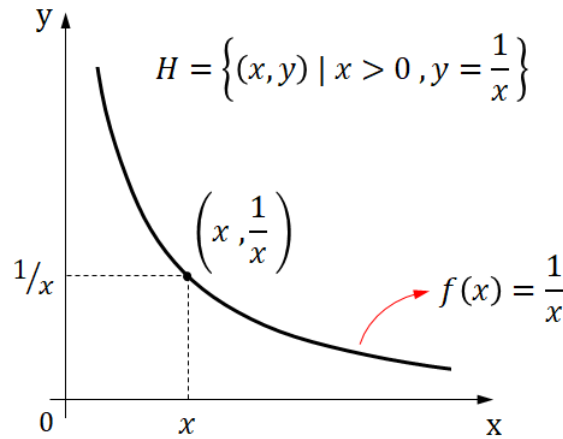


Figura 45: A hipérbole H

Como será estudado nas próximas seções, a hipérbole H tem fundamental importância no desenvolvimento desta dissertação, pois a área sob o seu gráfico é utilizada como base para a construção do conceito de logaritmos naturais e, conseqüentemente, do número e .

3.4 A Área sob a Hipérbole H

A região do plano limitada pela hipérbole H , o eixo das abscissas e as retas verticais $x = a$ e $x = b$ (Figura 46), também conhecida como a *faixa da hipérbole no intervalo $[a, b]$* , será representada, doravante, por H_a^b . Em outras palavras,

$$H_a^b = \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\} . \quad (42)$$

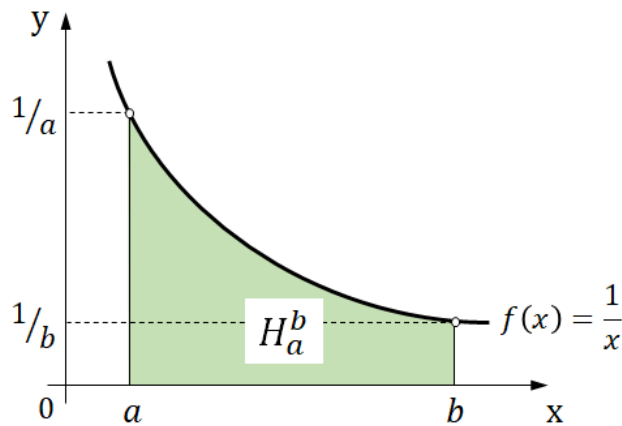


Figura 46: A área da faixa H_a^b

Para se calcular a área da faixa H_a^b , serão estudados métodos de aproximação por polígonos.

3.4.1 Aproximação por Retângulos Inscritos

O primeiro método para o cálculo da área de uma faixa H_a^b é o de aproximação por retângulos inscritos à hipérbole H . Inicialmente, divide-se o intervalo $[a, b]$ em intervalos menores através de pontos intermediários (s, t e u na Figura 47). A seguir, são traçados retângulos de maneira que a base de cada um deles coincida com um intervalo menor e que seu vértice superior direito toque a hipérbole H . A reunião desses retângulos inscritos será chamada de *polígono retangular inscrito* na faixa H_a^b . A área A_{RI} do retângulo inscrito à hipérbole H limitado pelas abscissas a e b (Figura 48) é dada por:

$$A_{RI} = \frac{1}{b} \cdot (b - a) \Rightarrow A_{RI} = 1 - \frac{a}{b}. \quad (43)$$

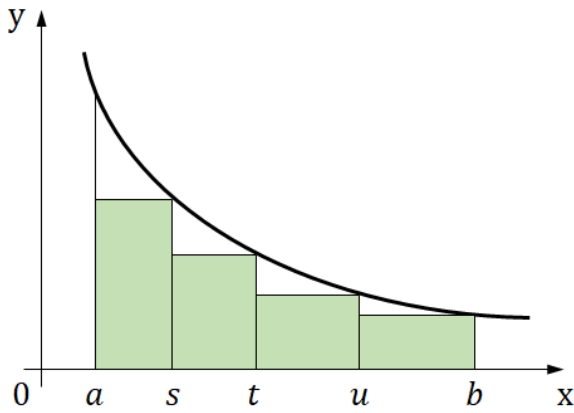


Figura 47: Aproximação da Área(H_a^b) por Polígono Retangular Inscrito

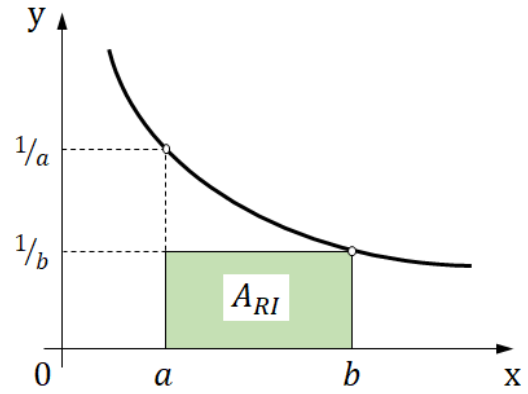


Figura 48: Área do retângulo inscrito à faixa H_a^b

Exemplo 3.1. Um cálculo do valor aproximado da área da faixa H_1^3 por retângulos inscritos, dividindo-se o intervalo $[1, 3]$ em seis intervalos de comprimentos iguais, pode ser feito inicialmente definindo-se os pontos de divisão do intervalo, que são

$$1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3,$$

e, a seguir, somando-se as áreas dos seis retângulos construídos conforme a Figura 49, que corresponde à área A_{PRI} do polígono retangular inscrito a H_1^3 .

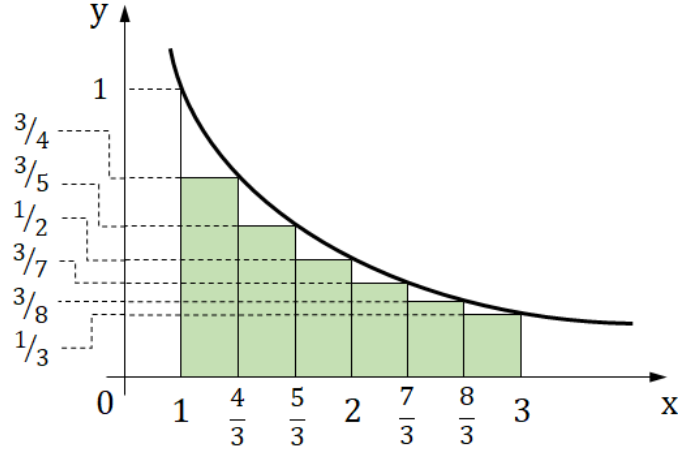


Figura 49: Aproximação da $\text{Área}(H_1^3)$ por Polígono Retangular Inscrito

$$A_{PRI} = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$A_{PRI} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{2.509}{2.520} \Rightarrow A_{PRI} \approx 0,9956 .$$

Observação. O polígono retangular inscrito na faixa H_a^b fornece um valor aproximado por falta para a área de H_a^b , ou seja, chamando-se a sua área de A_{PRI} , tem-se

$$A_{PRI} < \text{Área}(H_a^b) .$$

Para uma aproximação melhor da área de H_a^b , deve-se aumentar a quantidade de divisões do intervalo $[a, b]$.

3.4.2 Aproximação por Retângulos Sobrescritos

O segundo método para se calcular a área de uma faixa H_a^b é o de aproximação por retângulos sobrescritos à hipérbole H . Neste método, são construídos retângulos que tocam a hipérbole H com o vértice superior esquerdo. A reunião desses retângulos será chamada de *polígono retangular sobrescrito* à faixa H_a^b . A área A_{RS} do retângulo sobrescrito à hipérbole H limitado pelas abscissas a e b (Figura 50) é dada por:

$$A_{RS} = \frac{1}{a} \cdot (b - a) \Rightarrow A_{RS} = \frac{b}{a} - 1 . \quad (44)$$

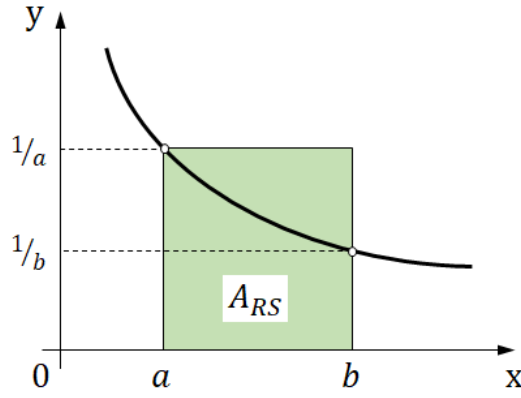


Figura 50: Área do retângulo sobrescrito à faixa H_a^b

Exemplo 3.2. Um valor aproximado da área da faixa H_1^3 por retângulos sobrescritos pode ser calculado dividindo-se o intervalo $[1, 3]$ em seis intervalos de comprimentos iguais, e somando-se as áreas dos seis retângulos construídos conforme a Figura 51, que corresponde à área A_{PRS} do polígono retangular sobrescrito a H_1^3 .

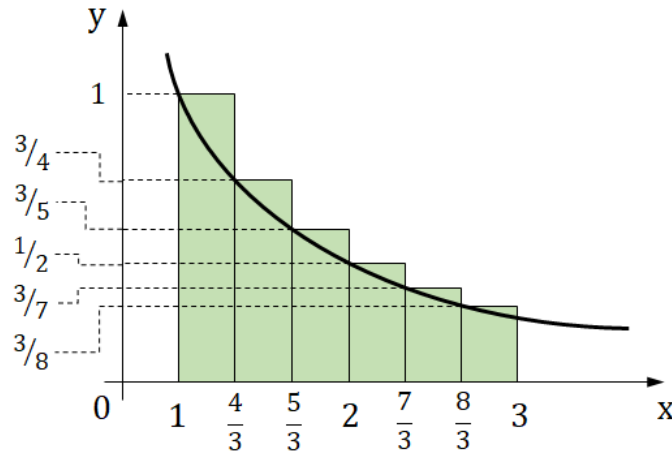


Figura 51: Aproximação da Área(H_1^3) por Polígono Retangular Sobrescrito

$$A_{PRS} = \left(1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$A_{PRS} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1.023}{840} = \frac{341}{280} \Rightarrow A_{PRS} \approx 1,2179 .$$

Observação. O polígono retangular inscrito na faixa H_a^b fornece um valor aproximado por excesso para a área de H_a^b , ou seja, chamando-se a sua área de A_{PRS} , tem-se

$$\text{Área}(H_a^b) < A_{PRS} .$$

3.4.3 Aproximação por Trapézios Secantes

O terceiro método para se calcular a área de uma faixa H_a^b é o de aproximação por trapézios secantes à hipérbole H . Neste método, são construídos trapézios que tocam a hipérbole H com seus vértices superiores. A reunião desses trapézios será chamada de *polígono trapezoidal secante* à faixa H_a^b . A área A_{TS} do trapézio secante à hipérbole H limitado pelas abscissas a e b (Figura 52) é dada por:

$$A_{TS} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{2} \cdot (b - a) = \frac{(b + a)(b - a)}{2ab} = \frac{b^2 - a^2}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab} \right) \Rightarrow$$

$$A_{TS} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) . \quad (45)$$

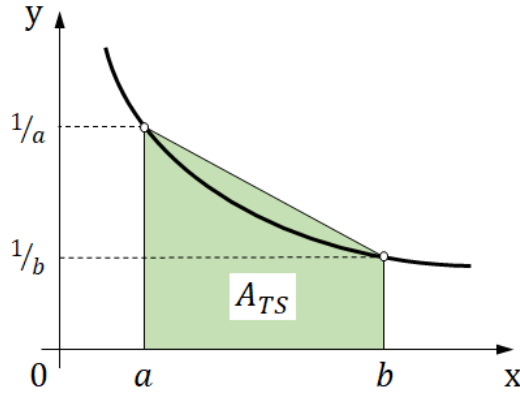


Figura 52: Área do trapézio secante à faixa H_a^b

Exemplo 3.3. Um valor aproximado da área da faixa H_1^3 por trapézios secantes pode ser obtido dividindo-se o intervalo $[1, 3]$ em seis intervalos de comprimentos iguais, e somando-se as áreas dos seis trapézios construídos conforme a Figura 53, que equivale à área A_{PTS} do polígono trapezoidal secante a H_1^3 .

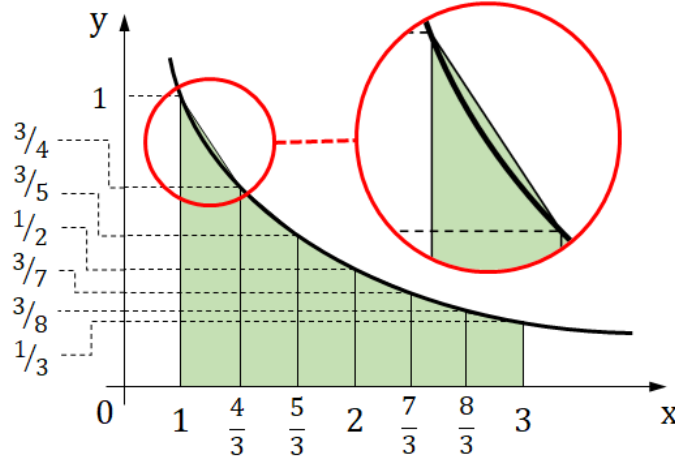


Figura 53: Aproximação da Área(H_1^3) por Polígono Trapezoidal Secante

$$\begin{aligned}
 A_{PTS} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4/3}{1} - \frac{1}{4/3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{5/3}{4/3} - \frac{4/3}{5/3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5/3} - \frac{5/3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{7/3}{2} - \frac{2}{7/3} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{8/3}{7/3} - \frac{7/3}{8/3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8/3} - \frac{8/3}{3} \right) \Rightarrow \\
 A_{PTS} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} - \frac{5}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{6} - \frac{6}{7} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{7} - \frac{7}{8} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{8} - \frac{8}{9} \right) \Rightarrow \\
 A_{PTS} &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{12} + \frac{9}{20} + \frac{11}{30} + \frac{13}{42} + \frac{15}{56} + \frac{17}{72} \right) = \frac{2.789}{2.520} \Rightarrow A_{PTS} \approx 1,1067 .
 \end{aligned}$$

Observação. O polígono trapezoidal secante à faixa H_a^b fornece um valor aproximado por excesso para a área de H_a^b , ou seja, chamando-se a sua área de A_{PTS} , tem-se

$$\text{Área}(H_a^b) < A_{PTS} .$$

3.4.4 Aproximação por Trapézios Tangentes

O quarto método para se calcular a área de uma faixa H_a^b é o de aproximação por trapézios tangentes à hipérbole H . Neste método, são construídos trapézios tangentes à hipérbole H no ponto médio. A reunião desses trapézios será chamada de *polígono trapezoidal tangente* à faixa H_a^b . A área A_{TT} do trapézio tangente à hipérbole H limitado pelas abscissas a e b (Figura 54) é dada por:

$$A_{TT} = \frac{2}{(b+a)} \cdot (b-a) \Rightarrow A_{TT} = 2 \left(\frac{b-a}{b+a} \right) . \quad (46)$$

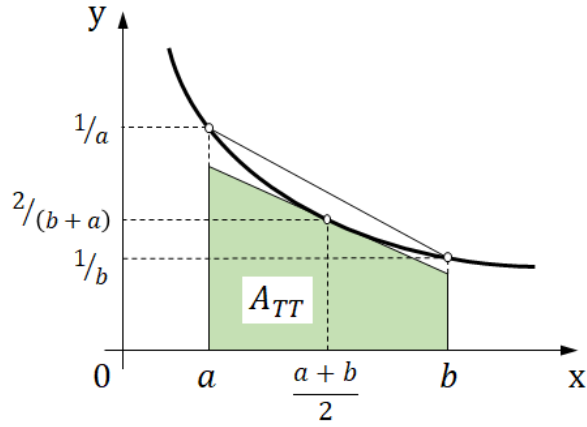


Figura 54: Área do trapézio tangente à faixa H_a^b

Observação. Dado um intervalo $[a, b]$, o segmento secante à hipérbole H nas extremidades de $[a, b]$ e o segmento tangente à hipérbole H no ponto médio de $[a, b]$ não são paralelos, como demonstrado no Apêndice B.

Exemplo 3.4. Um valor aproximado da área da faixa H_1^3 por trapézios tangentes é obtido dividindo-se o intervalo $[1, 3]$ em seis intervalos de comprimentos iguais, e somando-se as áreas dos seis trapézios construídos conforme a Figura 55, que corresponde à área A_{PTT} do polígono trapezoidal tangente a H_1^3 .

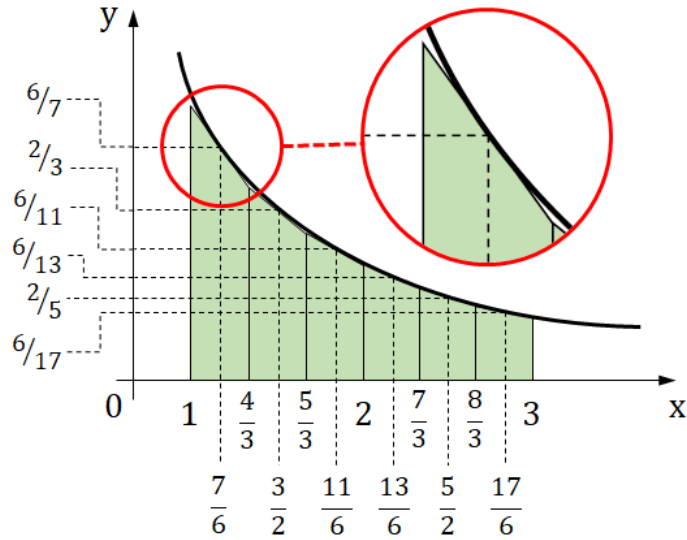


Figura 55: Aproximação da Área(H_1^3) por Polígono Trapezoidal Tangente

$$\begin{aligned}
 A_{PTT} &= 2 \left(\frac{4/3 - 1}{4/3 + 1} \right) + 2 \left(\frac{5/3 - 4/3}{5/3 + 4/3} \right) + 2 \left(\frac{2 - 5/3}{2 + 5/3} \right) + 2 \left(\frac{7/3 - 2}{7/3 + 2} \right) + \\
 &\quad 2 \left(\frac{8/3 - 7/3}{8/3 + 7/3} \right) + 2 \left(\frac{3 - 8/3}{3 + 8/3} \right) \Rightarrow \\
 A_{PTT} &= 2 \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} \right) = \frac{838.192}{765.765} \Rightarrow A_{PTT} \approx 1,0946 .
 \end{aligned}$$

Observação. O polígono trapezoidal tangente na faixa H_a^b fornece um valor aproximado por falta para a área de H_a^b , ou seja, chamando-se a sua área de A_{PTT} , tem-se

$$A_{PTT} < \text{Área}(H_a^b) .$$

3.4.5 Comparativo das Aproximações

Para comparação dos valores aproximados da área da hipérbole H calculados através dos quatro métodos estudados anteriormente, sempre no intervalo $[a, b]$, será utilizada a seguinte nomenclatura, como ilustrado na Figura 56:

- $A \rightarrow$ área da faixa H_a^b da hipérbole
- $A_{RI} \rightarrow$ área do retângulo inscrito na hipérbole H
- $A_{RS} \rightarrow$ área do retângulo sobrescrito à hipérbole H
- $A_{TS} \rightarrow$ área do trapézio secante à hipérbole H
- $A_{TT} \rightarrow$ área do trapézio tangente à hipérbole H

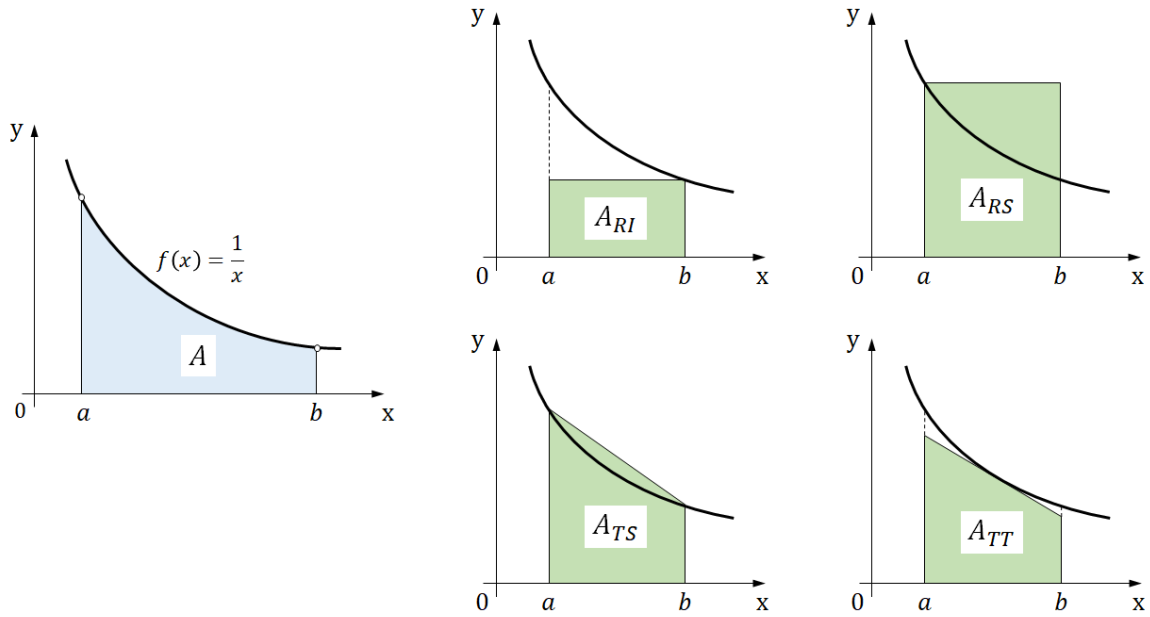


Figura 56: Métodos de aproximação da $\text{Área}(H_a^b)$

Como as aproximações dos Exemplos 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 foram calculadas para o mesmo intervalo $[1, 3]$ da hipérbole H , os resultados demonstram que:

$$A_{RI} < A_{TT} < A < A_{TS} < A_{RS} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{a}{b} < 2 \left(\frac{b-a}{b+a} \right) < A < \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) < \frac{b}{a} - 1 .$$

A desigualdade acima também vale para as áreas dos polígonos, pois todos os membros são multiplicados pela mesma quantidade n de divisões do intervalo $[a, b]$. Sendo assim, tem-se

$$A_{PRI} < A_{PTT} < A < A_{PTS} < A_{PRS} .$$

Mas qual é a melhor aproximação para a área de uma faixa da hipérbole H ?

Primeiramente, é importante lembrar-se que a hipérbole H é *convexa* (concavidade voltada para cima), ou seja, o seu gráfico situa-se abaixo de qualquer uma de suas secantes, dentro do intervalo delimitado pelos pontos de interseção com a secante, como demonstrado no Apêndice C.

Do estudado anteriormente, verifica-se que os trapézios fornecem aproximações melhores que os retângulos. Neste caso, devido à concavidade da hipérbole H , é natural concluir-se que a aproximação por trapézios tangentes é melhor que por trapézios secantes. Para demonstrar essa afirmação, considere-se a Figura 57, que ilustra o segmento secante $\overline{AC}$ e o segmento tangente $\overline{DF}$ à hipérbole H no intervalo $[a, b]$.

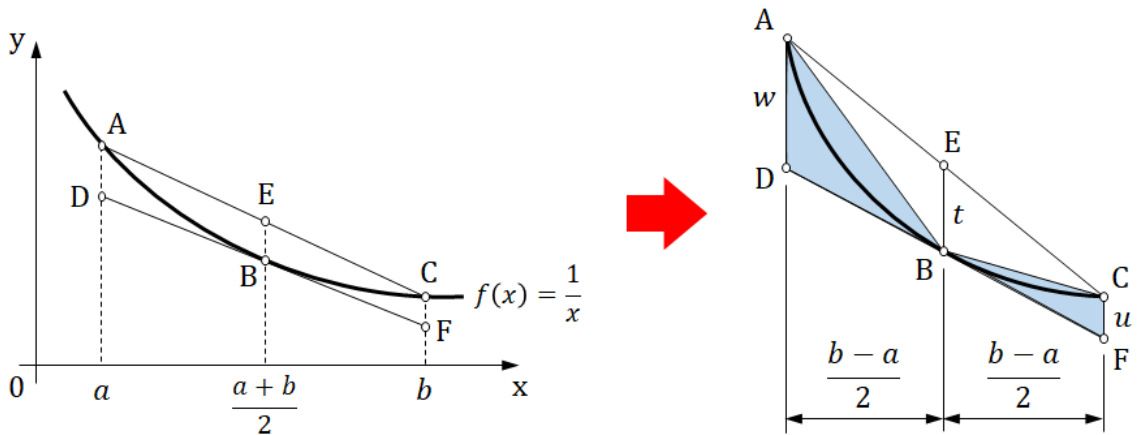


Figura 57: Comportamento dos segmentos secante e tangente à hipérbole H no intervalo $[a, b]$

Sabe-se que B e E são os pontos médios dos segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, e que $\overline{AD} = w$, $\overline{EB} = t$ e $\overline{CF} = u$. Portanto,

$$t = \frac{u + w}{2} \Rightarrow u + w = 2t .$$

Chamando-se a soma das áreas dos triângulos hachurados de A_H , tem-se:

$$A_H = w \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right) + u \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right) = \underbrace{(u+w)}_{=2t} \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right) = 2t \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right) \Rightarrow$$

$$A_H = t \cdot (b-a) .$$

Chamando-se a soma das áreas dos triângulos não-hachurados de A_{NH} , tem-se:

$$A_{NH} = t \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right) + t \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right) = 2t \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right) \Rightarrow A_{NH} = t \cdot (b-a) .$$

Como $A_H = A_{NH}$, conclui-se que a soma das áreas dos triângulos hachurados é igual à dos triângulos não-hachurados. Portanto, a parte do trapézio secante que excede H_a^b tem área maior que a parte que está entre o trapézio tangente e H_a^b .

Seguindo-se o mesmo raciocínio, é correto afirmar que a aproximação por retângulos inscritos é melhor que por retângulos sobrescritos. Na Figura 58, nota-se que o segmento $\overline{AB}$, secante à hipérbole H no intervalo $[a, b]$, também é uma diagonal do retângulo $ACBD$. Isto significa que os triângulos ACB e ADB tem bases iguais a $(b-a)$, alturas iguais a $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$, e, conseqüentemente, áreas iguais a $\frac{(b-a)^2}{2ab}$.

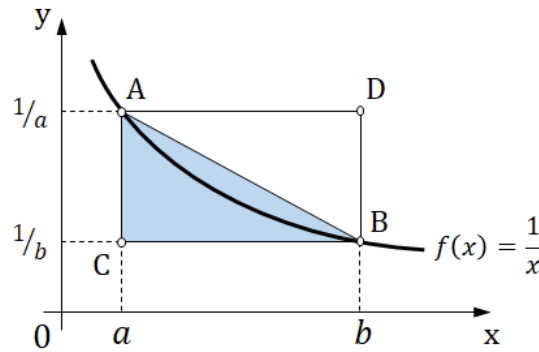


Figura 58: Comportamento dos retângulos inscrito e sobrescrito à hipérbole H no intervalo $[a, b]$

Portanto, a parte do retângulo sobrescrito que excede H_a^b tem área maior que a parte que está entre o retângulo inscrito e H_a^b .

Devido à maior facilidade de cálculo, será utilizada, no decorrer da dissertação, a aproximação por retângulos inscritos.

3.5 A Descoberta de Saint-Vincent

O cálculo da área das faixas da hipérbole H apresenta uma propriedade muito importante, que foi descoberta em 1647 pelo padre jesuíta belga Grégoire de Saint-Vincent (1584 - 1667).

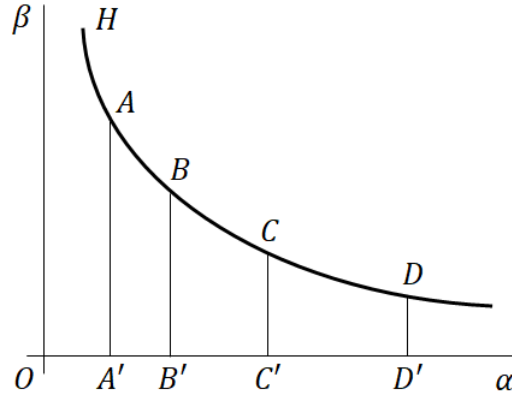


Figura 59: A hipérbole H e suas assíntotas α e β

Em sua proposição, Saint-Vincent tomou a hipérbole H com origem O e assíntotas α e β , conforme a Figura 59, sendo A' , B' , C' e D' pontos em α tais que OA' , OB' , OC' e OD' estão em progressão geométrica (PG), e A , B , C e D pontos em H tais que os segmentos AA' , BB' , CC' e DD' são paralelos a β . A partir desta configuração, Saint-Vincent provou que as áreas $A'ABB'$, $B'BCC'$ e $C'CDD'$ são iguais.

