

FILYPPE NEVES DE ANDRADE
RODOLFO CHAVES



**PRÁTICAS EDUCATIVAS
INVESTIGATIVAS ENVOLVENDO
NÚMEROS FIGURADOS**





INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Filyppe Neves de Andrade
Rodolfo Chaves

**PRÁTICAS EDUCATIVAS INVESTIGATIVAS ENVOLVENDO
NÚMEROS FIGURADOS**

Série Propostas de Formação - Nº 04



Vitória - ES
2024



Edifes

Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Espírito Santo

R. Barão de Mauá, nº 30 – Jucutuquara

29040-689 – Vitória – ES

www.edifes.ifes.edu.br | editora@ifes.edu.br

Reitor: Jadir José Pela

Pró-Reitor de Administração e Orçamento: Lezi José Ferreira

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional: Luciano de Oliveira Toledo

Pró-Reitora de Ensino: Adriana Piontkovsky Barcellos

Pró-Reitor de Extensão: Lodovico Ortlieb Faria

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação: André Romero da Silva

Coordenador da Edifes: Adonai José Lacruz

Conselho Editorial

Aline Freitas da Silva de Carvalho * Aparecida de Fátima Madella de Oliveira * Eduardo Fausto Kuster Cid * Felipe Zamborlini Saiter * Filipe Ferreira Ghidetti. * Gabriel Domingos Carvalho * Jamille Locatelli * Marcio de Souza Bolzan * Mariella Berger Andrade * Ricardo Ramos Costa * Rosana Vilarim da Silva * Rossanna dos Santos Santana Rubim * Viviane Bessa Lopes Alvarenga.

Revisão de texto:	Projeto gráfico:	Diagramação:	Capa:	Imagem de capa:
Rodolfo Chaves	Filyppe Neves de Andrade	Filyppe Neves de Andrade	Filyppe Neves de Andrade	Imagens livre do site CANVA

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Campus Vila Velha)

A554p Andrade, Filyppe Neves de
Práticas educativas investigativas envolvendo números figurados. /
Filyppe Neves de Andrade, Rodolfo Chaves. - Vitória-ES : Edifes Acadêmico,
2024.
1 recurso digital : PDF ; 91 p. : il. col.

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-85-8263-954-2 (e-book).
Série Propostas de Formação : n. 4.

1. Matemática. 2. Números figurados. 3. Ensino por investigação. 4. Prática pedagógica. I. Chaves, Rodolfo. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. III. Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelos dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem). IV. Título. V. Série.

CDD 23 - 510

Bibliotecário/a: Hermelinda Peixoto Pereira Martins CRB6-ES n. 522

DOI: 10.36524/9788582639542

Esta obra está licenciada com uma Licença Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Brasil.





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FILYPPE NEVES DE ANDRADE

PRODUTO EDUCACIONAL

**PRÁTICAS EDUCATIVAS INVESTIGATIVAS ENVOLVENDO
NÚMEROS FIGURADOS**

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 29 de outubro de 2024.

COMISSÃO EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **RODOLFO CHAVES**
Data: 11/11/2024 11:46:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes
(Presidente da Banca Examinadora)

Documento assinado digitalmente
 **LIGIA ARANTES SAD**
Data: 11/11/2024 14:38:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ligia Arantes Sad
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes
(Membro Interno)

Documento assinado digitalmente
 **MARIANA DOS SANTOS CEZAR**
Data: 11/11/2024 15:31:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Mariana dos Santos Cezar
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes
(Membro Externo)

Assinado por: **ANA ELISA ESTEVES SANTIAGO**
Num. de Identificação: 11250886

Ana Elisa Esteves Santiago
Escola Superior de Educação
Instituto Politécnico de Coimbra
(Membro Externo)

Autores

Filyppe Neves de Andrade



Mestre em Educação Matemática pelo programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat/Ifes). Graduado em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo. Integrante do Grupo de Estudo e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem), e da Rede de Pesquisas e Desenvolvimento em Educação Matemática (Sigma-t).

E-mail: filyppeneves@gmail.com

Rodolfo Chaves

Professor Titular do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo; pós-doutorado em Educação Matemática e Ensino de Física (UFSM); doutorado e mestrado em Educação Matemática (Unesp/Rio Claro); atua na formação de Professores e de processos de Ensino e de Aprendizagem em Educação Matemática. Pesquisador e Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelos dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem); integrante da Rede de Pesquisas e Desenvolvimento em Educação Matemática (Sigma-t).

E-mail: rodolfochaves20@gmail.com



Dedicamos este trabalho, a ti, professor(a) da educação básica, que se sente insatisfeito com o desrespeito à castração do princípio da liberdade de cátedra, imputado por mandatários da educação, na tentativa de exercer controle sobre um espaço comum a alunos e professores: a sala de aula.

Por isso, nosso trabalho é dedicado àquele(a)s que objetivam desenvolver práticas educativas, a fim de oportunizar no ambiente educacional, momentos de aprendizagem que promovam a reflexão, a investigação, o senso crítico e o trabalho colaborativo.

“Tudo indica que na escola interessa mesmo é que apliquemos ‘o’ algoritmo, de forma precisa. Por fim, na escola, números não são números de nada, a não ser em ‘problemas com história’, e no fim termina-se mesmo pedindo que os alunos se esqueçam da história e ‘pensem na matemática’”

(Lins; Giménez, 1997. p. 15-16)

Sumário

DESCRIÇÃO TÉCNICA	8
APRESENTAÇÃO.....	10
JUSTIFICATIVA	12
ESTABELECENDO NOSSAS BASES	14
Algumas noções elementares do MCS	14
UMA BREVE LEITURA DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS FIGURADOS.....	18
Pitágoras e a escola pitagórica	20
Números figurados bidimensionais	25
Números figurados tridimensionais	32
A RESPEITO DAS PRÁTICAS EDUCATIVAS INVESTIGATIVAS	35
Prática com os números figurados quadrados ($f_4(n)$)	39
Prática com os números figurados triangulares ($f_4(n)$)	45
Alguns outros números figurados bidimensionais.....	51
Prática sobre a relação entre os números figurados	55
Prática com os números tetraédricos ($S_3^3(n)$)	58
(i) Triângulo de Pascal e números binomiais	63
(ii) Somatório (Σ)	71
(ii) Taxa de variação	76
Prática com os números piramidais de base quadrada ($S_4^3(n)$)	81
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	88
REFERÊNCIAS	89

DESCRIÇÃO TÉCNICA

Nível de Ensino a que se destina o produto: Educação Básica.

Área de Conhecimento: Ensino.

Público-Alvo: Professores que ensinam matemática na educação básica e licenciandos em matemática.

Categoria deste produto: Material Didático/Instrucional (PTT1).

Finalidade: Contribuir para as práticas educativas e à formação de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental, e de quem mais possa interessar.

Proposta do Produto: Apresentar, discutir e refletir acerca de possíveis propostas de práticas educativas com modelagem matemática, para os anos finais do ensino fundamental.

Organização do Produto: O produto foi estruturado em capítulos e apresentará propostas de práticas envolvendo alguns números figurados bi e tridimensionais, de forma organizada, além de discorrer a respeito de experiências e procedimentos apresentados na Ação Complementar ao Ensino que desenvolvemos com professores, licenciandos em Matemática e pibidianos.

Registro de Propriedade Intelectual: Ficha Catalográfica com ISBN e Licença Creative Commons (EducaPes).

Disponibilidade: Irrestrita, mantendo-se o respeito à autoria do produto, não sendo permitido uso comercial por terceiros.

Divulgação: Meio digital.

URL: Produto disponível no site do Educimat (www.educimat.ifes.edu.br) e no repositório EDUCAPES (www.educapes.capes.gov.br).

Processo de Validação: Validado em plenárias do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem) e na banca de defesa da dissertação.

Processo de Aplicação: Aplicado em plenárias do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem), com licenciandos em matemática, pibidianos e professores da educação básica, na Ação Complementar ao Ensino "Práticas Educativas Investigativas envolvendo números figurados" - Processo 23148.001816/2023-86, Registro nº 277593 -, do curso de licenciatura em matemática do Ifes, campus Vitória.



Impacto: Este produto possui médio impacto - PTT gerado no Programa, aplicado no sistema, mas não foi transferido para algum segmento da sociedade.

Inovação: Médio teor inovativo - combinação e/ou compilação de conhecimentos pré-estabelecidos.

Origem do produto: Monografia de dissertação intitulada "Análise da produção de significados em Práticas Educativas Investigativas envolvendo números figurados tridimensionais", desenvolvida no Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do Ifes.



APRESENTAÇÃO

Este produto educacional foi elaborado ao longo do desenvolvimento da pesquisa de mestrado cujo título é "Análise da produção de significados em Práticas Educativas Investigativas envolvendo números figurados tridimensionais" (Andrade, 2024), que teve sua gênese a partir de dois projetos e dois cursos de extensão desenvolvidos pelo Grupo de Estudo e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem), a saber: "Pitágoras: em (e além do) teorema" (Chaves; Zocolotti, 2017); "Pitagorismo: bases histórias, filosóficas, epistemológicas e práticas" (Chaves et al., 2021), e os cursos de extensão denominados: "Algumas sequências numéricas com representações geométricas na Aritmética pitagórica: números figurados bidimensionais e tetraédricos" (Andrade, 2021); "Práticas Educativas Investigativas envolvendo Sequências e Recursividade" (Marques; Chaves, 2022).

O projeto Pitagorismo foi desenvolvido no período de 2021 a 2023 e foi uma continuação da temática do "Projeto Pitágoras: em (e além do) teorema", desenvolvido no período de 2017 a 2020, mas agora com quatro frentes: (i) aritmética pitagórica; (ii) demonstrações clássicas do teorema de Pitágoras; (iii) história, filosofia e epistemologia do pitagorismo e da escola pitagórica; (iv) matemática e música.

