

A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA PLANA E DA ÁLGEBRA COMO ALICERCES PARA O SURGIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA: UM DIÁLOGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.

Nilda Pantoja Gonçalves

João Claudio Brandenberg Quaresma

Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

RESUMO

A presente pesquisa apresenta como objetivo geral verificar a evolução da geometria plana e da álgebra como alicerces para o surgimento da geometria analítica com ênfase num diálogo entre história e Matemática. A pesquisa se fundamenta em uma revisão bibliográfica baseada em autores renomados, como Euclides, Al-Khwarizmi, René Descartes e Pierre de Fermat dentre outros citados ao longo da pesquisa para uma melhor compreensão da evolução conceitual e prática dessas áreas intrínsecas que culminam com as geometrias e álgebra. Metodologicamente, a abordagem adota a análise histórica e desenvolvimentistas das obras clássicas e contemporâneas relacionadas aos tópicos abordados, especificamente que contempla o processo evolutivo histórico. Os resultados evidenciam que a geometria analítica não apenas resultou da integração da álgebra e da geometria plana, mas que possibilitou um significado maior e muito mais abrangente, proporcionando avanços na ciência e bem como na área tecnológica com surgimento de formulações matemáticas ligadas aos estudos desse tripé que caracterizam as geometrias planas, álgebra com a correspondente geometria analítica. Conclui-se que a convergência entre essas áreas reflete o impacto profundo do pensamento matemático na compreensão e modelagem do mundo ao longo da história, sendo que esse processo tem um significado profundo quando aplicado e divulgado no ensino básico e na academia, possibilitando como essa evolução histórica foi desenvolvida e aplicada em diferentes áreas científicas com base no formalismo matemático

Palavras-chaves: História da Matemática, Geometria Analítica, Geometria Plana, Álgebra.

ABSTRACT

The present research has as its general objective to verify the evolution of plane geometry and algebra as foundations for the emergence of analytical geometry with emphasis on a dialogue between history and Mathematics. The research is based on a bibliographic review based on renowned authors, such as Euclid, Al-Khwarizmi, René Descartes and Pierre de Fermat among others cited throughout the research for a better understanding of the conceptual and practical evolution of these intrinsic areas that culminate with geometries and algebra. Methodologically, the approach adopts the historical and developmental analysis of classical and contemporary works related to the topics covered, specifically that contemplates the historical evolutionary process. The results show that analytical geometry not only resulted from the integration of algebra and plane geometry, but that it enabled a greater and much more comprehensive meaning, providing advances in science and also in the technological area with the emergence of mathematical formulations linked to the studies of this tripod that characterizes plane geometries, algebra with the corresponding analytical geometry. It is concluded that the convergence between these areas reflects the profound impact of mathematical thought on the understanding and modeling of the world throughout history, and that this process has a

profound meaning when applied and disseminated in basic education and academia, enabling how this historical evolution was developed and applied in different scientific areas based on mathematical formalism.

Keywords: History of Mathematics, Analytical Geometry, Plane Geometry, Algebra.1

1. INTRODUÇÃO

Desenvolve-se a temática com os nomes de grandes matemáticos que se ocupavam em grande medida de uma ou outra matéria, porém aos nomes de René Descartes e Pierre de Fermat é meditada a formal ocupação ao mesmo tempo da álgebra e da geometria que serviu de base ao descobrimento da geometria analítica e, com isso a harmonização esperada desses campos da matemática (Boyer; Merzbach, 2012). Essas duas vertentes dentro de um único campo de estudo forneceu a geometria analítica o posto de uma potente ferramenta matemática capaz de transferir uma investigação geométrica para uma investigação algébrica e vice-versa (Eves, 2004, p. 383).

Nesse sentido, um estudo harmonioso da álgebra e da geometria plana historicamente é de grande valor para a matemática, e permite um tratamento recíproco capaz de fomentar o pensamento abstrato ampliando o entendimento dos termos, símbolos, equações e formas. A fim de solidificar esse tratamento, o estudo da geometria analítica será realizado em três frentes, inicialmente por meio de uma base histórica, em seguida por meio da geometria plana e álgebra e por fim através da aplicação da resolução de problemas matemáticos.

Para melhor verificar essa abordagem, faz-se um apanhado geral histórico da geometria analítica, e todo seu processo de desenvolvimento. Aqui os fatos são apresentados em ordem cronológica e por períodos de tempo específicos, desde as contribuições de sociedades mais antigas até a sua formalização munida de suas especificidades. E cada período são apresentados os nomes dos principais matemáticos e as descobertas que vieram a contribuir para seu desenvolvimento. Para isso, realizou-se uma pesquisa bibliográfica baseada nas produções de Malta (2015), que analisou cronologicamente os fatos que propiciaram a descoberta da geometria analítica até sua descoberta no século XVII, por René Descartes e Pierre de Fermat. Além deste, as produções de Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2011), que apresentam um panorama geral da história da matemática em suas perspectivas singulares. A ordenação cronológica do desenvolvimento da geometria analítica propiciou a assimilação do processo e dos elementos essenciais nos quais se constituem essa matéria.

Calixto (2022) em sua explanação, com base na proposta de Carson e Rowlands (2007),

defende que “a narrativa de episódios históricos específicos é empregada como uma poderosa ferramenta pedagógica para despertar a consciência dos alunos a respeito do caráter abstrato dos objetos, dos procedimentos e do pensamento matemático” (Calixto 2022, p. 83). Segundo os autores, o registro histórico revela um padrão gradual de desenvolvimento, que permite uma reconfiguração crescente do entendimento de determinado assunto. Essas novas formas de compreensão contribuem para o aprimoramento da habilidade de abstração, assim como para a aprendizagem do próprio assunto através de sua evolução (Calixto 2022, p. 83-84). Inicialmente, partem do argumento de que “essas transformações podem ser observadas pelo processo histórico, e por meio dele é possível “[...]compreender as inovações ou descobertas históricas que transformaram o sujeito” (Calixto 2022, p. 84, *apud* Carson; Rowlands 2007, p. 922). Defendem que definindo propósitos ao uso da história da matemática é possível utilizá-la a fim de compreender o produto das descobertas e as motivações que as promoveram.

Em sua explanação, os autores defendem que “a utilização da perspectiva histórica pode contribuir significativamente na fase de construção do currículo para o ensino de matemática” (Calixto 2022, p. 84). Num primeiro nível ressaltam que a utilização desta perspectiva leva a insights sobre como foram introduzidas as descobertas do conhecimento matemático, suas fontes, razões e momentos históricos que o circundaram, além de ajudar a compreender a evolução do conhecimento através de uma série de numerosos e pequenos desenvolvimentos e seus impactos na construção da consciência humana (Calixto 2022, p. 84).

A capacidade do contexto histórico de aproximar realidades confere ao estudante a oportunidade de perceber os eventos através da ótica daquele que os originaram em seus tempos, o que por sua vez confere sentido e significado ao conhecimento, além de introduzir percepções diferenciadas nos estudantes que não apresentam interesse na disciplina. (Calixto 2022, p. 110-111). Por outro lado, o autor apresenta uma ressalva quanto ao uso de uma narrativa que não propicie um vínculo eficiente entre os estudantes e os personagens.