Substituindo-se as assíntotas α e β pelos eixos coordenados x e y , respectivamente, e utilizando-se a notação definida nesta dissertação até aqui, pode-se ilustrar a proposição de Saint-Vincent conforme a Figura 60, onde as abscissas a , ar , ar^2 e ar^3 formam uma PG de razão $r > 1$ (com $r \in \mathbb{R}$), e H_1 , H_2 e H_3 são as áreas das faixas H_a^{ar} , $H_{ar}^{ar^2}$ e $H_{ar^2}^{ar^3}$, respectivamente. Sendo assim, tem-se

$$H_1 = H_2 = H_3 . \quad (47)$$

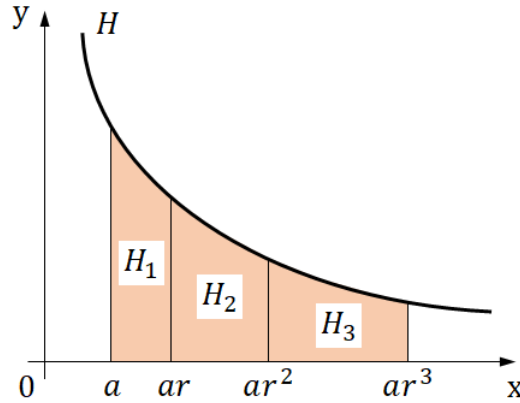


Figura 60: Proposição de Saint-Vincent com a hipérbole H e os eixos coordenados

Para aprofundamento do tema desta seção, recomenda-se a leitura do artigo intitulado “*Gregory of St. Vincent and the Rectangular Hyperbola*” escrito por **Bob Burn**.

3.6 Propriedade Fundamental: Faixas da Hipérbole H de Mesma Área

Nota-se que a proposição de Saint-Vincent se refere às áreas de faixas adjacentes da hipérbole H . Porém, esta proposição também é válida para as áreas de duas faixas não-adjacentes da hipérbole H , desde que atendam ao Teorema 3.3, cuja demonstração fará uso dos Lemas 3.3 e 3.4 a seguir.

Lema 3.3. Para um determinado polígono retangular inscrito em H_a^b , existe sempre um polígono retangular inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área, seja qual for o número real $k > 0$.

Demonstração: Nos gráficos da Figura 61, a área do retângulo inscrito em H_a^b é dada por

$$A = (b - a) \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow A = 1 - \frac{a}{b},$$

enquanto a área do retângulo inscrito em H_{ak}^{bk} é dada por

$$A_k = (bk - ak) \cdot \frac{1}{bk} = 1 - \frac{ak}{bk} \Rightarrow A_k = 1 - \frac{a}{b},$$

ou seja,

$$A = A_k. \quad (48)$$

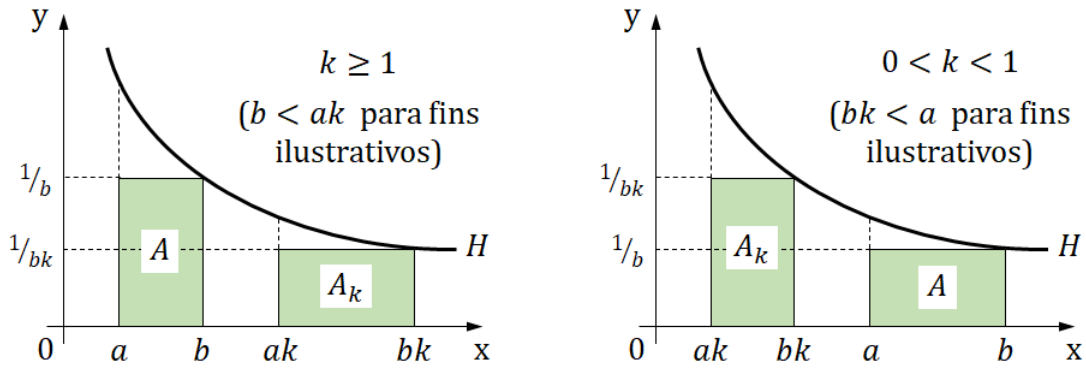


Figura 61: Retângulos inscritos em H_a^b e H_{ak}^{bk}

Considere-se, agora, o polígono retangular P inscrito em H_a^b , definido pelas divisões do intervalo $[a, b]$. Multiplicando-se por k cada uma das abscissas destas divisões determinadas por P , obtém-se um intervalo $[ak, bk]$, com o mesmo número de divisões de $[a, b]$, e que definem assim o polígono retangular P_k inscrito em H_{ak}^{bk} , como ilustrado pelos gráficos da Figura 62.

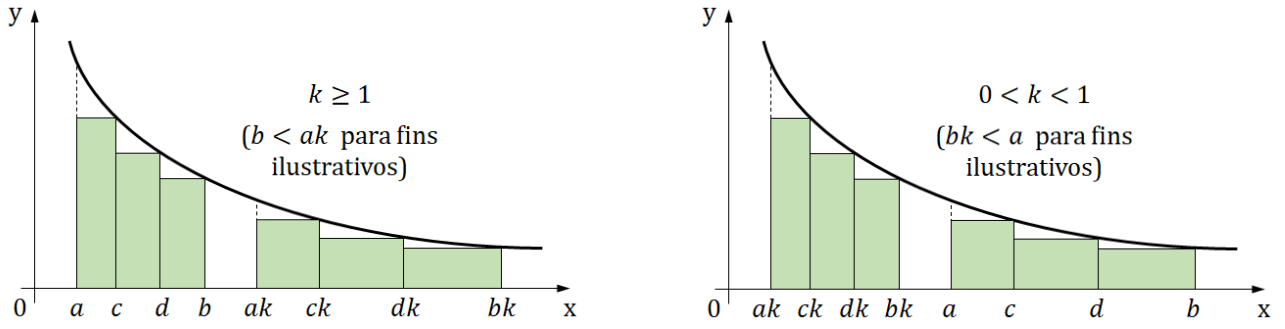


Figura 62: Polígonos Retangulares Inscritos P e P_k

Da igualdade (48), tem-se que a área do retângulo inscrito em H_a^c é igual à do inscrito em H_{ak}^{ck} , e, analogamente, cada um dos demais retângulos que compõem P_k tem a mesma área do retângulo correspondente em P . Portanto, a área de P_k é igual à de P , e conclui-se que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b , existe um correspondente inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área. $\square$

Observação. De forma totalmente análoga, pode-se demonstrar que o Lema 3.3 também é válido para retângulos sobrescritos, trapézios secantes e trapézios tangentes à hipérbole H .

Lema 3.4. Seja dado o polígono retangular P_n inscrito na faixa da hipérbole H_a^b , obtido dividindo-se o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais entre si, e, portanto, formado por n retângulos. Quando n tende a infinito, a área de P_n tende à área de H_a^b .

Demonstração: Na Figura 63, que ilustra o polígono retangular P_n , o gráfico de H_a^b está abaixo do segmento secante $\overline{PQ}$, visto que a hipérbole H é convexa (vide Apêndice C). Logo, o mesmo vale para os demais retângulos que compõem P_n .

Tome-se agora o triângulo PQR , retângulo em R , e delimitado pelo segmento $\overline{PQ}$ secante a H_a^b e pelo topo do retângulo de P_n inscrito em H_a^b no intervalo $[a + (i - 1) \cdot \theta_n, a + i \cdot \theta_n]$. Chamando-se ε_i a área de PQR e θ_n o comprimento de cada subintervalo de P_n , então

$$\varepsilon_i = \frac{\theta_n}{2} \cdot \left[\frac{1}{a + (i - 1) \cdot \theta_n} - \frac{1}{a + i \cdot \theta_n} \right], \quad \text{onde} \quad \theta_n = \frac{b - a}{n}.$$

Somando-se as áreas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ dos triângulos retângulos definidos pelo topo de cada um dos n retângulos de P_n e suas respectivas secantes, tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_n}{2} \cdot \left[\frac{1}{a + (i - 1) \cdot \theta_n} - \frac{1}{a + i \cdot \theta_n} \right] \Rightarrow \\ \varepsilon &= \frac{\theta_n}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + \theta_n} \right) + \left(\frac{1}{a + \theta_n} - \frac{1}{a + 2\theta_n} \right) + \left(\frac{1}{a + 2\theta_n} - \frac{1}{a + 3\theta_n} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{a + (n - 2)\theta_n} - \frac{1}{a + (n - 1)\theta_n} \right] + \left[\frac{1}{a + (n - 1)\theta_n} - \frac{1}{b} \right] \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{\theta_n}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow \varepsilon = \frac{(b-a)^2}{2ab} \cdot \frac{1}{n}.$$

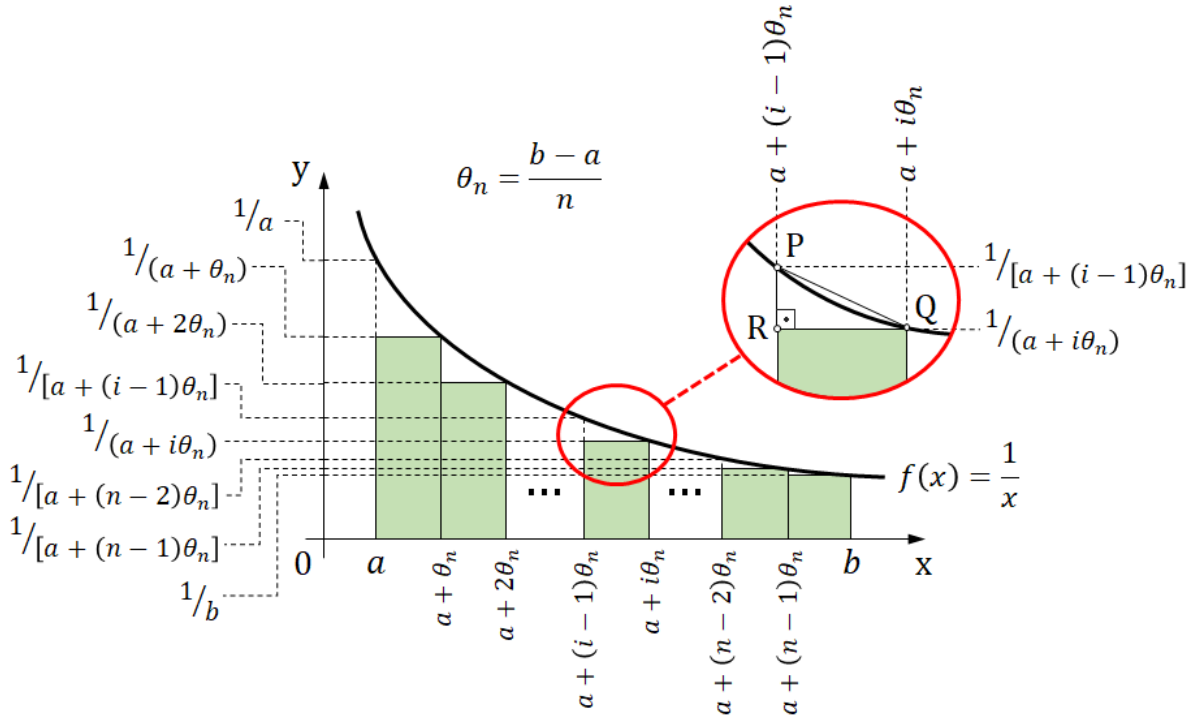


Figura 63: Polígono retangular P_n inscrito em H_a^b

Considerando-se s_H a área de H_a^b e s_n a área de P_n , tem-se

$$0 \leq s_H - s_n \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq s_H - s_n \leq \frac{(b-a)^2}{2ab} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow -s_H \leq -s_n \leq \frac{(b-a)^2}{2ab} \cdot \frac{1}{n} - s_H \Rightarrow$$

$$s_H - \frac{(b-a)^2}{2ab} \cdot \frac{1}{n} \leq s_n \leq s_H. \quad (49)$$

Aplicando-se, à desigualdade (49), os conceitos de limites infinitos abordados na Seção D.3.7 do Apêndice D, e considerando-se o Teorema do Confronto (Subseção D.3.5 do Apêndice D), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[s_H - \frac{(b-a)^2}{2ab} \cdot \frac{1}{n} \right] \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq s_H \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_H - \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(b-a)^2}{2ab} \cdot \frac{1}{n} \right]}_{=0} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq s_H \Rightarrow$$

$$s_H \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq s_H \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s_H. \quad \square$$

Teorema 3.3. Seja qual for o número real $k > 0$, as faixas da hipérbole H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Demonstração: Seja dado o polígono retangular P_n inscrito em H_a^b descrito no Lema 3.4, e considere-se o polígono retangular P_{nk} inscrito em H_{ak}^{bk} , obtido dividindo-se o intervalo $[ak, bk]$ em n intervalos iguais entre si. Chamando-se

$$s_n = \text{Área}(P_n) , \quad s_{nk} = \text{Área}(P_{nk}) , \quad s_H = \text{Área}(H_a^b) \quad \text{e} \quad s_{Hk} = \text{Área}(H_{ak}^{bk}) ,$$

então, pelo Lema 3.4, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s_H \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{nk} = s_{Hk} .$$

De acordo com o Lema 3.3, tem-se que

$$\text{Área}(P_n) = \text{Área}(P_{nk}) \Rightarrow s_n = s_{nk} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{nk} = s_H .$$

Como, pela Unicidade do Limite (Teorema D.1), uma sequência não pode convergir para dois limites distintos, então

$$s_H = s_{Hk} . \quad \square$$

Observação. Uma consequência do Teorema 3.3 é que se pode restringir os cálculos das áreas às faixas da forma H_1^c , visto que:

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_1^{b/a}) = \text{Área}(H_1^c) , \quad \text{onde} \quad c = \frac{b}{a} .$$

Exemplo 3.5. A área da faixa H_{160}^{480} é a igual à da faixa H_1^3 , pois, pelo Teorema 3.3, tem-se

$$\text{Área}(H_{160}^{480}) = \text{Área}(H_{1 \times 160}^{3 \times 160}) = \text{Área}(H_1^3) .$$

Pelo gráfico da Figura 64, se $a < b < c$, tem-se:

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c) . \quad (50)$$

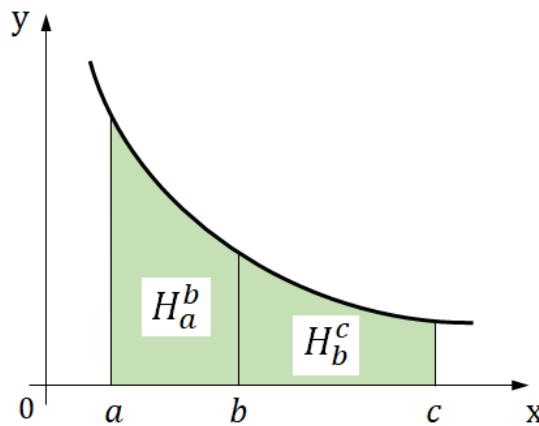


Figura 64: Áreas de H_a^b e H_b^c

Para que a igualdade (50) seja válida para quaisquer a , b e c reais positivos, serão adotadas as convenções (51) e (52).

$$\text{Área}(H_a^a) = 0 \quad (51)$$

$$\text{Área}(H_b^a) = -\text{Área}(H_a^b) \quad (52)$$

Se $b < c < a$, aplicando-se as convenções (51) e (52), tem-se:

$$\text{Área}(H_b^c) + \text{Área}(H_c^a) = \text{Área}(H_b^a) \Rightarrow \text{Área}(H_b^c) - \text{Área}(H_a^c) = -\text{Área}(H_a^b) \Rightarrow$$

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c) ,$$

ou seja, a igualdade (50) permanece válida.

3.7 A Relação entre a Hipérbole H e os Logaritmos

Em 1649, o também padre jesuíta belga Alphonse Antonio de Sarasa (1618 - 1667), baseando-se na proposição de Grégoire de Saint-Vincent (seu professor na Ordem Jesuíta), apresentada na Seção 3.5, fez uma importante observação ao estudar a hipérbole H , descrita na sequência com a notação definida nesta dissertação até aqui.

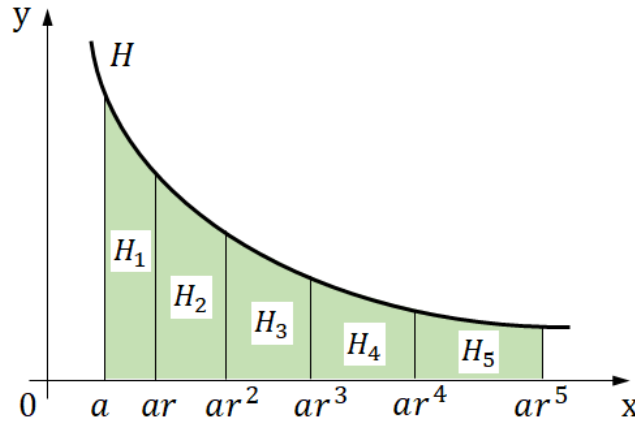


Figura 65: Configuração da hipérbole H por de Sarasa

Seja dada a hipérbole H conforme a Figura 65 anterior, onde H_1 , H_2 , H_3 , H_4 e H_5 são as áreas das faixas delimitadas pelos intervalos $[a, ar]$, $[ar, ar^2]$, $[ar^2, ar^3]$, $[ar^3, ar^4]$ e $[ar^4, ar^5]$ da hipérbole H , respectivamente, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 1$.

Como as abscissas a , ar , ar^2 , ar^3 , ar^4 e ar^5 formam uma PG de razão r , então, de acordo com o Teorema 3.3, as áreas H_1 , H_2 , H_3 , H_4 e H_5 são iguais, ou seja,

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = H_5 ,$$

sendo possível estabelecer a relação apresentada na Tabela 6.

Tabela 6: Relação entre abscissas e áreas sob a hipérbole H

Divisões do Intervalo	x (PG)	Área (H_a^x) (PA)
0	a	0
1	ar	H_1
2	ar^2	$H_1 + H_2 = 2H_1$
3	ar^3	$H_1 + H_2 + H_3 = 3H_1$
4	ar^4	$H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = 4H_1$
5	ar^5	$H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 = 5H_1$

Como as áreas das faixas H_a^x formam uma PA de razão H_1 , de Sarasa percebeu a relação logarítmica entre os valores das abscissas e as áreas das faixas da hipérbole H , conforme valores da Tabela 7.

Tabela 7: Relação logarítmica na hipérbole H

Valor (PG)	Logaritmo (PA)
a	0
ar	H_1
ar^2	$2H_1$
ar^3	$3H_1$
ar^4	$4H_1$
ar^5	$5H_1$

Para aprofundamento do tema desta seção, recomenda-se a leitura do artigo intitulado “*Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms*” escrito por R. P. Burn.

3.8 O Logaritmo Natural

Na Tabela 7 anterior, fazendo-se $a = 1$, fica estabelecida uma relação logarítmica específica, chamada de **logaritmo natural** (ou **logaritmo hiperbólico**), definido a seguir.

Definição. Dado um número real x positivo, define-se o *logaritmo natural* de x , ou $\ln x$, como a área da faixa H_1^x , ou seja:

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x) . \quad (53)$$

A igualdade (53) pode ser representada graficamente através da Figura 66.

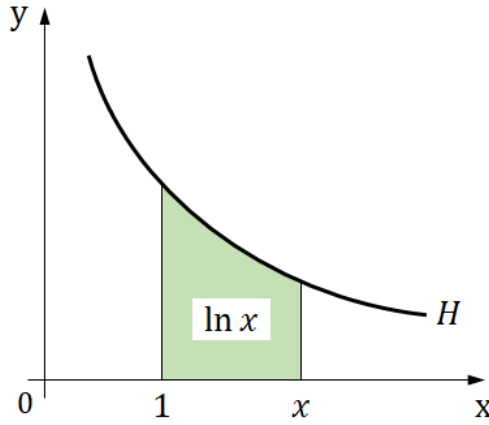


Figura 66: Representação gráfica do Logaritmo Natural

Pelas convenções (51) e (52) definidas anteriormente, tem-se:

- Se $x = 1$: $\text{Área}(H_1^1) = 0 \Rightarrow \ln 1 = 0$
- Se $x > 1$: $\text{Área}(H_1^x) > 0 \Rightarrow \ln x > 0$
- Se $0 < x < 1$: $\text{Área}(H_1^x) < 0 \Rightarrow \ln x < 0$

Exemplo 3.6. *Pela igualdade (53), tem-se*

$$\ln 3 = \text{Área}(H_1^3) . \quad (54)$$

No Exemplo 3.3 da Seção 3.4.3, foi calculada uma aproximação da área de H_1^3 por trapézios secantes, denominada A_{PTS} , onde:

$$A_{PTS} \approx 1,1067 .$$

No Exemplo 3.4 da Seção 3.4.4, calculou-se uma aproximação da área de H_1^3 por trapézios tangentes, denominada A_{PTT} , onde:

$$A_{PTT} \approx 1,0946 .$$

Como $A_{PTT} < \text{Área}(H_1^3) < A_{PTS}$, então

$$1,0946 < \text{Área}(H_1^3) < 1,1067 ,$$

e, portanto, pela igualdade (54), tem-se

$$1,0946 < \ln 3 < 1,1067 . \quad (55)$$

Definição. A função real $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ faz corresponder, a cada número real $x > 0$, o seu logaritmo natural $\ln x$.

Teorema 3.4. A função definida por $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

Demonstração: Para provar este teorema, deve-se mostrar que a função $\ln x$ satisfaz as Propriedades Fundamentais (A) e (B) que definem uma função logarítmica, apresentadas na Seção 3.1. Inicialmente, tome-se os pontos de abscissa 1, x e xy , onde $x, y > 0$. Sendo assim, tem-se:

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_x^{xy}) . \quad (56)$$

Pelo Teorema 3.3, sabe-se que:

$$\text{Área}(H_x^{xy}) = \text{Área}(H_{x \cdot 1}^{x \cdot y}) = \text{Área}(H_1^y) . \quad (57)$$

Substituindo-se (57) em (56), tem-se:

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_1^y) . \quad (58)$$

Aplicando-se a igualdade (53) à equação (58), tem-se:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y , \quad (59)$$

que corresponde à *Propriedade Fundamental* (A).

A seguir, tome-se $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $x < y$. Isso significa que existe um número $c > 1$ tal que $y = cx$. Sendo assim, por (59), tem-se

$$\ln y = \ln(cx) \Rightarrow \ln y = \ln c + \ln x . \quad (60)$$

Como $c > 1$, então $\ln c > 0$, que implica em $\ln x > \ln y$. Portanto, a função $f(x) = \ln x$ é *monótona crescente*, e atende à *Propriedade Fundamental* (B). $\square$

Resultam do Teorema 3.4 as seguintes propriedades, também apresentadas na Seção 3.1, onde $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ e $r \in \mathbb{R}$:

- Propriedade 4: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- Propriedade 5: $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- Propriedade 6: $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$

Exemplo 3.7. Dados $\ln 2 \approx 0,6931$ e $\ln 3 \approx 1,0986$, calcula-se $\ln\left(\frac{27\sqrt{12}}{128}\right)$ utilizando-se as propriedades de logaritmos, da seguinte forma:

$$\ln\left(\frac{27\sqrt{12}}{128}\right) = \ln\left(\frac{3^3\sqrt{2^2 \cdot 3}}{2^7}\right) = \ln\left(\frac{3^3 \cdot 2\sqrt{3}}{2^7}\right) = \ln\left(\frac{3^3\sqrt{3}}{2^6}\right) = \ln(3^3\sqrt{3}) - \ln 2^6 =$$

$$\ln 3^3 + \ln 3^{1/2} - \ln 2^6 = 3 \cdot \ln 3 + \frac{\ln 3}{2} - 6 \cdot \ln 2 = \frac{7}{2} \cdot \ln 3 - 6 \cdot \ln 2 \approx$$

$$\frac{7}{2} \cdot 1,0986 - 6 \cdot 0,6931 = 3,8451 - 4,1586 = -0,3135 \Rightarrow$$

$$\ln \left(\frac{27\sqrt{12}}{128} \right) \approx -0,3135 .$$

3.9 O Gráfico da Função Logaritmo Natural

Pelas propriedades definidas na Seção 3.1, a função logarítmica $f(x) = \ln x$ é crescente, ilimitada superior e inferiormente, bijetora, e, portanto, seu gráfico está contido no primeiro e no quarto quadrantes do plano cartesiano.

Pontos de Interseção. Sendo $\mathbb{R}_+^*$ o domínio da função $f(x) = \ln x$, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x)$ pois,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty, \quad (*)$$

e, desta forma, o gráfico da função $f(x)$ não intercepta o eixo y .

(*) Vide Seção D.7 do Apêndice D para o estudo de limites laterais.

Considerando-se a Propriedade 2 da Seção 3.1, a abscissa do ponto de interseção entre o gráfico de $f(x) = \ln x$ e o eixo x é dada por

$$f(x) = 0 \iff x = 1 .$$

Concavidade. Seja dada a reta $s(x)$, secante à curva $f(x)$ nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, onde $a < x < b$ e $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Para se descobrir a concavidade do gráfico de f , tome-se o gráfico da hipérbole H no intervalo $[a, b]$, conforme a Figura 67.

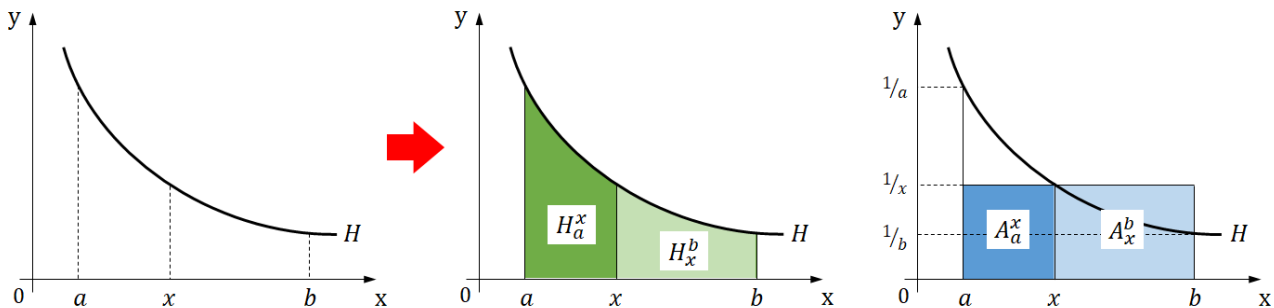


Figura 67: Área da faixas H_a^x e H_x^b da hipérbole H e dos retângulos A_a^x e A_x^b no intervalo $[a, b]$

Seja H_a^x a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[a, x]$, e A_a^x a área do retângulo inscrito

na hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(x - a)$ e altura $\frac{1}{x}$, onde:

$$\begin{cases} H_a^x = H_1^x - H_1^a = \ln x - \ln a \\ A_a^x = (x - a) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - a}{x} \end{cases} \quad (61)$$

Pela Figura 67, e a partir de (61), tem-se:

$$H_a^x \geq A_a^x \quad \Rightarrow \quad \ln x - \ln a \geq \frac{x - a}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \geq \frac{1}{x} \quad (62)$$

Considere-se agora H_x^b a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[x, b]$, e A_x^b a área do retângulo sobrescrito à hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(b - x)$ e altura $\frac{1}{x}$, onde:

$$\begin{cases} H_x^b = H_1^b - H_1^x = \ln b - \ln x \\ A_x^b = (b - x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{b - x}{x} \end{cases} \quad (63)$$

Pela Figura 67, e a partir de (63), tem-se:

$$H_x^b \leq A_x^b \quad \Rightarrow \quad \ln b - \ln x \leq \frac{b - x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln b - \ln x}{b - x} \leq \frac{1}{x} \quad (64)$$

Comparando-se as desigualdades (62) e (64), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\ln b - \ln x}{b - x} \leq \frac{1}{x} &\leq \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln b - \ln x}{b - x} \leq \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad \Rightarrow \\ (x - a) \cdot (\ln b - \ln x) &\leq (b - x) \cdot (\ln x - \ln a) \quad \Rightarrow \\ x \ln b - x \ln x - a \ln b + a \ln x &\leq b \ln x - b \ln a - x \ln x + x \ln a \quad \Rightarrow \\ x \ln b - x \ln a - a \ln b &\leq b \ln x - a \ln x - b \ln a \quad \xRightarrow{+a \ln a} \\ x \ln b - x \ln a - a \ln b + \underline{a \ln a} &\leq b \ln x - a \ln x - b \ln a + \underline{a \ln a} \quad \Rightarrow \\ x (\ln b - \ln a) - a (\ln b - \ln a) &\leq (b - a) \ln x - (b - a) \ln a \quad \Rightarrow \\ (x - a) \cdot (\ln b - \ln a) &\leq (b - a) \cdot (\ln x - \ln a) \quad \Rightarrow \\ \ln x &\geq \ln a + \left(\frac{\ln b - \ln a}{b - a} \right) (x - a) . \end{aligned} \quad (65)$$

Pela equação (12) da Subseção 2.3.11, tem-se

$$s(x) = \ln a + \left(\frac{\ln b - \ln a}{b - a} \right) (x - a) , \quad (66)$$

que é a equação da reta $s(x)$ secante à curva da função $f(x) = \ln x$ nos pontos $A(a, \ln a)$ e $B(b, \ln b)$.