Nosso trabalho foi ancorado na frente aritmética pitagórica e, nosso produto educacional amadurecido, elaborado, (re)formulado e (re)planejado ao longo das ações de campo advindas desses projetos, mas antes de desenvolvermos em nosso cenário de pesquisa - a Ação Complementar ao Ensino (ACE) denominada "Curso de Práticas Educativas Investigativas envolvendo números figurados" -, o desenvolvemos em diversas ações de ensino e extensão: (a) Projeto Somar, envolvendo cinco turmas de alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual na região metropolitana de Vitória (por um trimestre, cinco horas por semana); (b) curso de extensão com licenciandos em matemática e professores das redes públicas de ensino



da região metropolitana de Vitória (curso de quarenta e oito horas); (c) três oficinas (duas no Ifes e uma na Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF) e dois minicursos (na Universidade Federal de Santa Maria - UFSM) (Chaves et al., 2018; Chaves et al., 2021) em eventos acadêmicos (Semat , Cema e Eiemat); (d) curso de extensão "Algumas sequências numéricas com representações geométricas na Aritmética pitagórica: números figurados bidimensionais e tetraédricos - Edital 007/2020-Direx".

Nossa proposta é pautada no desenvolvimento de uma coletânea que possibilite o trabalho com Práticas Educativas Investigativas (PEI), tendo como base no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), e que objetiva possibilitar um trabalho que evidencie e trate possíveis trânsitos entre modos de produção de significado aritméticos, geométricos e algébricos na sala de aula da educação básica a partir das sequências dos números figurados.

Para tal, trouxemos propostas de elaboração e desenvolvimento de materiais didático-pedagógicos (MDP) que possibilitem compartilhar espaços comunicativos entre professor e estudante.

Um princípio que seguimos foi o da sustentabilidade na produção de MDP, na qual utilizamos materiais recicláveis e reaproveitáveis. Sugerimos detalhadamente as etapas para organização de ações que visam coletar tampinhas de garrafas PET na comunidade para a utilização nas construções de números figurados com o intuito de viabilizar possíveis processos de produção de significados geométricos e relacioná-los a processos de produção de significados aritméticos e algébricos. Assim, nessa coletânea temos um conjunto de PEI adotadas em um processo de formação de professores.

Mesmo não sendo uma exigência ao mestrado profissional, nosso produto foi validado a partir das plenárias do Gepemem e dos eventos acadêmicos supracitados.



JUSTIFICATIVA

Observando os documentos oficiais vigentes, é possível percebermos a participação da Matemática e de seus destaques como área do conhecimento na formação do estudante. Quando se fala em Matemática como área há de se destacar alguns campos que a compõe, o que, possibilita que haja (ou não) articulações entre eles. Podemos evidenciar essa importância ao analisarmos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018).

Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos - Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade -, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas (Brasil, 2018, p. 265).

Apesar de tais considerações, ainda vivenciamos um hiato entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria (Lins; Giménez, 1997). Esse modo separatista trata a Matemática, ao mesmo tempo, como vários compartimentos isolados, como caixinhas ou gavetas, mas também como única, hegemônica (Knijnik et al., 2012) - ou como disse o matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), numa visão positivistas, como a rainha das ciências - e isso pode implicar numa prática em que esses campos (Aritmética, Álgebra e Geometria) não se relacionam, o que, segundo nosso entendimento e nosso referencial (Lins; Giménez, 1997; Chaves, 2004) não pode ser tomado como um padrão a ser seguido, uma vez que as estruturas desses três campos são intrínsecas, permitindo uma transição de operações lógicas favorecendo a produção de conhecimento a partir de novas perspectivas e significados.

Para fundamentarmos essa ideia, apoiamo-nos no texto "Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI" (Lins; Giménez, 1997) que nos traz



discussões críticas a respeito da práxis de que o aprendizado da Aritmética deva ocorrer antes o aprendizado da Álgebra, como se a Álgebra fosse apenas uma generalização dessa Aritmética. Ideias como essas não coadunam com o que é proposto nos documentos educacionais vigentes, nem com os propósitos de uma Educação Matemática, crítica e reflexiva, que prima pela formação integral do indivíduo.

Nesse viés, propomo-nos em realizar ações e PEI, com professores (em exercício e em formação), destacando a importância do desenvolvimento conjunto entre Aritmética, Álgebra e Geometria, de maneira que aproximemos esses campos e passemos a enxergá-los como frentes que podem se relacionar dentro da Matemática escolar. Quando destacamos possíveis trânsitos entre modos de produção de significados (aritmético, geométrico e algébrico) buscamos valorizar as respectivas maneiras de operar, bem como as lógicas das operações que são negligenciadas ao realizarmos esse rompimento rígido para com a Matemática hegemônica (Knijnik *et al.*, 2012), peculiar à concepção positivista de matemática escolar, que Chaves (2004) denomina de excludente, meritocrática, cartorial, oca e bancária.

Assim, tomaremos como premissa que, para rompermos com o caráter hegemônico de uma Matemática Escolar positivista, excludente e meritocrática, é importante procurarmos compartilhar espaços comunicativos que possibilitem a promoção de articulações entre alguns modos de produção de significados geométrico, aritmético e algébrico.

Para tal proposta, tomamos como base os projetos de ensino, pesquisa e extensão desenvolvidos pelo Gepemem, vinculado ao Instituto Federal do Espírito Santo - *campus* Vitória (Ifes), no qual daremos continuidade ao desenvolvimento de trabalhos em curso, a respeito das contribuições da escola pitagórica como o famoso teorema e os números figurados.



ESTABELECENDO NOSSAS BASES

Entendemos que o aspecto central da aprendizagem é a produção de significados no desenvolvimento de uma atividade (Lins, 1999; 2012). E, por sua vez, significado nada mais (e nada menos) é do que, aquilo que se diz a respeito de um objeto.

Essa visão é alicerçada no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que é um modelo epistemológico desenvolvido pelo professor Romulo Campos Lins (1955-2017). O professor Romulo buscava ir além da meritocrática e engessada ideia de "erro". Para ele, não bastava apenas saber se o indivíduo "errou" ou "acertou", mas sim o que ele pensava quando "errava", para que assim seja possível interagir com ele de forma que possa produzir novos significados a respeito do objeto em questão.

Em 1992, o professor Romulo Campos Lins defende sua tese "*A framework for understanding what algebraic thinking is*" na *University of Nottingham (UK)* e em 1993 publica um artigo apresentando ideias a respeito do MCS, sempre apresentando o entendimento de que seu Modelo só existe no campo da ação, ou seja, não é uma teoria para ser estudada, mas sim uma teorização para ser usada.

Em Lins (1999) temos essa legitimidade da produção de significado como ato político e pedagógico a partir de práticas dentro de uma proposta de Educação Matemática que seja inclusiva.

Algumas noções elementares do MCS

Para o MCS algumas ideias fundamentais são fundamentais principalmente pela forma não usual que são tomadas.

Para o MCS todo *conhecimento* só existe durante uma enunciação.



Quem produz uma enunciação é o *autor*, ao falar/fazer algo na direção de um possível *leitor*, que é aquele para quem se fala. Por sua vez é o *leitor* quem produz significado para aquilo que entende que foi dito por alguém e esse entendimento se constituirá como resíduo de enunciação. Assim, no MCS, todo conhecimento é compartilhado pelo *autor* (aquele que enuncia) da enunciação e pelo *leitor* (quem produz significado para aquela enunciação) que se constituirá como *interlocutor*, que é a direção na qual se fala.

Quando falamos de *significados* nos referimos àquilo que se diz a respeito de um *objeto*, ou seja, aquilo que efetivamente se enuncia, levando em consideração o seu contexto no interior de uma atividade. Por sua vez temos que um *objeto* é aquilo para que se produz *significados* (Lins, 2012).

Em Lins (2012) podemos ver a noção de *espaço comunicativo* que substitui a noção de comunicação clássica, onde um sujeito cognitivo - *sujeito do conhecimento* - fala na direção de outro sujeito cognitivo. Quando estabelecemos um *espaço comunicativo*, dois sujeitos cognitivos falam numa mesma direção, ou seja, eles compartilham um mesmo interlocutor.

Já *resíduo de enunciação* implica em “[...] algo com que me deparo e acredito ter sido dito por alguém” (Lins, 2012, p. 27).

Enunciação é “[...] o ato de enunciar algo a algum interlocutor e, discurso, como uma enunciação ou um enunciado (resíduos de uma enunciação) - “algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém [...] Ambos utilizam, constantemente, um processo de inferência lógica dedutiva por meio da linguagem” (Sad, 1999, p. 123).

Nas ações e práticas desenvolvidas pelo Gepemem procuramos, sempre que possível, analisar a lógica das operações e as maneiras de operar dos participantes, com o propósito de gerar a possibilidade de focar na



[...] maneira de operar dos sujeitos bem como a lógica das operações ligadas ao processo de produção de significados para um texto. As operações são o que o sujeito faz com os objetos e a lógica é o que garante que ele pode fazer (Silva, 2003, p. 76).

Para o MCS a lógica das operações é uma noção essencial e,

Posto de uma forma simples, estamos nos referindo a um conjunto de estipulações, dentro de um núcleo, que se referem diretamente ao que pode ser feito com os objetos que estamos constituindo pela produção de significados [...] o que pode ser feito com esse objeto depende exatamente daquela "lógica das operações com todo e partes" [...] (Lins; Giménez, 1997, p. 145, destaques do original).

Por esse prisma, pensamos então ser possível abandonarmos uma concepção, ainda comum, de uma matemática escolar algorítmica, "letrista", que constitui como fim a aplicação de fórmulas e algoritmos e o uso de técnicas hegemônicas, na qual "[...] números não são números de nada, a não ser em 'problemas com história', e no fim termina-se mesmo pedindo que os alunos se esqueçam da história e 'pensem na matemática'" (Lins; Giménez, 1997, p. 16, destaques do original). Isso porque,

Por um lado, fica claro que tanto as abordagens "letristas" quanto as "facilitadoras" estão, cada uma a seu modo, profundamente equivocadas. As "letristas", por ignorarem completamente que o "texto em letras" não carrega, em si, significado algum, e que este significado é produzido em relação a um núcleo, e que via de regra há muitos significados possíveis; todo "cálculo com letras" está subordinado a uma lógica das operações, e essa lógica imprime características particulares às possibilidades desse cálculo. As "facilitadoras", por ignorarem que a passagem de um campo semântico constituído em torno de um núcleo familiar para um outro campo semântico constituído em torno de um outro núcleo - possível e até provavelmente não-familiar - não se dá por "passagem suave", "abstração", "generalização" ou qualquer outra coisa que sugira que permanece de alguma forma uma "essência" (Lins; Giménez, 1997, p. 131, destaques do original).