Chaquiam (2017) considera o crescente interesse pela história das ciências, em especial a história da matemática, como um importante impacto na melhoria do ensino e aprendizagem da matemática, pois permite observar os desdobramentos que resultaram nas teorias hoje estruturadas, sua evolução e, ainda perceber os esforços que de lá se originaram (Chaquiam 2017, p. 13). Dessa forma, entendem que “a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano” (Chaquiam 2017, p. 14), e

assim amparar o ensino dos infortúnios pelo desconhecimento de seus porquês.

Diante desse cenário, Chaquiam (2017) aponta considerações, trazidas pela literatura, que vão a favor do uso da história da matemática no ensino de matemática. Em resumo, defendem sua contribuição para: (1) satisfazer o desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram; (2) o ensino e a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo; (3) entendermos nossa herança cultural através das relações da matemática com as outras ciências; (4) o encontro entre o especialista em matemática e profissionais de outras áreas científicas; (5) oferecer um pano de fundo para a compreensão das tendências da educação matemática no passado e no presente; e (6) ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática. O autor ainda ressalta a presença e importância da matemática no delineamento e construção do saber ao longo da evolução histórica da humanidade.

1.1 OBJETIVO GERAL

Verificar a evolução da geometria plana e da álgebra como alicerces para o surgimento da geometria analítica com ênfase num diálogo entre história e Matemática

2 A EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: DAS RAÍZES NA ANTIGUIDADE À SOFISTICAÇÃO DA GEOMETRIA HELÊNICA

2.1 O método da geometria analítica e a proposta cronológica de Malta

A geometria analítica é um método da geometria que combina dois aspectos recíprocos fundamentais: álgebra e geometria (Eves, 2004, p. 382). A ideia central desse ramo da matemática consiste em estabelecer uma correspondência recíproca entre lugares geométricos e equações algébricas (Boyer; Merzbach, 2012, p. 242). A descoberta da geometria analítica é creditada aos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, que separadamente lançaram as bases desse poderoso método de encarar problemas geométricos e algébricos (Boyer; Merzbach, 2012). Considerando, nesse sentido, as contribuições deixadas ao longo da história por ilustres matemáticos que culminaram ao seu surgimento (Malta, 2015).

Malta (2015) propõe, em seu trabalho (intitulado o surgimento da geometria analítica no século XVII: debate histórico sobre questões referentes a sua descoberta) um panorama histórico das ideias que culminaram ao surgimento da geometria analítica, composto de uma

sequência temática cujo principal objetivo é fazer com se tenha uma percepção gradual e cronológica dos fatos que desempenharam importância nesse percurso, ao passo em estes são apresentados dentro de uma linha temporal específica. Conforme Boyer e Merzbach (2012), a subdivisão dos acontecimentos em períodos é conveniente para a história tanto quanto o uso de um sistema de coordenadas é útil na geometria.

O autor parte do argumento de que pouquíssimos trabalhos com enfoque historiográfico sobre a geometria analítica são encontrados em âmbito nacional (Malta, 2015, p. 1). Dessa forma, entende que contextualização histórica desse ramo da matemática acrescenta ao próprio entendimento da mesma ao delinear os trâmites de sua descoberta solidariamente às condições favoráveis e as casualidades advindas dos tempos passados (Malta, 2015, p. 6). Na análise histórica Malta (2015, p. 6) aponta para um recorte histórico mais “elástico mostrando que a descoberta da geometria analítica foi fruto não só das condições favoráveis do primeiro terço do século XVII, mas também de casualidades advindas de tempos passados”. Com isso, apresenta uma história geral da geometria analítica relatada de forma diacrônica “na qual o conhecimento evolui de forma dinâmica com marcas estilísticas próprias” (p. 6).

Malta (2015) faz um levantamento dos principais estilos de pensamento que interferem nas relações históricas, sociológicas e culturais que interferiam no desenvolvimento da geometria analítica em cada período mencionado. Tendo em vista que “o desenvolvimento ocorre de forma gradual e continuada, mediante mutações sucessivas nos estilos de pensamento, mas sem rupturas drásticas na transição de um estilo para outro” (p. 10). Nesse sentido, cada período é apresentado trazendo os estilos de pensamento vigente, principais nomes e suas influências, e o viés de conhecimento matemático que se delineou a fim de forjar a geometria analítica. Além de identificar as fontes as razões e momentos em que tais mudanças de pensamento foram introduzidas por meio de Malta (2015), a perspectiva histórica traz as manifestações dos eventos acompanhadas das percepções originárias das obras de Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2004), além de outras obras que tratam de história da matemática.

Em meio as oito divisões temporais do estudo proposto por Malta (2015), encontram-se levantamentos oriundos de civilizações da antiguidade dos primórdios dos registros mais antigos da matemática até as contribuições dos séculos XVII efetuadas pelos matemáticos René Descartes e Pierre de Fermat, organizando-se seguindo o percurso histórico do desenvolvimento do pensamento matemático em torno da álgebra e da geometria, a saber: (1) as principais contribuições da antiguidade; (2) Civilização helênica; (3) Idade Heroica da civilização

helênica; (4) Estudo das cônicas; (5) Idade de Prata da Matemática Grega; (6) Contribuições da Idade Média; (7) Contribuições do Prelúdio da Era Moderna; (8) Contribuições da era moderna.

2.2 As principais contribuições da antiguidade

Segundo Eves (2004), a aritmética e a mensuração prática são tidas como a “ênfase original da matemática” (p. 57), cujas concepções possuem estreita relação com os aspectos cotidianos e práticos. Boyer e Merzbach (2012) atribuem as noções de número, grandeza e forma à capacidade humana de perceber contrastes e a capacidade de perceber analogias à massa de experiências caóticas. E, desse modo remonta a um longo processo de desenvolvimento até tomar propriedades de conhecimento científico a partir da incorporação de tendências ao tratamento abstrato dessas ciências praticas (Eves, 2004, p. 57).

Eves (2004) destaca o conceito de número e o processo de contar como anteriores aos primeiros registros históricos, conjectura tal acontecimento como resultado de um senso numérico comum à espécie humana capaz de “reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena” (Eves, 2004, p. 25). A capacidade de realizar analogias tornou possível a associação de registros simples de correspondência biunívoca, em que “[...] para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal [...]” (Eves, 2004, p.26), para mais tarde tal representação assumir sons designativos, por meio da linguagem falada, a fim de efetuar registros verbais dos números de objetos de um dado grupo pequeno, e por fim, através do aprimoramento da escrita surgirem arranjos de símbolos para representar os números.