Substituindo-se (66) em (65), tem-se $\ln x \geq s(x)$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, e, portanto, pode-se concluir que a função $f(x) = \ln x$ é *côncava*.

Gráfico. O gráfico da função logaritmo natural está representado na Figura 68.

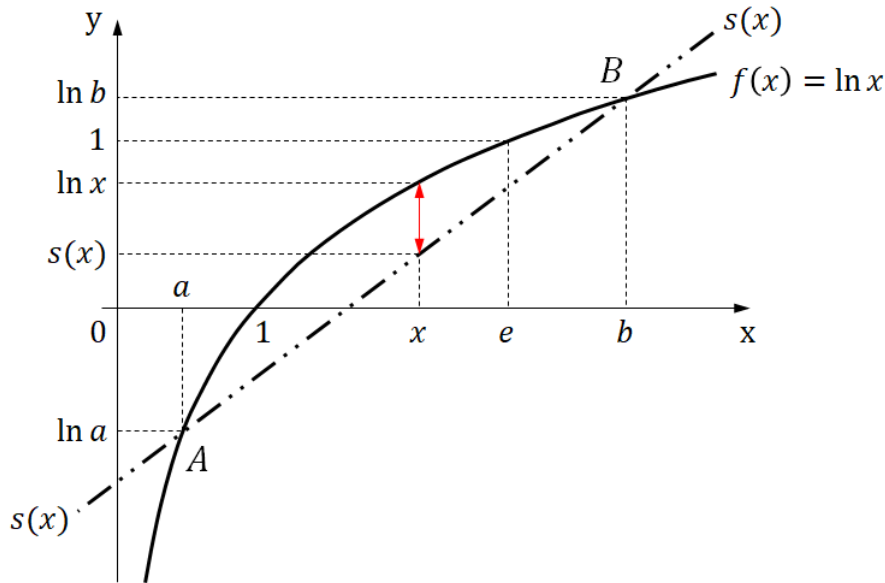


Figura 68: Gráfico da função Logaritmo Natural

3.10 O Número e

Pelo Teorema 3.2, existe apenas um número real positivo tal que o seu logaritmo natural seja igual a 1. Este número é a *base* do sistema de logaritmos naturais e é expresso pela letra e . Em outras palavras, pode-se dizer que:

$$\text{Área}(H_1^e) = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln e = 1. \quad (67)$$

Graficamente, pode-se representar a igualdade (67) através dos gráficos da Figura 69.

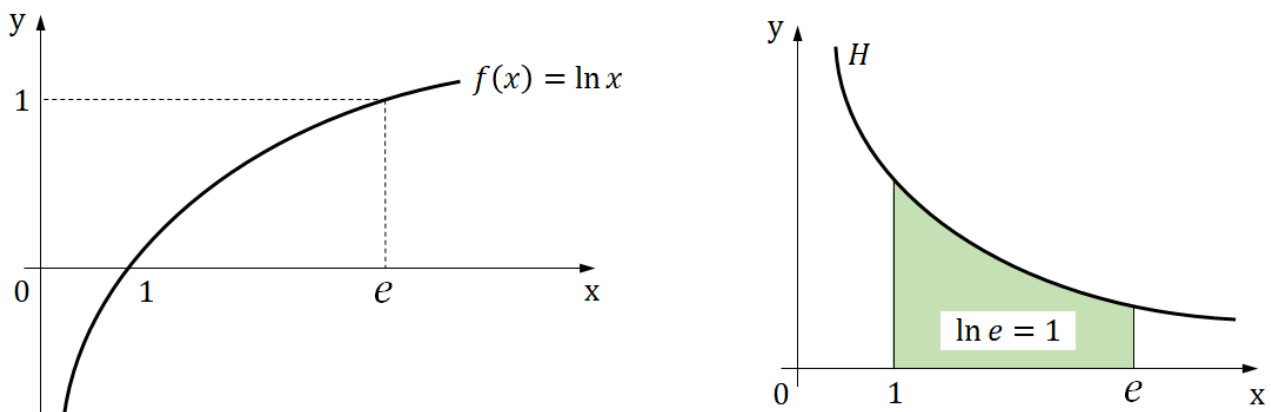


Figura 69: Representações gráficas de $\ln e = 1$

Pela desigualdade (55) da Seção 3.8, tem-se:

$$\ln 3 > 1 . \quad (68)$$

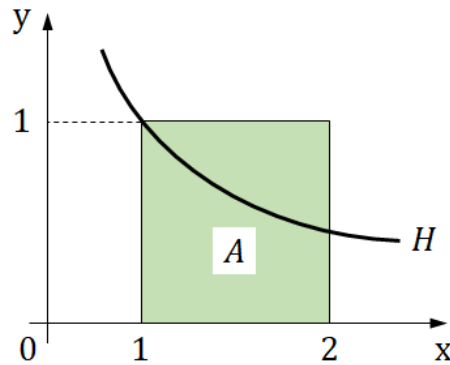


Figura 70: Aproximação da $\text{Área}(H_1^2)$ por retângulo sobrescrito

Do gráfico da Figura 70, e considerando-se A como a área do retângulo sobrescrito à faixa H_1^2 , tem-se:

$$\text{Área}(H_1^2) < A \Rightarrow \text{Área}(H_1^2) < (2 - 1) \cdot 1 \Rightarrow \text{Área}(H_1^2) < 1 \Rightarrow \ln 2 < 1 . \quad (69)$$

Comparando-se os resultados de (68) e (69), e considerando-se a igualdade (67), pode-se concluir que:

$$\ln 2 < 1 < \ln 3 \Rightarrow \ln 2 < \ln e < \ln 3 \Rightarrow 2 < e < 3 . \quad (70)$$

4 A Função Exponencial

O objetivo deste Capítulo 4 é definir e estudar a função exponencial, em especial a função $f(x) = e^x$.

Na Seção 4.1, define-se a função exponencial e apresenta-se suas propriedades fundamentais.

Na Seção 4.2, a exponencial e^x é definida e estudada a partir do gráfico da hipérbole H , e a função exponencial $f(x) = e^x$ é definida e estudada a partir das propriedades estabelecidas na Seção 4.1.

Na Seção 4.3, estuda-se o comportamento da função exponencial e^x através do seu gráfico.

4.1 Definição e Propriedades

Definição. Uma bijeção $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ denomina-se uma **função exponencial** quando sua inversa $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica, ou seja:

$$E(x) = L^{-1}(x) . \quad (71)$$

O número $E(x)$ chama-se **exponencial de x** , para todo $x \in \mathbb{R}$.

Da definição, decorrem as seguintes propriedades:

$$\textbf{Propriedade 1.} \quad E(x + y) = E(x) \cdot E(y) \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R} . \quad (72)$$

Demonstração: A Propriedade Fundamental (A) de funções logarítmicas (Seção 3.1) é definida pela igualdade (19), ou seja, $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Pela igualdade (71), tem-se:

$$\begin{cases} L(x) = u & \Longleftrightarrow & x = L^{-1}(u) = E(u) \\ L(y) = v & \Longleftrightarrow & y = L^{-1}(v) = E(v) \end{cases} . \quad (73)$$

Substituindo-se (73) em (19), e aplicando-se a igualdade (71), tem-se:

$$\begin{aligned} L(xy) = L(x) + L(y) & \Rightarrow L(xy) = u + v \Rightarrow L^{-1}[L(xy)] = L^{-1}(u + v) \Rightarrow \\ xy = L^{-1}(u + v) & \Rightarrow E(u) \cdot E(v) = \underbrace{L^{-1}(u + v)}_{E(u+v)} \Rightarrow E(u + v) = E(u) \cdot E(v) , \end{aligned}$$

que equivale a $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$. □

Propriedade 2. A função E é crescente quando sua inversa L for crescente, e é decrescente

quando L for decrescente.

Demonstração: Se L for crescente, então, pela Propriedade Fundamental (B) das funções logarítmicas (Seção 3.1), tem-se:

$$x < y \iff L(x) < L(y) . \quad (74)$$

Substituindo-se (73) em (74), tem-se:

$$E(u) < E(v) \iff u < v ,$$

ou seja, a função exponencial E é crescente quando sua inversa L for crescente.

Por outro lado, se L for decrescente, então, pela Propriedade Fundamental (B) das funções logarítmicas, tem-se:

$$x < y \iff L(x) > L(y) . \quad (75)$$

Substituindo-se (73) em (75), tem-se:

$$E(u) < E(v) \iff u > v ,$$

ou seja, a função exponencial E é decrescente quando sua inversa L for decrescente. $\square$

Propriedade 3. *A exponencial de zero é igual a 1.*

Demonstração: Tome-se $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$. Como o contradomínio da função exponencial E é $\mathbb{R}_+^*$, então $E(x) > 0$, e sendo bijetora por definição, então $E(b) \neq E(0)$. Sendo assim, pela Propriedade 2 desta Seção 4.1, tem-se:

$$E(b) = E(b + 0) \Rightarrow E(b) = E(b) \cdot E(0) \Rightarrow E(0) = 1 . \quad \square$$

Propriedade 4. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$.*

Demonstração: Pelas Propriedades 1 e 3 desta Seção 4.1, tem-se:

$$\underbrace{E(0)}_{=1} = E(x - x) = \underbrace{E[x + (-x)]}_{E(x) \cdot E(-x)} \Rightarrow 1 = E(x) \cdot E(-x) \Rightarrow E(-x) = \frac{1}{E(x)} . \quad \square$$

Propriedade 5. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $E(x - y) = \frac{E(x)}{E(y)}$.*

Demonstração: Pelas Propriedades 1 e 4 desta Seção 4.1, tem-se:

$$E(x - y) = E[x + (-y)] = E(x) \cdot E(-y) = E(x) \cdot \frac{1}{E(y)} \Rightarrow E(x - y) = \frac{E(x)}{E(y)} . \quad \square$$

Propriedade 6. Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo número real r , tem-se $E(rx) = [E(x)]^r$.

Demonstração: Para se demonstrar esta propriedade, inicialmente deve-se observar que a Propriedade 1 desta Seção 4.1 vale para um número qualquer de parcelas. Por exemplo:

$$E(x + y + z) = E[(x + y) + z] = E(x + y) \cdot E(z) = E(x) \cdot E(y) \cdot E(z) .$$

(i) Para $r = n$, com $n \in \mathbb{N}$, e pela Propriedade 1 desta Seção 4.1, tem-se:

$$E(nx) = E(\underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ parcelas}}) = \underbrace{E(x) \cdot E(x) \cdot \dots \cdot E(x)}_{n \text{ fatores}} \Rightarrow E(nx) = [E(x)]^n$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a Propriedade 6 vale quando r é um **número natural**.

(ii) Para $r = 0$, e pela Propriedade 3 desta Seção 4.1, tem-se:

$$0 \cdot x = 0 \Rightarrow E(0 \cdot x) = E(0) = 1 \Rightarrow E(0 \cdot x) = [E(x)]^0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a Propriedade 6 vale quando r é **nulo**.

(iii) Para $r = -n$, com $n \in \mathbb{N}$, e pelas Propriedades 1 e 4 desta Seção 4.1, tem-se:

$$\begin{aligned} nx + (-n)x &= 0 \Rightarrow E[nx + (-n)x] = E(0) \Rightarrow E(nx) \cdot E[(-n)x] = 1 \Rightarrow \\ E[(-n)x] &= \frac{1}{E(nx)} \Rightarrow E[(-n)x] = \frac{1}{[E(x)]^n} \Rightarrow E[(-n)x] = [E(x)]^{-n} \Rightarrow \\ E(rx) &= [E(x)]^r \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a Propriedade 6 vale quando r é um **número inteiro**.

(iv) Para $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, e considerando-se que esta Propriedade 6 é válida para p inteiro e q natural, tem-se:

$$q(rx) = px \Rightarrow E[q(rx)] = E(px) \Rightarrow [E(rx)]^q = [E(x)]^p \Rightarrow$$

$$E(rx) = [E(x)]^{p/q} \Rightarrow E(rx) = [E(x)]^r$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a Propriedade 6 vale quando r é um **número racional**.

(v) Para se demonstrar que a Propriedade 6 é válida para $r = \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, considere-se α escrito no formato da igualdade (20) da Seção 3.1, ou seja,

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots ,$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_n \leq 9$.

Considere-se também o número racional α_n , que pode ser representado no formato da igual-

dade (21) da Seção 3.1, ou seja,

$$\alpha_n = a_0, \quad a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right),$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $j, n \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_j \leq 9$.

Sabe-se, pela desigualdade (24) da Seção 3.1, que

$$a_0 \leq \alpha_n \leq a_0 + 1. \quad (76)$$

A relação entre α e α_n é definida pela igualdade (25), demonstrada na Propriedade 6 da Seção 3.1, ou seja,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n. \quad (77)$$

Sendo $x \in \mathbb{R}$ fixado, inicialmente admitamos $x \neq 0$. Nesta situação, se a função E é *crescente*, considerando-se o item (iii) desta Propriedade 6, e multiplicando-se os membros da desigualdade (76) por x , tem-se

- para $x > 0$, $a_0 \cdot x \leq \alpha_n \cdot x \leq (a_0 + 1) \cdot x \Rightarrow$

$$E(a_0 \cdot x) \leq E(\alpha_n \cdot x) \leq E[(a_0 + 1) \cdot x] \Rightarrow$$

$$[E(x)]^{a_0} \leq E(\alpha_n \cdot x) \leq [E(x)]^{a_0+1},$$
- para $x < 0$, $a_0 \cdot x \geq \alpha_n \cdot x \geq (a_0 + 1) \cdot x \Rightarrow$

$$E(a_0 \cdot x) \geq E(\alpha_n \cdot x) \geq E[(a_0 + 1) \cdot x] \Rightarrow$$

$$[E(x)]^{a_0} \geq E(\alpha_n \cdot x) \geq [E(x)]^{a_0+1},$$

se E é *decrecente*, tem-se

- para $x > 0$, $a_0 \cdot x \leq \alpha_n \cdot x \leq (a_0 + 1) \cdot x \Rightarrow [E(x)]^{a_0} \geq E(\alpha_n \cdot x) \geq [E(x)]^{a_0+1},$
- para $x < 0$, $a_0 \cdot x \geq \alpha_n \cdot x \geq (a_0 + 1) \cdot x \Rightarrow [E(x)]^{a_0} \leq E(\alpha_n \cdot x) \leq [E(x)]^{a_0+1},$

e, para $x = 0$, tem-se

$$a_0 \cdot x = \alpha_n \cdot x = (a_0 + 1) \cdot x = 0 \Rightarrow E(a_0 \cdot x) = E(\alpha_n \cdot x) = E[(a_0 + 1) \cdot x] = 1.$$

Nota-se, portanto, que, em todos estes casos, a sequência (k_n) definida por $k_n = E(\alpha_n \cdot x)$ é limitada.

Assim como previsto na Propriedade 6 da Seção 3.1, as demonstrações a seguir serão feitas para α_n positivo, de forma que, se α_n for negativo, basta-se inverter os sinais das desigualdades onde se fizer necessário. Para α_n positivo, tem-se que $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$. Logo, se E é *crescente*, tem-se

- para $x > 0$, $\alpha_n \cdot x \leq \alpha_{n+1} \cdot x \Rightarrow E(\alpha_n \cdot x) \leq E(\alpha_{n+1} \cdot x)$,

- para $x < 0$, $\alpha_n \cdot x \geq \alpha_{n+1} \cdot x \Rightarrow E(\alpha_n \cdot x) \geq E(\alpha_{n+1} \cdot x)$,

se E é *decrecente*, tem-se

- para $x > 0$, $\alpha_n \cdot x \leq \alpha_{n+1} \cdot x \Rightarrow E(\alpha_n \cdot x) \geq E(\alpha_{n+1} \cdot x)$,

- para $x < 0$, $\alpha_n \cdot x \geq \alpha_{n+1} \cdot x \Rightarrow E(\alpha_n \cdot x) \leq E(\alpha_{n+1} \cdot x)$,

e, para $x = 0$, tem-se

$$\alpha_n \cdot x = \alpha_{n+1} \cdot x = 0 \Rightarrow E(\alpha_n \cdot x) = E(\alpha_{n+1} \cdot x) = 1 .$$

Portanto, (k_n) é monótona, e, como também é limitada, então, pelo Teorema D.4 da Subseção D.3.4, (k_n) é convergente, sendo seu limite dado por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\alpha_n \cdot x) \stackrel{(*)}{=} E \left[\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \right) \cdot x \right] = E(\alpha \cdot x) . \quad (78)$$

(*) Esta passagem é válida devido à continuidade da função exponencial em todos os pontos do seu domínio, o que é justificado no Teorema D.32 do Apêndice D.

Agora, tornando-se os membros da desigualdade (76) expoentes de base $E(x)$, tem-se

- para $E(x) > 1$, $[E(x)]^{a_0} \leq [E(x)]^{\alpha_n} \leq [E(x)]^{a_0+1}$,

- para $0 < E(x) < 1$, $[E(x)]^{a_0} \geq [E(x)]^{\alpha_n} \geq [E(x)]^{a_0+1}$,

- para $E(x) = 1$, $[E(x)]^{a_0} = [E(x)]^{\alpha_n} = [E(x)]^{a_0+1} = 1$,

e, portanto, a sequência (t_n) dada por $t_n = [E(x)]^{\alpha_n}$ é limitada. Como $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, tem-se

- para $E(x) > 1$, $[E(x)]^{\alpha_n} \leq [E(x)]^{\alpha_{n+1}}$,

- para $0 < E(x) < 1$, $[E(x)]^{\alpha_n} \geq [E(x)]^{\alpha_{n+1}}$,

- para $E(x) = 1$, $[E(x)]^{\alpha_n} = [E(x)]^{\alpha_{n+1}} = 1$.

Logo, (t_n) é monótona e, sendo também limitada, então, pelo Teorema D.4, é convergente, e seu limite é dado por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [E(x)]^{\alpha_n} \stackrel{(*)}{=} [E(x)]^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n} = [E(x)]^\alpha . \quad (79)$$

(*) Esta passagem é válida devido à continuidade da função exponencial em todos os pontos do seu domínio, como apresentado no Teorema D.32 do Apêndice D.

Como α_n é racional, então, pelo item (iv) desta Propriedade 6, tem-se

$$E(\alpha_n \cdot x) = [E(x)]^{\alpha_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\alpha_n \cdot x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [E(x)]^{\alpha_n} . \quad (80)$$

Substituindo-se (78) e (79) em (80), tem-se

$$E(\alpha \cdot x) = [E(x)]^\alpha$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, e, portanto, a Propriedade 6 é válida quando r é um **número real**. $\square$

Propriedade 7. *A função exponencial $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é ilimitada superiormente e limitada inferiormente.*

Demonstração: Por definição, a função exponencial E é bijetora, e, sendo assim, sua imagem é igual ao seu contradomínio, que é $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, E é limitada inferiormente, pois $E > 0$, e é ilimitada superiormente.

Propriedade 8. *Se $E(1) = a$, onde $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$, então, para todo número real r , tem-se $E(r) = a^r$.*

Demonstração: Para $r = 0$, e pela Propriedade 3 desta Seção 4.1, tem-se

$$E(0) = 1 = a^0 .$$

Para $r \neq 0$, então $1/r \in \mathbb{R}^*$ e, pela Propriedade 6 desta seção, tem-se

$$E(1) = a \Rightarrow E\left(r \cdot \frac{1}{r}\right) = a \Rightarrow [E(r)]^{1/r} = a \Rightarrow E(r) = a^r . \quad \square$$

O número real positivo $a = E(1)$, onde $a \neq 1$, apresentado na Propriedade 8 desta Seção 4.1, é chamado de **base** da função exponencial E . Para evidenciar a base, é comum escrever-se a^x ao invés de $E(x)$, ou seja:

$$E(x) = a^x , \quad (81)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

4.2 A Função Exponencial $f(x) = e^x$

Definição. Dado o número real x , e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é igual a x , ou seja:

$$\ln e^x = x . \quad (82)$$

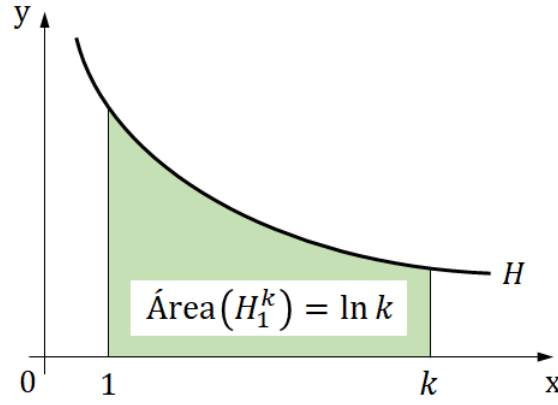


Figura 71: A área da faixa H_1^k

O número k , onde $k \in \mathbb{R}_+^*$, pode ser representado geometricamente como a abscissa do ponto no gráfico da hipérbole H cuja área da faixa H_1^k é igual a $\ln k$, como ilustrado na Figura 71. Fazendo-se $k = e^x$, pela igualdade (53) da Seção 3.8, e pela equação (82), resulta que

$$\text{Área}(H_1^k) = \ln k = \ln e^x = x. \quad (83)$$

Portanto, da igualdade (83), tem-se

$$k = e^x \quad \Rightarrow \quad \ln k = \underbrace{\ln e^x}_{=x} \quad \Rightarrow \quad x = \ln k.$$

Trocando-se o parâmetro k por y , obtém-se a seguinte equivalência:

$$y = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln y. \quad (84)$$

Pela equivalência (84) e pelas propriedades estudadas na Seção 4.1, conclui-se que $y = e^x$ é uma *função exponencial* de base igual ao número e , pois é a *inversa* da função *logaritmo natural*.

Sendo assim, a partir das igualdades (82) e (84), tem-se

$$\ln e^x = x \quad ; \quad e^{\ln y} = y \quad (85)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $y \in \mathbb{R}_+^*$.

Como função exponencial, $f(x) = e^x$ apresenta as seguintes propriedades, estudadas na Seção 4.1, para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

- Propriedade 1: $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, ou seja, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$;
- Propriedade 2: a função $f(x) = e^x$ é crescente pois sua inversa, a função $f^{-1}(x) = \ln x$, também o é;

- Propriedade 3: $f(0) = 1$, ou seja , $e^0 = 1$;
- Propriedade 4: $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, ou seja , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- Propriedade 5: $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, ou seja , $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
- Propriedade 7: $f(x) = e^x > 0$.

4.3 O Gráfico da Função $f(x) = e^x$

A função exponencial $f(x) = e^x$, por sua definição e pelas propriedades vistas na Seção 4.2, tem seu gráfico simétrico ao da função $f^{-1}(x) = \ln x$ em relação à reta $y = x$. Além disso, $f(x) = e^x$ é crescente, tem seu domínio $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$, é bijetora, ilimitada superiormente e limitada inferiormente por $y = 0$. Portanto, seu gráfico está contido no primeiro e no segundo quadrantes do plano cartesiano.

Pontos de Interseção. Como a imagem da função $f(x) = e^x$ é $\mathbb{R}_+^*$, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$, pois

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 . \quad (*)$$

e, sendo assim, o gráfico de $f(x)$ não intercepta o eixo x .

(*) Vide Seção D.6 para o estudo de limites de funções.

Pela Propriedade 3 da Seção 4.1, a ordenada do ponto de interseção entre o gráfico de $f(x) = e^x$ e o eixo y é dada por

$$f(0) = 1 .$$

Concavidade. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, para se descobrir a concavidade do gráfico de $f(x) = e^x$ no intervalo $[a, b]$, busca-se verificar qual é a sua posição relativa à reta $s(x)$ secante a $f(x)$ nos pontos de abscissa a e b , definida pela equação (12), como segue:

$$s(x) = e^a + \left(\frac{e^b - e^a}{b - a} \right) \cdot (x - a) . \quad (86)$$

Para tal, necessita-se de uma desigualdade que relacione $f(x) = e^x$ e a equação (86), ou seja, que vincule os parâmetros a , x , b , e^a , e^x e e^b . Neste sentido, como, pela igualdade (53) da Seção 3.8 e pela equação (82), tem-se

$$\text{Área}(H_1^{e^x}) = \ln e^x = x ,$$

então serão estabelecidas relações entre áreas definidas no gráfico da hipérbole H , tomando-se, como limites de faixas da hipérbole H , as abscissas e^a , e^k e e^b , onde k é tal que $x = x(k)$ e

$e^a < e^k < e^b$. Sendo assim, considere-se o gráfico da hipérbole H no intervalo $[e^a, e^b]$, conforme a Figura 72.

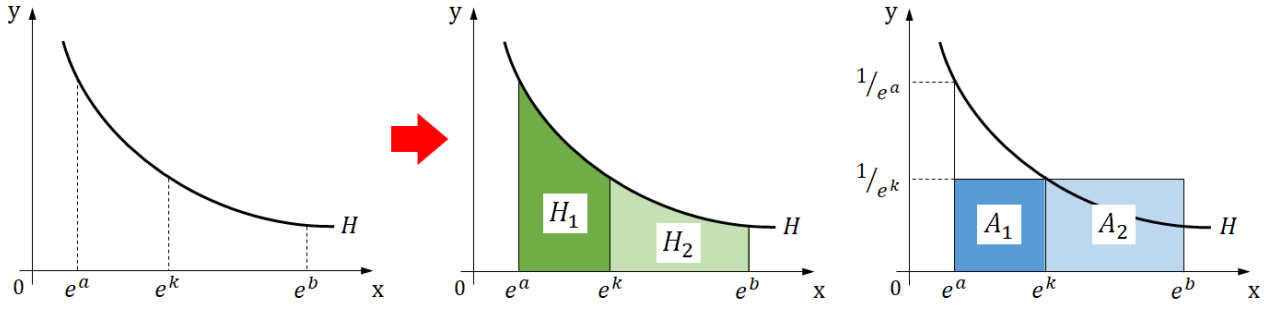


Figura 72: Áreas das faixas da hipérbole H_1 e H_2 e dos retângulos A_1 e A_2 no intervalo $[e^a, e^b]$

Considere-se H_1 a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[e^a, e^k]$, e A_1 a área do retângulo inscrito na hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(e^k - e^a)$ e altura $\frac{1}{e^k}$, onde

$$\begin{cases} H_1 = \ln e^k - \ln e^a = k - a \\ A_1 = (e^k - e^a) \cdot \frac{1}{e^k} = \frac{e^k - e^a}{e^k} \end{cases} \quad (87)$$

Pela Figura 72, e a partir de (87), tem-se:

$$H_1 \geq A_1 \quad \Rightarrow \quad k - a \geq \frac{e^k - e^a}{e^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^k - e^a}{k - a} \leq e^k. \quad (88)$$

Considere-se agora H_2 a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[e^k, e^b]$, e A_2 a área do retângulo sobrescrito à hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(e^b - e^k)$ e altura $\frac{1}{e^k}$, onde:

$$\begin{cases} H_2 = \ln e^b - \ln e^k = b - k \\ A_2 = (e^b - e^k) \cdot \frac{1}{e^k} = \frac{e^b - e^k}{e^k} \end{cases} \quad (89)$$

Pela Figura 72, e a partir de (89), tem-se:

$$H_2 \leq A_2 \quad \Rightarrow \quad b - k \leq \frac{e^b - e^k}{e^k} \quad \Rightarrow \quad e^k \leq \frac{e^b - e^k}{b - k} \quad (90)$$

Comparando-se as desigualdades (88) e (90), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{e^k - e^a}{k - a} \leq e^k \leq \frac{e^b - e^k}{b - k} & \Rightarrow \quad \frac{e^k - e^a}{k - a} \leq \frac{e^b - e^k}{b - k} \Rightarrow \\ (b - k) \cdot (e^k - e^a) & \leq (k - a) \cdot (e^b - e^k) \Rightarrow \\ be^k - be^a - \cancel{ke^k} + ke^a & \leq ke^b - \cancel{ke^k} - ae^b + ae^k \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
be^k - ae^k - be^a &\leq ke^b - ke^a - ae^b \quad \Rightarrow \\
&\quad +ae^a \\
be^k - ae^k - be^a + \underline{ae^a} &\leq ke^b - ae^b - ke^a + \underline{ae^a} \quad \Rightarrow \\
e^k(b-a) - e^a(b-a) &\leq e^b(k-a) - e^a(k-a) \quad \Rightarrow \\
(e^k - e^a) \cdot (b-a) &\leq (e^b - e^a) \cdot (k-a) \quad \Rightarrow \\
e^k &\leq e^a + \left(\frac{e^b - e^a}{b-a} \right) \cdot (k-a) .
\end{aligned}$$

Substituindo-se a variável k por x , e pela equação (86), tem-se

$$e^x \leq e^a + \left(\frac{e^b - e^a}{b-a} \right) \cdot (x-a) \Rightarrow f(x) \leq s(x) ,$$

e, portanto, conclui-se que a função $f(x) = e^x$ é *convexa*.

Gráfico. Com os elementos obtidos nesta Seção 4.3, é possível avaliar o comportamento da função $f(x) = e^x$ através do seu gráfico, representado pela Figura 73.