Vale destacar que, no Modelo dos Campos Semânticos, consideramos campo semântico como "[...] um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade [...] sendo um processo, ao ser colocado em marcha cria condições para sua própria transformação" (Lins, 2012, p. 17) e, em um *processo de*



análise de produção de significado e em sua leitura, alicerçados nos princípios do MCS, nosso interesse está centrado na leitura do processo e não na permanência (no produto), porque, segundo nosso entendimento, a concepção algorítmica vigente na matemática escolar - de trabalhar a partir de fórmulas e algoritmos - é uma tentativa de ler na permanência, enquanto que, nosso interesse está no processo, na lógica das operações, na produção de significados e na transformação e constituição dos núcleos.

Vale destacar que, no MCS, quando falamos de campo semântico, nos referimos a "Um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade" (Lins, 2012, p. 17).

Sendo um processo, ao que ser colocado em marcha cria condições para sua própria transformação (Vygotsky).

Um campo semântico, de modo geral, é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores dentro de limites; que limites são estes, só sabemos a posteriori: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico (Lins, 2012, p. 17, destaques do original).

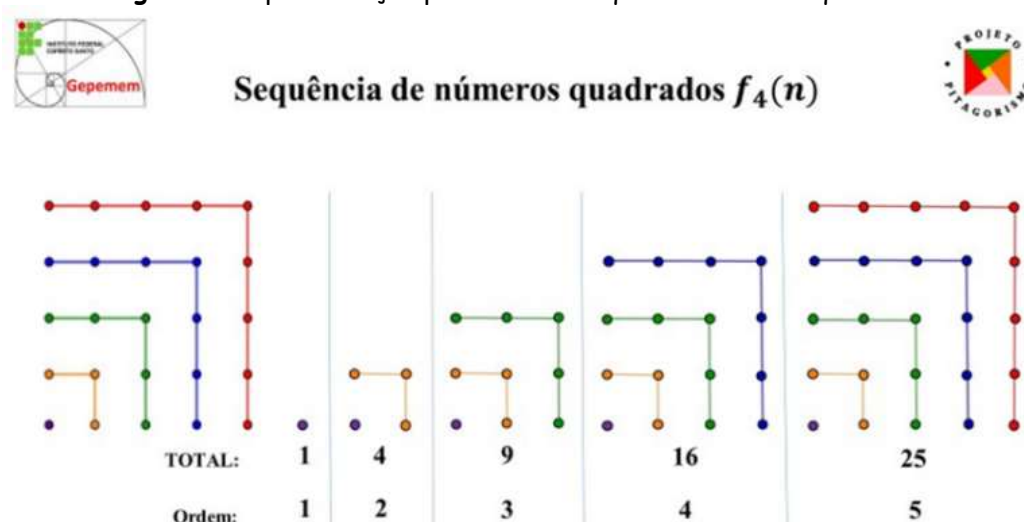


UMA BREVE LEITURA DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS FIGURADOS

Os números figurados foram objetos de estudo da escola pitagórica (Almeida, 2003; Andrade, 2021; Dutra, 2020; Dutra e Chaves (2020); Roque, 2014 [2012]; Santos 2000) e de alguns filósofos neopitagóricos. Esses números formam sequências numéricas que se organizam a partir de padrões geométricos referentes a polígonos (Figura 1) ou poliedros (Figura 2). Essas sequências possuem muitas propriedades e se relacionam de muitas formas.



Figura 1: Representação pictórica da sequência números quadrados



Fonte: Acervo Gepemem (2023).



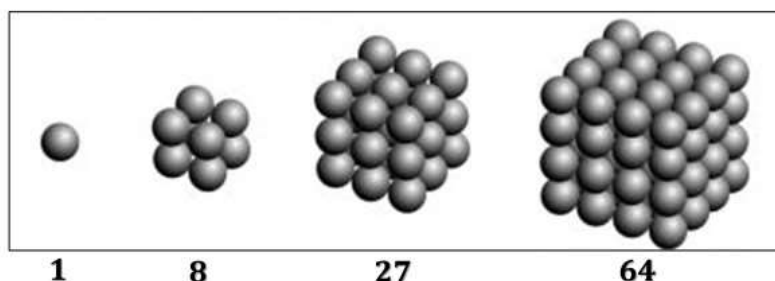
Figura 2: Representação pictórica da sequência números cúbicos



Números figurados de terceira dimensão



Números figurados cúbicos



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Para Almeida (2003) a "Teoria Pitagórica dos Números Figurados vem sendo encarada pela História da Ciência, e pela História da Matemática em particular, de uma forma simplista, como mera curiosidade [...]" (Almeida, 2003, p. 137-138); porém, em Deza e Deza (2012), vemos que ao longo da história, diversos matemáticos se dedicaram ao estudo dos números figurados, o que mostra que o tema não é tão simplista assim, muito menos simplório, pois, dedicaram-se ao estudo dos figurados.

Esses são alguns matemáticos: Pitágoras de Samos (582-507 AEC.), Hípsicles de Alexandria (190-120 AEC.), Lúcio Méstrio Plutarco de Queroneia (46-120 DEC.), Nicômaco de Gerasa (60-120), Téon de Esmirna (70-135), Diofanto de Alexandria (210-290), Leonardo Fibonacci (1170-1250), Michel Stifel (1487-1567), Girolamo Cardano (1501-1576), Bachet de Méziriac (1581-1638), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Pell (1611-1685), Blaise Pascal (1623-1662), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Andrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Wacław Sierpiński (1882-1969), Barnes Wallis (1887-1979), George Pólya (1887-1985).



Em Almeida (2003), temos que o processo a partir da gênese dos números figurados é cosmogônico ou aritmogônico, por corresponder a um mito de criação, visto que:

No princípio era a unidade. Pela inalação do vazio, ou por outro processo, ela se subdividia, dando origem aos primeiros números figurados; triangulares, quadrados etc. Esses números se "multiplicaram" (ou "procriaram"), pela agregação de gnomons (Almeida, 2003, p. 139).

Por exemplo, um número quadrado ($f_4(n)$) foi obtido a partir de um número triangular ($f_3(n)$) da mesma ordem acrescido de um triangular de ordem antecedente, ou seja,

$$f_4(n) = f_3(n) + f_3(n-1)$$

Assim também os números piramidais de base quadrada como a composição de um tetraédrico de mesma ordem com um de ordem antecedente; isto é,

$$S_4^3(n) = S_3^3(n) + S_3^3(n-1)$$

Pitágoras e a escola pitagórica

Para falarmos dos números figurados, primeiramente, precisamos discutir a respeito da escola pitagórica e, para falarmos desta, não há como negligenciarmos a possível existência (ou não) de Pitágoras de Samos.

Por ausência de escritos suficientes dos primeiros pitagóricos, e em face das deformações devidas a discípulos menores, que adulteraram não só a lenda pitagórica, como também as suas ideias, é natural que os estudiosos encontrassem grande dificuldade em examinar esse pensamento, e que afirmassem alguns, como Zeller, que é difícil separar o que é realmente de Pitágoras daquilo que pertence a seus discípulos posteriores, o que levou alguns a uma posição extremada, como é o caso de Reinhardt, Frank e outros, que sustentaram que o pitagorismo, no início, foi apenas uma seita místico-religiosa à semelhança das *tbyasas* órfico-báquicas, na qual Pitágoras nada mais teria sido do que um taumaturgo, sem nenhum caráter científico (Santos, 2000, p. 101, destaques do original).



Pitágoras, talvez seja um dos mais misteriosos pensadores do período pré-socrático, principalmente pelo fato relatado na citação antecedente. Almeida (2003), Santos (2000) e Silva (2010) trazem que é comumente sabido que Pitágoras nasceu por volta de 570 AEC., em Samos (uma ilha do mar Egeu), contudo, a data de sua morte é mais imprecisa, e gera muito debate, como cita Silva (2010), ao falar que seria por volta de 500 AEC.

Pelo senso comum, a imagem de Pitágoras é muito associada à geometria, principalmente por seu famoso teorema atribuído ao seu nome onde, num triângulo retângulo, o quadrado do maior lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, ou, numa linguagem mais moderna, a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos. Todavia, o nome Pitágoras também está associado a muitos outros feitos.

Em Pitágoras, claramente encontramos combinados os traços de um homem místico e sagrado das tradições orientais e ocidentais com as qualidades de um erudito. Antigos testemunhos sobre ele nos faz imaginá-lo um matemático, um político, o descobridor de certos princípios básicos de acústica, o filósofo natural, mas também um profeta, um guru com poderes sobrenaturais - com a capacidade de operar milagres - o curador que utilizava a música para fins terapêuticos, o criador da transferência das razões musicais para todo o cosmos - a famosa Música das Esferas -, o psiquiatra, o adepto do vegetarianismo, o defensor das doutrinas da imortalidade e transmigração das almas e da unidade de todos os seres animados, e até mesmo uma fraude, um charlatão (Silva, 2010, p. 13).

Segundo Santos (2000), as primeiras ideias relativas à Teoria do Números estão nos estudos aritméticos atribuídos a Pitágoras ou à escola pitagórica. Pitágoras tinha um fascínio pelo misticismo dos números, para ele tudo poderia ser representado pelos números, tudo era número, e os números regiam a composição do universo, a essência de todas as coisas.

Em Silva (2010) é destacado que alguns autores da antiguidade, como Heródoto (484-425 AEC.) - o historiador que escreveu sobre a invasão da Grécia pelos persas -, Estrabão (64-63-21 DEC.) - historiador, geógrafo e filósofo -, Isócrates (436-



338 AEC.) - logógrafo e professor de uma famosa escola eloquência -, Filostrato (436-338 AEC.) -, sofista grego -, Plutarco (46-126 DEC.) - historiador e filósofo grego mencionaram viagens de Pitágoras pela Babilônia e Egito. Além desses, Diógenes Laércio (180-240DCE.), Jâmblico (ou Iamblichus) (245-325 DEC.) e Proclus Lycaeus (412-485 DEC.), que escreveram sobre Pitágoras, reforçam a veracidade a respeito de sua passagem pelo Egito.