Boyer e Merzbach (2012) assinala a capacidade humana de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita como um caminho aberto para a geometria e a álgebra. Assim, revolve ao desenvolvimento de tendências no sentido da abstração como o caminho do estudo da ciência por si mesma e, dessa forma, um caminho aberto a evolução da aritmética à álgebra e da mensuração à geometria (Eves, 2004, p. 57).

Eves (2004) destaca a familiaridade dos egípcios e babilônicos com práticas de mensuração de figuras geométricas e a assina-la como marca de suas sociedades. Vale ressaltar, que dado o propósito prático do uso da matemática por esses povos o elemento principal nas questões eram cálculos direcionados a casos concretos e específicos, o que mantinha a relação entre a aritmética e a geometria pouco teórica (Boyer; Merzbach, 2012, p. 38). Nesse sentido, “mesmo que essas civilizações tenham evoluído razoavelmente em aritmética e geometria, a

falta de uma preocupação com os processos gerais e dedutivos dificultava a associação desses campos num sistema formal que caracterizaria a geometria analítica futura” (Malta, 2015, p. 12).

Conforme Boyer e Merzbach (2012), não se pode afirmar categoricamente que a matemática egípcia e babilônica não se preocupava com questões de natureza demonstrativa, porém há ausência de enunciados explícitos que indiquem esse tipo de tratamento da matemática por esses povos, de modo que se pode afirmar “que muito da matemática pré-helênica era prática, mas certamente não toda” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 50-51).

Diante disso, a transposição do uso prático da matemática para um tratamento mais teórico se daria apenas tempos mais tarde com a civilização grega. Não obstante, tais desenvolvimentos nas artes práticas contribuíram aos desenvolvimentos futuros da geometria analítica.

2.3 O aprimoramento do pensamento matemático da civilização helênica

O aprimoramento do pensamento matemático sofreu importantes transformações com o deslocamento do centro do desenvolvimento matemático da mesopotâmia para o mundo grego e provocou mudanças de pensamentos na matemática (Malta 2015, p. 12). Em suas atividades intelectuais os gregos eram mais inclinados a questões filosóficas do que com as exigências da vida prática, o que possibilitou uma harmoniosa busca por promover e aprofundar os conhecimentos relativos à natureza (Boyer; Merzbach, 2012, p. 56). Com isto, deve-se a chamada Era Helênica inspirada pelos povos gregos a concretização do pensamento formal no tratamento da matemática.

A crescente atmosfera do racionalismo grego abriu caminho para Tales de Mileto criar um modelo de pensamento que buscava comprovar hipóteses a partir da composição de outras já consolidadas, chamado de método dedutivo. Esse modelo traçava uma linha de argumentos lógicos, fundamentando-se na comprovação de resultados mediante investigações sistemáticas, essa nova forma de pensar tornou-se o alicerce para a sistematização de conceitos tanto da aritmética quanto da geometria (Malta 2015, p 13).

Os pitagóricos deram prosseguimento a essa linha de pensamento lançada por Tales de Mileto, e passaram a agregar argumentos lógicos para a conceituação dos objetos do conhecimento (Malta 2015, p. 14). Eles, se aplicavam em estudar as leis matemáticas e chegaram à conclusão de que toda a natureza deve ser uma expressão de leis e relações

matemáticas (Carson; Rowland 2012 *apud* Calixto, 2022, p. 96). Nesse sentido, a concepção das estruturas numéricas e geométricas passaram a ser explicadas a partir de argumentos científicos, os números passaram de um resultado com finalidade de uso prático, como tratado pelos babilônicos e egípcios, para um conceito carregado de propriedades capazes de explicar quaisquer fenômenos da realidade, o que os levava a “uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética” (Eves, 2004, p. 97)., enquanto naturalmente através do método dedutivo “acrescentaram à geometria o elemento novo da estrutura lógica” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 55).

Encorajados pelas ideias de que todas as coisas que podem ser conhecidas têm número a busca pela quantificação do mundo físico com base na linguagem dos números, concebida pelas relações entre números inteiros, avançou levando ao aprimoramento dos conceitos como os de razão e proporção que passaram a embasar toda a matemática grega (Malta, 2015, p. 13). O nome de razão empregado pelos gregos dizia-se da “relação de tamanho entre grandezas de mesma espécie” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 59). Essa relação “focaliza a atenção sobre a conexão entre pares de números, tende a pôr em relevo os aspectos teóricos do conceito de número e a reduzir a ênfase no papel do número como instrumento de cálculo ou aproximação de medidas” (Boyer; Merzbach 2012, p. 60). O estudo das proporções dizia-se da igualdade de razões que “presumidamente formava de início uma parte da aritmética ou teoria dos números pitagórica. Mais tarde, as quantidades que entravam em tais proporções seriam provavelmente olhadas como grandezas geométricas” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 61). Nesse sentido, as relações entre segmentos de linha de uma para o outro (e similarmente para áreas e volumes) passaram a ser expressáveis através de razões de inteiros.

No entanto, Malta (2015) destaca a mentalidade da civilização helênica restrita aos números e as curvas conhecidos, destas familiarizados apenas com a reta e o círculo e, enquanto daqueles consideravam apenas os inteiros positivos, não possuindo uma maturação na harmonização das relações entre esses dois campos. Em contrapartida, o autor apresenta a sistematização do pensamento nesse período como essencial ao desenvolvimento posterior das cônicas realizado por Apolônio, na linha de desenvolvimento da geometria analítica.

2.4 Investigações da idade heroica da civilização helênica

Seguindo a era pitagórica, a chamada idade heroica da civilização helênica caracterizou-se por pelo considerável número de investigações levantadas em oposição ao estilo de

pensamento vigente, que viriam a ser impactantes para os desdobramentos que seguiriam o curso do pensamento matemático (Malta, 2012, p. 14). Nesse cenário, grande parte das críticas propostas estavam relacionadas às ideias dos pitagóricos e diziam respeito às suas concepções centrais: os números. Boyer e Merzbach (2012) destacam que “era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de *arithmos* ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões” (p. 70). Porém, a descoberta de que os números inteiros positivos e suas razões eram insuficientes para descrever propriedades básicas e simples da geometria abalou os alicerces da matemática grega. Não bastavam, por exemplo, “para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis não importa quão pequena se escolha a unidade de medida” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 70). Contrapondo a ideia pitagórica de que o espaço e o tempo podem ser pensados como constituídos de pontos e instantes, em que um ponto é considerado como uma unidade tendo posição no espaço, Zeno de Eléia propôs seus paradoxos que abriram caminho para uma propriedade numérica conhecida como continuidade, ao mesmo tempo em que contribuiu para abalar o sistema de ideias do coletivo de pensamento com relação à aritmética adotada (Boyer; Merzbach, 2012, p. 72).