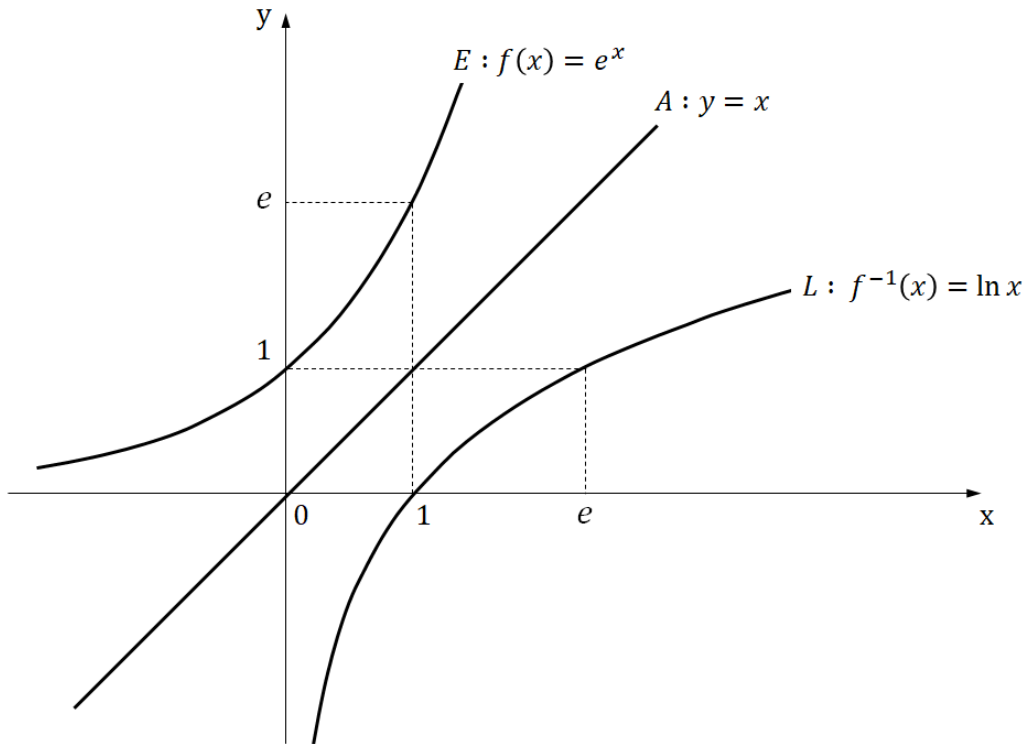


Figura 73: O gráfico da Função Exponencial $f(x) = e^x$

5 Outras Bases de Logaritmos

O objetivo deste Capítulo 5 é abordar os sistemas de logaritmos com bases diferentes do número e .

Na Seção 5.1, apresenta-se e exemplifica-se a fórmula de mudança de base de logaritmos.

Na Seção 5.2, estuda-se a função logarítmica $L(x) = \log_a x$ e suas propriedades para $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Na Seção 5.3, estuda-se o comportamento da função logarítmica $L(x) = \log_a x$ para $a > 1$ e $0 < a < 1$ através dos seus gráficos.

Na Seção 5.4, estuda-se o sistema de logaritmos decimais, ou seja, logaritmos de base 10.

5.1 Mudança de Base de Logaritmos

O estudo desenvolvido até o presente capítulo foi dedicado ao logaritmo natural e à exponencial de base e . No entanto, qualquer número real positivo pode ser utilizado como *base* para formar um sistema de logaritmos. De acordo com a equação (40) da Seção 3.1, a fórmula de *mudança de base de logaritmos* é dada por:

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x . \quad (91)$$

Fazendo-se $x = b$ na equação (91), tem-se:

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} . \quad (92)$$

Exemplo 5.1. Aplicando-se $a = 10$ e $b = e$ à fórmula (91) de mudança de base, tem-se

$$\ln x = \ln 10 \cdot \log_{10} x ,$$

e fazendo-se $x = e$, obtém-se

$$\underbrace{\ln e}_{=1} = \ln 10 \cdot \log_{10} e \quad \Rightarrow \quad \ln 10 = \frac{1}{\log_{10} e} .$$

5.2 A Função Logarítmica $f(x) = \log_a x$

Considere-se a função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ cuja base é o número a , onde $a > 0$. De acordo com a igualdade (38) da Seção 3.1, pode-se escrever $f(x) = \log_a x$. Pela *Propriedade Fundamental* (A) de funções logarítmicas (vide Seção 3.1), tem-se:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (93)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Fazendo-se $y = ax$, e pela igualdade (93), tem-se

$$\log_a y = \log_a(ax) \Rightarrow \log_a y = \underbrace{\log_a a}_{=1} + \log_a x = 1 + \log_a x \Rightarrow \log_a y > \log_a x. \quad (94)$$

Considerando-se a desigualdade (94), se $a > 1$, então $y > x$ e a função $f(x) = \log_a x$ é *crescente*, e, se $0 < a < 1$, então $y < x$ e a função $f(x) = \log_a x$ é *decrescente*, atendendo, assim, à *Propriedade Fundamental* (B) de funções logarítmicas (vide Seção 3.1).

Aplicando-se as demais propriedades de funções logarítmicas estudadas na Seção 3.1, onde $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ e $r \in \mathbb{R}$, tem-se:

- Propriedade 2: $\log_a 1 = 0$;
- Propriedade 4: $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$;
- Propriedade 5: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
- Propriedade 6: $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.

5.3 O Gráfico da Função $f(x) = \log_a x$

Como demonstrado na Seção 5.2, a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ pode ser crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$), e, pelas propriedades mostradas na Seção 3.1, é ilimitada superior e inferiormente, bijetora, e, assim, seu gráfico está contido no primeiro e no quarto quadrantes do plano cartesiano.

Pontos de Interseção. Como o domínio da função $f(x) = \log_a x$ é $\mathbb{R}_+^*$, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x)$ pois,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_a x) = -\infty, \quad (*)$$

e, portanto, o gráfico da função $f(x)$ não intercepta o eixo y .

(*) Vide Seção D.7 do Apêndice D para o estudo de limites laterais.

Pela Propriedade 2 da Seção 3.1, conclui-se que o ponto de interseção entre o gráfico de $f(x) = \log_a x$ e o eixo x tem abscissa igual a

$$f(x) = 0 \iff x = 1.$$

Concavidade. A concavidade do gráfico da função $f(x) = \log_a x$ será analisada para $a > 1$ e $0 < a < 1$. Do gráfico da Figura 68, observa-se que:

$$\begin{cases} \ln a > 0 & \text{para } a > 1 \\ \ln a < 0 & \text{para } 0 < a < 1 \end{cases} \quad (95)$$

Da equação de mudança de base (40) na Seção 3.1, tem-se:

$$\ln x = \ln a \cdot \log_a x \quad (96)$$

Do estudo da concavidade da função $f(x) = \ln x$ na Seção 3.9, e considerando-se o intervalo $[c, d]$, com $c, d \in \mathbb{R}_+^*$ e $c < x < d$, tem-se

$$\ln x \geq \ln c + \left(\frac{\ln d - \ln c}{d - c} \right) (x - c) . \quad (97)$$

Substituindo-se (96) em (97), tem-se:

$$\begin{aligned} \ln a \cdot \log_a x &\geq \ln a \cdot \log_a c + \left[\frac{(\ln a \cdot \log_a d) - (\ln a \cdot \log_a c)}{d - c} \right] (x - c) \Rightarrow \\ \ln a \cdot \log_a x &\geq \ln a \cdot \log_a c + \ln a \left(\frac{\log_a d - \log_a c}{d - c} \right) (x - c) \Rightarrow \\ \ln a \cdot \log_a x &\geq \ln a \left[\log_a c + \left(\frac{\log_a d - \log_a c}{d - c} \right) (x - c) \right] \end{aligned} \quad (98)$$

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, que, aplicado à inequação (98), resulta em

$$\begin{aligned} \cancel{\ln a} \cdot \log_a x &\geq \cancel{\ln a} \left[\log_a c + \left(\frac{\log_a d - \log_a c}{d - c} \right) (x - c) \right] \Rightarrow \\ \log_a x &\geq \log_a c + \left(\frac{\log_a d - \log_a c}{d - c} \right) (x - c) , \end{aligned}$$

ou seja, a função $f(x) = \log_a x$ é *côncava* para $a > 1$.

Se $0 < a < 1$, então

$$\ln a = -\ln \left(\frac{1}{a} \right) < 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{a} \right) > 0 ,$$

que, aplicado à inequação (98), resulta em

$$\begin{aligned} \left[-\ln \left(\frac{1}{a} \right) \right] \cdot \log_a x &\geq \left[-\ln \left(\frac{1}{a} \right) \right] \left[\log_a c + \left(\frac{\log_a d - \log_a c}{d - c} \right) (x - c) \right] \Rightarrow \\ \cancel{\ln \left(\frac{1}{a} \right)} \cdot \log_a x &\leq \cancel{\ln \left(\frac{1}{a} \right)} \left[\log_a c + \left(\frac{\log_a d - \log_a c}{d - c} \right) (x - c) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\log_a x \leq \log_a c + \left(\frac{\log_a d - \log_a c}{d - c} \right) (x - c) ,$$

ou seja, a função $f(x) = \log_a x$ é *convexa* para $0 < a < 1$.

Gráfico. Com os elementos obtidos nesta Seção 5.3, pode-se avaliar o comportamento da função $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$ e $0 < a < 1$ através dos seus gráficos, representados nas Figuras 74 e 75.

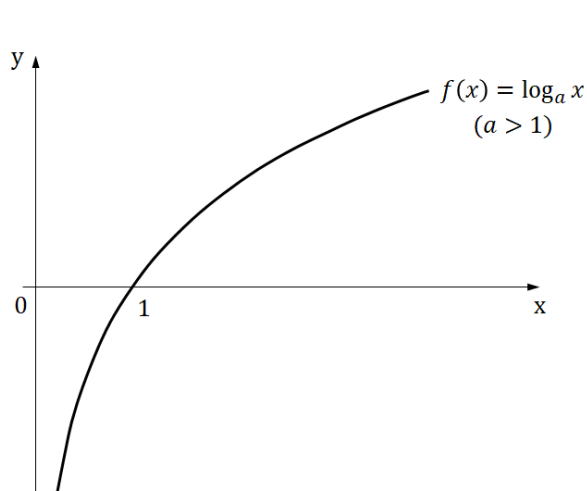


Figura 74: O gráfico da função $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$ (crescente)

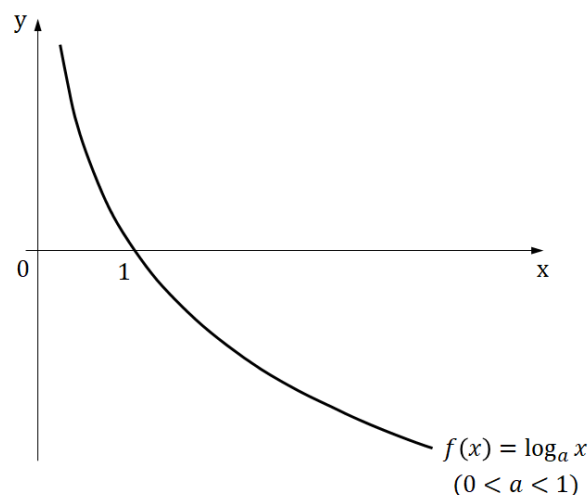


Figura 75: O gráfico da função $f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$ (decrescente)

5.4 Logaritmos Decimais

Devido à utilização do sistema decimal de numeração, o sistema de logaritmos mais empregado é o de base 10, ou seja, os logaritmos decimais.

Ao invés de $\log_{10}$, será utilizada a notação usual $\log$ para indicar os logaritmos decimais, cuja relação com os logaritmos naturais é obtida pela equação (40) de mudança de base, ou seja,

$$\ln x = \ln 10 \cdot \log x \quad \Rightarrow \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

para todo $x > 0$.

5.4.1 Mantissa e Característica

Em Ciências e Engenharia, costuma-se expressar todo número real positivo x sob a forma

$$x = a \cdot 10^n , \tag{99}$$

onde $1 \leq a < 10$ e $n \in \mathbb{Z}$. Esta forma de representação dá aos engenheiros e cientistas uma noção fácil de grandeza dos números utilizados. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 7291 &= 7,291 \cdot 10^3 = r \\ 0,0007291 &= 7,291 \cdot 10^{-4} = s . \end{aligned}$$

Como $1 \leq a < 10$, então $0 \leq \log a < 1$. Portanto, da notação (99) tem-se:

$$\begin{aligned} x = a \cdot 10^n &\Rightarrow \log x = \log a + \log 10^n \Rightarrow \log x = \log a + n \cdot \underbrace{\log 10}_{=1} \Rightarrow \\ \log x &= \log a + n , \end{aligned} \tag{100}$$

onde:

$$\begin{aligned} \log a &= \textit{mantissa} \text{ de } \log x \\ n &= \textit{característica} \text{ de } \log x . \end{aligned}$$

Do exemplo anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} \log r &= \log 7291 = \log 7,291 + 3 \\ \log s &= \log 0,0007291 = \log 7,291 - 4 . \end{aligned}$$

Note-se que, pela notação (99), os números r e s têm o mesmo valor de a . Sendo assim, $\log r$ e $\log s$ têm a mesma *mantissa*.

As tábuas de logaritmos decimais apresentam as mantissas de $\log x$ para $1 \leq x < 10$. Portanto, no exemplo anterior, para se calcular $\log r$ e $\log s$, é suficiente buscar a mantissa de $\log 7,291$.

No Apêndice F, são apresentadas duas tábuas com as mantissas dos logaritmos decimais, sendo a primeira dos números de 10 a 499, e a segunda, de 500 a 999. Estas mesmas tábuas são válidas para os logaritmos decimais de 1,00 a 9,99 (com duas casas decimais), pois a mantissa é a mesma. Os valores das mantissas são indicados com 4 algarismos decimais.

Exemplo 5.2. Se $x = 5240 = 5,24 \cdot 10^3$, seu logaritmo decimal é igual a:

$$\log 5240 = \log 5,24 \cdot 10^3 = \log 5,24 + 3 .$$

Na Tabela 10 do Apêndice F, encontra-se $\log 5,24 \approx 0,7193$. Portanto,

$$\log 5240 \approx 3,7193 .$$

Exemplo 5.3. Se $x = 0,0524 = 5,24 \cdot 10^{-2}$, seu logaritmo decimal é igual a:

$$\log 0,0524 = \log 5,24 \cdot 10^{-2} = \log 5,24 - 2 .$$

Como $\log 5,24 \approx 0,7193$, então:

$$\log 0,0524 \approx 0,7193 - 2 \Rightarrow \log 0,0524 \approx -1,2807.$$

No intuito de manter-se a parte decimal igual à mantissa, isto é, positiva, costuma-se escrever

$$\log 0,0524 \approx \bar{2},7193,$$

onde $\bar{2} = -2$ é a característica de $\log 0,0524$.

5.4.2 O Gráfico da Função $f(x) = \log x$

Na Seção 5.2, verificou-se que o gráfico da função $f(x) = \log_a x$ é crescente quando $a > 1$. Como a base decimal satisfaz esta condição, logo, a função logaritmo decimal $f(x) = \log x$ é crescente e, seguindo-se o que foi estudado na Seção 5.3, o gráfico da função $f(x) = \log x$ fica como ilustrado na Figura 76.

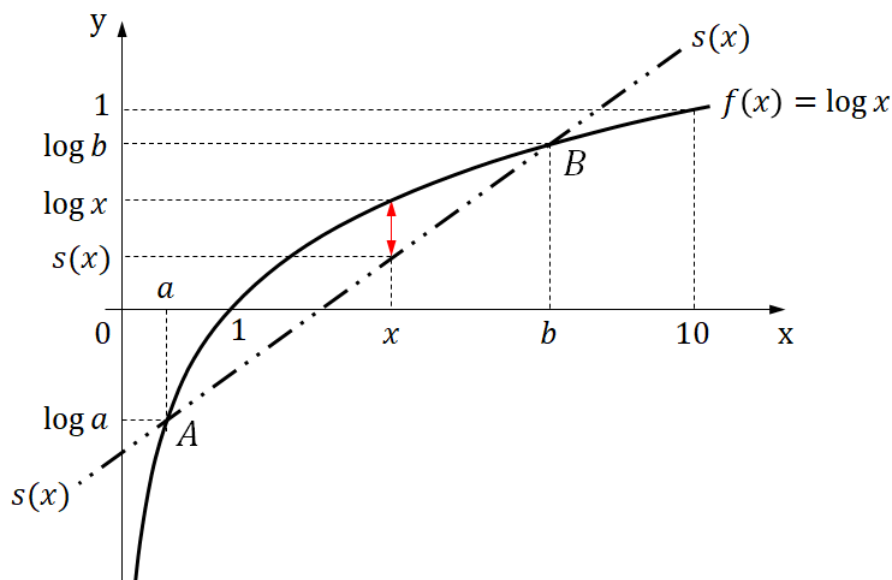


Figura 76: O gráfico da função Logaritmo Decimal

De acordo com a equação (12) da Subseção 2.3.11, a equação da reta secante $s(x)$ na Figura 76 é dada por

$$s(x) = \log a + \left(\frac{\log b - \log a}{b - a} \right) (x - a), \quad (101)$$

que será útil para o cálculo aproximado de logaritmos pelo método de *interpolação linear*.

5.4.3 Interpolação Linear

As tábuas apresentam as mantissas de números com uma quantidade limitada de casas decimais. Nas tábuas do Apêndice F, os valores das mantissas têm quatro casas decimais.

No entanto, suponha-se que seja necessário calcular-se o logaritmo de 6453. Como $6453 = 6,453 \cdot 10^3$, sua mantissa é igual a $\log 6,453$ e sua característica vale 3. Porém, o número 6,453 não se encontra nas tábuas do Apêndice F. Sendo assim, deve-se utilizar um método que permita calcular-se um valor aproximado para $\log 6,453$.

Neste caso, será empregada a *interpolação linear*, método matemático que adota uma linha reta como aproximação da curva no intervalo entre dois pontos. Na Figura 78, A e B são os pontos de interpolação, e a reta secante $s(x)$ é o interpolante linear.

No exemplo em questão, os limites do intervalo são os números mais próximos de 6,453 na Tabela 10 do Apêndice F, ou seja, 6,45 e 6,46, onde $\log 6,45 \approx 0,8096$ e $\log 6,46 \approx 0,8102$. Portanto,

$$\begin{aligned} 6,45 < 6,453 < 6,46 &\Rightarrow \log 6,45 < \log 6,453 < \log 6,46 \Rightarrow \\ 0,8096 < \log 6,453 < 0,8102 &. \end{aligned}$$

Pelo método de interpolação linear, calcula-se o valor aproximado de $\log 6,453$, assumindo-se que o gráfico de $f(x) = \log x$ é bem aproximado pela reta que passa pelos pontos de abscissas 6,45 e 6,46, conforme a Figura 77.

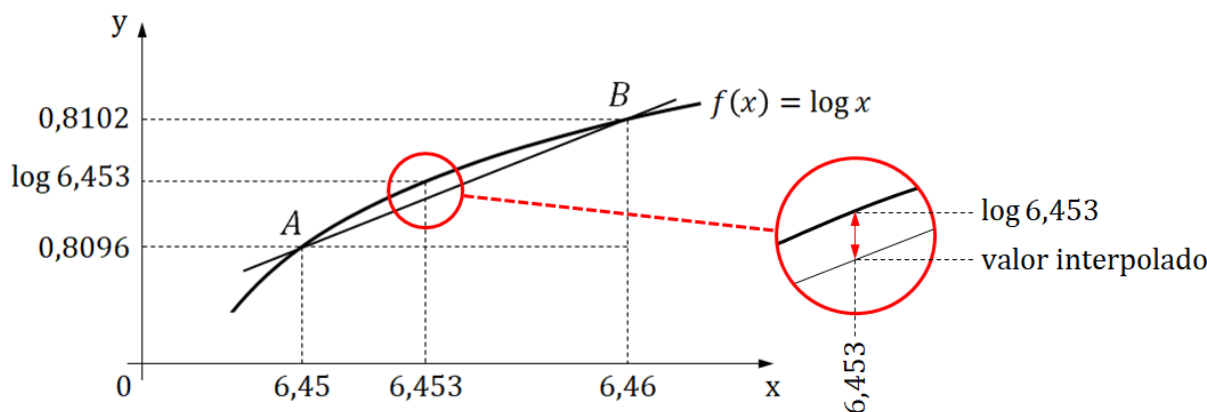


Figura 77: O gráfico da função $f(x) = \log x$ no intervalo $[6,45, 6,46]$

Atribuindo-se coordenadas genéricas aos pontos $A(a, \log a)$ e $B(b, \log b)$, tem-se o gráfico da Figura 78.

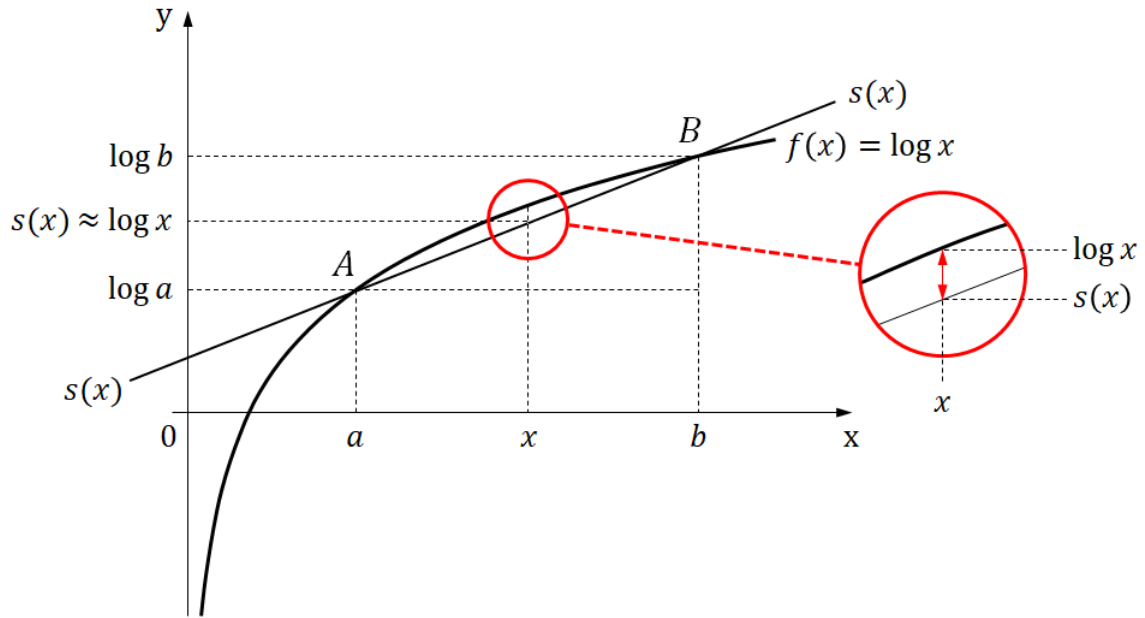


Figura 78: Interpolação linear logarítmica

Na Figura 78, considera-se a ordenada $s(x)$ como o valor aproximado de $\log x$, e pela equação (101) da reta secante $s(x)$, tem-se

$$\log x \approx s(x) \Rightarrow$$

$$\log x \approx \log a + \left(\frac{\log b - \log a}{b - a} \right) (x - a) \Rightarrow \quad (102)$$

$$\frac{\log x - \log a}{x - a} \approx \frac{\log b - \log a}{b - a}, \text{ com } a < x < b. \quad (103)$$

Voltando-se ao exemplo inicial, calcula-se o valor aproximado de $\log 6,453$ através da equação (102) como segue:

$$\begin{aligned} \log 6,453 &\approx \log 6,45 + \left(\frac{\log 6,46 - \log 6,45}{6,46 - 6,45} \right) (6,453 - 6,45) \\ &\approx 0,8096 + \left(\frac{0,8102 - 0,8096}{6,46 - 6,45} \right) (6,453 - 6,45) \\ &= 0,8096 + \left(\frac{0,0006}{0,01} \right) \cdot 0,003 \\ &= 0,8096 + 0,00018 \\ &= 0,80978 \end{aligned}$$

Por fim, o valor aproximado de $\log 6453$ é dado por:

$$\begin{aligned} \log 6453 &= \log 6,453 + 3 \\ &\approx 0,80978 + 3 \\ &= 3,80978. \end{aligned}$$

5.4.4 Exemplos de Cálculo de Logaritmos Decimais com as Tábuas do Apêndice F

Exemplo 5.4. *Calcular, através de logaritmos decimais, a expressão*

$$\frac{4,014 \times \sqrt[5]{0,8206}}{(26,2)^2}.$$

Considerando-se x como o resultado da expressão, segue que

$$\begin{aligned} x &= \frac{4,014 \times \sqrt[5]{0,8206}}{(26,2)^2} = \frac{4,014 \times (0,8206)^{1/5}}{(26,2)^2} \Rightarrow \\ \log x &= \log 4,014 + \frac{1}{5} \times \log(8,206 \times 10^{-1}) - 2 \times \log(2,62 \times 10) \\ &= \log 4,014 + \frac{1}{5} \times (\log 8,206 - 1) - 2 \times (\log 2,62 + 1) \\ &= \log 4,014 + \frac{1}{5} \times \log 8,206 - 0,2 - 2 \times \log 2,62 - 2 \\ &= \log 4,014 + \frac{1}{5} \times \log 8,206 - 2 \times \log 2,62 - 2,2. \end{aligned} \quad (104)$$

Pelas Tabelas 9 e 10 do Apêndice F e por interpolação linear, tem-se

$$\begin{aligned} \log 4,014 &= \log 4,01 + \left(\frac{\log 4,02 - \log 4,01}{4,02 - 4,01} \right) (4,014 - 4,01) \\ &\approx 0,6031 + \left(\frac{0,6042 - 0,6031}{0,01} \right) \cdot 0,004 \\ &= 0,6031 + \left(\frac{0,0011}{0,01} \right) \cdot 0,004 \\ &= 0,60354, \\ \log 8,206 &= \log 8,20 + \left(\frac{\log 8,21 - \log 8,20}{8,21 - 8,20} \right) (8,206 - 8,20) \\ &\approx 0,9138 + \left(\frac{0,9143 - 0,9138}{0,01} \right) \cdot 0,006 \\ &= 0,9138 + \left(\frac{0,0005}{0,01} \right) \cdot 0,006 \\ &= 0,9141, \\ \log 2,62 &= 0,4183, \end{aligned}$$

valores que, substituídos na equação (104) anterior, resultam em

$$\begin{aligned}\log x &\approx 0,60354 + \frac{1}{5} \times 0,9141 - 2 \times 0,4183 - 2,2 \\ &= -2,25024\end{aligned}\tag{105}$$

$$\begin{aligned}&= -2 - 0,25024 = (-2 - 1) + (1 - 0,25024) = -3 + 0,74976 \\ &= \bar{3},74976,\end{aligned}\tag{106}$$

ou seja, a mantissa de $\log x$ vale aproximadamente 0,74976 e sua característica é igual a -3 . Portanto, do resultado (105), tem-se

$$\log x \approx -2,25024 \Rightarrow x \approx 10^{-2,25024}.$$

A potência 10^a também é chamada de *antilogaritmo do número a* , ou, em outras palavras, $\text{antilog } a$. Sendo assim, pelo resultado (106) do exemplo em questão, pode-se escrever $x \approx 10^{-2,25024}$ como:

$$x \approx 10^{-3+0,74976} \approx 10^{-3} \cdot 10^{0,74976} \Rightarrow x \approx \text{antilog } \bar{3},74976\tag{107}$$

Na Tabela 10 do Apêndice F, a mantissa 0,74976 está entre 0,7497 e 0,7505, onde $\log 5,62 \approx 0,7497$ e $\log 5,63 \approx 0,7505$. Fazendo-se $\log u = 0,74976$, e por interpolação linear através da equação (103), obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\log u - \log 5,62}{u - 5,62} &\approx \frac{\log 5,63 - \log 5,62}{5,63 - 5,62} \Rightarrow \frac{0,74976 - 0,7497}{u - 5,62} = \frac{0,7505 - 0,7497}{5,63 - 5,62} \Rightarrow \\ \frac{0,00006}{u - 5,62} &= \frac{0,0008}{0,01} \Rightarrow u = 5,62 + \frac{0,00006}{0,08} \Rightarrow u \approx 5,62075\end{aligned}\tag{108}$$

Aplicando-se o resultado (108) em (107), encontramos o valor aproximado de x como segue:

$$x = u \cdot 10^{-3} \Rightarrow x \approx 5,62075 \cdot 10^{-3}.$$

Exemplo 5.5. Quantos algarismos tem o número $52^{1.000}$?