Ainda segundo Silva (2010), as influências egípcias podem ser observadas em seu domínio na escrita simbólica e em suas características de rituais e cultos, afinal, a escola pitagórica era uma escola iniciática, denominando os iniciados de esotéricos (que se dedicavam ao estudo teórico dos números - sendo *Aritmética* o estudo das relações abstratas envolvendo números) e os não iniciados de exotéricos (que se dedicavam aos cálculos práticos - sendo *Logística* a arte prática de calcular com números). Em relação a influência babilônica, um possível aprendizado sobre a Cosmologia e aspirações para as primeiras ideias de seus trabalhos relativos à harmonia e música.

De acordo com Santos (2000), o conjunto das produções advindas à escola pitagórica são relevantes ao desenvolvimento das bases da ciência moderna, possibilitando o avanço da Matemática e de outras áreas de conhecimentos, principalmente com relação às estruturas de pensamentos e na organização de postulados que eram estabelecidos como critério. Russell (2002) também destaca que, apesar das características religiosas, e todo misticismo que os pitagóricos acreditavam, isso não impedia o caráter científico.

A escola pitagórica deu origem a uma tradição científica e mais especificamente matemática. Os matemáticos são verdadeiros herdeiros do pitagorismo. Apesar do elemento místico que surge do renascimento órfico, este aspecto da escola não é de fato distorcido por idéias religiosas. A ciência em si não se torna religiosa, ainda que a busca por um modo de viver científico esteja impregnada de um significado religioso (Russell, 2002, p. 26, *ipsis litteris*).



Santos (2000) corrobora tal pensamento ao trazer que a ciência moderna tem muito mais dos postulados pitagóricos do que se julga, a partir do momento que se tenha uma visão real da essência dos pensamentos de Pitágoras.

Segundo Silva (2010), Jâmblico diz que Pitágoras teve seu aprendizado em aritmética com os fenícios e, de acordo com o filósofo neoplatônico Porfírio (232 a 304 DEC.), aprendeu a respeito de astronomia com os caldeus. Também é citado os aprendizados como a interpretação de sonhos, por outros povos.

A tradição, representada por Jâmblico, afirma que Pitágoras aprendeu aritmética com os fenícios e, segundo Porfírio, astronomia com os caldeus. Hermipo inclui os judeus na relação de mestres de Pitágoras que, segundo Diógenes Laércio e Porfírio, pode ter aprendido, com esse povo, a arte de interpretar sonhos. Além das influências egípcias, judias e caldeias, podem ser incluídas, se seguirmos Filostrato, aquelas dos sábios hindus. Em Jâmblico, essa lista é ampliada para incluir até mesmo celtas e ibérios (Silva, 2010, p. 15).

Em Santos (2000) também destacada algumas de suas contribuições, principalmente a cultura grega da época, mas que fazem parte da cultura atual.

Do espírito grego, vieram até nós essas contribuições que são genuinamente pitagóricas: Espírito de Síntese e clareza na síntese; realização, na obra de arte, da Beleza formal perfeita; desenvolvimento e acabamento da Geometria como o modelo ideal de uma síntese fundada sobre axiomas e sobre o encadeamento de deduções lógicas inatacáveis (axiomáticas); o estabelecimento da teoria dos "números", sendo todo o Universo "regido pelo" ou "arranjado" segundo os Números; conceitos de proporção e de ritmo, derivados das duas disciplinas submencionadas (teoria das formas e teoria dos números e aplicadas à pesquisa da Beleza); teoria da harmonia musical; concepção harmônica dos Cosmos. (Santos, 2000, p. 210, destaques do original).

Essas contribuições mostram a organização que a escola pitagórica tinha em consonância com as Artes Liberais do *trivium*, formado pela Gramática, Lógica e Retórica, e o *quadrivium* com a Aritmética, Música, Geometria e Astronomia que constituíram por muito tempo como a base do modelo educacional da antiguidade e idade média.



Dentre todos esses trabalhos envolvendo Geometria, Teoria dos Números, Astronomia, Filosofia, Lógica e até Teologia, uma vez que Pitágoras os números representavam a criação divina do mundo, pois os pitagóricos. A Escola pitagórica se dedicava muito em tentar relacionar o mundo e a Matemática, movidos pelo seu forte fascínio pelo misticismo dos Números, os quais, eles acreditavam que, regiam o universo. Russel (2002) traz que é provável que o trabalho envolvendo a Música tenha despertado a ideia de que tudo pode ser representado por número "Assim, para compreendermos o mundo que nos cerca, precisamos descobrir o número que existe nas coisas. Uma vez descoberta a estrutura numérica, controlaremos o mundo" (Russell, 2002, p. 27).

Esse fascínio fazia com que os pitagóricos atribuíssem significações a determinados números conforme passavam a observá-los.

Seguidores de Pitágoras acrescentaram outras interpretações: o número *um* é o gerador dos números e o número da razão; o *dois* é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião; *três* é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto da unidade (1) e da diversidade (2); *quatro* é o número da justiça ou retribuição, indicando o ajuste de contas; *cinco* é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiramente femininos e masculinos e *seis* é o número da criação (Almeida, 2003, p. 40, destaques do original).

A partir disso, muitos outros estudos foram sendo desenvolvidos, em destaque os que conhecemos por números figurados.

Os números figurados são sequências numéricas que se formam a partir da sucessão de polígonos, ou seja, as sequências teriam por base uma formação poligonal [...] Nesse contexto, a Aritmética e a Geometria estão se relacionando de forma direta. Fazendo uso dessa ideia, de sequências numéricas, podemos estabelecer relações, não só com polígonos, mas também com poliedros, ou seja, podemos ter sequências numéricas que têm por base figuras de terceira dimensão [...] Nessa perspectiva, podemos estabelecer relações sequenciais entre os números figurados de segunda e de terceira dimensão [...] (Andrade, 2021, p. 39).



Já para Contador (2008), os números poligonais

São aqueles obtidos através de polígonos, ou melhor, é o resultado do número de vértices de um polígono seguido pela soma dos vértices de uma figura simétrica, e de outra e outra e assim por diante. Fazem parte desta série, os números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais etc. (Contador, 2008, p. 99).

Assim, os pitagóricos desenvolveram o princípio para estudos com sequências e séries numéricas.

Números figurados bidimensionais

Os pitagóricos nutriam um fascínio pelas relações dos números com o mundo, e esse fascínio fazia Pitágoras buscar algo além das necessidades práticas. Russell (2002) cita que ele foi um dos primeiros a demonstrar um interesse além do primordialmente concreto e prático, e sim pelo gosto de investigar as relações do mundo, como podemos observar em Tahan (1967) e Shuré (2021 [1889]).

Ensinava Pitágoras, a seus aplicados e fiéis discípulos, que os números governavam o mundo e que, por isso, todos os fenômenos que ocorriam na terra, no ar, no fogo, ou na água, podiam ser expressos, avaliados e previstos por meio de números. "Os números - proclamava o mestre - exercem decisiva influência sobre a vida de cada ser. Há números felizes e números fatídicos" (Tahan, 1967, p. 71-72, *ipsis litteris*, destaques do original).

[...] o número não era considerado uma quantidade abstrata, mas a virtude intrínseca e ativa do uno supremo, de Deus, fonte da harmonia universal. A ciência dos números era a das forças vivas, das faculdades divinas em ação nos mundos e no homem, no macrocosmo e no microcosmo... Penetrando-as, distinguindo-as e explicando seu jogo, Pitágoras elaborava nada menos do que uma teogonia ou uma teologia racional. Uma teologia verdadeira deveria fornecer os princípios de todas as ciências. Ela só será a ciência de Deus se mostrar a unidade e o encadeamento das ciências da natureza. Só merece este nome sob a condição de constituir o órgão e a síntese de todas as outras. Ora, era justamente esta a função que desempenhava nos templos egípcios a ciência do verbo sagrado, formulada e aperfeiçoada por Pitágoras, sob o nome de ciência dos números. Ela acreditava poder fornecer a chave do ser, da ciência e da vida (Shuré, 2021, p. 262).



A escola pitagórica tinha uma concepção sobre a natureza como parte da ideia de que há uma explicação universal para todas as coisas, e que isso permite uma representação da totalidade do cosmos através dos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, elas consistem de números. "Uma das características principais das coisas reside no fato de poderem ser organizadas e distinguidas, as propriedades aritméticas das coisas, para eles, constituem o seu ser propriamente dito, e o ser de todas as coisas é o número" (Roque, 2014, p. 104).

Tanto Roque (2014) quanto Russell (2002) afirmam que os pitagóricos utilizavam seixos ou pedrinhas, para representarem os números em uma determinada organização, mantendo um padrão poligonal. "Pitágoras desenvolveu um meio de representar os números através de combinações de pontos ou seixos. Na verdade, trata-se de um método de calcular que de alguma forma sobreviveu por longo tempo. A palavra latina equivalente a 'cálculo' significa 'manejo de seixos'" (Russel, 2002, p. 27, destaques do original). E assim eram construídos os primeiros números figurados.

De certo ponto de vista, dado seu caráter espacial e concreto, poderíamos afirmar que os números pitagóricos não eram os objetos matemáticos que conhecemos hoje, isto é, entes abstratos. Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que não eram matemáticos e que remetiam a elementos discretos: pedrinhas organizadas segundo uma determinada configuração (Roque, 2014, p. 104).

A teoria dos números de Pitágoras era concreta, e se alicerçava em manipulações de números figurados, sempre com um caráter indutivo ausentes de provas.

Pitágoras é lembrado, usualmente, como o pai da matemática grega. Vimos, contudo, que sua teoria dos números era concreta, baseada em manipulações de números figurados; sua aritmética era indutiva e não continha provas. Por meio de sua teoria era possível obter, graficamente, generalizações sobre séries de números, mas as regras para a obtenção dessas séries, como as séries de quadrados, eram desenvolvidas de modo concreto. A abstração ficava por conta da reverência que os pitagóricos cultivavam pelos números,



empregados não apenas para fins práticos. Associadas a forças cósmicas, as propriedades dos números não podiam ser consequências lógicas de sua estrutura, o que banalizaria suas propriedades (Roque, 2014, p. 137).

Temos que a primeira sequência de números figurados estudada foi a de números triangulares. “[...] primeiro exemplo de número figurado é dado pelos números triangulares, nos quais os pontos formam figuras triangulares que são coleções de bolinhas indicando pedrinhas” (Roque, 2014, p. 105). Como o nome sugere, os números triangulares se organizam na disposição de um triângulo.