Essa tomada de consciência levou a um rompimento na matemática, em que a aritmética perdeu grande parte de seu prestígio e, com isso os números pitagóricos já não davam conta das relações da geometria associadas à teoria das proporções, passando a serem estudados à parte da geometria, ocasionando um desligamento total entre esses dois campos da matemática (Boyer; Merzbach, 2012, p. 73). Boyer e Merzbsch (2012) destacam que, enquanto o reino dos números continuava a ser discreto, o mundo das grandezas passou a ser contínuo e, a fim de tratá-las passou-se a utilizar a geometria e, esta tornou-se uma importante ferramenta para representação, mensuração e resolução de problemas na matemática, o que resultou “em uma geometrização radical do pensamento matemático” (Malta, 2015, p. 49).

O novo caráter assumido pela geometria originou-se dessas argumentações, e rompeu-se a ideia de que a geometria poderia ser completamente aritmetizada. Com isto, as convicções como a de que “tudo é número” (inteiro) ou que “relações entre segmentos de linha de um para outro (...) são sempre expressáveis através das razões de inteiros” já não se encaixavam. Malta (2015) ressalta ainda que dada a insuficiência dos números, os problemas clássicos da matemática passaram a exigir soluções com base na construção de linhas ao invés do cálculo no tratamento das grandezas, assim “comprimento, área, e volume não eram números ligados a

uma configuração dada; eles eram conceitos geométricos indefinidos” (p. 17, *Apud* Boyer, 2004). Dessa forma, conforme destaca Malta (2015) “uma nova configuração estilística para a atividade matemática pautada exclusivamente em ideias geométricas” (p. 49) passou a configurar-se no cenário da matemática grega. A partir desse período, a matemática se guiou por construções geométricas em que as propriedades algébricas de somas, diferenças, produtos e quocientes passaram a ser deduzidas entre argumentos geométricos como segmento, áreas e volumes (Boyer; Merzbach, 2012, p. 73-74).

Essa ênfase excessiva sobre a geometria minou o desenvolvimento da álgebra naquela época e, os principais problemas matemáticos passaram a ter suas soluções exploradas pela geometria o que resultou no desenvolvimento da própria geometria com a introdução de novas curvas e aprimoramento de métodos mecânicos e esteriométricos de construções geométricas. Para Bayer e Merzbach (2012) “o principal legado matemático da Idade Heroica pode ser condensado em seis problemas: quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxos do movimento e validade dos métodos infinitesimais” (pç. 76), dos quais os três primeiros se destacaram por proporcionarem incontáveis resultados relevantes na matemática, através de suas investigações (Malta, 2015, p. 17).

A duplicação do cubo ou problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado, a trissecção do ângulo ou problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais e a quadratura do círculo ou problema de construir um quadrado com área igual a de um círculo dado geraram inúmeras tentativas de soluções levando ao descobrimento de outras relações e grandes avanços para a geometria (Eves, 2004, P. 134). Tal “refinamento gradual dos problemas clássicos ampliou o número de lugares conhecidos em relação à reta e o círculo”, porém, revelaram a necessidade de se abandonarem os métodos tradicionais a fim de obterem novos resultados (Malta, 2012, p. 19). Quanto a “idade heroica da matemática”, conforme destaca Boyer e Merzbach (2012) foi assim chamada “pois raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas matemáticos de significado tão fundamental” (p. 54).

Seguindo os passos de uma matemática formal “que se tornou a marca cultural da Grécia clássica” (Calixto, 2022, p. 89) surge no cenário grego a formalização do método analítico defendido por Platão, o qual por meio de passos sucessivos de análise e síntese propunha comprovar hipóteses. A aplicabilidade desse método na matemática partia de verdades já demonstradas, de maneira tal que se a ordem dos passos pudesse ser invertida o teorema

proposto era demonstrado, esse processo inverso denominado síntese consiste-se em a partir de uma verdade conhecida deduzir a verdade que se quer demonstrar (Malta, 2015, p. 20). As contribuições de Platão ao desenvolvimento da matemática foram em grande parte de caráter inspirador levando-o a ser conhecido como “forjador de matemáticos” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 77) tendo em vista sua convicção “de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito” (Eves, 2004, p. 132).

Suas ideias acerca da aritmética a destacavam como possuindo “um efeito muito grande de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato”, porém tendo em vista sua forte influência pitagórica preservou muito de suas ideias dificultando um aprimoramento mais abrangente sobre números (Boyer; Merzbach, 2012, p. 78). Enquanto em sua geometria de glorificação das formas, como possuindo um caráter transcendente, realizou estudos sobre sólidos regulares e suas propriedades, além de lançar mão dos grandes problemas matemática, que trouxeram novos resultados para a matemática. No entanto sua visão da geometria acabou restringindo as construções geométricas efetuadas com régua e compasso (Boyer; Merzbach, 2012, p. 78). A restrição imposta pelo método platônico foi aos poucos superada possibilitando a introdução de novas curvas no cenário geométrico grego, como a quadratriz de Hípias, amadurecendo paulatinamente a ideia de lugar no imaginário coletivo (Malta, 2015, p. 18).

3 A TRAJETÓRIA HISTÓRICA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: DO SURGIMENTO DAS CÔNICAS À CONSOLIDAÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA.

3.1 O aparecimento das cônicas

As secções cônicas depois conhecidas como hipérbole, parábola e elipse constituem umas das contribuições mais importantes do período para o desenvolvimento da geometria analítica (Malta, 2012, p. 22). Entre os mais notáveis gregos que se debruçaram ao estudo dos lugares geométricos e suas propriedades encontra-se Apolônio, um de seus trabalhos mais influentes é o tratado sobre *Cônicas* no qual traz proposições gerais sobre curvas e suas propriedades, suas descrições acrescentaram grandes contribuições a geometria.

Boyer e Merzbach (2012) afirmam que antes de Apolônio haviam sido escritas exposições gerais sobre *Cônicas* por Aristeu e por Euclides, até então essas curvas eram obtidas a partir de três tipos de cone circular reto e um plano de secção, em que conforme o ângulo do vértice fosse agudo, obtuso ou reto e o plano cortasse perpendicularmente as suas geratrizes as

curvas tomavam formas distintas. Isto é, as curvas eram obtidas a partir da natureza do ângulo do vértice desses três cones (Malta, 2015, p. 22). Em contrapartida, Apolônio mostrou que de um único cone pode-se obter os três tipos de cônicas apenas alterando a inclinação do plano que corta o cone, o que “fez com que ele considerasse as cônicas como uma família de curvas e não mais como tríades” (Malta, 2015, p. 22). Boyer e Merzbach (2012) destacam que “esse foi um passo importante para ligar os três tipos de curvas” (p. 113) e, ainda se devem a Apolônio outras generalizações como a demonstração de que as curvas poderiam ser obtidas com as mesmas propriedades seja o cone circular tomado reto ou oblíquo ou escaleno (p. 113).

Apolônio no estudo das cônicas foi ainda mais além ao fazer uma substituição do cone de uma folha, ou cone de sorvete, pelo cone duplo, aquele tomado de dois cones de sorvete colocados em sentidos opostos, de modo que seus vértices coincidam e seus eixos estejam sobre uma mesma reta (Boyer; Merzbach, 2012, p. 114). Tal proposta foi definida por ele conforme destaca Boyer e Merzbach (2012) “se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo, que não está em um mesmo plano com o ponto, de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo” (p. 114). Os autores ainda destacam que essa mudança propiciou o entendimento da duplicidade da hipérbole como uma curva de dois ramos.