Seja dado o número natural P com N algarismos, tal que $P = a_1 a_2 a_3 \dots a_N$, onde $1 \leq a_1 < 10$ e $0 \leq a_2, a_3, \dots, a_N < 10$, sendo que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N \in \mathbb{N}$. O número P também pode ser escrito na forma

$$P = a_1, a_2 a_3 \dots a_N \times 10^{N-1} \Rightarrow P = p \times 10^{N-1}, \text{ onde } p = a_1, a_2 a_3 \dots a_N.\tag{109}$$

Como $1 \leq p < 10$, então $0 \leq \log p < 1$, e, pela igualdade (100) da Subseção 5.4.1, pode-se afirmar que a característica n do número inteiro P vale $N - 1$. Sendo assim, tem-se

$$n = N - 1 \Rightarrow N = n + 1.\tag{110}$$

Logo, é suficiente calcular-se a característica de um número natural para encontrar-se a sua quantidade de algarismos. Neste exemplo, utilizando-se as tábuas do Apêndice F, tem-se

$$\begin{aligned}\log(52^{1.000}) &= 1000 \times \log 52 = 1000 \times \log(5,2 \times 10) = 1000 \times (\log 5,2 + \log 10) \\ &\approx 1000 \times (0,7160 + 1) = 1000 \times 1,7160 = 1716 ,\end{aligned}$$

onde a característica de $\log(52^{1.000})$ é $n = 1716$. Portanto, pela equação (110), a quantidade N de algarismos do número $52^{1.000}$ vale

$$N = 1716 + 1 \Rightarrow N = 1717 .$$

Exemplo 5.6. Se D é um número inteiro com 35 algarismos e $\sqrt[31]{D}$ também é um número inteiro, prove que $\sqrt[31]{D} = 13$.

Pela igualdade (109), pode-se escrever $D = d \times 10^{34}$, onde d é um número real tal que $1 \leq d < 10$. Sendo assim, tem-se

$$\begin{aligned}\sqrt[31]{D} &= \sqrt[31]{d} \times \sqrt[31]{10^{34}} \Rightarrow \log \sqrt[31]{D} = \log \sqrt[31]{d} + \log \sqrt[31]{10^{34}} \Rightarrow \\ \log \sqrt[31]{D} &= \frac{\log d}{31} + \frac{34}{31} \Rightarrow \frac{\log d}{31} = \log \sqrt[31]{D} - \frac{34}{31} .\end{aligned}\tag{111}$$

Como $0 \leq \log d < 1$, e da equação (111), tem-se:

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{\log d}{31} < \frac{1}{31} &\Rightarrow 0 \leq \log \sqrt[31]{D} - \frac{34}{31} < \frac{1}{31} \Rightarrow \frac{34}{31} \leq \log \sqrt[31]{D} < \frac{35}{31} \Rightarrow \\ 1,09677 \leq \log \sqrt[31]{D} < 1,12903 &\Rightarrow 0,09677 \leq \log \sqrt[31]{D} - 1 < 0,12903 \Rightarrow \\ 0,09677 \leq \log \sqrt[31]{D} - \log 10 < 0,12903 &\Rightarrow 0,09677 \leq \log \frac{\sqrt[31]{D}}{10} < 0,12903 .\end{aligned}$$

Pela Tabela 9 do Apêndice F, segue que:

$$\begin{aligned}\underbrace{0,0934}_{=\log 1,24} < 0,09677 \leq \log \frac{\sqrt[31]{D}}{10} < 0,12903 < \underbrace{0,1303}_{=\log 1,35} &\Rightarrow \\ \log 1,24 < \log \frac{\sqrt[31]{D}}{10} < \log 1,35 &\Rightarrow 1,24 < \frac{\sqrt[31]{D}}{10} < 1,35 \Rightarrow \\ 12,4 < \sqrt[31]{D} < 13,5 .\end{aligned}$$

Portanto, como $\sqrt[31]{D}$ é inteiro, tem-se

$$\sqrt[31]{D} = 13 .\tag{112}$$

6 Outras Bases Exponenciais

O objetivo deste Capítulo 6 é estudar funções exponenciais com bases diferentes do número e .

Na Seção 6.1, a função exponencial $f(x) = a^x$ é definida e estudada a partir das propriedades estabelecidas na Seção 4.1.

Na Seção 6.2, estuda-se o comportamento da função exponencial a^x através do seu gráfico.

6.1 A Função Exponencial $f(x) = a^x$

De acordo com a Propriedade 6 de funções logarítmicas estudada na Seção 3.1, a igualdade

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln a \quad (113)$$

é válida para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considere-se a Figura 71 da Seção 4.2. Fazendo-se, neste caso, $k = a^x$, pela igualdade (53) da Seção 3.8, e pela equação (113), resulta que

$$\text{Área}(H_1^k) = \ln k = \ln(a^x) = x \cdot \ln a. \quad (114)$$

Portanto, da igualdade (114) e pela equação (40) de mudança de base, tem-se

$$k = a^x \quad \Rightarrow \quad \ln k = \underbrace{\ln(a^x)}_{=x \cdot \ln a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln k}{\ln a} \quad \Rightarrow \quad x = \log_a k.$$

Substituindo-se k por y , obtém-se a equivalência a seguir:

$$y = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a y. \quad (115)$$

Pela equivalência (115) e pelas propriedades estudadas na Seção 4.1, verifica-se que $f(x) = a^x$ é uma *função exponencial* de base a , pois é a *inversa* da função logarítmica $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Partindo-se das igualdades na equivalência (115), tem-se

$$\log_a(a^x) = x \quad ; \quad a^{\log_a y} = y \quad (116)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $y \in \mathbb{R}_+^*$.

De acordo com a Seção 4.1, a função exponencial $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$, apresenta as seguintes propriedades, para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

- Propriedade 1: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, ou seja, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
- Propriedade 2: se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente pois sua inversa, a função $f^{-1}(x) = \log_a x$, também o é, e, de forma análoga, se $0 < a < 1$, ambas são decrescentes;
- Propriedade 3: $f(0) = 1$, ou seja, $a^0 = 1$;
- Propriedade 4: $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, ou seja, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
- Propriedade 5: $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, ou seja, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$;
- Propriedade 7: $f(x) = a^x > 0$.

6.2 O Gráfico da Função $f(x) = a^x$

Seguindo-se o mesmo raciocínio desenvolvido na Seção 4.3, o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ é simétrico, em relação à reta $y = x$, ao gráfico da função $f^{-1}(x) = \log_a x$, é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$, é bijetora, ilimitada superiormente e limitada inferiormente por $y = 0$. Logo, seu gráfico se encontra no primeiro e no segundo quadrantes do plano cartesiano.

Pontos de Interseção. Sendo $\mathbb{R}_+^*$ a imagem de $f(x) = a^x$, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$, uma vez que

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 & \text{para } a > 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 & \text{para } 0 < a < 1, \end{cases} \quad (*)$$

e, desta forma, o gráfico de $f(x)$ não intercepta o eixo x .

(*) Vide Seção D.6 para o estudo de limites de funções.

Pela Propriedade 3 de funções exponenciais (vide Seção 4.1), a ordenada do ponto de interseção entre o gráfico de $f(x) = a^x$ e o eixo y é igual a

$$f(0) = 1.$$

Concavidade. A concavidade do gráfico da função $f(x) = a^x$ será analisada para $a > 1$ e $0 < a < 1$, e será aplicado o mesmo procedimento utilizado na Seção 4.3 para análise de concavidade.

Inicialmente, sejam dados $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c < k < d$, onde k é tal que $x = x(k)$. A reta

$s(x)$ secante a $f(x)$ nos pontos de abscissa c e d é definida pela equação

$$s(x) = a^c + \left(\frac{a^d - a^c}{d - c} \right) \cdot (x - c) . \quad (117)$$

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, e $c < k < d$ implica $a^c < a^k < a^d$. A Figura 79 apresenta o gráfico da hipérbole H no intervalo $[a^c, a^d]$.

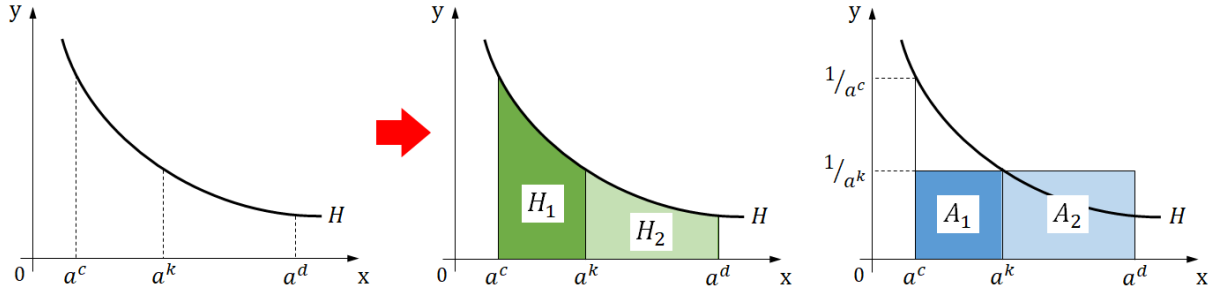


Figura 79: Áreas das faixas da hipérbole H_1 e H_2 e dos retângulos A_1 e A_2 no intervalo $[a^c, a^d]$

Considere-se H_1 a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[a^c, a^k]$, e A_1 a área do retângulo inscrito na hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(a^k - a^c)$ e altura $\frac{1}{a^k}$, onde

$$\begin{cases} H_1 = \ln a^k - \ln a^c = k \cdot \ln a - c \cdot \ln a = (k - c) \cdot \ln a \\ A_1 = (a^k - a^c) \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^k - a^c}{a^k} . \end{cases} \quad (118)$$

Pela Figura 79, e baseando-se em (118), tem-se

$$H_1 \geq A_1 \quad \Rightarrow \quad (k - c) \cdot \ln a \geq \frac{a^k - a^c}{a^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^k - a^c}{k - c} \leq a^k \cdot \ln a . \quad (119)$$

Tome-se agora H_2 como a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[a^k, a^d]$, e A_2 como a área do retângulo sobscrito à hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(a^d - a^k)$ e altura $\frac{1}{a^k}$, onde:

$$\begin{cases} H_2 = \ln a^d - \ln a^k = d \cdot \ln a - k \cdot \ln a = (d - k) \cdot \ln a \\ A_2 = (a^d - a^k) \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^d - a^k}{a^k} \end{cases} \quad (120)$$

Pela Figura 79, e a partir de (120), tem-se:

$$H_2 \leq A_2 \quad \Rightarrow \quad (d - k) \cdot \ln a \leq \frac{a^d - a^k}{a^k} \quad \Rightarrow \quad a^k \cdot \ln a \leq \frac{a^d - a^k}{d - k} . \quad (121)$$

Comparando-se as desigualdades (119) e (121), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{a^k - a^c}{k - c} &\leq a^k \cdot \ln a \leq \frac{a^d - a^k}{d - k} \Rightarrow \frac{a^k - a^c}{k - c} \leq \frac{a^d - a^k}{d - k} \Rightarrow \\
(d - k) \cdot (a^k - a^c) &\leq (k - c) \cdot (a^d - a^k) \Rightarrow \\
da^k - da^c - ka^k + ka^c &\leq ka^d - ka^k - ca^d + ca^k \Rightarrow \\
da^k - ca^k - da^c &\leq ka^d - ca^d - ka^c \xrightarrow{+ca^c} \\
da^k - ca^k - da^c + \underline{ca^c} &\leq ka^d - ca^d - ka^c + \underline{ca^c} \Rightarrow \\
a^k(d - c) - a^c(d - c) &\leq a^d(k - c) - a^c(k - c) \Rightarrow \\
(a^k - a^c)(d - c) &\leq (a^d - a^c)(k - c) \Rightarrow a^k - a^c \leq \left(\frac{a^d - a^c}{d - c} \right) \cdot (k - c) \Rightarrow \\
a^k &\leq a^c + \left(\frac{a^d - a^c}{d - c} \right) \cdot (k - c) .
\end{aligned}$$

Substituindo-se k por x , e considerando-se a equação (117), tem-se a desigualdade

$$a^x \leq a^c + \left(\frac{a^d - a^c}{d - c} \right) \cdot (x - c) \Rightarrow f(x) \leq s(x),$$

pela qual verifica-se que a função $f(x) = a^x$ é *convexa* para $a > 1$.

Agora, se $0 < a < 1$, então

$$\ln a = -\ln\left(\frac{1}{a}\right) < 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) > 0 ,$$

e $c < k < d$ implica $a^c > a^k > a^d$. A Figura 80 mostra o gráfico da hipérbole H no intervalo $[a^d, a^c]$. Note-se que as Figuras 79 e 80 diferem entre si pelo valor dos limites do intervalo.

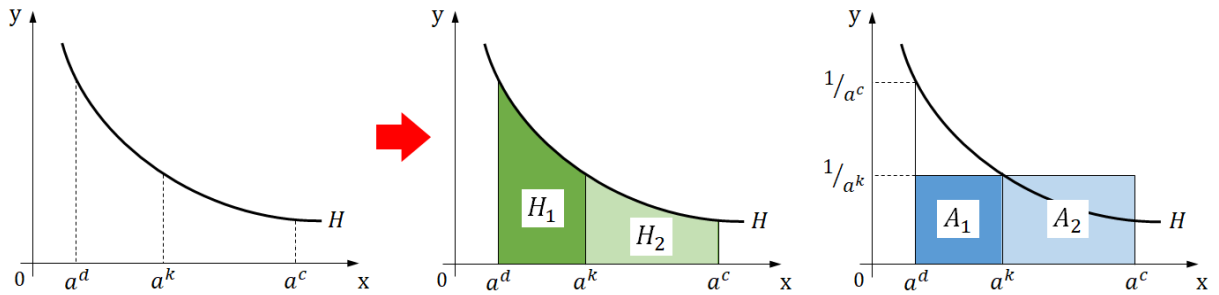


Figura 80: Áreas das faixas da hipérbole H_1 e H_2 e dos retângulos A_1 e A_2 no intervalo $[a^d, a^c]$

Considere-se H_1 a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[a^d, a^k]$, e A_1 a área do retângulo

inscrito na hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(a^k - a^d)$ e altura $\frac{1}{a^k}$, onde:

$$\begin{cases} H_1 = \ln a^k - \ln a^d = k \cdot \ln a - d \cdot \ln a = (k - d) \cdot \ln a = (d - k) \cdot \ln \left(\frac{1}{a} \right) \\ A_1 = (a^k - a^d) \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^k - a^d}{a^k} \end{cases} \quad (122)$$

Pela Figura 80, e a partir de (122), tem-se

$$H_1 \geq A_1 \quad \Rightarrow \quad (d - k) \cdot \ln \left(\frac{1}{a} \right) \geq \frac{a^k - a^d}{a^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^k - a^d}{d - k} \leq a^k \cdot \ln \left(\frac{1}{a} \right). \quad (123)$$

Tome-se agora H_2 como a área da faixa da hipérbole H no intervalo $[a^x, a^c]$, e A_2 como a área do retângulo sobrescrito à hipérbole H no mesmo intervalo, de base $(a^c - a^k)$ e altura $\frac{1}{a^k}$, onde:

$$\begin{cases} H_2 = \ln a^c - \ln a^k = c \cdot \ln a - k \cdot \ln a = (c - k) \cdot \ln a = (k - c) \cdot \ln \left(\frac{1}{a} \right) \\ A_2 = (a^c - a^k) \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^c - a^k}{a^k} \end{cases} \quad (124)$$

Pela Figura 80, e a partir de (124), tem-se

$$H_2 \leq A_2 \quad \Rightarrow \quad (k - c) \cdot \ln \left(\frac{1}{a} \right) \leq \frac{a^c - a^k}{a^k} \quad \Rightarrow \quad a^k \cdot \ln \left(\frac{1}{a} \right) \leq \frac{a^c - a^k}{k - c}. \quad (125)$$

Comparando-se as desigualdades (123) e (125), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{a^k - a^d}{d - k} \leq a^k \cdot \ln \left(\frac{1}{a} \right) \leq \frac{a^c - a^k}{k - c} &\Rightarrow \frac{a^k - a^d}{d - k} \leq \frac{a^c - a^k}{k - c} \Rightarrow \\ (k - c) \cdot (a^k - a^d) &\leq (d - k) \cdot (a^c - a^k) \Rightarrow \\ \cancel{ka^k} - ka^d - ca^k + ca^d &\leq da^c - da^k - ka^c + \cancel{ka^k} \Rightarrow \\ da^k - ca^k - da^c &\leq ka^d - ca^d - ka^c \xRightarrow{+ca^c} \\ da^k - ca^k - da^c + \underline{ca^c} &\leq ka^d - ca^d - ka^c + \underline{ca^c} \Rightarrow \\ a^k(d - c) - a^c(d - c) &\leq a^d(k - c) - a^c(k - c) \Rightarrow \\ (a^k - a^c)(d - c) &\leq (a^d - a^c)(k - c) \Rightarrow a^k - a^c \leq \left(\frac{a^d - a^c}{d - c} \right) \cdot (k - c) \Rightarrow \\ a^k &\leq a^c + \left(\frac{a^d - a^c}{d - c} \right) \cdot (k - c). \end{aligned}$$

Trocando-se k por x , e levando-se em conta a equação (117), tem-se

$$a^x \leq a^c + \left(\frac{a^d - a^c}{d - c} \right) \cdot (x - c) ,$$

e, assim como no caso em que $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ também é *convexa* para $0 < a < 1$.

Portanto, conclui-se que a função exponencial $f(x) = a^x$ é *convexa* para qualquer $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Gráfico. Com o estudo feito nesta Seção 6.2, pode-se analisar o comportamento da função $f(x) = a^x$ para $a > 1$ e $0 < a < 1$ através dos seus gráficos, ilustrados pelas Figuras 81 e 82.

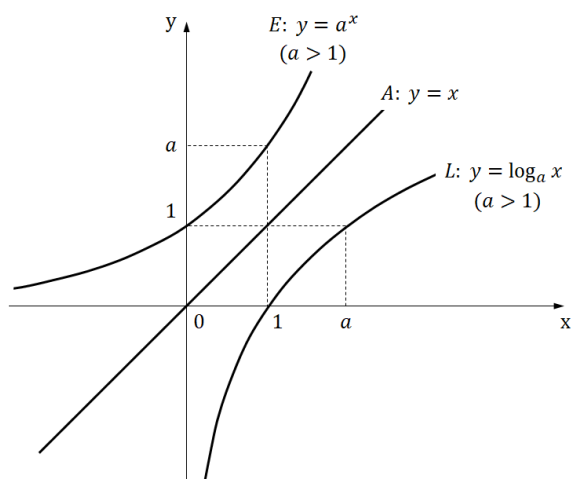


Figura 81: O gráfico da função $f(x) = a^x$ para $a > 1$ (crescente)

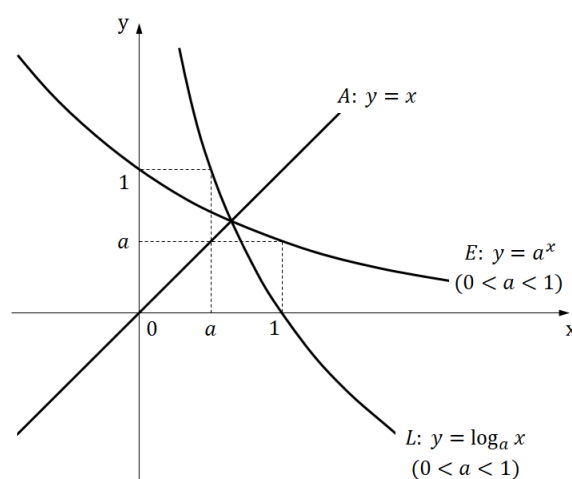


Figura 82: O gráfico da função $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ (decrescente)

7 O Número e como Limite

O objetivo deste Capítulo 7 é apresentar a definição clássica do número e como limite.

Na Seção 7.1, é apresentado e demonstrado um limite que pode ser utilizado para definir o número e .

Na Seção 7.2, é apresentada uma interpretação geométrica do limite definido na Seção 7.1, através da aproximação da área da hipérbole H por polígonos retangulares sobrescritos.

7.1 Definição Clássica de e como Limite

O número e é tradicionalmente definido como o limite de sequência

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ com } n \in \mathbb{N}. \quad (126)$$

A igualdade (126) significa que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge para o valor de e .

Para se provar a igualdade (126), inicialmente será demonstrado o Teorema 7.1 a seguir.

Teorema 7.1. Para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > -1$ e $x \neq 0$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Demonstração: Segue primeiramente a demonstração do Teorema 7.1 para $x > 0$.

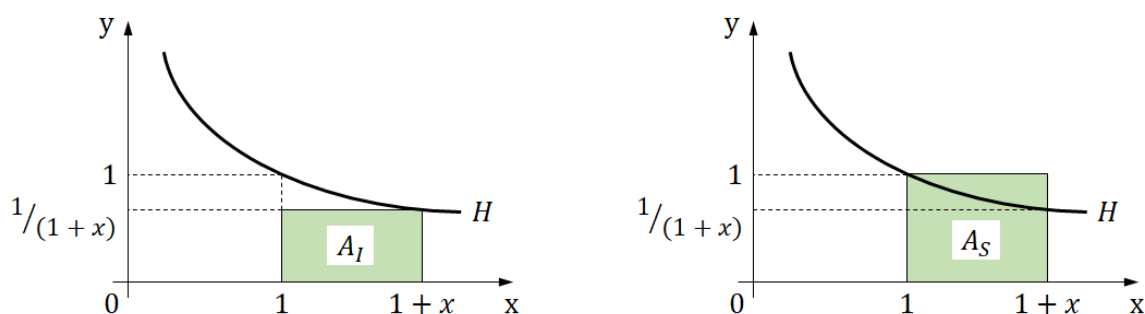


Figura 83: Retângulos inscrito e sobrescrito a H_1^{1+x} com $x > 0$

Na Figura 83, considere-se A_I a área do retângulo inscrito e A_S a área do retângulo sobrescrito à faixa H_1^{1+x} da hipérbole, onde

$$A_I < \text{Área}(H_1^{1+x}) < A_S, \quad (127)$$

$$A_I = \underbrace{[(1+x) - 1]}_{=x} \cdot \left(\frac{1}{1+x} \right) \Rightarrow A_I = \frac{x}{1+x} , \quad (128)$$

$$A_S = \underbrace{[(1+x) - 1]}_{=x} \cdot 1 \Rightarrow A_S = x . \quad (129)$$

Pela igualdade (53), a qual define o número $\ln x$ como a área da faixa da hipérbole H_1^x , tem-se:

$$\text{Área}(H_1^{1+x}) = \ln(1+x) . \quad (130)$$

Substituindo-se (128), (129) e (130) em (127), tem-se:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 . \quad (131)$$

Pelo Propriedade 6 das funções logarítmicas, tem-se:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} . \quad (132)$$

Substituindo-se (132) em (131), tem-se:

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x)^{1/x} < 1 . \quad (133)$$

Aplicando-se a exponencial de base e a todos os membros da desigualdade (133), e pela igualdade (85) da Seção 4.2, tem-se:

$$e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)} < e^{\ln(1+x)^{1/x}} < e \Rightarrow e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)} < (1+x)^{1/x} < e . \quad (134)$$

Fazendo-se $x \rightarrow 0^+$ em todos os membros da desigualdade (134), tem-se:

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)}}_{=e} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \leq e . \quad (135)$$

Da desigualdade (135) e pelo Teorema do Confronto (Seção D.3.5), conclui-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e , \quad (136)$$

ou seja, quando x se aproxima de zero por valores *positivos* (*), então $(1+x)^{1/x}$ se aproxima do número e .

(*) Vide Seção D.7 do Apêndice D para o estudo de limites laterais.

Na sequência, o Teorema 7.1 será demonstrado para $-1 < x < 0$.

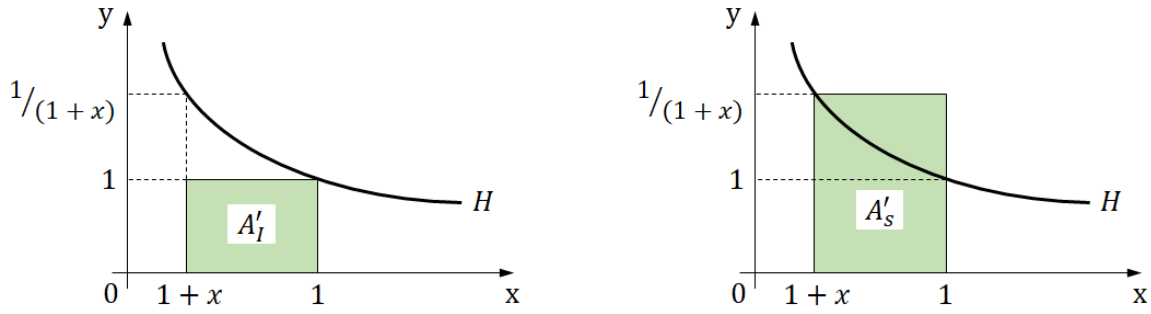


Figura 84: Retângulos inscrito e sobrescrito a H_{1+x}^1 com $-1 < x < 0$

Na Figura 84, tome-se A'_I a área do retângulo inscrito e A'_S a área do retângulo sobrescrito à faixa H_{1+x}^1 da hipérbole, onde

$$A'_I < \text{Área}(H_{1+x}^1) < A'_S, \quad (137)$$

$$A'_I = \underbrace{[1 - (1+x)]}_{(=-x)} \cdot 1 \Rightarrow A'_I = -x, \quad (138)$$

$$A'_S = \underbrace{[1 - (1+x)]}_{(=-x)} \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right) \Rightarrow A'_S = -\frac{x}{1+x}. \quad (139)$$

Pela igualdade (130) e a convenção (52) definida na Seção 3.6, tem-se

$$\text{Área}(H_{1+x}^1) = -\text{Área}(H_1^{1+x}) \Rightarrow \text{Área}(H_{1+x}^1) = -\ln(1+x). \quad (140)$$

Substituindo-se (138), (139) e (140) em (137), e sabendo-se que $x < 0$ implica $(-x) > 0$, tem-se

$$-x < -\ln(1+x) < -\frac{x}{1+x} \Rightarrow 1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}. \quad (141)$$

Substituindo-se (132) em (141), tem-se

$$1 < \ln(1+x)^{1/x} < \frac{1}{1+x}. \quad (142)$$

Aplicando-se a exponencial de base e a todos os membros da desigualdade (142), e pela igualdade (85), tem-se

$$e < e^{\ln(1+x)^{1/x}} < e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)} \Rightarrow e < (1+x)^{1/x} < e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)}. \quad (143)$$

Fazendo-se $x \rightarrow 0^-$ em todos os membros da desigualdade (143), tem-se

$$e \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)}}_{=e} . \quad (144)$$

Da desigualdade (144) e pelo Teorema do Confronto (Seção D.3.5), conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} = e , \quad (145)$$

ou seja, quando x se aproxima de zero por valores *negativos* (**), então $(1+x)^{1/x}$ se aproxima do número e .

(**) Vide Seção D.7 do Apêndice D para o estudo de limites laterais.

Portanto, como os resultados (136) e (145) são iguais, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e , \quad (146)$$

e o Teorema 7.1 fica completamente demonstrado. $\square$

Fazendo-se $x = 1/u$, tem-se $u = 1/x$ e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow u \rightarrow -\infty . \end{cases} \quad (147)$$

Portanto, aplicando-se a mudança de variável $x = 1/u$ aos limites (136) e (145), tem-se

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e \Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} = e \Rightarrow \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e , \end{cases}$$

ou mesmo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e . \quad (148)$$

Observação. No Exemplo D.15 da Subseção D.3.4 do Apêndice D, demonstra-se que a sequência

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, é convergente.

Corolário 7.1. Dado um número $a \in \mathbb{R}$, são válidos os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} = e^a \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a .$$

Demonstração: Fazendo-se $u = ax$, então $1/x = a/u$, e $x \rightarrow 0$ implica $u \rightarrow 0$. Substituindo-se estes valores no limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x},$$

e considerando-se o limite (146), tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + u)^{a/u} = \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} \right]^a}_{= e} = e^a, \quad (149)$$

demonstrando-se, assim, a validade do primeiro limite.

Fazendo-se, agora, $v = 1/x$, então $x = 1/v$. Substituindo-se estes valores no limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x,$$

e considerando-se a equivalência (147) e o limite (149), tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \underbrace{\lim_{v \rightarrow 0^+} (1 + av)^{1/v}}_{= e^a} = e^a. \quad (150)$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio, verifica-se que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \underbrace{\lim_{v \rightarrow 0^-} (1 + av)^{1/v}}_{= e^a} = e^a, \quad (151)$$

mostrando-se, desta forma, que o segundo e o terceiro limites do enunciado também são válidos.

Portanto, fica assim completamente demonstrado o Corolário 7.1. $\square$

7.2 Interpretação Geométrica do Limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

O propósito desta seção é apresentar uma interpretação geométrica do limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

com $n \in \mathbb{N}$, utilizando-se um **polígono retangular** Q **sobrescrito à faixa** H_1^k **da hipérbole** com as seguintes características:

- (i) O polígono Q está definido sobre o intervalo $[1, k]$, com $k \in \mathbb{R}$ tal que $k > 1$;
- (ii) A área do polígono Q é igual a 1;
- (iii) O polígono Q é composto por n retângulos adjacentes entre si;
- (iv) As áreas dos n retângulos que compõem o polígono Q são iguais entre si.