Toda sequência de números figurados segue um padrão de organização poligonal, no que se refere à duas dimensões. Essas sequências têm ordens crescentes, podendo se estabelecer números poligonais de ordens gigantescas, mas todas essas sequências de números figurados possuem um termo de origem, que no caso é o um que se encontra na primeira ordem de todas as sequências de números figurados, de onde se obtêm todas as outras ordens. Esse primeiro termo é o mesmo número para todas as sequências, e é representada pelo número um. Como já mencionamos, para os pitagóricos através dos números é possível interpretar o mundo, e para eles o número um era o princípio criador, a *mônada*, o número de onde todas as coisas são formadas, a gênese dos outros números, e também o formador de todos os outros números figurados.

Todos os números, ou seres, teriam evoluído a partir do Um. Os números divididos em tipos associados a diferentes tipos de coisas. Para cada tipo, havia um primeiro, ou menor número, considerando sua “raiz”. As relações entre os números não representavam, portanto, uma cadeia linear na qual todas as relações internas eram semelhantes. Cada arranjo designava uma ordem distinta, com ligações próprias. Daí o papel dos números figurados na matemática pitagórica. Esses números eram, de fato, figuras formadas por pontos, como as que encontramos em um dado. Não é uma cifra, como 3, que serve de representação pictórica para um número, mas a delimitação de uma área constituída de pontos, como uma constelação (Roque, 2014, p. 105).

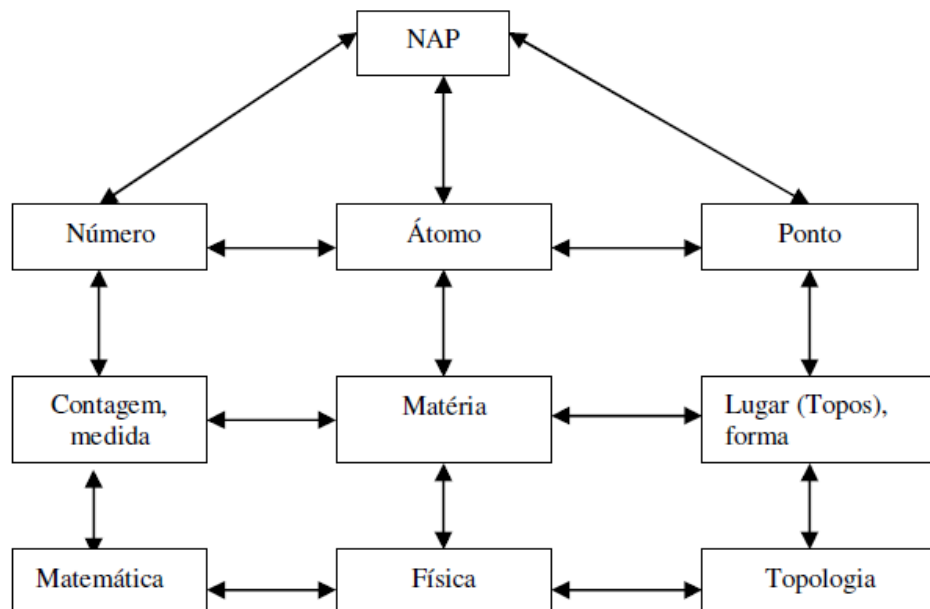
Contador (2008) esclarece que Pitágoras era obcecado por números e



[...] nos deixou a célebre frase: *todas as coisas são números*. Achava que o Universo era uma escala musical e ao número 1 (um) atribuía a própria essência da vida, pois tudo vem de um deus que é onipotente, onipresente e onisciente e é simplesmente um (Contador, 2008, p. 94).

Os números figurados não eram somente números, seu conceito era muito mais amplo, transcendendo as fronteiras da Matemática como traz Almeida (2003): "Esse conceito na realidade é multidimensional, assentado em um tripé: número-átomo-ponto: NAP. Associa conceitos de três disciplinas: matemática, física e topologia. O seguinte diagrama nos dá uma idéia de sua complexidade" (Almeida, 2003, p. 159, *ipsis litteris ipsis litteris*) (Figura 3).

Figura 3 - "Conceito" pitagórico de número figura



Fonte: Almeida (2003, p. 159).

Evidente que esse diagrama traz uma formalização da era moderna; todavia, Almeida (2003) diz que:

No contexto do sistema cultural pitagórico é uma única unidade. E número figurado era uma multitude dessas unidades. Além de associar processos



mentais (números) a objetos físicos (átomos), agrega igualmente a noção de posição (ponto) e forma. É, realmente, uma noção muito sofisticada. A importância do conceito de número-ideia para o desenvolvimento do conceito de número, em seu sentido moderno, é bem conhecida. A importância do atomismo para a física e química moderna também não necessita ser ressaltada. A última perna do tripé do conceito de número figurado (NAP), porém, tem sua importância menos explorada (Almeida, 2003, p. 160, *ipsis litteris*).

Com isso, observamos uma certa complexidade além da mera ideia de sequências numéricas, e a influência que seus estudos tiveram no desenvolvimento da Ciência moderna. Em seus estudos eles observavam várias relações, e ainda tratavam implicitamente de algumas outras.

Para Almeida (2003) a construções dos números figurados possui princípios gerais, como o primeiro termo (*mônada*), a forma e o *gnomon*. Vale ressaltar que o simbolismo convencional é moderno, os gregos nunca o empregaram:

1. O primeiro número é sempre a unidade ou, dito de outra maneira, a unidade é o princípio gerador desses números.
 2. A unidade se subdividia de algum modo (pela "inalação do vazio"?), gerando a primeira *figura* ou *forma*: triângulo, quadrado ou pentágono. Essa primeira forma é o que caracteriza o número: triangular, quadrado, pentagonal, poligonal (plano), piramidal (sólido) etc.
 3. Essa forma, pela agregação de um *gnomon*, gera o próximo número figurado. Inicialmente esses princípios regiam apenas a construção dos números figurados planos.
- Pode-se, porém, identificar três níveis nesse processo.
1. *Gerador*: é a matriz de onde nascem todos os números figurados: a unidade.
 2. *Forma*: é o nível onde surgem os primeiros números figurados, onde ocorre a sua *diferenciação*.
 3. *Crescimento*: esse nível determina o modo de crescimento dos números figurados: *o crescimento dos números figurados é gnomônico*.
- O crescimento determina a *multiplicação* dos números figurados, dentro de cada forma, ou seja, *primeiro número triangular + gnomon = segundo número triangular*, e assim por diante (Almeida, 2003, p. 139, destaques do original).

Outra ideia importante é a de *gnomon*, que para Almeida (2003), configura-se como princípio geral de construção dos números figurados a partir da tradição pitagórica - "aquele que permite conhecer [...] uma tradução literal do vocábulo egípcio *merkhet*, que era o objeto em forma de L do relógio solar egípcio" (Gazale,



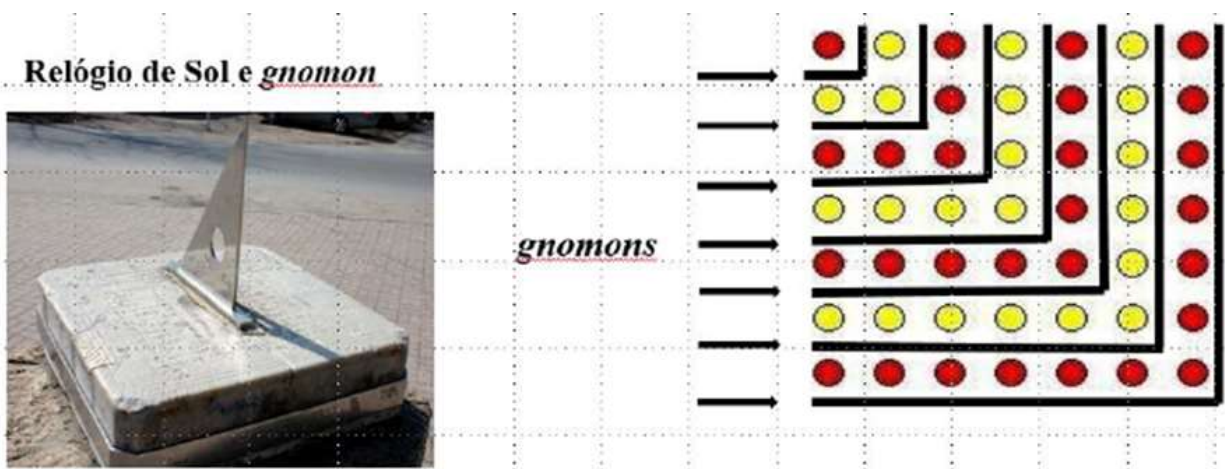
1999, p. 7 *apud* Almeida, 2003, p. 82) (Figura 4), que podemos entender como um valor adicionado a um número figurado para se obter o número figurado subsequente.

Um exemplo de instrumento técnico que parece ter sido comum a partir do século V a.E.C. é o *gnomon*, dispositivo do relógio solar destinado a produzir sombras no chão. A variação de tamanho da sombra nos dias mais curtos e mais longos do ano sugeria o estudo de solstícios e equinócios. O *gnomon* pode ter tido um importante papel no início da geometria grega, designando, de modo mais geral, o dispositivo em forma de esquadro que permite passar da observação das sombras à explicação dos fenômenos astronômicos. Presume-se que ele pode ter servido também, mais tarde, para o estudo da semelhança de figuras geométricas (Roque, 2014, p. 97).

Para Heath (1956), o comentário mais evidente sobre *gnomon* foi o dado por João Filipônio, que viveu no século VI DEC.

Como uma prova...os pitagóricos se referem ao que acontece com a adição de números; pois quando números ímpares são adicionados a um número quadrado eles o mantêm quadrado e equilátero....Números ímpares são, de acordo, chamados *gnômons* porque, quando adicionados aos que são já quadrados, eles preservam a forma quadrada... Alexandre [Alexandre de Afrodísias, viveu no século III] tinha magnificamente dito, quando explicando a frase "quando *gnômons* são colocados ao redor", que [isso] significava "fazendo uma figura" com os números ímpares"... pois isso é a prática dos pitagóricos para *representar coisas em figuras* (Heath, 1956, p. 359 *apud* Almeida, 2003, p. 80, *ipsis litteris*, destaques do original).