Vale ainda ressaltar que “Apolônio, como seus predecessores, obtinha as cônicas a partir de um cone no espaço tridimensional, mas dispensou o cone logo que possível” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 115). Boyer e Merzbach (2012) destacam que a partir do cone Apolônio deduziu propriedades fundamentais para cada curva utilizando-se de um sistema de coordenadas com linhas de referência combinadas harmonicamente denominadas “diâmetros conjugados”, em que “os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse ou hipérbole formarão um segundo diâmetro” (p. 116), essa relação fornecia um quadro de referência semelhante ao par de retas perpendiculares referidos como eixos utilizados hoje.

O sistema de retas tangentes associadas desenvolvido por Apolônio consistia no entendimento de que “[...] se for traçada uma reta por uma extremidade de um diâmetro de uma elipse ou hipérbole, paralela ao diâmetro conjugado, a reta “tocará” a cônica e nenhuma outra reta pode cair entre ela e a cônica — isto é, a reta será tangente à cônica” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 116). Dessa forma “Ele utilizou um diâmetro conjugado com a cônica que equivalia a uma abscissa – este era medido a partir do ponto de interseção da cônica – e um diâmetro

tangente a cônica que representava uma ordenada – este era representado mediante segmentos paralelos á linha tangente [...]” (Malta, 2015, p. 24). Conforme destaca Malta (2015) essa ideia de coordenadas que auxiliou a determinação de propriedades geométricas das seções cônicas de Apolônio é considerada uma das grandes proezas dos gregos tendo consequências históricas para a geometria analítica.

3.2 A álgebra e a idade de prata da matemática grega

A chamada idade de prata da matemática grega foi palco de grandes contribuições para a matemática especialmente no campo da álgebra (Malta, 2015, p. 27). Este período caracteriza-se pelo resgate ao estudo da álgebra e nele encontra-se o maior algebrista grego o matemático Diofanto (Boyer; Merzbach, 2012, p. 134), cujas obras marcam um importante avanço na notação algébrica, que passaria a um novo estágio denominado álgebra sincopada, isto é, a adoção de abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente, o que se constitui em uma de suas mais notáveis contribuições a matemática (Eves, 2004, p. 206).

Até então a álgebra era concebida de maneira retórica, sendo caracterizada por descrições em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos, dos argumentos de um problema (Eves, 2004, p. 206). Entre as obras mais importantes de Diofanto está *Arithmetica*, caracterizada por uma abordagem diferenciada desvinculada dos métodos geométricos, na qual apresenta o uso de símbolos mesclados com expressões verbais, sendo o responsável pelos primeiros vultos de representações simbólicas que causaram sensíveis mutações no estilo de pensamento da época, entre os quais destaca-se o uso dos símbolos para representar números desconhecidos, o quadrado, o cubo, a quarta, quinta e sexta potencias, e para relações e operações; além do que, em suas representações simbólicas Diofanto faz uso de símbolos desvinculados de associação geométrica para representar números (Boyer; Merzbach, 2012, p. 134). Boyer e Merzbach (2012) destacam que “a *Arithmetica* não é um texto de álgebra, mas uma coleção de problemas de aplicação de álgebra” (p. 135), sendo a busca por soluções desses problemas precursoras de descobertas posteriores na matemática (Boyer; Merzbach, 2012).

Malta (2015) ressalta o amadurecimento do simbolismo algébrico desenvolvido por Diofanto como importante contribuição desse período em direção a linguagem algébrica essencialmente simbólica da geometria analítica posterior, haja visto que a “deficiência principal da matemática grega, foi a falta de uma álgebra simbólica independente, e o trabalho

de Diofanto é um elo na corrente algébrica dos babilônios até Descartes” (Malta, 2015 *apud* Boyer, 2004: 36). Em contrapartida, nessa época “a geometria clássica não tinha prerrogativa nos pressupostos epistemológicos do coletivo de pensamento” (Malta, 2015, p. 28).

Ainda há que se ressaltar a última fase da matemática da antiguidade em que uma nova configuração estilística passou a ser configurada no coletivo de pensamento, em que as investigações, demonstrações de teoremas e a resolução de problemas da geometria voltaram a ser ressaltados, trazendo a geometria novamente a ser a base do pensamento matemático (Malta, 2015, p. 29). Nesse cenário destaca-se o geômetra Pappus que propunha coletar todo o conhecimento matemático dos antigos, atendo-se a organização e comentário das principais obras clássicas. Entre as principais contribuições dos estudos de Pappus para a geometria analítica está o problema chamado de o “lugar de três ou quatro retas” originário provavelmente dos dias de Euclides, ao qual Pappus levou adiante considerando uma síntese para o problema para até seis retas (Boyer; Merzbach, 2012 p. 139). Os resultados encontrados por Pappus na solução desses problemas mostraram que em todos os casos possíveis o lugar geométrico é sempre uma cônica, sendo para o caso de seis linhas constatado que essa curva poderia ser determinada pela razão de dois sólidos (Malta, 2015).

Malta (2015) ressalta que o problema das linhas constitui a observação mais geral sobre lugares geométricos em toda a geometria antiga, apesar de o problema não ter sido ampliado para todos os casos possíveis foi o responsável pelo avanço posterior da geometria analítica.

3.3 Contribuições da idade média

A álgebra como conhecemos hoje baseada quase que exclusivamente em formas simbólicas de enunciados difere da linguagem escrita com que a matemática grega e anterior a ela se expressava (Boyer; Merzbach, 2012). Boyer e Merzbach (2012) destacam três estágios de desenvolvimento histórico da álgebra: o primeiro denominado retórico, em que os enunciados eram completamente escritos em palavras; o segundo chamado sincopado, em que havia uma mescla de símbolos e palavra; e o terceiro intitulado simbólico, que é o atual. Nesse cenário a *Arithmetica* de Diofanto aparece no segundo estágio, a partir do qual um crescente desenvolvimento da álgebra ocasionou o aprimoramento da linguagem simbólica como a conhecemos hoje.