Chamando-se as áreas dos n retângulos sobrescritos de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_j, \dots, A_n$, onde $j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq j \leq n$, tem-se que

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_j = \dots = A_n = \frac{1}{n} . \quad (152)$$

Para que a condição (iv) seja atendida, os extremos do intervalo de cada retângulo devem ser os extremos do anterior multiplicados por uma mesma constante real, conforme o Lema 3.3 da Seção 3.6. Neste caso, pela facilidade de cálculo, serão utilizadas, como limites das faixas, abscissas que formem uma PG de razão $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 1$. Logo, as bases dos retângulos sobrescritos estarão sobre os intervalos

$$[1, r] , [r, r^2] , [r^2, r^3] , \dots , [r^{j-1}, r^j] , \dots , [r^{n-1}, r^n] ,$$

e, portanto, verifica-se que o extremo superior k do intervalo que delimita o polígono Q vale

$$k = r^n . \quad (153)$$

O polígono Q com estas características é ilustrado pela Figura 85. Note-se que esta configuração é similar àquelas utilizadas por Saint-Vincent e de Sarasa, apresentadas nas Seções 3.5 e 3.7, respectivamente.

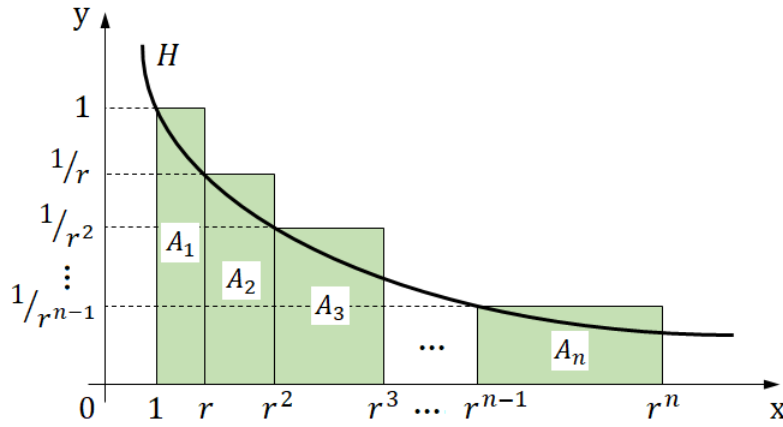


Figura 85: Polígono retangular Q sobrescrito à faixa $H_1^{r^n}$

Pelas igualdades (152) e (153), e sabendo-se que o retângulo sobre o intervalo $[r^{j-1}, r^j]$ tem base $(r^j - r^{j-1})$ e altura $(1/r^{j-1})$, verifica-se que

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{r^{j-1}} \cdot (r^j - r^{j-1}) = \frac{1}{r^{j-1}} \cdot (r \cdot r^{j-1} - r^{j-1}) = \frac{1}{r^{j-1}} \cdot (r - 1) \cdot r^{j-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow \\ r - 1 &= \frac{1}{n} \Rightarrow r = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow r^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \\ k &= r^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \end{aligned} \quad (154)$$

Aplicando-se o limite com n tendendo a infinito aos membros da igualdade (154), e pela igualdade (126) da Seção 7.1, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{=e} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} k = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = e, \quad (155)$$

ou seja, aumentando-se o valor de n , o valor de $k = r^n$ também aumenta, convergindo para o número e . A Tabela 8 ilustra esta afirmação, lembrando-se que, para fins de comparação, o valor de e com 12 algarismos decimais exatos é

$$e \approx 2,718281828459. \quad (156)$$

Tabela 8: Valores de $k = r^n$, onde $n \in \mathbb{N}$

Nº de retângulos do polígono Q	$k = r^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037037
10	2,59374246
100	2,70481382
1.000	2,71692393
10.000	2,71814592
100.000	2,71826823
1.000.000	2,71828046
10.000.000	2,71828169

Pela característica (ii) do polígono Q e pela igualdade (67), que define a área da faixa H_1^e como sendo 1, tem-se

$$\text{Área}(Q) = \text{Área}(H_1^e) = 1,$$

e, desta forma, considerando-se a igualdade (155), pode-se concluir que, quanto maior o número de retângulos que compõem o polígono Q , mais o seu formato se aproxima da região delimitada pela faixa da hipérbole H_1^e .

Apêndices

A Demonstração da Propriedade $L(x^n) = n \cdot L(x)$, com $n \in \mathbb{N}$, pelo *Princípio da Indução Finita*

Seja a proposição $P(n) : L(x^n) = n \cdot L(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$). Pelo *Princípio da Indução Finita*, inicialmente é feita a verificação da validade de $P(n)$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Neste caso, a verificação é feita para o valor $n_0 = 1$ como segue:

$$P(1) : \underbrace{L(x^1)}_{L(x)} = \underbrace{1 \cdot L(x)}_{L(x)} \rightarrow P(1) \text{ é válida!}$$

Supondo-se que $P(n)$ é válida, verifica-se a validade de $P(n+1)$ da seguinte forma:

$$L(x^n) = n \cdot L(x) \Rightarrow \underbrace{L(x^n) + L(x)}_{L(x^n \cdot x)} = n \cdot L(x) + L(x) \Rightarrow L(x^n \cdot x) = (n+1) L(x) \Rightarrow$$

$$P(n+1) : L(x^{n+1}) = (n+1) L(x) \rightarrow P(n+1) \text{ é válida!}$$

Portanto, fica demonstrado que a proposição $P(n) : L(x^n) = n \cdot L(x)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação: a igualdade $L(x^n) + L(x) = L(x^n \cdot x)$ é resultante da Propriedade Fundamental (B) de funções logarítmicas. (Vide Seção 3.1)

B Posição Relativa entre as Retas Secante e Tangente à Hipérbole H no Intervalo $[a, b]$

Considere-se a reta s secante à hipérbole H nos pontos de abscissa a e b , e a reta t tangente à hipérbole H no ponto médio do intervalo $[a, b]$, onde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq b$, de modo que

$$\begin{cases} s : y = m_s \cdot x + n_s \\ t : y = m_t \cdot x + n_t , \end{cases}$$

conforme a Figura 86.

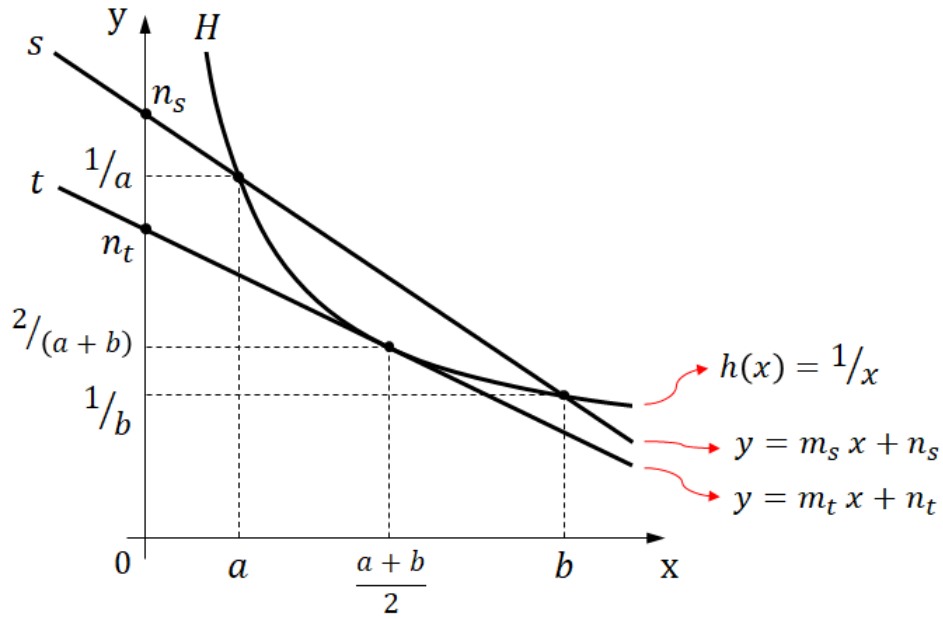


Figura 86: Gráfico das retas secante e tangente à faixa da hipérbole H_a^b

Inicialmente, o coeficiente angular m_s da reta secante s é dado por

$$m_s = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{1/b - 1/a}{b - a} = - \left(\frac{b - a}{ab} \right) \cdot \left(\frac{1}{b - a} \right) \Rightarrow m_s = -\frac{1}{ab} < 0 ,$$

e o seu coeficiente linear n_s , por

$$h(a) = m_s \cdot a + n_s \Rightarrow \frac{1}{a} = \left(-\frac{1}{ab} \right) \cdot a + n_s \Rightarrow n_s = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 0 ,$$

resultando na equação

$$s : y = -\frac{x}{ab} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) .$$

Tome-se agora a reta $r : y = m \cdot x + n$, secante à hipérbole H nas extremidades do intervalo $(k - \delta, k + \delta)$ com centro no ponto k e raio δ , onde $k, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ e $\delta < k$, conforme a Figura 87.

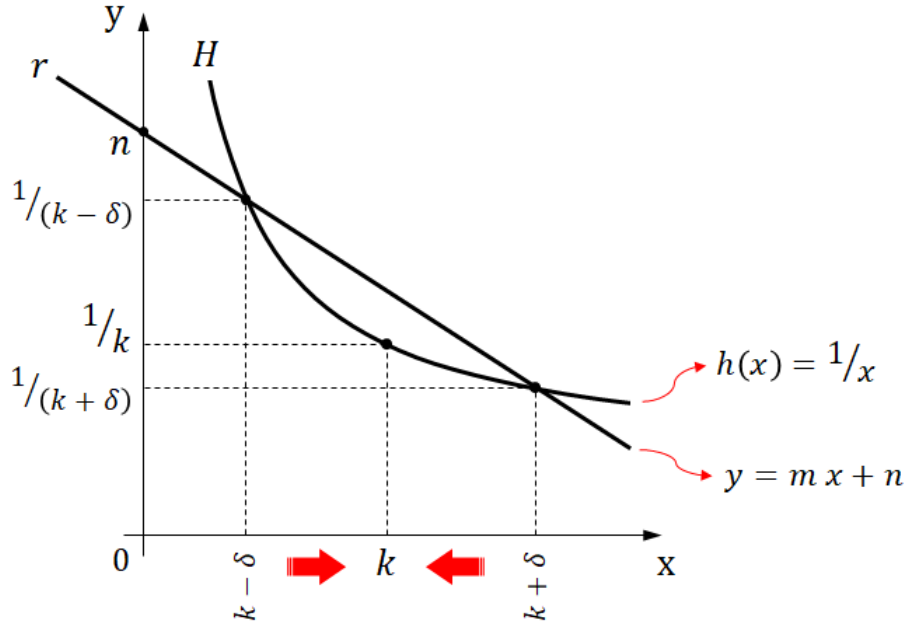


Figura 87: Gráfico da reta r_δ secante à faixa da hipérbole $H_{k-\delta}^{k+\delta}$

O coeficiente angular m da reta r é dado por

$$m = \frac{h(k+\delta) - h(k-\delta)}{(k+\delta) - (k-\delta)} = \frac{\frac{1}{k+\delta} - \frac{1}{k-\delta}}{2\delta} = - \left(\frac{2\delta}{k^2 - \delta^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\delta} \right) \Rightarrow$$

$$m = - \frac{1}{k^2 - \delta^2} < 0 ,$$

e seu coeficiente linear n , por

$$h(k+\delta) = m \cdot (k+\delta) + n \Rightarrow \frac{1}{k+\delta} = - \left(\frac{1}{k^2 - \delta^2} \right) \cdot (k+\delta) + n \Rightarrow$$

$$n = \frac{1}{k+\delta} + \frac{k+\delta}{k^2 - \delta^2} = \frac{k - \delta + k + \delta}{k^2 - \delta^2} \Rightarrow n = \frac{2k}{k^2 - \delta^2} > 0 ,$$

que resultam na equação

$$r : -\frac{x}{k^2 - \delta^2} + \frac{2k}{k^2 - \delta^2} .$$

Fazendo-se δ tender a zero, os valores de $k - \delta$ e $k + \delta$ se aproximam cada vez mais da abscissa k , centro do intervalo, e a posição da reta r_δ varia até tornar-se tangente à hipérbole H . Neste caso, considerando-se

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m = m_t \quad , \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} n = n_t \quad \text{e} \quad k = \frac{a+b}{2} ,$$

chega-se à equação da reta t mencionada no início deste Apêndice B. O coeficiente m_t é dado por

$$m_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{k^2 - \delta^2} \right) = -\frac{1}{k^2} \Rightarrow m_t = - \left(\frac{2}{a+b} \right)^2 < 0 ,$$

o coeficiente n_t , por

$$n_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{2k}{k^2 - \delta^2} \right) = \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k} \Rightarrow n_t = \frac{4}{a+b} > 0 ,$$

e, conseqüentemente, a equação de t é dada por

$$t : y = - \left(\frac{2}{a+b} \right)^2 \cdot x + \left(\frac{4}{a+b} \right) .$$

Supondo-se que as retas s e t fossem paralelas, então teria-se $m_s = m_t$, e, sendo assim,

$$-\frac{1}{ab} = - \left(\frac{2}{a+b} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{ab} = \left(\frac{2}{a+b} \right)^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab \Rightarrow$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b ,$$

que contradiz o enunciado, pois $a \neq b$.

Logo, conclui-se que $m_s \neq m_t$, e, portanto, as retas s e t não são paralelas entre si.

C Concavidade do Gráfico da Hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$

Considere-se a hipérbole retangular $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = 1/x$ e os números reais positivos a e b tais que $0 < a < b$.

Note-se que, para $a < x < b$, tem-se

$$x - a > 0, \quad b - x > 0 \quad \text{e} \quad b - a > 0.$$

Conforme a definição dada na Subseção 2.3.11, tem-se que

$$\begin{aligned} f \text{ é convexa} &\iff f(x) < f(a) + \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) \iff \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{a} &< \left(\frac{1/b - 1/a}{b - a} \right) (x - a) \iff \frac{a - x}{ax} < \left[\frac{a - b}{ab(b - a)} \right] (x - a) \iff \\ \frac{x \overleftarrow{a}}{ax} &> \left[\frac{b \overleftarrow{a}}{ab(b \overleftarrow{a})} \right] (x \overleftarrow{a}) \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{b} \iff x < b, \end{aligned} \quad (157)$$

e, de forma análoga,

$$\begin{aligned} f \text{ é convexa} &\iff f(x) < f(b) + \left[\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right] (x - b) \iff \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{b} &< \left(\frac{1/a - 1/b}{a - b} \right) (x - b) \iff \frac{b - x}{xb} < \left[\frac{b - a}{ab(a - b)} \right] (x - b) \iff \\ \frac{b \overleftarrow{x}}{xb} &< - \left[\frac{b - a}{ab(a - b)} \right] (b \overleftarrow{x}) \iff \frac{1}{x} < - \left[- \frac{b \overleftarrow{a}}{a(b \overleftarrow{a})} \right] \iff \\ \frac{1}{x} &< \frac{1}{a} \iff x > a, \end{aligned} \quad (158)$$

e, portanto, por (157) e (158), conclui-se que f tem a concavidade voltada para cima (*convexa*) no intervalo $a < x < b$.

A Figura 88 ilustra o gráfico da hipérbole para $a < x < b$.

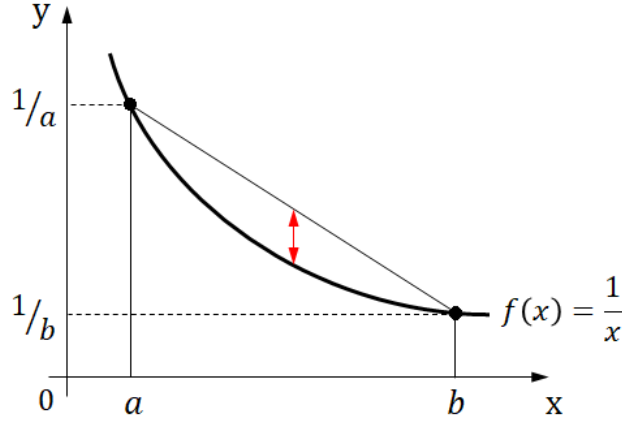


Figura 88: A hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$ é convexa para $a < x < b$

Por uma questão de completude do texto, verifica-se, na sequência, a concavidade da hipérbole $f(x)$ para $-b < x < -a$, sendo que

$$x - (-b) = x + b > 0, \quad -a - x = -(a + x) > 0 \quad \text{e} \quad -a - (-b) = b - a > 0.$$

Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned} f \text{ é côncava} &\iff f(x) > f(-b) + \left[\frac{f(-a) - f(-b)}{(-a) - (-b)} \right] [x - (-b)] \iff \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{b} &> \left(\frac{-1/a + 1/b}{-a + b} \right) (x + b) \iff \frac{x + b}{xb} > \left[\frac{a - b}{ab(b - a)} \right] (x + b) \iff \\ \frac{x + b}{xb} &> - \left[\frac{b - a}{ab(b - a)} \right] (x + b) \iff \frac{1}{x} > -\frac{1}{a} \iff x < -a, \end{aligned} \quad (159)$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} f \text{ é côncava} &\iff f(x) > f(-a) + \left[\frac{f(-b) - f(-a)}{(-b) - (-a)} \right] [x - (-a)] \iff \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{a} &> \left[\frac{-1/b + 1/a}{-b + a} \right] (x + a) \iff \frac{a + x}{ax} > \left[\frac{b - a}{ab(a - b)} \right] (x + a) \iff \\ \frac{a + x}{ax} &> - \left[\frac{b - a}{ab(b - a)} \right] (a + x) \iff \frac{[-(a + x)]}{x} < -\frac{[-(a + x)]}{b} \iff \\ \frac{1}{x} &< -\frac{1}{b} \iff x > -b, \end{aligned} \quad (160)$$

e, sendo assim, por (159) e (160), conclui-se que f tem a concavidade voltada para baixo (*côncava*) no intervalo $-b < x < -a$.

A Figura 89 ilustra o gráfico da hipérbole para $-b < x < -a$.

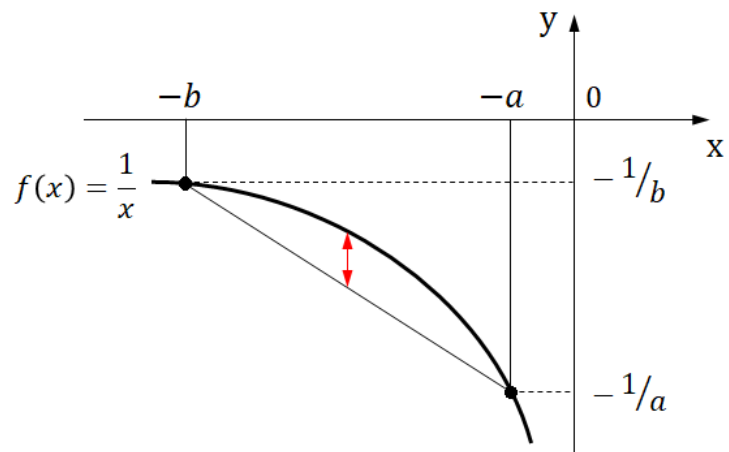


Figura 89: A hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$ é côncava para $-b < x < -a$

D Análise Real

Neste capítulo, serão abordados conceitos de *Análise Real* relacionados ao tema principal desta dissertação. Para aprofundamento deste assunto, incluindo-se a demonstração dos teoremas aqui apresentados, recomenda-se a leitura do livro “**Análise Real - volume 1 - Funções de Uma Variável**” de **Elon Lages Lima**. Também serviram de referência para a elaboração desta seção os livros “**Curso de Análise volumes 1 e 2**” do mesmo autor.

D.1 Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos

D.1.1 Números Naturais

Definição. O conjunto dos números naturais é representado pela letra $\mathbb{N}$, e tem os seguintes elementos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\} .$$

O conjunto dos números naturais tem as seguintes características, também chamadas de *Axiomas de Peano*:

- (1) Todo número natural n tem um único sucessor, representado por $n + 1$, que também é um número natural. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
- (2) Números naturais diferentes tem sucessores diferentes. Em outras palavras, se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m + 1 = n + 1$, então $m = n$.
- (3) Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
- (4) Seja X um conjunto de números naturais, ou seja, $X \subset \mathbb{N}$. Se X contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então X contém todos os números naturais. Em outras palavras, para $X \subset \mathbb{N}$, se $1 \in X$ e se, além disso, $n + 1 \in X$ para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O Axioma (4) também é conhecido como *Princípio da Indução Finita*, e pode ser reescrito da seguinte forma:

- (4') Se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo-se $P(n)$ válida daí resultar que $P(n + 1)$ também é válida, então P é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação. É usual considerar-se o 0 como o primeiro número natural. Neste caso, no enunciado do Axioma (3) acima, o 0 seria o único número natural que não é sucessor de nenhum outro natural. Também é usual, nesta situação, utilizar-se a notação $\mathbb{N}^*$ para se

representar o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, expressando-se, assim, o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{0\} \cup \mathbb{N}^*$.

Exemplo D.1. *Prova-se, pelo Princípio da Indução Finita, que a propriedade $P(n)$ definida por*

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (161)$$

é válida. Para tanto, procede-se da seguinte forma:

(i) *Verifica-se a validade de $P(n)$ para $n = 1$, ou seja,*

$$P(1) : 2(1) - 1 = (1)^2 \rightarrow P(1) \text{ é válida!}$$

(ii) *Verifica-se que a validade de $P(n)$ para um dado valor n , implica na validade de $P(n + 1)$. Em outras palavras, precisa-se mostrar que $P(n + 1)$ é válida, ou seja,*

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2 .$$

Para tal, soma-se o termo $[2(n + 1) - 1]$ a ambos os membros de $P(n)$, obtendo-se

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] \stackrel{(*)}{=} \underbrace{n^2 + [2(n + 1) - 1]}_{n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2} \Rightarrow$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2 \rightarrow P(n + 1) \text{ é válida!}$$

(*) *Nesta passagem, é utilizada a hipótese de indução $P(n)$ conforme (161).*

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, conclui-se que a propriedade $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

D.1.2 Conjuntos Finitos

Definição. Seja dado o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, ou, mais precisamente, $I_n = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto X chama-se *finito* quando é vazio ou então existe, para um dado $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$. Neste último caso, escrevendo-se $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $x_3 = f(3)$, $\dots$, $x_n = f(n)$, tem-se que $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, onde a bijeção f chama-se *contagem* dos elementos de X e n é o *número de elementos* ou *número cardinal* de X .

D.1.3 Conjuntos Infinitos

Definição. Um conjunto é *infinito* quando não é finito, ou seja, um conjunto X é infinito quando não é vazio e não existe, seja qual for o número $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$.

D.1.4 Conjuntos Enumeráveis

Definição. Um conjunto X chama-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Neste último caso, f chama-se uma *enumeração* dos elementos de X . Considerando-se $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $f(3) = x_3$, ... , $f(n) = x_n$, ... , tem-se que $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$.

D.2 Números Reais

Deve-se mencionar inicialmente que, como não é o propósito desta dissertação, não será aqui abordada a construção do conjunto dos números reais. Nesta dissertação, será considerado que as operações de adição e multiplicação estão bem-definidas neste conjunto, e que as mesmas satisfazem as propriedades usuais (associatividade, comutatividade, existência de elementos neutro e inverso, etc), e estas serão admitidas de forma axiomática. Independentemente de como é construído o corpo ordenado completo, pode-se provar que, a menos de isomorfismos, tal corpo é único. Este único corpo é denominado o *conjunto dos números reais*.

Cabe esclarecer-se que, dentre as possíveis formas de construção deste *corpo ordenado completo*, estão o método dos *Cortes de Dedekind* e também o método de *Completamento de Espaços Métricos*. Para um conhecimento do método dos *Cortes de Dedekind*, indica-se a leitura do **Apêndice do Capítulo 1** da obra “*Principles of Mathematical Analysis*” de **Walter Rudin**, bem como dos livros “*Theory and Application of Infinite Series*” de **Konrad Knopp**, “*Foundations of Analysis*” de **Edmund Landau** e “*The Number System*” de **Hugh Ansfrid Thurston**. Para um conhecimento do método de *Completamento de Espaços Métricos*, recomenda-se a leitura do livro “*Espaços Métricos*” de **Elon Lages Lima**.

O conjunto dos números reais é representado pela letra $\mathbb{R}$, e é caracterizado ao longo desta seção através dos conceitos de *corpo*, *corpo ordenado* e *corpo ordenado completo*.

D.2.1 $\mathbb{R}$ é um Corpo

O conjunto $\mathbb{R}$ é um *corpo* pois nele estão definidas duas operações binárias, denominadas *adição* e *multiplicação*, e que cumprem as condições descritas a seguir.

A adição associa ao par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ a sua *soma* $x + y \in \mathbb{R}$, e a multiplicação associa a estes elementos o seu *produto* $x \cdot y \in \mathbb{R}$, para as quais são válidas as seguintes propriedades:

A. Propriedades da Adição

A1. *Associatividade:* $(x + y) + z = x + (y + z)$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

A2. *Comutatividade*: $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A3. *Elemento neutro*: existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

A4. *Simétrico*: todo $x \in \mathbb{R}$ apresenta um *simétrico* $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Observação. A soma $x + (-y)$ pode ser escrita como $x - y$, e chama-se *diferença* entre x e y . A operação que associa ao par ordenado $x, y \in \mathbb{R}$ a sua *diferença* $x - y \in \mathbb{R}$ é a *subtração*.

B. Propriedades da Multiplicação

B1. *Associatividade*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

B2. *Comutatividade*: $x \cdot y = y \cdot x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

B3. *Elemento neutro*: existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot 1 = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

B4. *Inverso*: todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ apresenta um *inverso multiplicativo* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Observação. O produto $x \cdot y^{-1}$ também é escrito na forma de fração x/y , e é chamado de *quociente* entre x e y . A operação que associa ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o seu *quociente* $x/y \in \mathbb{R}$ é a *divisão*, sempre com $y \neq 0$.

C. *Propriedade da Distributividade*: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Pelo exposto nesta seção, conclui-se que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ *não é um corpo*, pois, além de não conter o zero (elemento neutro da adição), seus elementos não possuem simétrico natural, ou seja, se $p \in \mathbb{N}$ então $-p \notin \mathbb{N}$.

Tomando-se um conjunto formado pelo zero, os números naturais e seus respectivos simétricos, tem-se o *conjunto dos números inteiros* $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$. No entanto, $\mathbb{Z}$ também *não é um corpo*, pois seus elementos não apresentam inverso multiplicativo inteiro, isto é, se $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q \neq 0$ e $q \neq \pm 1$, então $q^{-1} = 1/q \notin \mathbb{Z}$.

Formando-se, agora, um conjunto com as frações $p/q = p \cdot q^{-1}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$, obtém-se o *conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$. Como atende todas as propriedades descritas nesta seção, $\mathbb{Q}$ é um *corpo*.

D.2.2 $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado

O conjunto $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado* pois seus elementos apresentam uma *relação de ordem* entre si.

Para se definir a relação de ordem em $\mathbb{R}$, destaca-se, inicialmente, o subconjunto $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$, chamado de conjunto dos *números reais positivos*, que satisfaz as seguintes condições:

1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos, ou seja,

$$x, y \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{e} \quad x \cdot y \in \mathbb{R}_+^* ;$$

2. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, ocorre apenas uma das três possibilidades a seguir:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{ou} \quad -x \in \mathbb{R}_+^* .$$

Indicando-se com $\mathbb{R}_-^*$ o conjunto dos números $-x$, onde $x \in \mathbb{R}_+^*$, então, pela condição 2 anterior, pode-se afirmar que $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \cup \{0\}$, onde os conjuntos $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ e $\{0\}$ são distintos entre si. Denomina-se $\mathbb{R}_-^*$ o conjunto dos *números reais negativos*.

Escreve-se $x < y$ (x é menor do que y) quando $y - x \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja, $y = x + z$ onde z é positivo. Pode-se utilizar também, neste caso, a notação $y > x$ (y é maior do que x).

São válidas as seguintes propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$:

- **Transitividade:** se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;
- **Tricotomia:** dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre apenas uma das seguintes possibilidades:

$$x = y \quad \text{ou} \quad x < y \quad \text{ou} \quad x > y ;$$

- **Monotonicidade da adição:** se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$;
- **Monotonicidade da multiplicação:** se $x < y$ e $z \in \mathbb{R}$, então tem-se

$$\begin{cases} xz < yz & \text{para } z > 0 \\ xz > yz & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um *corpo ordenado* pois atende a todas as condições e propriedades apresentadas nesta seção.

Exemplo D.2 (Desigualdade de Bernoulli). Para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx . \tag{162}$$

Esta desigualdade pode ser demonstrada por indução em n . Inicialmente, verifica-se que a desigualdade é válida para $n = 1$. Supondo-a válida também para n , e multiplicando-se ambos os membros pelo número $1 + x \geq 0$, obtém-se:

$$(1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) \Rightarrow$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x \Rightarrow$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x ,$$

□

ou seja, a desigualdade (162) é válida para $n + 1$, e, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$.