Figura 4 - Representação do *gnomon*



Fonte: Acervo Gepemem (2023).



O vocábulo **gnomon** é usado por gregos e chineses desde a Antiguidade. Esses povos consideravam uma distribuição gnomônica como acrescentar uma quantidade de objetos a uma coleção já iniciada. Para compreendermos o significado de distribuição gnomônica, primeiro examinemos o que é um **gnomon**.

Segundo Chaves e Rodrigues (2014), os gregos consideravam **gnomon** (etimologicamente, conhecedor) como uma peça que poderia se juntar a uma figura da mesma forma, porém, de tamanho maior. Se tomarmos a figura 4, antecedente, verificaremos que cada **gnomon**, representado pelo corredor em forma de "L" (refletido) representa um número ímpar da sequência (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Observemos que cada novo quadrado formado apresenta como resultado a soma dos **gnomons** que os constituem.

Gnomon é também a parte do relógio solar que possibilita a projeção da sombra. Herótodo relata que os babilônios foram os inventores, mas foi Anaximandro de Mileto que ocidentalizou tal conhecimento. (CHAVES; RODRIGUES, 2014, p. 137 - grifos da obra).

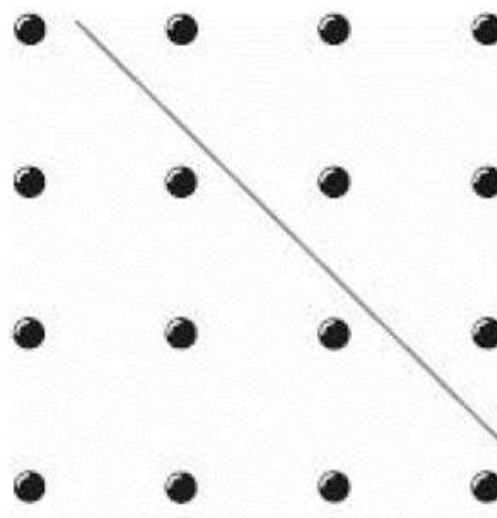
Também Chaves e Rodrigues (2014) se refere a **gnomon** como uma haste plana fixada perpendicularmente a uma superfície horizontal plana, na qual a sombra produzida pelos raios do sol é projetada. Assim, referência a **gnomons** se associa à haste que permite uma leitura das horas em um relógio de sol (figura 4).

Esse **gnomon**, termo gerador, também possui um determinado padrão e pode ser generalizado de acordo com o polígono que representa a sequência. Isso possibilita mais uma relação, uma vez que os números figurados se relacionam entre si. Como temos que um polígono com mais de quatro lados pode ser dividido em uma determinada quantidade de triângulos, os números figurados podem ser divididos em números triangulares, daí vemos um dos possíveis motivos de que o primeiro número figurado estudado foi o triangular, que pode servir de base para se formar outras



sequências como por exemplo o número quadrado pode ser dividido em dois números triangulares (Figura 5).

Figura 5 - Relação entre números quadrados e triangulares



Fonte: Roque (2014, p. 107).

Com isso, é possível identificarmos a diversidade de relações que podem ser observadas apenas em duas dimensões. Temos também o que chamamos de números poliedrais, ou números figurados tridimensionais.

Números figurados tridimensionais

Os primeiros estudos mais concretos a respeito dos números figurados tridimensionais são encontrados no capítulo XIII da obra intitulada *Introdução à Aritmética*, do neopitagórico Nicômaco de Gerasa (60 - 120 DEC.) e que foi traduzida por Boécio. Almeida (2003) afirma que não há muitas informações a respeito da vida de Nicômaco, filósofo e matemático neopitagórico, possivelmente, natural de uma cidade primariamente grega, chamada Gerasa, e que ele viveu por volta do Século II DEC., ou seja, mais de seis séculos depois de Pitágoras.



Em Kahn (2007), temos que a "*Introdução à Aritmética*", de Nicômaco, virou referência na antiguidade tardia e Idade Média, e que essa obra não se assemelhava ao trabalho de um grande matemático, mas sim como um manual escolar, pelo fato de que o lado místico interessava mais do que o caráter da teoria dos números.

Kahn (2007) também alega que, além da *Aritmética*, Nicômaco era muito influente na música e numerologia teológica, e também escreveu duas obras que se perderam, *Introdução à geometria* e *Vida de Pitágoras*. *Manual de Harmonia* (também conhecida por *Enchiridion*), que não é considerada muito significativa como ramo da Matemática, mas aborda a música a partir das relações harmônicas do movimento dos corpos celestes, ou seja, mostra uma tentativa de relacionar as razões da harmonia musical às regularidades que governam o universo, trazendo a essência da escola pitagórica.

Retomando a obra *Introdução à Aritmética*, que aborda os números tridimensionais (ou na obra chamado de números sólidos), Nicômaco, em seu capítulo XIII os introduz da seguinte forma:

Disto é fácil ver o que o número sólido é e como a sua série avança com lados iguais; para o número que, em adição às duas dimensões contempladas na representação gráfica em um plano, comprimento e largura, tem uma terceira dimensão, a qual alguns chamam profundidade, outros espessura, e alguns [outros] altura, aquele número seria um número sólido, estendido em três direções e tendo comprimento, profundidade e largura (Nicômaco, 1952, p. 836 *apud* Almeida, 2003, p. 84).

A terceira dimensão é descrita como sendo a profundidade, ou seja, ele passa a adicionar uma profundidade aos números figurados planos, e por consequência acaba gerando outras estruturas de números figurados.

Para esses novos números tridimensionais, o primeiro a ser estudado foram os piramidais de base triangular, ou o que preferimos denominar de número tetraédrico,



no qual se mantêm os princípios dos números figurados planos de *mônada*, forma e *gnomom*, entretanto, com padrões distintos.

Os piramidais com base triangular, em sua ordem própria, são estes: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ..., e assim por diante; e sua origem é o empilhamento dos números triangulares um sobre os outros, primeiro 1, então 1,3, sucessivamente 1,3,6, na seqüência 10 em adição a estes, e o próximo é 15 junto com os anteriores, então 21 além destes, o próximo 28, e assim por diante até o infinito (Nicômaco, 1952, p. 830, *apud* Almeida, 2003, p. 202, *ipsis litteris*).

Para nossas Práticas Educativas Investigativas (PEI), observaremos que no processo de construção dos números piramidais de base triangular, de modo geral, os estudantes poderão produzir significado para esses números tridimensionais como a soma de números triangulares.



A RESPEITO DAS PRÁTICAS EDUCATIVAS INVESTIGATIVAS

A ideia de Práticas Educativas Investigativas (PEI) é apresentada em Chaves (2004) e se configura não como uma metodologia a ser seguida, mas como uma posição política (ato político e ato pedagógico) no qual o professor deixa de se portar como centralizador de um processo em que o estudante é tido como aquele que absorve verdades prontas sem questionar, refletir ou interagir; apenas aceitar.

A partir dessas PEI, seguimos o propósito de Chaves (2004) de que, falar de Matemática - mesmo em propostas envolvendo a educação básica - envolve contextos que não sejam apenas da própria Matemática; isto é, não se trata de propor uma "[...] educação PARA A Matemática [...]" (Lins, 2020, p. 15, destaques do original), mas uma "[...] educação PELA¹ Matemática [...]" (Lins, 2020, p. 15, destaques do original), indo assim, ao encontro do que propusera Patrick Geddes (1854-1923) - biólogo, urbanista e filósofo escocês, referenciado por suas propostas inovadoras, principalmente no campo da educação - na defesa de que os estudantes, orientados por seus professores, podem vir a interagir com a "realidade" do seu ambiente e a partir daí, vir a desenvolver atitudes que sejam criativas em relação ao mesmo, cabendo então, aos professores, atuarem como interlocutores de uma educação que possa incorporar uma análise crítica e reflexiva em oposição àquela em que o aluno é levado a não refletir a respeito das consequências dos seus atos (Chaves, 2004).

Por esse espectro, vale ressaltar que no desenvolvimento das PEI sempre privilegiamos o trabalho investigativo em pequenos grupos de trabalho, reservando um espaço ao final de cada encontro (ou aula) para que esses grupos, em plenária, possam apresentar suas ideias e considerações a respeito de suas produções e assim,

¹ No sentido de "através de" ou "por intermédio de".



entendemos que estimulamos a dialogicidade e facultamos o desenvolvimento de trabalhos colaborativos, permitindo que os envolvidos no processo possam interagir criticamente com seus colegas.

Com essa dinâmica, o professor pode passar a observar as maneiras de operar dos alunos e a procurar entender a lógica por eles apresentadas, com o propósito de minimizar possíveis “ranhuras” e a compartilhar espaços comunicativos.

A dinâmica que adotamos é pautada em processos de desenvolvimento cognitivo, proposto em Luria (1990) e os apresentaremos a seguir (Quadro 1).

Material Didático-Pedagógico (MDP)

A utilização de MDP manipulativos pode vir a contribuir na dinamicidade dos processos de ensino e de aprendizagem, quando passa a possibilitar maior envolvimento dos estudantes, incentivando-os e por isso, sempre que possível os utilizamos. Pensando na praticidade e na reutilização de materiais, a partir de uma proposta de educação com vistas à sustentabilidade (Chaves, 2004), propomos a utilização de tampinhas de garrafas PET. Essas tampinhas (Figura 6), a partir de uma proposta de educação com vistas à sustentabilidade, podem fazer parte de um projeto de coleta seletiva envolvendo os próprios estudantes, dentro e fora do ambiente escolar.

Nas nossas PEI adotamos materiais manipulativos (tampinhas de garrafas PET, jujubas, palitos, malhas quadrangulares e isométricas e esferas e hastes imantadas) e também algumas tabelas (como veremos na figura 10 adiante) e, pela nossa experiência no desenvolvimento de PEI em salas de aulas da educação básica e em processos de formação de professores, observamos que o uso desses materiais, com as dinâmicas que adotamos, facultam aos alunos operarem em campos semânticos



diversos e, no caso das práticas aqui apresentadas, observamos que os estudantes operaram a partir de campos semânticos aritméticos, geométricos e algébricos.