No período medieval, entre os séculos V e XII, a herança da atividade matemática havia sido herdada pelas civilizações do oriente cujas contribuições acrescentaram importantes

modificações no tratamento da matemática e impulsionaram as transformações da linguagem matemática na forma como a conhecemos hoje (Boyer; Merzbach, 2012)

Os hindus “foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra” (Eves, 2004, p. 255). Eles praticavam uma matemática voltada a orientação prática e se concentravam na resolução de problemas de aritmética e álgebra, ainda a geometria era estudada, porém sem grande enfoque lógico e generalizante (Malta, 2015, p. 31). Entre as contribuições hindus estacam-se o aprimoramento da representação simbólica dos números caracterizada por um sistema de posição, no qual “o significado de um símbolo está ligado à sua posição no número” (Aires, 2010, p. 24), sendo as primeiras nove unidades tomadas afim de representar as demais, o que tornaria supérfluos todos os símbolos além dos nove primeiros (Boyer e Merzbach, 2012). Nesse sistema, a introdução do decimo elemento ainda não havia ocorrido, Aires (2010) ressalta que “nenhum símbolo específico foi necessário enquanto o zero significava apenas a ausência de objetos contáveis. Tornou-se incontornável quando surgiram os sistemas numéricos posicionais” (p. 31). Com a introdução do conceito de zero como número e sua respectiva notação hindu o sistema de numeração para os inteiros estava completo, esse novo sistema de numeração combinava três princípios básicos: (1) uma base decimal; (2) uma notação posicional; e (3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais, essa ligação entre os três aspectos acabou por formar o moderno sistema de numeração (Boyer; Merzbach, 2012).

Os hindus sincoparam sua álgebra, assim como o fez Diofanto, a adição era feita por justaposição, a subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se abba depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se ka antes da quantidade, a incógnita por yã, ainda aceitavam os números negativos e irracionais (Eves, 2004, p. 256). Os hindus ainda se empenhavam por descobrir métodos gerais que fornecessem todas as soluções inteiras possíveis, ao contrário dos gregos que se detinham a busca de soluções particulares (Boyer; Merzbach, 2012 p 160).

Conforme descreve Eves (2004) na geometria os hindus não obtiveram grande aproveitamento. Sendo pouco demonstrativa e “largamente empírica e em geral se ligava à mensuração” (Boyer; Merzbach, 2004, p. 257).

Os sucessores diretos da cultura hindu, os árabes, através de conexões com outros povos, especialmente os gregos do império bizantino, tiveram acesso a outros estilos de pensamento da matemática e, conseqüentemente, influencias mútuas que possibilitaram um novo estágio de conhecimento da matemática (malta, 2015, p. 32). A apropriação feita pelos árabes do saber

grego e hindu e o intercâmbios de ideias traçaram um perfil heterogêneo de pensamento nos árabes o que reunia da aritmética dos hindus símbolos numéricos juntamente com sua ideia de notação posicional, da geometria bizantina métodos lógicos de investigação, mas o destaque da contribuição dos árabes deu-se no campo da álgebra (Eves, 2004).

A aritmética e álgebra árabes baseava na adoção de um simbolismo abreviado, e em outros momentos a exclusão da álgebra hindu, fato este, provavelmente, influenciado por influência dos métodos gregos, desse modo, o afastamento dos ensinamentos hindus provocaram um retrocesso a álgebra retórica grega, sendo novamente os números escritos em palavras (Eves, 2004, p. 262). Na álgebra árabe “precisava ser desenvolvida uma notação simbólica para substituir a forma retórica. Esse passo os árabes nunca deram, exceto quanto a substituir as palavras para número por sinais para número (Boyer; Merzbach, 2012, p. 169).

Os trabalhos em geometria efetuados pelos árabes tinham caráter mais de preservação do que de descoberta (Eves, 2004, p. 264). Seus esforços de traduzir os clássicos gregos são objeto de grande reconhecimento para que as obras que se tem hoje chegassem ao conhecimento (Boyer; Merzbach, 2012, p. 169).

Entre os matemáticos notáveis destaca-se os trabalhos do matemático Al-Khowarizmi, que utilizava em suas soluções uma álgebra retórica e recursos geométricos, além dele Omar Khayyam cujos trabalhos em torno de resoluções de equações lineares colocava as construções geométricas como um elemento complementar de suas resoluções. Fato este que veio a ser um meio importante para a ampliação da visão da geometria analítica posterior (Malta, 2015, p. 33).

Dessa forma, Malta (2015) aponta que as principais contribuições dos árabes para a geometria analítica ocorreram no campo da álgebra. Os “métodos gregos de resolução de cúbicas foram aprofundados e as resoluções das quadráticas eram realizadas algebricamente e validadas geometricamente, uma ideia que foi utilizada em grande parte da Geometria de Descartes” (Malta, 2015, p. 50). Além do uso dos numerais hindu-arábicos que contribuíram para a álgebra de Viète (p. 50).

Boyer e Merzbach (2012) assinalam que “foi realmente uma sorte que, quando a cultura árabe começou a declinar, a ciência na Europa estivesse em ascensão e preparada para aceitar a herança intelectual legada por eras anteriores” (p. 176). As ideias dos árabes acabaram por expandir-se e divulgar-se pelo ocidente latino, através de inúmeras traduções para o latim, o que ocasionou o despertar do interesse para com o tratamento da matemática dada por esses

povos, especialmente quanto ao seu sistema de numeração posicional (Malta, 2015, p. 34).

3.4 Contribuições do preludio da era moderna

Boyer e Merzbach (2012) destacam que “no começo do século doze, nenhum europeu poderia pretender ser um matemático ou astrônomo verdadeiro, sem um bom conhecimento da língua árabe” (p. 179). Uma série de traduções do árabe para as diferentes línguas ocidentais como o latim e o espanhol assinalam uma transição no pensamento matemático ocidental. Conforme Boyer e Merzbach (2012) a importância dada as obras orientais verifica-se nas obras do primeiro grande matemático latino Fibonacci que em sua obra *O Liber Abaci* reflete uma característica da forma de pensar medieval de que a aritmética e a geometria são interligadas e se auxiliam mutuamente, e enfatiza que “todas as propriedades aritméticas só poderiam ser demonstradas geometricamente” (Malta, 2015 p. 34). No entanto, em sua obra Fibonacci segue uma linha de pensamento mais inclinada ao tratamento da álgebra e faz recomendações do sistema de numeração indo-arábico, o que se tornou importante na disseminação desse sistema de numeração (Boyer; Merzbach, 2012, p. 181).

Grande parte da matemática do século XV concentrou-se em torno da aritmética e da álgebra, seguindo graduais reformulações a linguagem matemática ia se consolidando essencialmente até tornar-se simbólica (Eves, 2004, p. 296). Não obstante, como afirma Malta (2015) o interesse não girava em torno apenas da álgebra, mas também para os problemas tradicionais da geometria. Enquanto mantinha-se um respeito excessivo pelos cânones tradicionais da geometria, na álgebra novas propostas eram lançadas, especialmente com relação as operações, notações e conceitos o que impulsionou “maior confiança na álgebra e em suas operações, independentemente de qualquer significado geométrico” (Malta, 2015, p. 39). O aperfeiçoamento da álgebra árabe e o seu domínio ocidental no uso parcial de simbolismos e de resoluções de cúbicas e quárticas abriu caminho para mais uma transição marcada pelas obras do matemático Francês François Viète (Boyer; Merzbach, 2012, p. 211).