D.2.3 $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado Completo

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado superiormente* se existir $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, o número b é chamado de *cota superior* de X . Da mesma forma, o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$, e o número a chama-se *cota inferior* de X . Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um *conjunto limitado*. Isto significa que X está contido em algum intervalo $[a, b]$, ou, ainda, que existe um número real $k > 0$ tal que $|x| \leq k$ para $x \in X$, como exemplificado nos dois casos da Figura 90.

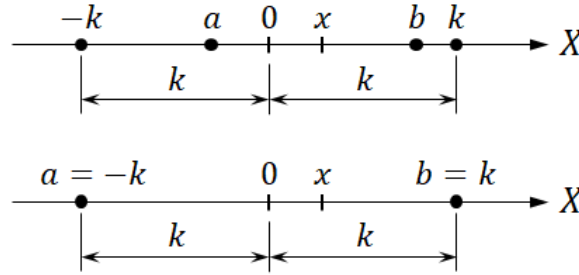


Figura 90: Dados $x \in X$ e $a, b, k \in \mathbb{R}$ tais que $k \geq \max\{|a|, |b|\}$, se $x \in [a, b]$ então $x \in [-k, k]$

Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado superiormente e não-vazio, e o número b é a menor das cotas superiores de X , então b é o *supremo* de X , cuja notação é $b = \sup X$.

De mesma forma, se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e não-vazio, o número a chama-se *ínfimo* de X se for a maior das cotas inferiores de X , sendo indicado por $a = \inf X$.

Note-se então que, dados $a, b \in X$ e o intervalo fechado $X = [a, b]$, b é o elemento máximo e o supremo de X , e a é o elemento mínimo e o ínfimo de X . Portanto, neste caso, $b = \max X = \sup X$ e $a = \min X = \inf X$.

Dados, agora, $a, b \in \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ e o intervalo aberto $Y = (a, b)$, b é o supremo e a é o ínfimo de Y , ou seja, $b = \sup Y$ e $a = \inf Y$. No entanto, Y não apresenta elementos máximo e mínimo, pois $a, b \notin Y$.

O conjunto $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo* pois todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$, não-vazio e limitado superiormente, possui $b = \sup X \in \mathbb{R}$, e todo conjunto $Y \subset \mathbb{R}$, não-vazio e limitado inferiormente, possui $a = \inf Y \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ é não-vazio e limitado superior e inferiormente, pois $\sup X = \sqrt{2}$ e $\inf X = -\sqrt{2}$. Como $X \subset \mathbb{Q}$, mas $\sup X \notin \mathbb{Q}$ e $\inf X \notin \mathbb{Q}$, conclui-se que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ *não é completo*.

D.3 Sequências de Números Reais

Definição. Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa, a cada número natural n , um número real x_n , chamado de *n-ésimo termo* da sequência.

Notação. Uma sequência pode apresentar as notações

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{ou} \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ou simplesmente} \quad (x_n).$$

Observação. Observe-se que *sequência* é um caso particular de função, pois tanto o seu domínio quanto a sua imagem são conjuntos enumeráveis.

Exemplo D.3. A *progressão aritmética (PA) infinita* $(3, 5, 7, 9, \dots)$ de termo geral $a_n = 2n + 1$ é uma sequência.

Exemplo D.4. A *progressão geométrica (PG) infinita* $(1, 5, 25, 125, \dots)$ de termo geral $a_n = 5^{n-1}$ é uma sequência.

D.3.1 Sequências Limitadas

Definição. Diz-se que uma sequência (x_n) de números reais é *limitada superiormente* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, (x_n) é *limitada inferiormente* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{R}$. Quando (x_n) é limitada superior e inferiormente, diz-se que ela é *limitada*. Neste caso, pode-se afirmar que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo D.5. A sequência $(1, 1, 1, 1, \dots)$ definida por $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é constante e, evidentemente, limitada.

Exemplo D.6. A sequência $(0, 1, 0, 1, \dots)$ definida por $x_n = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{n+1}]$ tem seu conjunto de valores igual a $\{0, 1\}$. Sendo assim, (x_n) é limitada.

D.3.2 Subsequências

Definição. Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma *subsequência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de $\mathbb{N}$.

Notação. Uma subsequência pode ser representada pelas notações

$$x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'} \quad \text{ou} \quad (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots) \quad \text{ou simplesmente} \quad (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo D.7. Seja dada a sequência $(2, 4, 8, 16, \dots)$ cujo termo geral é $x_n = 2^n$, e o conjunto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}' = 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. A subsequência de (x_n) definida por $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é igual a $(2^2, 2^4, 2^6, 2^8, \dots)$, que corresponde a $(4, 16, 64, 256, \dots)$.

Exemplo D.8. Seja dada a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $a < -1$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares, então a subsequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente, enquanto a subsequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.

D.3.3 Limite e Convergência de Sequências

Definição. Diz-se que a sequência (x_n) converge para o número real a se, para qualquer $\delta > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \delta$. Neste caso, o número real a chama-se *limite* da sequência (x_n) , cuja notação é

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \quad \text{ou simplesmente} \quad a = \lim x_n.$$

Observação. O conceito de limite significa que, para valores muito grandes de n , os termos x_n tornam-se e permanecem tão próximos de a quanto se deseje. Em outras palavras, definindo-se uma margem de erro $\delta > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que δ . O valor de n_0 é normalmente definido em função de δ , sendo usual, portanto, a notação $n_0 = n_0(\delta)$. Note-se que $|x_n - a| < \delta$ é o mesmo que $a - \delta < x_n < a + \delta$, ou seja, $x_n \in (a - \delta, a + \delta)$. Quando x_n converge para a , a quantidade de termos da sequência (x_n) com índice $n \leq n_0$, ou seja, fora do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, é sempre finita, por maior que seja.

Definição. Uma sequência que possui limite chama-se *convergente*. Caso contrário, ela é *divergente*.

Exemplo D.9. Seja dada a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ definida por $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Note-se que

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0 \iff \text{para } \forall \delta > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que,}$$

$$\text{se } n > n_0 \text{ então } \left| \frac{1}{2^{n-1}} - 0 \right| < \delta.$$

De fato, tem-se que

$$\left| \frac{1}{2^{n-1}} - 0 \right| < \delta \iff \frac{1}{2^{n-1}} < \delta \iff \frac{2^n}{2} > \frac{1}{\delta} \iff 2^n > \frac{2}{\delta} > 0 \iff$$

$$\log_2(2^n) > \log_2 \frac{2}{\delta} \iff n > \log_2 2 - \log_2 \delta \iff n > 1 - \log_2 \delta.$$

Escolhendo-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1 - \log_2 \delta$, então

$$n > n_0 > 1 - \log_2 \delta \iff 0 < \frac{1}{2^{n-1}} < \delta .$$

Logo, a sequência (x_n) possui limite $a = 0$ e, sendo assim, é convergente. (Como será visto na seção seguinte, o limite de toda sequência decrescente limitada inferiormente é o seu ínfimo, e, portanto, neste caso, tem-se

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0 .)$$

Exemplo D.10. Seja dada a sequência $(1, 2, 3, 4, \dots)$ de termo geral $x_n = n$. Tomando-se um número real qualquer a e um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, onde $\delta > 0$, note-se que, por maior que seja δ , sempre haverá um termo x_k da sequência tal que $|x_k - a| > \delta$. Em outras palavras, não existe um n_0 tal que todos os termos x_n da sequência com índice $n > n_0$ fiquem dentro do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Logo, a sequência (x_n) não possui limite, e, portanto, é divergente.

Teorema D.1 (Unicidade do Limite). Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Teorema D.2. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a .

Teorema D.3. Toda sequência convergente é limitada.

D.3.4 Sequências Monótonas

Definição. Uma sequência (x_n) chama-se *monótona* quando $x_n \leq x_{n+1}$ ou então $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e pode ser classificada como:

- *não-decrescente*, se $x_n \leq x_{n+1}$;
- *não-crescente*, se $x_{n+1} \leq x_n$;
- *crescente*, se $x_n < x_{n+1}$
- *decrescente*, se $x_{n+1} < x_n$.

Observação. Toda sequência monótona não-decrescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, e toda sequência monótona não-crescente é limitada superiormente também pelo seu primeiro termo.

Exemplo D.11. A sequência $(1, 2, 3, 4, \dots)$ definida por $x_n = n$ é monótona crescente, mas não converge pois não é limitada.

Exemplo D.12. A sequência $(0, 1, 0, -1, \dots)$ definida por $x_n = \cos \frac{\pi}{2}(n - 1)$ não é monótona, mas é limitada pois

$$-1 \leq \cos \frac{\pi}{2}(n - 1) \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema D.4. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Exemplo D.13. A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ definida por $x_n = \frac{1}{n}$ é monótona decrescente e converge para 0. Portanto, pelo Teorema D.3, (x_n) é limitada.

Exemplo D.14. A sequência (a_n) definida pelo termo geral

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (163)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ é monótona crescente porque

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1} .$$

Sabe-se que

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} \quad , \quad \frac{1}{4!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3} \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

e, sendo assim,

$$2 \leq a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{soma de PG com 1º termo } a_1 = 1 \text{ e razão } q = 1/2} \Rightarrow$$

$$2 \leq a_n \leq 1 + \underbrace{\frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2}}_{=2 - (1/2)^{n-1}} \Rightarrow 2 \leq a_n \leq 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$2 \leq a_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \Rightarrow 2 \leq a_n < 3 ,$$

ou seja, (a_n) é monótona limitada e, portanto, pelo Teorema D.4, convergente.

Exemplo D.15. Seja dada a sequência (b_n) de termo geral

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Pela fórmula do binômio de Newton, tem-se que

$$\begin{aligned} b_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \binom{n}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \\ b_n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n - (n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\
+ \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) .
\end{aligned} \tag{164}$$

Utilizando-se o mesmo procedimento, pode-se escrever o termo b_{n+1} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) + \binom{n+1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \\
+ \binom{n+1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \dots + \binom{n+1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^n + \\
+ \binom{n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \\
b_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\
+ \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
+ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) .
\end{aligned} \tag{165}$$

Note-se que as igualdades (164) e (165) expressam os termos b_n e b_{n+1} como somas de parcelas positivas, sendo que a quantidade de parcelas aumenta de b_n para b_{n+1} . Além disso, para todo $c \in \mathbb{N}$ tal que $c < n$, tem-se

$$\begin{aligned}
n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{c}{n+1} > -\frac{c}{n} \Rightarrow \\
\left(1 - \frac{c}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{c}{n}\right) ,
\end{aligned}$$

e, portanto, o valor das parcelas que estão em função de n também aumenta de b_n para b_{n+1} . Logo, $b_n < b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, desta forma, (b_n) é uma sequência monótona crescente.

Tome-se a sequência (a_n) do Exemplo D.14. Na igualdade (164), nota-se que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1 , \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1 , \dots , \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 ,$$

e, desta forma, comparando-se as igualdades (163) e (164), verifica-se que os valores das parcelas de b_n que dependem de n são menores que os de a_n . Logo, como $a_1 = b_1 = 2$, conclui-se que $b_n \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, (b_n) é limitada pois

$$2 \leq b_n \leq a_n < 3 , \tag{*}$$

e, portanto, por ser também monótona, pelo Teorema D.4, é convergente.

(*) Esta demonstração também é apresentada no livro “Cálculo Diferencial e Integral - Volume 1” de Nikolai Piskounov, na Seção 7 do seu Capítulo II.

Exemplo D.16. *Seja dada a sequência de termo geral $x_n = \sqrt[n]{n}$. Como*

$$n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq 1,$$

conclui-se que (x_n) é formada apenas por números positivos e limitada inferiormente por 1.

Para que (x_n) seja monótona, deve-se ter $x_n \leq x_{n+1}$ ou $x_n \geq x_{n+1}$. Por hipótese, se $x_n > x_{n+1}$, então

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Rightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Rightarrow n \cdot n^n > (n+1)^n \Rightarrow n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

que é válida para $n \geq 3$, pois $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, conforme o Exemplo D.15. Sendo assim, conclui-se que a sequência (x_n) é decrescente a partir do seu terceiro termo.

Note-se que os três primeiros termos de (x_n) obedecem a ordem $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, ou seja, a sequência cresce até o terceiro termo e, então, passa a decrescer. Portanto, (x_n) é limitada, pois $1 \leq x_n \leq \sqrt[3]{3}$.

D.3.5 Limites e Desigualdades

Seja P uma propriedade referente aos termos da sequência (x_n) . A título de simplificação, será utilizada a nomenclatura

“para todo n suficientemente grande, x_n goza da propriedade P ”

para significar que

“existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, x_n goza da propriedade P ”.

Teorema D.5. *Seja $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Se $a > b$, então, para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > b$. De forma análoga, se $a < b$, então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.*

Deste teorema, decorrem os seguintes corolários:

Corolário D.1. *Seja $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Se $a > 0$, então, para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > 0$. Analogamente, se $a < 0$, então $x_n < 0$ para todo n suficientemente grande.*

Corolário D.2. *Sejam $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ e $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $a \leq b$. Em particular, se $x_n \leq b$ para todo n suficientemente grande, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq b$.*

Observação. Note-se que, se $x_n < y_n$, não se pode concluir que $a < b$. Por exemplo, se $x_n = 0$ e $y_n = 1/n$, então $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, e, portanto, $a = b$. (Em outros termos, $x_n < y_n$ mas $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.)

Teorema D.6 (Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche). Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$.

Exemplo D.17. A sequência $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ assume valores positivos quando n é par e negativos quando n é ímpar. Portanto, pode-se escrever que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, então, pelo Teorema D.6 (Teorema do Confronto), tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Exemplo D.18. Considere-se a sequência de termo geral

$$x_n = \frac{\log n}{n}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\log \sqrt{n} < \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{2} \log n < \sqrt{n} \Rightarrow \log n < 2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{\log n}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{\log n}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{ou mesmo} \quad 0 \leq \frac{\log n}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

pois 0 é o primeiro termo de (x_n) . Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 0$, então, pelo Teorema do Confronto, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right) = 0$. Portanto, (x_n) é convergente.

D.3.6 Operações com Limites

Teorema D.7. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$, então:

- (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = a + b$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = a - b$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
- (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

Exemplo D.19. *Seja dada a sequência de termo geral*

$$x_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$. Sabe-se que, neste caso, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1} = 0$, e, desta forma, pela propriedade (2) do Teorema D.7, tem-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - a^{n+1}) = 1$. Sendo assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - a} \right) = \frac{1}{1 - a},$$

e, portanto, pelo Teorema D.3, (x_n) é limitada.

Teorema D.8. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada (convergente ou divergente), então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$.

Exemplo D.20. *Seja dada a sequência de termo geral*

$$x_n = \frac{\text{sen } n}{n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ e a sequência $(\text{sen } n)$ é limitada pois $-1 \leq \text{sen } n \leq 1$, então, pelo Teorema D.8, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{sen } n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \text{sen } n \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{sen } n}{n} \right) = 0.$$

D.3.7 Limites Infinitos

Definição. Dada uma sequência (x_n) , a expressão $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ (que se pronuncia “o limite de x_n é igual a mais infinito”), significa que, para qualquer número real $a > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $x_n > a$. Analogamente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ significa que, para qualquer $a > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $x_n < -a$.

Observação. Note-se que $+\infty$ e $-\infty$ não são números. Se (x_n) e (y_n) são sequências tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty$, isto significa que (x_n) e (y_n) não são convergentes, ou seja, não têm limite.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, então a sequência (x_n) não é limitada superiormente. Da mesma maneira, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty$, então a sequência (y_n) não é limitada inferiormente. Por exemplo, a sequência de termo geral $x_n = n$ não tem limite, pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Teorema D.9.

- (1) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.
- (2) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot y_n) = +\infty$.
- (3) Se $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = +\infty$.
- (4) Se (x_n) é limitada e $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = 0$.

D.4 Séries Numéricas

Definição. Uma série de números reais é uma soma de infinitos números, dispostos numa ordem pré-determinada e expressa na forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \quad (166)$$

onde a parcela a_n é o n -ésimo termo ou termo geral da série.

Notação. Utiliza-se escrever a soma infinita em (166) como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Observação. Normalmente as séries são iniciadas com $n = 1$, que, de acordo com a Seção D.1.1, é o menor número natural. No entanto, é possível iniciá-las com $n = 0$ ou outro número natural qualquer.

D.4.1 Reduzidas ou Somas Parciais

Definição. A partir da soma em (166), define-se a sequência (s_n) tal que

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad \dots,$$

onde os números $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ são denominados as *reduzidas de ordem n* ou *n -ésimas somas parciais* da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Observação. Esta sequência (s_n) é construída com o propósito de se atribuir, sempre que possível, um valor real (finito) à soma infinita em (166).

D.4.2 Convergência de Séries

Definição. Se existir o limite

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n,$$

diz-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é *convergente* e o limite s chama-se a *soma* da série. Entretanto, se não houver $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é *divergente*.

Observação. Se uma série é tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$, isto significa que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ não existe, e, portanto, esta série é divergente.

Exemplo D.21. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, cujo termo geral é

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

tem a n -ésima soma parcial igual a

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} .$$

Desta forma, a soma s da série é igual a

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)}_{=0} = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 ,$$

e, portanto, a série é convergente.

Outra forma de verificar-se a convergência desta série é notando-se que (s_n) é uma sequência crescente, pois

$$n+1 < n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} \Rightarrow -\frac{1}{n+1} < -\frac{1}{n+2} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow s_n < s_{n+1} ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e desta forma, $\sup s_n = 1$ é o limite de (s_n) .

Exemplo D.22. A série $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, de termo geral $(-1)^{n+1}$, tem a soma parcial s_n igual a zero quando n é par, e igual a 1 quando n é ímpar. Portanto, a série é divergente, e não existe $\lim s_n$.

Exemplo D.23 (Série Geométrica). A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots$, de termo geral a^n , chama-se série geométrica, pois representa a soma dos termos de uma PG.

Se $0 < |a| < 1$, então, pelo Exemplo D.19 da Seção D.3.6, a n -ésima soma parcial da série é definida por

$$s_n = \underbrace{1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n}_{\text{soma de PG com } (n+1) \text{ termos}} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como a soma da série é igual a

$$s = \lim s_n = \frac{1}{1 - a} ,$$

então a série é convergente.

Teorema D.10 (Critério da Comparação). Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ séries de termos não-negativos, tais que $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$, onde $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto,

- (1) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.
- (2) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Exemplo D.24. Seja dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1 + 3^n}$. Como $1 + 3^n > 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$1 + 3^n > 3^n \Rightarrow \frac{1}{1 + 3^n} < \frac{1}{3^n} \Rightarrow \frac{2^n}{1 + 3^n} < \frac{2^n}{3^n} \Rightarrow \frac{2^n}{1 + 3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é geométrica de razão $a = \frac{2}{3} < 1$, e, pela Equação 5 da Seção 2.2 (fórmula da soma de PG infinita), sua soma é igual a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2/3}{1 - 2/3} = \frac{2/3}{1/3} = 2 ,$$

sendo, desta forma, convergente. Portanto, pelo Critério da Comparação (Teorema D.10), a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1 + 3^n}$ também é convergente.

Exemplo D.25. Seja dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Sabe-se, do Exemplo D.21, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e sua soma é igual a 1. Sendo assim, tem-se que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{=1} = 2 .$$

Como $2n \geq n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$2n \geq n+1 \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \leq \left(\frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)},$$

e, portanto, pelo Critério da Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ também é convergente.

Exemplo D.26 (Série Harmônica). A série harmônica é definida por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

onde (s_n) é a sequência composta por todas as somas parciais desta série.

Considere-se (s_{2^m}) , onde $m \in \mathbb{N}$ e $m > 1$, como a subsequência de (s_n) formada pelas somas parciais

$$s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, s_{64}, \dots, s_{2^m}, \dots$$

Para cada $m > 1$, a soma parcial s_{2^m} pode ser convenientemente escrita na forma

$$\begin{aligned} s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}^{2^{(2-1)}=2 \text{ parcelas}} + \overbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}^{2^{(3-1)}=4 \text{ parcelas}} + \\ + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{(m-1)} \text{ parcelas}}. \end{aligned}$$

Desta maneira, para todo $m > 1$, tem-se que

$$\begin{aligned} s_{2^m} &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{2^{m-1}}{2^m}\right) \Rightarrow \\ s_{2^m} &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2^{m-1}}{2^m} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{m \text{ frações iguais a } 1/2} \Rightarrow \\ s_{2^m} &> 1 + \frac{m}{2} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2^m} \geq \underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{m}{2}\right)}_{=+\infty} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2^m} = +\infty, \end{aligned}$$

ou seja, a subsequência (s_{2^m}) é divergente. Logo, como contrapositiva do Teorema D.2, conclui-se que a sequência (s_n) é divergente, e, portanto, a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Teorema D.11. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Observação. A recíproca do Teorema D.11 não é verdadeira. A série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ilustra esta afirmação, pois, apesar de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, a série é divergente (vide Exemplo D.26).

Exemplo D.27. No Exemplo D.21, foi visto que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente. Portanto, pelo Teorema D.11, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 .$$

D.4.3 Séries Absolutamente Convergentes

Definição. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Exemplo D.28. Para $-1 < a < 0$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ pode ser escrita como $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot |a|^n$, onde os termos são positivos quando n é zero ou par, e negativos, quando n é ímpar. Pelo Exemplo D.23, tem-se que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n$ é convergente, e, portanto, pela definição, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ é absolutamente convergente.

Sendo assim, pode-se concluir que, para $|a| < 1$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ é absolutamente convergente.

Observação. Uma série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente.

Teorema D.12 (Critério de Leibniz ou Teste das Séries Alternadas). Se (a_n) é uma sequência monótona decrescente que tende a zero, ou seja,

$$(i) \quad a_n > a_{n+1} \text{ para todo } n ,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 ,$$

então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.

Exemplo D.29. A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é monótona decrescente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Portanto, pelo Teorema D.12, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ é convergente, apesar de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ser divergente (vide Exemplo D.26).

Exemplo D.30. A sequência $\left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$, dada pelo logaritmo decimal, é monótona decrescente, pois

$$n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n + 1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n + 1} \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log\left(1 + \frac{1}{n + 1}\right),$$

e tende a zero, uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \log 1 = 0.$$

Sendo assim, pelo Teorema D.12, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ é convergente.

Note-se que o termo geral da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pode ser escrito na forma

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, sua reduzida s_n é dada por

$$s_n = \cancel{\log 2} + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + \dots + \log(n+1) - \cancel{\log n} \Rightarrow$$

$$s_n = \log(n+1),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$, e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ é divergente.

Observação. Uma série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$ chama-se *condicionalmente convergente*. As séries alternadas dos Exemplos D.29 e D.30 são classificadas desta forma.

Teorema D.13. Toda série absolutamente convergente é convergente.

Observação. De acordo com este teorema, tomando-se uma série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo n , e trocando-se os sinais de alguns dos seus termos (mesmo um número infinito deles) de maneira completamente arbitrária, ainda assim obtém-se uma série convergente.

D.4.4 Testes de Convergência de Séries

Teorema D.14. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ for limitada (em particular, se for convergente), então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será absolutamente convergente.

Exemplo D.31. Seja $a_n = \frac{1}{5n^2 + 4}$. Sabendo-se, pelo Exemplo D.25, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, e fazendo-se $b_n = \frac{1}{n^2}$, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{5n^2 + 4}}{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{5n^2 + 4}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(5 + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1}{5},$$

ou seja, a sequência $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ é convergente. Portanto, pelo Teorema D.14, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

Corolário D.3 (Teste de d'Alembert ou Teste da Razão). Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e onde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

Então,

- (i) Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente;
- (ii) Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, a série é divergente;
- (iii) Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Exemplo D.32. Dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{a^n}$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $a > 1$, então, pelo Teste da Razão, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}}\right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot \frac{a^n}{a^{n+1}}\right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{a^n}{a \cdot a^n}\right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a}\right| = \left|1^k \cdot \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{a} < 1, \end{aligned}$$

e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{a^n}$ é convergente.

Exemplo D.33. Seja dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, onde $a > 1$. Pelo Teste da Razão, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a \cdot \cancel{a^n}}{\cancel{a^n}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a}{n+1} \right| = 0 < 1, \end{aligned}$$

e, desta forma, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ é convergente.

Exemplo D.34. Dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$, pelo Teste da Razão, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{n^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right| = e > 1. \end{aligned}$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ é divergente, e, como $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n^n/n!}$, então, consequentemente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ é convergente.

Observação. Dos Exemplos D.32, D.33 e D.34, sabe-se que as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ são convergentes. Portanto, pelo Teorema D.11, conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Considerando-se as seqüências (n^k) , (a^n) , $(n!)$ e (n^n) , pode-se afirmar, pelas igualdades anteriores, que (n^n) tem o crescimento mais rápido das quatro, $(n!)$ supera o crescimento de (a^n) , e (n^k) tem o crescimento mais lento de todas.

Teorema D.15 (Teste da Raiz). Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série onde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Então,

- (i) Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente;
- (ii) Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, a série é divergente;
- (iii) Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Exemplo D.35. Seja dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a^n$, onde $a \in \mathbb{R}$. Pelo Teste da Raiz, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \cdot a^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a|^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot |a| \right) = \\ &= |a| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = |a|, \end{aligned}$$

pois, pelo Exemplo D.16, sabe-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Portanto,

- se $|a| < 1$, a série é absolutamente convergente;
- se $|a| > 1$, a série é divergente;
- se $|a| = 1$, então $a = 1$ ou $a = -1$. Para $a = 1$, o termo geral é n , e, para $a = -1$, é $(-1)^n \cdot n$, sendo que nenhum dos dois termos tende a zero. Portanto, pelo Teorema D.11, a série é divergente.

Teorema D.16. Seja a sequência (a_n) tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Exemplo D.36. Seja dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Considerando-se $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, tem-se $a_n = \sqrt[n]{b_n}$, onde $b_n = \frac{n^n}{n!}$, com $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Sabe-se, de acordo com o Exemplo D.34, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente pois, pelo Teste da Razão,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1.$$

Logo, pelo Teorema D.16, tem-se que

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}}_{=e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt[n]{b_n}}_{=a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e > 0,$$

e, portanto, pelo Teorema D.11, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ é divergente, pois o limite do termo geral da série é diferente de 0.

D.4.5 Comutatividade e Reordenação de Séries

Nas operações de adição com quantidade finita de parcelas, a *comutatividade* (apresentada na Seção D.2.1) é a propriedade que permite a reordenação das parcelas sem alteração do resultado. Entretanto, quando se trata de séries, as quais correspondem à soma de infinitas parcelas, a comutatividade pode não ser válida, como é ilustrado no Exemplo D.37 a seguir.

Exemplo D.37. *Sabe-se, pelo Exemplo D.29, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ é convergente, e sua reduzida s_n é dada por*

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \Rightarrow$$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n \cdot (2n-1)} \quad . \quad (167)$$

Na igualdade (167), todas as parcelas do 2º membro são positivas e, portanto, $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n > 1/2 > 0$. Dividindo-se todos os termos desta série por 2, tem-se

$$\frac{s}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \quad .$$

Escrevendo-se as parcelas da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}$ de maneira adequada e comparando-a à série inicial de limite s , tem-se

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots$$

Somando-se as duas igualdades termo a termo, tem-se

$$s + \frac{s}{2} = \frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \quad .$$

Note-se que os termos da série anterior, cuja soma é $\frac{3s}{2}$, são os mesmos da série inicial, de soma s , apenas com uma mudança na sua ordem, apesar da diferença nas somas, pois $s > 0$ implica $s \neq \frac{3s}{2}$.

Definição. Seja $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função bijetora. Dada uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, e considerando-se $b_n = a_{\varphi(n)}$, com $n \in \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ chama-se uma *reordenação* de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Teorema D.17. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então, para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

onde $b_n = a_{\varphi(n)}$, tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

D.4.6 Séries Comutativamente Convergentes

Definição. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é *comutativamente convergente* quando, para qualquer bijeção $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, considerando-se $b_n = a_{\varphi(n)}$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente. (Em particular, para $\varphi(n) = n$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.)

Observação. Pode-se provar que, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é comutativamente convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Teorema D.18. Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.

Teorema D.19 (Riemann). Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ dos termos de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = c$.

Observação. Segundo o Teorema D.19, alterando-se convenientemente a ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente, pode-se fazer com que sua soma fique igual a qualquer número real pré-fixado. Da mesma forma, é possível fazer reordenações $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ tais que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\psi(n)} = -\infty$.

D.5 Noções de Proximidade e Limite

Serão abordados, nesta seção, conceitos que embasam o estudo dos limites de funções. Em algumas situações, será adotada uma linguagem geométrica, escrevendo-se “ponto” ao invés de “número real”, “conjunto” ao invés de “intervalo”, e “reta” ao invés de “conjunto $\mathbb{R}$ ”.

D.5.1 Interior de um Conjunto

Definição. Diz-se que o ponto a é *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\delta > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ está contido em X . O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o *interior* do conjunto X , e é representado por $\text{int}X$.

Exemplo D.38. Seja dado o conjunto $X = [a, b) \cup \{c\}$, com $a < b < c$, e um ponto qualquer $i \in X$ tal que $i \neq c$, conforme a Figura 91.