Figura 6 - Tampinhas de garrafas



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

As tampinhas podem auxiliar na construção das sequências numéricas, permitindo que os estudantes possam operar de diferentes maneiras, tanto em um campo semântico aritmético, quanto em um campo semântico geométrico. Os



estudantes poderão construir os polígonos relativos aos números figurados e anotando numa tabela os valores relativos a cada ordem.

Sugerimos que as tampinhas sejam organizadas por cores, lembrando que cada número figurado necessitará de quantidades de tampinhas diferente, por isso a organização das tampinhas visando cada prática é fundamental.



Tal sugestão não é aleatória; está pautada na ideia desenvolvida pelo psicólogo soviético Alexander Romanovich Luria (1902-1977), de desenvolvimento de um processo de percepção que implica na nomeação e agrupamento de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas, respostas às ilusões visuais, que possibilitaram o desencadeamento de outros processos que apresentamos no quadro (Quadro 1) a seguir.



Quadro 1 – Processos propostos por Luria

(i)	de percepção	nomeação e agrupamento de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas, respostas às ilusões visuais;
(ii)	de abstração e generalização	comparação, discriminação e agrupamento de objetos, definição de conceitos;
(iii)	de dedução e inferência	estabelecimento de conclusões lógicas a partir de informações dadas;
(iv)	de solução de problemas matemáticos	solução de problemas a partir de situações hipotéticas apresentadas oralmente;
(v)	de imaginação	elaboração de perguntas ao experimentador;
(vi)	de autoanálise	avaliação de suas próprias características.

Fonte: adaptado de Luria (1990).

Prática com os números figurados quadrados ($f_4(n)$)

Historicamente, os primeiros números figurados que se possui registros são dos números triangulares. Segundo Tahan (1966), os números figurados e, em particular, os números triangulares, são conhecidos desde a Antiguidade, têm sua origem lendária na observância do voo de certas aves (figura 7).



Malba Tahan
Júlio César de Melo e
Sousa (1895-1974).

Um camponês, certa vez, procurou Pitágoras, desejoso, de adquirir alguns novos conhecimentos com o filósofo. Disse-lhe Pitágoras: - "Vou ensinar-te a contar". Replicou com entusiasmo o camponês: - "Isso não é preciso. Já sei". Indagou o mestre: - "E como contas?". O camponês, com a maior naturalidade, começou: - "Um, dois, três, quatro...". - "Pára! - gritou Pitágoras. - Isso que tomas por quatro é dez², o triângulo perfeito, nosso símbolo!" (TAHAN, 1966, p. 212-213, *ipsis litteris* - destaques do original).

² "O quarto número triangular gozava de grande prestígio entre os pitagóricos" (Tahan, 1966, p. 212).



Figura 7 - Voo em "V" - formação triangular de voo



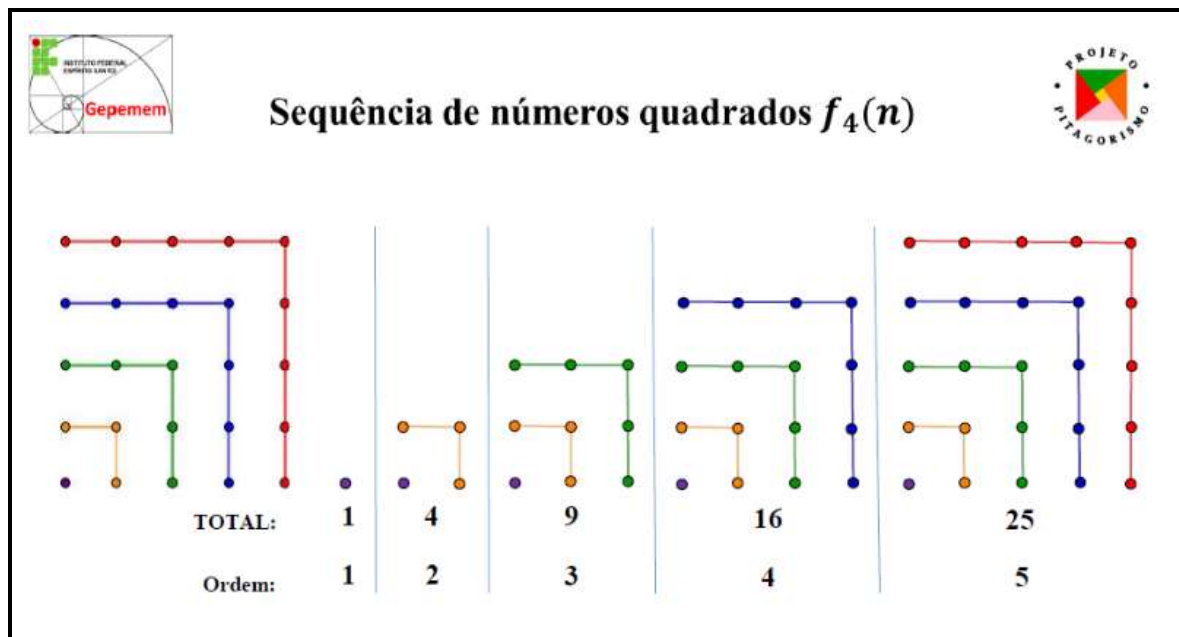
Fonte: Dutra e Chaves (2020, p. 47).

Contudo, professor, para o desenvolvimento da primeira prática, sugerimos iniciar com os números figurados quadrados (Figura 8), por possuírem um padrão mais acessível à percepção.

Também solicitamos que não tome nossas sugestões como algo prescritivo, pois cabe ao professor analisar as possibilidades à sua sala de aula, à realidade de seus alunos e às suas demandas.



Figura 8 - Sequência de números figurados quadrados



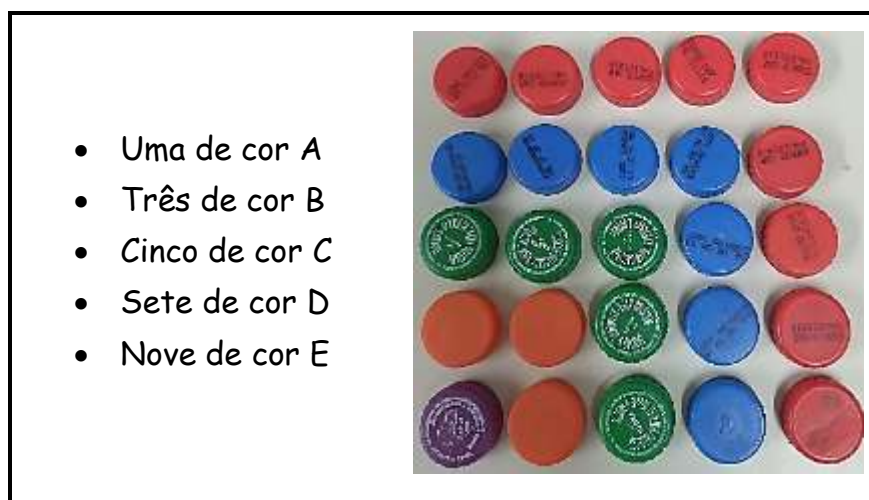
Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Em nossa dinâmica de ação, seguindo os princípios norteadores de Práticas Educativas Investigativas (Chaves, 2004), optamos pela manutenção de grupos de trabalhos compostos por 4 estudantes e um monitor para acompanhar. Algumas vezes os monitores são estudantes da própria classe, que se oferecem a participarem da elaboração do processo.

Para cada grupo de trabalho distribuímos um *kit* de tampinhas contendo 55 tampinhas no total (Figura 9), sendo:



Figura 9 - Ordem de cores dos *gnomons*



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

As cores são arbitrárias, ficando à preferência da equipe executora. Elas servem para estimular a percepção de cores com base nos processos descritos anteriormente (Quadro 1).

Com o auxílio de uma tabela (como na Figura 10 a seguir, por exemplo), sugerimos que o professor peça para que os estudantes construam e preencham a tabela. Ao sugerirmos a organização em tabela, entendemos que tal procedimento possa vir a se constituir como um facilitador à leitura para o desenvolvimento dos processos de percepção, abstração e generalização, dedução e inferência, solução de problemas matemáticos, imaginação e autoanálise dos padrões, uma vez que, a partir da leitura de linhas e colunas é possível adotar técnicas de recursividade³ com vistas à visualização das disposições numéricas e a identificação de padrões.

³ A respeito de técnicas de recursividade, sugerimos a leitura do Produto Educacional desenvolvido em Marques e Chaves (2022), disponível em <https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/2700>. Acesso em 9/set./2024.



Figura 10 - Tabela dos números quadrados

Ordem	Quantidade de tampinhas por <i>gnomon</i>	TOTAL	Expressão numérica
1			
2			
3			
4			
5			
...	...	...	...
10			
...	...	...	...
37			
...	...	...	...
11			

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Para tal, é prudente estabelecermos um tempo para que os estudantes possam manusear as tampinhas e debaterem entre si com o propósito de preencherem a tabela.

Um exemplo de tabela preenchida é possível observarmos a seguir (Figura 11).



Figura 11 - Tabela dos números quadrados preenchida



Progressão aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_1 = 1$$

$$r = 2$$

$$a_n = 2n - 1 = g_4(n)$$

Ordem	Quantidade de tampinhas por <i>gnomon</i>	TOTAL $f_4(n)$	Expressão numérica
1	1	1	$1 = 1$
2	1, 3	4	$1 + 3 = 4$
3	1, 3, 5	9	$1 + 3 + 5 = 9$
4	1, 3, 5, 7	16	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
5	1, 3, 5, 7, 9	25	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
...	...	...	...
10	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19	100	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 19 = 100$
...	...	...	...
37	1, 3, 5, 7, 9, ..., 73	1369	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 73 = 1369$
...	...	...	...
n	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., $2n - 1$	n^2	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2n - 1 = n^2 = f_4(n) = n^2$





Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Examinando a tabela antecedente, chamamos atenção que:

- (i) na primeira coluna especificamos a ordem;
- (ii) na segunda coluna apresentamos a distribuição *gnomônica*, na qual mantivemos as cores relativas à formação específica de cada *gnomon* (Figura 9);
- (iii) na terceira coluna, a partir da observação da disposição das tampinhas, os estudantes apresentarão o total dessas tampinhas, que representa o número figurado ($f_4(n)$) relativo a cada ordem;
- (iv) na quarta coluna, o que denominamos de expressão numérica relativa, refere-se à soma dos *gnomons* (apresentados na linha relativa, na segunda coluna).