Essa transição dá-se especialmente no campo da álgebra no qual Viète destaca-se como um algebrista quase moderno (Boyer; Merzbach, 2012, p. 212). Apesar das representações simbólicas desenvolvidas, era latente a ausência de um simbolismo que tratasse os problemas de maneira geral invalidando os exemplos numéricos e as regras de procedimento verbais da tradição algébrica italiana, não permitindo maiores progressos nas teorias algébricas (Boyer; Merzbach, 2012, p. 212). A ausência de um esquema para escrever uma equação que pudesse

representar uma qualquer dentre uma classe toda de equações impedia uma algebrista de representar por meio de uma só expressão toda uma classe de equações, como faz um geômetra que “por meio de um diagrama, poderia fazer ABC representar todos os triângulos” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 212).

Aqui Viète introduziu uma convenção que permitia analisar todas as equações particulares mediante uma única equação representativa “devido à designação das espécies por letras tais como as consoantes que representavam os coeficientes e as vogais que representavam as incógnitas que juntas formavam os termos de uma equação geral” (Malta, 2015, p. 40). A distinção entre o uso das vogais para representar quantidades desconhecidas, ou incógnitas, e as consoantes para designar quantidades conhecidas, ou parâmetro, determinou uma distinção clara entre estes dois conceitos, e “possibilitou o desvendamento de uma teoria geral de equações que tornava possível, de agora em diante, encontrar as fórmulas ou soluções gerais das equações algébricas que expressavam vogais em função das consoantes, ou melhor, as incógnitas em função dos parâmetros” (Malta, 2015, p. 41). Além do conceito algébrico de parâmetro e incógnita Viète ainda adotou os símbolos $+$ e $-$, para a adição e a subtração respectivamente, porém não foi muito além disto, pois a sua linguagem ainda não era completamente simbólica.

Malta (2015) destaca três contribuições de Viète para a geometria analítica. A primeira diz respeito aos termos parâmetro e variável, em que o uso da convenção vogal-consoante fosse mais tarde amadurecida nas representações de Descartes e Fermat; a segunda se refere a aplicação sistemática da álgebra sincopada aos problemas geométricos, no tocante ao tratamento dos problemas de construção geométrica mediante equações; e, em terceiro sua avaliação crítica do imaginário coletivo da época quanto ao método de análise usado pelos gregos para resolver problemas geométricos.

Boyer e merzbach (2012) destacam que “o pensamento de Viète se mantinha próximo da geometria” (p. 215), o que levou a uma tendência de associar a nova álgebra com a antiga geometria. Nesse sentido, as investigações a respeito dos métodos usados pelos antigos para resolver problemas concorreu para o desenvolvimento de uma perspectiva algébrica para o estudo da geometria euclidiana, a partir ponto de vista analítico aplicado pelos gregos, em que os passos não eram expressos formalmente, Viète buscou ferramentas matemáticas na álgebra simbólica capazes de nortear os “passos” apropriados para os tais caminhos em geometria (Malta, 2015). Essa transposição da análise dos antigos para a análise algébrica foi gradativamente ganhando espaço no imaginário coletivo de modo que a análise passou a ser

vista “como sinônimo do uso de técnicas simbólicas, ou até mesmo da própria álgebra” (Malta, 2015, p. 44; *apud* Boyer, 2004). Desse modo, consolidou-se uma análise algébrica empregada na geometria por meio da álgebra simbólica, cujo desenvolvimento levou de forma inexorável ao surgimento da geometria analítica mais do que propriamente o fez a geometria (Malta, 2015, p. 51)

Em virtude de “Não é dado a um só homem fazer toda uma dada transformação; ela deve vir em passos” (Boyer e Merzbach, 2012, p. 212), um dos passos além da obra de Viète foram dados por outros matemáticos que se destacaram nesse período proporcionando bom andamento a álgebra simbólica, padronização dos numerais indu-arábicos, e a adoção das frações decimais, progressão da teoria de equações e aceitação dos números negativos, deixando o caminho aberto para novas descobertas na matemática (Eves, 2004, p. 312).

3.5 Investigações da era moderna

A investigação algébrica iniciada nos séculos anteriores abriu caminho para a concretização de uma intervenção de métodos algébricos na geometria, afim de torna-se um modelo de solução algébrica e geométrica (Malta, 2015, p 52). Esse novo modelo insurgiu uma transformação no estilo de pensamento da matemática a partir da metade do século XVII através dos trabalhos de Descartes e Fermat, dois matemáticos que separadamente concretizaram o potencial da matemática de articular as equações indeterminadas com as linhas geométricas. Apesar dos problemas de que trataram esses matemáticos já serem amplamente conhecidos, não eram bem recebidos em virtude de serem questões que demandavam investigações mais abrangentes ao estilo de pensamento da época, em virtude do que as obras de Descartes e Fermat “vão acarretar não apenas na descoberta do método das coordenadas – próprio da nova geometria – mas também, com o decorrer do tempo, em mutações gradativas do estilo de pensamento vigente” (Malta, 2015, p. 52). Este novo momento para a matemática concretizou-se a partir da publicação das obras *La géométrie* de Descartes e a *Introdução a lugares geométricos* de Fermat, abrindo caminho a implantação do estilo de pensamento analítico em substituição ao estilo de pensamento sintético” (Malta, 2015 p. 53).

Por volta de 1637 Pierre de Fermat anuncia em um de seus manuscritos intitulado *Introdução aos lugares Planos e Sólidos* uma teoria sobre lugares geométricos, no qual comprovava que “todas as cônicas estudadas por Menaecmo e Apolônio na antiguidade, poderiam ser descritas de uma forma mais simplificada que envolveria equações

indeterminadas estudadas em sua gênese por Diofanto” (Malta, 2015, p. 56). Por volta do mesmo período, Descartes organiza seu Discurso do Método, no qual um apêndice denominado *La géométrie* tratava problemas geométricos com um viés semelhante ao de Fermat. Em ambos os tratados, *Introdução* e *La géométrie*, eles apresentaram o princípio fundamental da geometria analítica, que se constitui na construção de uma relação mutua entre equações indeterminadas e curvas, e com isso passaram a ser considerados os inventores da geometria analítica (Malta, 2015, p. 56).

O tratamento sobre lugares planos e sólidos já havia sido realizado pelos antigos, porém sua investigação não resultava em largo desenvolvimento, tendo em vista os métodos de investigação não estabelecerem uma generalização dos problemas. Sendo perdidas grande parte das técnicas de análise dos antigos, era de interesse de Descartes e Fermat as redescobrirem e para tal utilizaram dos estudos de Viète, que eram considerados chave para a compreensão das técnicas dos antigos (Malta, 2015). Em razão disso, utilizaram da “arte analítica de Viète na recriação da via inventiva da análise geométrica dos gregos, propiciando a descoberta da geometria analítica mediante a consequente resolução dos problemas geométricos por meio da síntese algébrica” (Malta, 2015, p. 58).