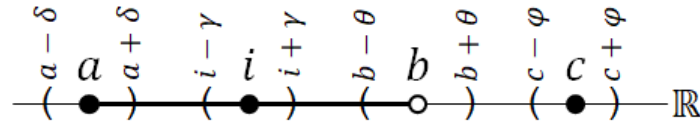


Figura 91: O ponto $i \in X$, onde $X = [a, b) \cup \{c\}$

Note-se que os pontos $a, i, c \in X$. No entanto, $a, c \notin \text{int}X$ pois os intervalos abertos $(a - \delta, a + \delta)$, $(c - \varphi, c + \varphi) \not\subset X$ para quaisquer $\delta > 0$ e $\varphi > 0$. Já o ponto $i \in \text{int}X$ pois existe $\gamma > 0$ tal que o intervalo aberto $(i - \gamma, i + \gamma) \subset \text{int}X$.

D.5.2 Vizinhaça de um Ponto

Definição. *Vizinhaça* de um ponto a é qualquer conjunto aberto ao qual a pertença.

Observação. Pela definição, se $a \in \text{int}X$, diz-se que o conjunto $\text{int}X$ é uma vizinhaça do ponto a . Entretanto, como a noção de limites é local, utiliza-se habitualmente o intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$, centrado no ponto a e de raio $\delta > 0$, para se designar uma vizinhaça de a .

Exemplo D.39. Na Figura 91, o intervalo aberto (a, b) é uma vizinhaça do ponto i . Da mesma forma, o intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ também é uma vizinhaça do ponto a . O mesmo vale para os intervalos abertos $(b - \theta, b + \theta)$, $(c - \varphi, c + \varphi)$ e $(i - \gamma, i + \gamma)$, que são vizinhanças dos pontos b , c e i , respectivamente.

D.5.3 Conjuntos Abertos

Definição. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denominado *aberto* quando $X = \emptyset$ ou $X = \text{int}X$, ou seja, quando todos os pontos de X são interiores a X .

Observação. Todo intervalo aberto, seja limitado ou não, é um conjunto aberto.

Exemplo D.40. A reta $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto, pois qualquer ponto de $\mathbb{R}$ é interior a $\mathbb{R}$.

Exemplo D.41. Seja dado o conjunto $X = (a, b)$ e um ponto qualquer $i \in X$, conforme a Figura 92.

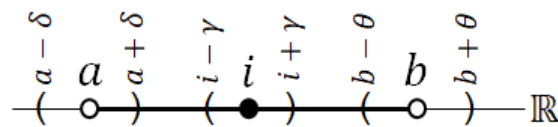


Figura 92: O ponto $i \in \text{int}(a, b)$

Note-se que o ponto $i \in \text{int}X$ pois $(i - \gamma, i + \gamma) \subset X$. Neste caso, como (a, b) é um intervalo aberto, então $\text{int}X = X$, e, portanto, X é um conjunto aberto.

Exemplo D.42. Seja dado o conjunto $X = [a, b]$, conforme a Figura 93.

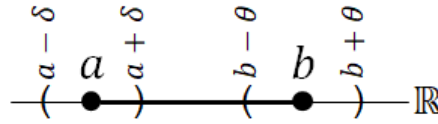


Figura 93: $\text{int}[a, b] = (a, b)$

Note-se que os extremos $a, b \in X$, mas $a, b \notin \text{int}X$ pois $(a - \delta, a + \delta), (b - \theta, b + \theta) \not\subset X$ para quaisquer $\delta > 0$ e $\theta > 0$. Sendo assim, $\text{int}X = (a, b)$ e, como $\text{int}X \neq X$, então X não é um conjunto aberto.

D.5.4 Ponto Aderente a um Conjunto

Definição. Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe uma sequência de pontos $x_n \in X$, com $n \in \mathbb{N}$, e que converge para a .

Observação. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X , pois basta tomar-se $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema D.20. Um ponto a é *aderente* ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X .

Exemplo D.43. Seja dado o conjunto $X = (a, b) \cup \{c\}$ e um ponto genérico $k \in (a, b)$, conforme a Figura 94.

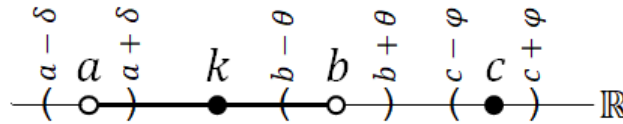


Figura 94: Conjunto $X = (a, b) \cup \{c\}$

Os pontos $c, k \in X$, e, sendo assim, são aderentes a X . Os pontos a e b são extremos de X , mas $a, b \notin X$. Como $(a - \delta, a + \delta) \cap X = (a, a + \delta) \neq \emptyset$ para qualquer $0 < \delta \leq (b - a)$, então, pelo Teorema D.20, o ponto a é aderente a X . Da mesma forma, como $(b - \theta, b + \theta) \cap X = (b - \theta, b) \neq \emptyset$ para qualquer $0 < \theta \leq (b - a)$, então o ponto b também é aderente a X .

D.5.5 Fecho de um Conjunto

Definição. *Fecho* de X é o conjunto formado por todos os pontos aderentes a X e é representado por $\overline{X}$.

Observação. É imediato, pela definição acima, que $X \subset \overline{X}$. De fato, neste caso, basta notar que, para cada $x \in X$ existe a sequência $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a qual converge para x .

Exemplo D.44. Seja o conjunto $X = (a, b]$. O fecho de X é $\overline{X} = [a, b]$. Neste caso, tem-se que $X \subset \overline{X}$, mas $X \neq \overline{X}$.

D.5.6 Conjuntos Fechados

Definição. Diz-se que um conjunto X é *fechado* quando $X = \overline{X}$, ou seja, quando todo ponto aderente a X pertence a X .

Observação. O *fecho* de qualquer conjunto é um conjunto *fechado*. Pode-se provar que o fecho de qualquer conjunto X é o menor conjunto fechado que contém X .

Teorema D.21. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, o seu *complementar* $\mathbb{R} - F$ é aberto.

Exemplo D.45. Seja o conjunto $X = [a, b]$. O fecho de X é $\overline{X} = [a, b]$. Portanto, X é um conjunto fechado pois $X = \overline{X}$.

Exemplo D.46. O conjunto vazio é fechado pois é o complementar do aberto $\mathbb{R}$, e $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado pois é o complementar do aberto $\emptyset$.

Observação. Diante do exposto anteriormente, nota-se que $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são conjuntos abertos e fechados simultaneamente, ressaltando-se que apenas $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ possuem esta propriedade (na topologia usual de $\mathbb{R}$). Além disso, cabe-se mencionar que um conjunto pode não ser aberto nem fechado, como, por exemplo, o conjunto $(a, b]$.

D.5.7 Pontos de Acumulação

Definição. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda a vizinhança de a contém algum ponto de X diferente do próprio a . Em outras palavras, se a é *ponto de acumulação* de X , então $[(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)] \cap X \neq \emptyset$ para qualquer $\delta > 0$.

Observação. O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é indicado por X' .

Teorema D.22. Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, então a é um ponto de acumulação de X se, e somente se, existe uma sequência (x_n) com $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. Em símbolos matemáticos, tem-se

$$a \in X' \iff \exists (x_n) \subset X, x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

Exemplo D.47. Seja dado o conjunto $X = [a, b) \cup \{c\}$, com $a < b < c$, um ponto qualquer $i \in X$ e os pontos $e, d \notin X$, conforme a Figura 95.

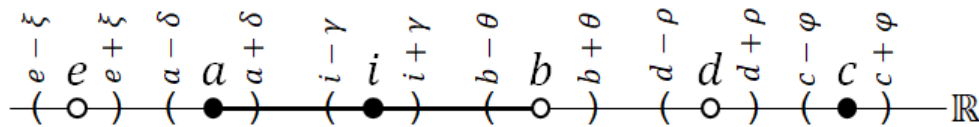


Figura 95: O ponto $i \in X$, onde $X = [a, b) \cup \{c\}$

O ponto extremo $a \in X$ é um ponto de acumulação de X , ou seja, $a \in X'$, pois $[(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)] \cap X = (a, a + \delta) \neq \emptyset$ para qualquer $0 < \delta \leq (b - a)$.

Da mesma forma, como $[(b - \theta, b) \cup (b, b + \theta)] \cap X = (b - \theta, b) \neq \emptyset$ para qualquer $0 < \theta \leq (b - a)$, então $b \in X'$.

Entretanto, o ponto $c \notin X'$ pois existe $\varphi > 0$ tal que $[(c - \varphi, c) \cup (c, c + \varphi)] \cap X = \emptyset$.

O ponto $i \in X'$ porque $[(i - \gamma, i) \cup (i, i + \gamma)] \cap X = (i - \gamma, i) \cup (i, i + \gamma) \neq \emptyset$ para qualquer $0 < \gamma \leq \min\{(i - a), (b - i)\}$.

Já o ponto $d \notin X'$ pois existe $\rho > 0$ tal que $[(d - \rho, d) \cup (d, d + \rho)] \cap X = \emptyset$.

Analogamente, o ponto $e \notin X'$ pois existe $\xi > 0$ tal que $[(e - \xi, e) \cup (e, e + \xi)] \cap X = \emptyset$.

Portanto, $X' = [a, b]$. Nota-se que $\overline{X} = X' \cup \{c\}$.

Observação. Note-se que, na Figura 95, o ponto $c \in X$ não é um ponto de acumulação de X , de acordo com o Exemplo D.47. Sendo assim, diz-se que c é um *ponto isolado* de X . Quando todos os pontos de um conjunto são isolados, diz-se que este conjunto é *discreto*. Por exemplo, o conjunto $X = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots\}$, com $n \in \mathbb{N}$, é *discreto*, onde $X' = \{0\}$ e $\overline{X} = X \cup \{0\}$. Também são exemplos de conjuntos *discretos* $X = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{Z}$, mas, em ambos os casos, $X' = \emptyset$.

D.6 Limites de Funções

Na Seção D.3, estudou-se o conceito de limite aplicado a sequências, recordando-se que uma sequência (x_n) trata-se de uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Na presente seção, será estudado o conceito de limite aplicado a uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$.

Definição. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, o número $a \in X'$, e a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que o número real L é o *limite de $f(x)$* quando x tende a a (representado por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$) se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Observação. Esta definição de limite pode ser escrita em símbolos da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) .$$

De maneira informal, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que é possível tornar-se $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente, de a .

A restrição $0 < |x - a|$ implica que $x \neq a$ e, assim, no limite $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, não é permitido à variável x assumir o valor a . Portanto, não é necessário que a função f esteja definida em a , pois o que importa é o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a , sempre com $x \neq a$.

Teorema D.23. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Se $L < M$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

A Figura 96, que ilustra o Teorema D.23, apresenta as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $b < a < c$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ e $L < M$. Note-se que $\delta > 0$ é tal que $f(x) < g(x)$ para qualquer $x \in (a - \delta, a + \delta) \subset (b, c)$.

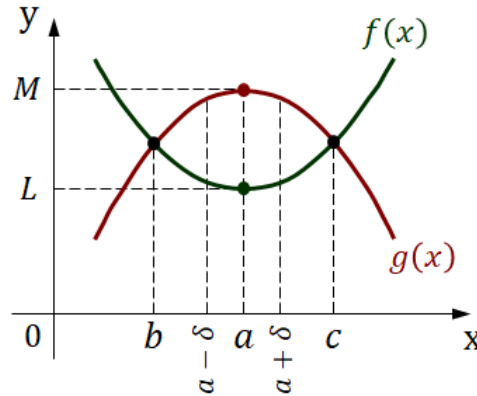


Figura 96: $L < M \Rightarrow \exists \delta > 0 \mid f(x) < g(x)$ para $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \subset (b, c)$

Corolário D.4. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < M$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para qualquer $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$.

Na Figura 97, que ilustra o Corolário D.4, tem-se as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $b < a < c$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $g(x) = M$ e $L < M$. Note-se que $\delta > 0$ é tal que $f(x) < M$ para qualquer $x \in (a - \delta, a + \delta) \subset (b, c)$.

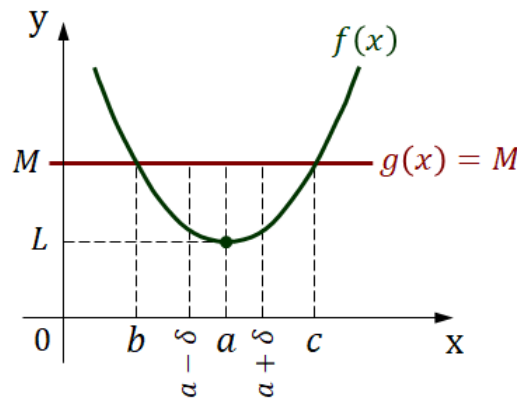


Figura 97: $L < M \Rightarrow \exists \delta > 0 \mid f(x) < M$ para $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \subset (b, c)$

Corolário D.5. Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$ para algum $\delta > 0$, então $L \leq M$.

A Figura 98 ilustra o Corolário D.5. Nela, os gráficos das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são tangentes entre si no ponto b , ou seja, $f(b) = g(b)$, e $f(x) < g(x)$ para qualquer $x \neq b$. Considerando-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, note-se que $L = M$ quando o ponto arbitrado a coincide com b , e $L < M$ para qualquer $x \in X - \{b\}$.

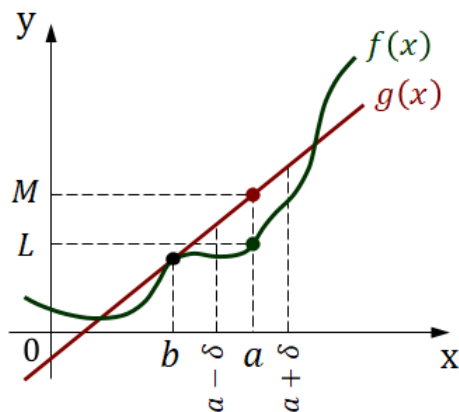


Figura 98: $f(x) \leq g(x)$ para $x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow L \leq M$

Teorema D.24 (Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche). Sejam $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \in [(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)] \cap X$, então $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

Exemplo D.48. Dada a função $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \frac{1 - \cos x}{x},$$

o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow 1 \geq -\cos x \geq -1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq 2 \Rightarrow \\ \frac{0}{x} \leq \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x}}_{=h(x)} \leq \frac{2}{x}, \text{ para } x > 0 &\Rightarrow 0 \leq h(x) \leq \frac{2}{x}, \text{ para } x > 0 \Rightarrow \\ 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}}_{=0}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema D.24 acima, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

Teorema D.25. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Para que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, tenha-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

Exemplo D.49. Seja dada a função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Tomando-se $x_n = \frac{1}{n\pi}$, com $n \in \mathbb{N}$, e como $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\pi) = 0 .$$

Por outro lado, considerando-se $y_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, e como $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 .$$

Visto que o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ é diferente do $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$ para as sequências de pontos $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$, então, como contrapositiva do Teorema D.25, não há $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Teorema D.26 (Unicidade do Limite). Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, então $L = M$.

Teorema D.27 (Operações com Limites). Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, se $M \neq 0$.

Exemplo D.50. O valor de $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}\right)$ pode ser calculado como

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x + 1)} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2} .$$

Observação. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a , então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Exemplo D.51. Sejam dadas as funções $f, g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = x^n \quad \text{e} \quad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) , \quad \text{com } n \in \mathbb{N} .$$

A função $f(x)$ é tal que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$, e a função $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ é limitada, pois $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Teorema D.28. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então f é limitada numa vizinhança de a , ou seja, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq c$.

D.7 Limites Laterais

Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o número $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação à direita* para X (representado por $a \in X'_+$) quando toda a vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$, ou seja, para todo $\gamma > 0$, tem-se $X \cap (a, a + \gamma) \neq \emptyset$. De forma análoga, $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação à esquerda* para X (representado por $a \in X'_-$) quando, para todo $\gamma > 0$, tem-se $X \cap (a - \gamma, a) \neq \emptyset$.

Exemplo D.52. Seja dado o conjunto $X = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Como o termo geral $x_n = 1/n$ é positivo para todo n , e $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$, então $0 \in X'_+$, mas $0 \notin X'_-$.

Exemplo D.53. Seja dado o conjunto $X = (a, b)$ e o ponto $i \in X$. Como X é um conjunto aberto, ou seja, $X = \text{int}X$, então $i \in \text{int}X$, e, portanto, $i \in X'_+ \cap X'_-$. Já o ponto $a \in X'_+$ pois é extremo inferior de X , e o ponto $b \in X'_-$ pois é extremo superior de X .

Definição. Dados $X \subset \mathbb{R}$, o número $a \in X'_+$, e a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, diz-se que o número real L é *limite à direita de $f(x)$* quando x tende a a (representado por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$) se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < x - a < \delta$ e $x \in X$. Da mesma forma, se L é *limite à esquerda de $f(x)$* (representado por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$) para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_-$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < a - x < \delta$ e $x \in X$.

Observação. A definição de *limite à direita* pode ser representada simbolicamente como segue:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

De maneira análoga, a definição de *limite à esquerda* pode ser representada simbolicamente da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Teorema D.29. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. O limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existem e são iguais a L , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L .$$

Exemplo D.54. A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ se } x > 0 \\ x - 1 & , \text{ se } x < 0 \end{cases} ,$$

e seu gráfico é apresentado na Figura 99.

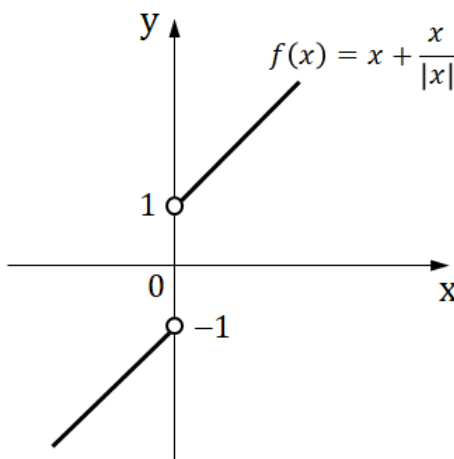


Figura 99: Gráfico da função $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$

Quando x tende a 0 pela direita, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta \leq \varepsilon \mid 0 < x - 0 < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon) .$$

Neste caso, a relação entre δ e ε é obtida da seguinte forma:

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \iff |(x + 1) - 1| < \varepsilon \iff |x - 0| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x - 0 < \varepsilon .$$

Sendo assim, como

$$\begin{cases} 0 < x - 0 < \delta \\ -\varepsilon < x - 0 < \varepsilon \end{cases}$$

então deve-se ter $\delta \leq \varepsilon$.

Em contrapartida, quando x tende a 0 pela esquerda, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta \leq \varepsilon \mid -\delta < x - 0 < 0 \Rightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon) .$$

Neste caso, a relação entre δ e ε é obtida da mesma forma, ou seja,

$$|f(x) + 1| < \varepsilon \iff |(x - 1) + 1| < \varepsilon \iff |x - 0| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x - 0 < \varepsilon .$$

Logo, como

$$\begin{cases} -\delta < x - 0 < 0 \\ -\varepsilon < x - 0 < \varepsilon \end{cases}$$

então também deve-se ter $\delta \leq \varepsilon$.

Visto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, então $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, e, portanto, pelo Teorema D.29, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Observação. Neste exemplo, é possível verificar-se a não-existência de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ conforme o Teorema D.25, ou seja, utilizando-se uma sequência de pontos (x_n) tal que $x_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right] = 0 .$$

Para se fazer esta verificação, considere-se as subsequências (x_{2n-1}) e (x_{2n}) de (x_n) , onde

$$\begin{cases} x_{2n-1} = (-1)^{(2n-1)+1} \cdot \frac{1}{n} = (-1)^{2n} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow x_{2n-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow x_{2n-1} > 0 \\ x_{2n} = (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n} = (-1)^{2n} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow x_{2n} = -\frac{1}{n} \Rightarrow x_{2n} < 0 . \end{cases}$$

Como $x_{2n-1} > 0$, então

$$\begin{aligned} f(x_{2n-1}) = x_{2n-1} + 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{2n-1} + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n-1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n-1}) = 1 . \end{aligned}$$

De forma análoga, como $x_{2n} < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} f(x_{2n}) = x_{2n} - 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{2n} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n}) = -1 . \end{aligned}$$

Visto que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n-1}) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n})$, então, como contrapositiva do Teorema D.25, conclui-se que não existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

Exemplo D.55. Seja dada a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ se } x > 0 \\ \alpha & , \text{ se } x = 0 \\ x - 1 & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

onde α é uma constante real. O gráfico de $g(x)$ é apresentado na Figura 100.

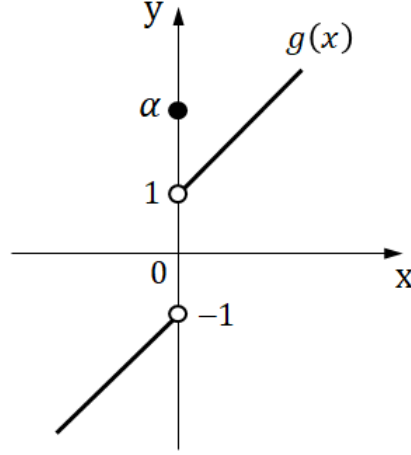


Figura 100: Gráfico da função $g(x)$

Note-se que a função $g(x)$ é definida para $x = 0$, ou seja, $g(0) = \alpha$, sendo esta a sua única diferença em relação à função $f(x)$ apresentada no Exemplo D.54. Apesar disso, os limites laterais de ambas as funções são iguais, isto é,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{cases}$$

Assim como no Exemplo D.54, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, e, portanto, pelo Teorema D.29, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, ainda que $g(0)$ esteja definida. Desta forma, fica demonstrado que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não depende de $g(0)$.

Definição. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *monótona não-decrescente* quando, para $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, f chama-se *monótona não-crescente*. Se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, diz-se que f é *crescente*. Se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, então f chama-se *decrescente*.

Teorema D.30. Se $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função *monótona limitada*, então existem os limites laterais

$$\begin{cases} L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & \text{para todo } a \in X'_+ \\ M = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & \text{para todo } b \in X'_- \end{cases}$$

Em outras palavras, existem sempre os limites laterais de uma função *monótona limitada*.

D.8 Funções Contínuas

Definição. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$, é dita *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em símbolos, tem-se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in X \text{ e } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Diz-se que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *contínua* se f for contínua em todos os pontos $a \in X$.

Observação. Na definição, é usual escrever-se $\delta = \delta(\varepsilon)$ para se enfatizar que δ é sempre escolhido em função de ε . Conforme o valor de ε diminui, é provável que o valor de δ também diminua.

Por outro lado, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *descontínua no ponto* a se existe um $\varepsilon_0 > 0$ de modo que, para todo $\delta > 0$, existe um $x_\delta \in X$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon_0$. (Note que, se f é descontínua no ponto a , então a deve ser um ponto de acumulação, e não um ponto isolado no domínio de f .)

Em particular, fazendo-se $\delta = 1/n$ e escrevendo-se x_n ao invés de x_δ , tem-se que

$$|x_\delta - a| < \delta \Rightarrow |x_n - a| < \frac{1}{n} ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, à medida que n aumenta, o valor de $1/n$ se aproxima de zero e a sequência (x_n) converge para a , ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a .$$

Desta forma, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *descontínua no ponto* a se, e somente se, existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $x_n \in X$ tal que $|x_n - a| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$.

O Teorema D.32 abaixo nos fornece uma forma equivalente de verificar a continuidade da função no ponto a .

Observação. Se $a \in X \cap X'$, ou seja, se a é um ponto de acumulação de X (vide Subseção D.5.7), então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Teorema D.31. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto $a \in X$ e $f(a) < g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.

Teorema D.32. Para que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto $a \in X$, é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, tenha-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Observação. Uma função que atende ao Teorema D.32 também é chamada *sequencialmente contínua no ponto a* .

Teorema D.33. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$. Se $f(X) \subset Y$, então a composta $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a . Em outras palavras, a composta de duas funções contínuas é contínua.

E Demonstração Alternativa do Lema 3.2

Nesta Seção, a demonstração do Lema 3.2 é dividida em duas partes (i) e (ii), e é feita utilizando-se conceitos de limites de sequências apresentados na Subseção D.3.7 do Apêndice D.

Lema 3.2. Toda função logarítmica L é sobrejetora, ou seja, dado qualquer número real k , existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = k$.

Demonstração:

(i) Em primeiro lugar, tome-se o número real α representado pela igualdade (20) mostrada na Seção 3.1, ou seja,

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \quad (168)$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_n \leq 9$.

Considere-se também o número racional α_n expresso pela igualdade (21) apresentada na mesma Seção 3.1, isto é,

$$\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{10^j} \right), \quad (169)$$

onde $j \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq a_j \leq 9$.

Observação. As demonstrações a seguir serão feitas para α_n positivo. Para $\alpha_n < 0$, o formato decimal permanece o mesmo, apenas acrescentando-se o sinal negativo na frente de todas as parcelas, bastando-se inverter os sinais das desigualdades devidas nas demonstrações.

A relação entre α e α_n é definida pela igualdade (25), também demonstrada na Propriedade 6 de funções logarítmicas na Seção 3.1, ou seja,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n. \quad (170)$$

(ii) Dado um número real arbitrário b , será obtido um número real positivo α tal que $L(\alpha) = b$, onde α é representado pela igualdade (168).

No item (ii) do Lema 3.2 na Seção 3.1, para **L crescente**, chegou-se à desigualdade (33), ou seja,

$$L(\alpha_n) \leq b < L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \quad (171)$$

para todo $n \geq 0$.

Pela igualdade (170), tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L(\alpha_n) \stackrel{(*)}{=} L\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n\right) = L(\alpha) \quad (172)$$

e, conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \stackrel{(*)}{=} L\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)\right] = L\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n}\right) = L(\alpha) . \quad (173)$$

(*) Estas passagens são válidas devido à continuidade da função logarítmica em todos os pontos do seu domínio, como justificado no Teorema D.32 do Apêndice D.

Aplicando-se o limite com n tendendo a infinito a todos os membros da desigualdade (171), e considerando-se as igualdades (172) e (173), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L(\alpha_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \Rightarrow L(\alpha) \leq b \leq L(\alpha) \Rightarrow L(\alpha) = b .$$

Para **L decrescente**, como já visto no mesmo item (ii) do Lema 3.2 na Seção 3.1, através do mesmo procedimento utilizado para L crescente, obteve-se

$$L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) < b \leq L(\alpha_n) \quad (174)$$

para todo $n \geq 0$.

Aplicando-se a todos os membros da desigualdade (174) o limite com n tendendo a infinito, e considerando-se as igualdades (172) e (173), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} L(\alpha_n) \Rightarrow L(\alpha) \leq b \leq L(\alpha) \Rightarrow L(\alpha) = b .$$

Como $L(\alpha) = b$ para L crescente e decrescente, fica demonstrado o Lema 3.2. $\square$

F Tábuas de Logaritmos Decimais

Tabela 9: Tábua de logaritmos decimais para os números de 10 a 499

TABELA DE MANTISSAS										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

Tabela 10: Tábua de logaritmos decimais para os números de 500 a 999

TABELA DE MANTISSAS										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

As tábuas desta seção constam no capítulo de **Logaritmos Decimais** da **Apostila 3** de **Matemática do Telecurso 2000**, editada pela **Fundação Roberto Marinho**.

Referências Bibliográficas

BURN, Bob. **Gregory of St. Vincent and the Rectangular Hyperbola**. The Mathematical Gazette, vol. 84, no. 501, 2000, pp. 480–85. Disponível em: JSTOR, <https://doi.org/10.2307/3620779>. Acesso em: 9 Nov. 2024.

BURN, R. P. **Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms**. Historia Mathematica 28 (2001), 1–17. DOI:10.1006/hmat.2000.2295

CLARK, Kathleen M. ; MONTELLE, Clemency. **Logarithms: The Early History of a Familiar Function - John Napier Introduces Logarithms**. Convergence (January 2011), DOI:10.4169/loci003495.

FRIEDLI, Sacha. Título do vídeo: **Convexidade e concavidade**. Plataforma: YouTube. Publicação em: 28 Out. 2012. Duração: 47:57 min. Disponível em: <https://youtu.be/4GIEfMNi5zk?si=99rPYKIexcWXs0-x>. Acesso em: 10 Nov. 2024.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 7: Geometria Analítica**. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1985.

KNOPP, Konrad. **Theory and Application of Infinite Series**. Courier Corporation, 1990.

LANDAU, Edmund. **Foundations of Analysis**. American Mathematical Society, 2022.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real vol. 1 Funções de Uma Variável**. 10ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise vol. 1**. 6ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise vol. 2**. 6ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1964.

SAID, Tarek. Título do vídeo: **The History of the Natural Logarithm - How was It Discovered?**. Plataforma: YouTube. Publicação em: 4 Mar. 2022. Duração: 18:20 min. Disponível em: <https://youtu.be/habHK6wLkic>. Acesso em: 10 Nov. 2024.

Telecurso 2000 - Matemática - Volume 3. Fundação Roberto Marinho, 2000. Disponível em:

<https://fuvestibular.com.br/apostilas/telecurso-2000/ensino-medio/matematica/apostila-3/>.

Acesso em: 10 Nov. 2024.

THURSTON, Hugh Ansfrid. **The Number System**. Courier Corporation, 2007.