Segundo Malta (2015), deduz-se que os dois pensadores se basearam nas obras de Viète e a estas deram continuidade, no entanto o fizeram por caminhos razoavelmente distintos. Enquanto Fermat engrenou pelas ideias viêtianas em direção ao emprego da linguagem sincopada em conexão com o estudo dos lugares geométricos, Descartes fez uso da Arte analítica, isto é, a construção geométrica das raízes das equações algébricas, a fim de dar prosseguimento ao mesmo intento, porém o fazendo através do simbolismo algébrico mais moderno. Malta (2015) ressalta que os avanços em álgebra criaram condições favoráveis para a intervenção do pensamento analítico na geometria e, aos poucos o método analítico foi ganhando espaço sobre as construções geométricas a medida que a eficiência do método era comprovada para a resolução dos problemas clássicos da geometria.

No início do século XVII a matemática estava muito ligada a um “estilo sintético de exposição que submetia os problemas a um verdadeiro esboço excessivo de figuras” (Malta, 2015, p. 56). Em seu *Discurso* Descartes atesta o descontentamento dos pensadores com esse tratamento das soluções dos problemas ao admitir que este “estava tão ligado à consideração das figuras que não pode propiciar a compreensão sem cansar muito a imaginação” (Malta 2015, p. 56; *apud* Descartes, 2000, p. 49). Quanto a álgebra vigente acusava-a de ser “uma arte confusa e obscura que embaraça a mente” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 240). Nesse sentido,

propôs que seu objetivo em sua obra era duplo sendo “ (primeiro) por processos algébricos, libertar a geometria de diagramas e, (segundo) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 240). Seu método parte então da premissa de que as ciências matemáticas partem dos mesmos princípios básicos, e decidiu utilizar o melhor desses dois ramos da matemática em *La géométrie*.

Desse modo, em seu método Descartes partia de um problema geométrico a fim de traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolve-la algebricamente (Boyer; Merzbach, 2012, p. 240). Nesse sentido, seu tratamento da matemática apresentava-se disruptivo ao mesmo tempo em que preservava tradições anteriores (Boyer; Merzbach, 2012 p. 237), ao passo que sua álgebra rompia com o princípio da homogeneidade o que propiciou a sua abordagem de problemas de ordem superior, sendo *La géométrie* “o texto matemático mais antigo que um estudante da álgebra de hoje pode seguir, sem encontrar dificuldades com a notação” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 238). Além de com o amparo da sua álgebra simbólica trazer “simplificação, generalidade e flexibilidade as ideias matemáticas, vimos que Descartes ambicionou a matematização de todos os problemas das ciências” (Malta, 2015, p. 145-146).

No mesmo período Fermat dedica sua matemática ao tratamento dos tratados clássicos conservados, dedicando-se a reconstrução de obras de Apolônio com base nas Coleção matemática de Pappus e a consequente aplicação da análise de Viète ao estudo desses lugares geométricos, o que lhe propiciou chegar ao descobrimento do princípio fundamental da geometria analítica (Boyer; Merzbach, 2012, p. 245). Porém, “deixou a desejar na Introdução em razão da sua afinidade com a geometria dos antigos (...) (visto que sua obra) consistiu em simplesmente reinterpretar algebricamente o método analítico dos geometas antigos” (Malta, 2015, p. 145-146). Quanto a linguagem simbólica, Malta (2015) ressalta que para Fermat o uso da notação algébrica era puramente convencional, tendo sua notação em grande medida baseada nas notações de Viète seu simbolismo não se comparava ao de Descartes, sendo por muitos considerado arcaico nesse sentido (Eves, 2004, p. 389).

Conforme destaca Malta (2015) a linguagem puramente simbólica tem uma profunda repercussão conceitual trazendo clareza aos conceitos, que pode ser observada na linguagem simbólica de Descartes. Por outro lado, pois sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes. Além disso, sua geometria analítica era um tanto mais próxima da nossa, no fato de serem as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas (Boyer; Merzbach 2012, p. 246).

De qualquer modo, o método analítico proposto por Descartes e Fermat possibilitou um novo caminho a geometria, porém não rompeu completamente com os pressupostos já estabelecidos. Em contrapartida à geometria euclidiana que privilegiava o uso do método sintético, baseado nas construções geométricas, o método analítico baseava-se no uso de relações envolvendo grandezas algébricas e o uso de uma linguagem puramente simbólica que proporcionava simplificação, generalidade e flexibilidade ao encadeamento das ideias (Malta, 2015, p. 60). Portanto, tanto a Introdução de Fermat como a Geometria de Descartes tiveram as suas contribuições para o desenvolvimento da matemática e das demais ciências (Malta, 2015, p. 146).

CONCLUSÃO

A geometria analítica como ferramenta poderosa de resolução de problemas foi estudada neste artigo considerando o processo histórico da geometria plana, álgebra com enfoque na geometria analítica e nesse contexto, verificou descoberta por René Descartes e Pierre de Fermat, foi possível estabelecer claramente os conceitos que a fundamentam por meio da narrativa histórica; por meio da fundamentação no sistema de coordenadas e do conhecimento da geometria plana e da álgebra.

O contexto histórico através do qual introduziu-se o estudo da geometria analítica possibilitou uma contextualização do assunto em torno das nuances de seu desenvolvimento através do tempo e dos principais fatos que influenciaram direta ou indiretamente o seu desenvolvimento. Entre os grandes matemáticos determinantes nesse percurso destacam-se René Descartes e Pierre de Fermat como os descobridores da geometria analítica ao comporem harmoniosamente a relação entre as curvas e equações algébricas.

Em relação a esse aspecto, a história da geometria analítica considera um percurso atrelado a um desenvolvimento intelectual, que se apoia nas contribuições de diversas civilizações e períodos históricos a saber, O método da geometria analítica, como proposto por René Descartes e Pierre de Fermat, representa o ponto culminante de uma longa jornada de descobertas, sínteses e avanços que remontam à antiguidade.

REFERÊNCIA

AIRES, Luz M. **Uma história da matemática**: dos primeiros agricultores a Alan Turing, dos números ao computador. 1ª ed. Lisboa: Sílabo, 2010.

BOYER, Carl B; MERZABCH, Uta C. **História da matemática**, 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temático**: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-Pa, 2017.

CALIXTO, Vinicius Barbosa. **Uma proposta de intervenção pedagógica para o ensino de geometria baseada na questão da abstração segundo Platão**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade de São Paulo: São Carlos-SP, 2022.

DANTE, LUIZ ROBERTO. **Projeto Teláreis**: matemática 8º ano. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2015.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria plana. Vol. 9. 9ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**, SBM, 2013 (Coleção PROFMAT)

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: trigonometria. Vol. 3. 9ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013a.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios, equações. Vol. 6. 6ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013c.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria analítica. Vol. 7. 8ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013b.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar**: números e funções. Vol. 1. 9ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013.

GEOGEBRA, Classic. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria**. 1ª Ed. SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)

QUEIRÓ, João Filipe. **A Elipse, A parábola e a hipérbole**: propriedades e aplicações. Disponível em: [aplicacoes \(uc.pt\)](https://aplicacoes.uc.pt). Acesso em: 25 de julho de 2024).

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro, IMPA,

2015.