O preenchimento da tabela é realizado a partir da observação da disposição das tampinhas, isso possibilitará que os padrões pictóricos formados, a partir de processos de desenvolvimento cognitivos (Quadro 1), facultem a identificação de



padrões numéricos e estes, a partir de técnicas recursivas, possam possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico, levando-os à identificação de um padrão algébrico, com vistas à obtenção do termo geral

$$f_4(n) = n^2 = \sum_{1}^n (2n - 1)$$

Na tabela (Figuras 10 e 11), como a quantidade de tampinhas se limita até a ordem 5, para obter os valores correspondentes às ordens 10 e 37, os grupos de trabalhos terão que desenvolver estratégias, e a partir dessas estratégias, desencadeiam um processo de produção de significados com vistas à obtenção do termo geral, ou seja, o que ocorre na n -ésima ordem.

A organização poderá ser similar ao da figura antecedente.

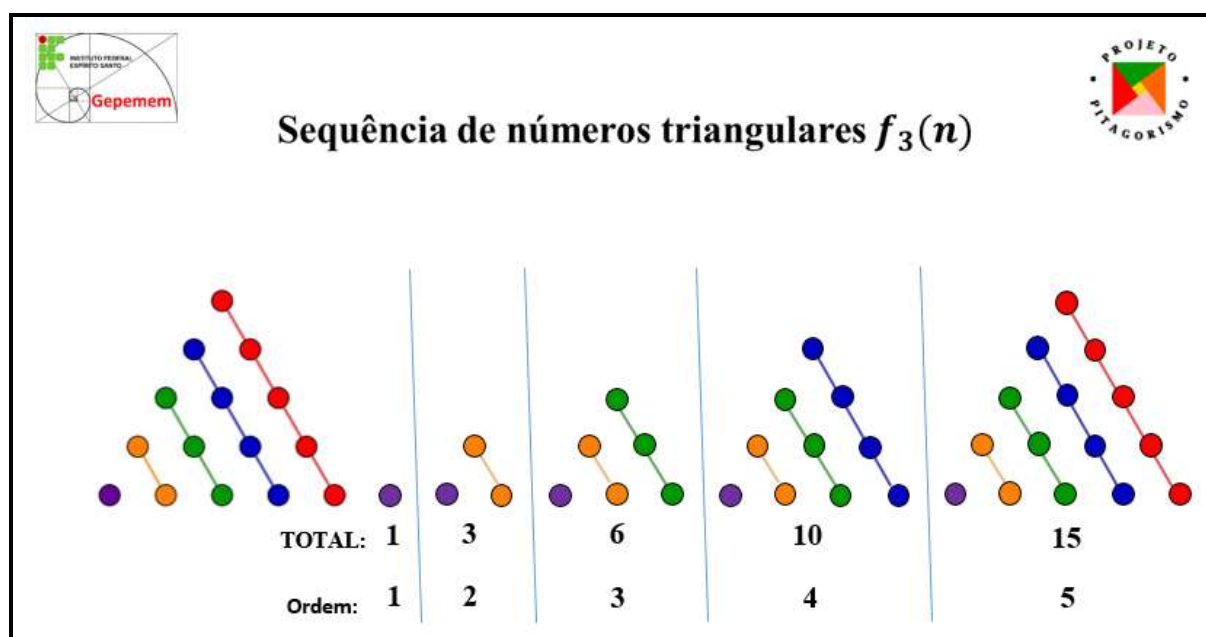
No trabalho com números figurados quadrados, em relação à soma de *gnomons*, equivale à soma de números ímpares consecutivos; soma essa que equivale ao quadrado da ordem do número figurado (n^2).

Prática com os números figurados triangulares ($f_3(n)$)

Para os números triangulares (Figura 12), a proposta é similar à desenvolvida em relação aos números figurados quadrados, só que agora a figura formada será um triângulo.



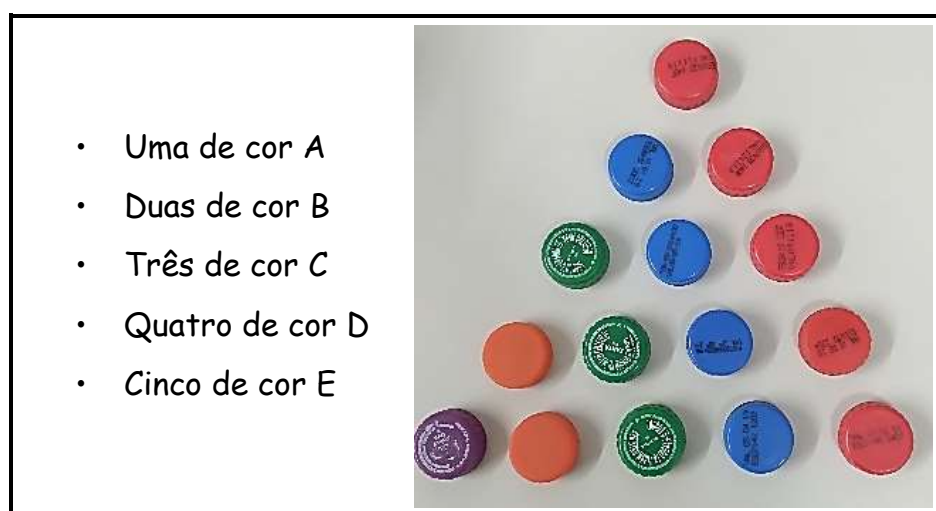
Figura 12 - Sequência de números figurados triangulares



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Para essa prática sugerimos a organização dos grupos de trabalho, e separar para cada grupo um *kit* de tampinhas contendo 15 tampinhas no total (Figura 13), sendo:

Figura 13 - Ordem de cores dos *gnomons*



Fonte: Acervo Gepemem (2023).



Nos números quadrados, o valor dos números figurados é exatamente o valor da ordem elevado ao quadrado, o que poderia ser mais perceptível à assimilação, mas nos números triangulares o valor dos números figurados não é tão direto, o que demanda de leituras mais refinadas; por isso, a relevância em se analisar os termos dos *gnomons* com vistas ao preenchimento da tabela.

Vejamos uma possível proposta de preenchimento de tabela (Figura 14):

Figura 14 - Sequência de números figurados triangulares

Ordem	Quantidade de tampinhas por linha	TOTAL $f_3(n)$	Expressão numérica
1	1	1	$1 = 1$
2	1, 2	3	$1 + 2 = 3$
3	1, 2, 3	6	$1 + 2 + 3 = 6$
4	1, 2, 3, 4	10	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
5	1, 2, 3, 4, 5	15	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
...	...	...	...
10	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10	?	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 10 = ?$
...	...	...	...
37	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, ..., 37	?	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 37 = ?$
...	...	...	...
n	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, ..., 37, ..., n	?	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + n = ?$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Para a obtenção do termo geral, há vários caminhos, que dependerão do que já foi trabalhado com seus estudantes, como, por exemplo, o uso da soma de termos de



uma Progressão Aritmética. Mas também é possível adotar outros recursos. Nós propusemos um princípio que denominamos de soma gaussiana⁴ (Figura 15):

Figura 15 - Soma gaussiana

Soma gaussiana

1	+	2	+	3	+	4	+	5	+	6	+	...	+	98	+	99	+	100
100	+	99	+	98	+	97	+	96	+	...	+	4	+	3	+	2	+	1
101		101		101		101		101		...		101		101		101		101

$$S_{100} = \frac{(100 + 1) \cdot 100}{2} = 5050$$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Há uma mística relativa à precocidade e à genialidade de Gauss que se refere à sua infância. Tal episódio pode ser encontrado em diversos compêndios didáticos e obras relativas à História da Matemática, bem como em vídeos e filmes. Sugerimos a película *Midiendo el mundo - História de Gauss (Die Vermessung der Welt)*, que pode ser encontrada em diversas plataformas⁵.

⁴ Como uma referência ao matemático prussiano Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). *Disquisitiones Arithmeticae* (*Discursos sobre aritmética*), de Gauss, sua obra mais famosa, foi publicado em 1801, e em consequência dessa publicação passou a ser considerado o príncipe da matemática. Sua visão em relação à teoria dos números foi captada numa citação famosa, a ele atribuída: *A matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática*.

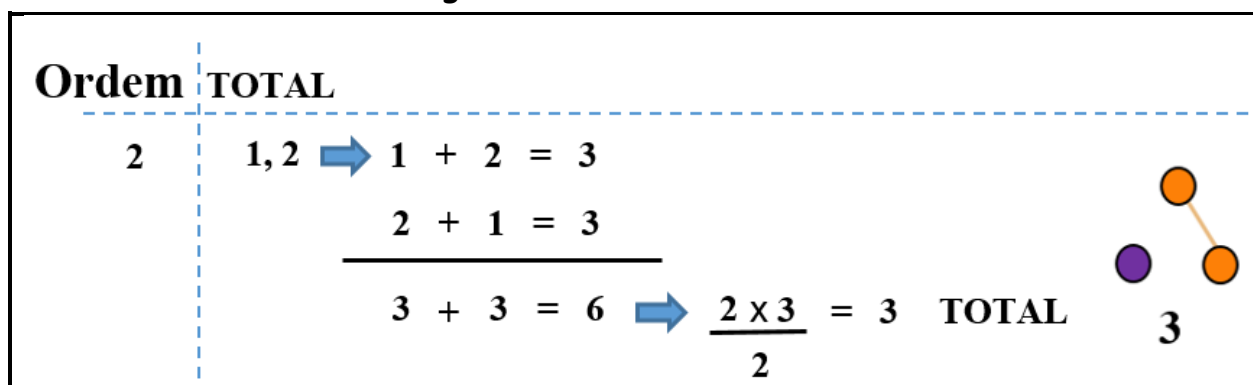
⁵ < <https://www.youtube.com/watch?v=YPpoY7fFB-U>>. Acesso em 9/set./2024.



Adotando o que denominamos de soma gaussiana, para chegarmos no termo geral, observemos o padrão a seguir.

Em relação à ordem 2 (Figura 16):

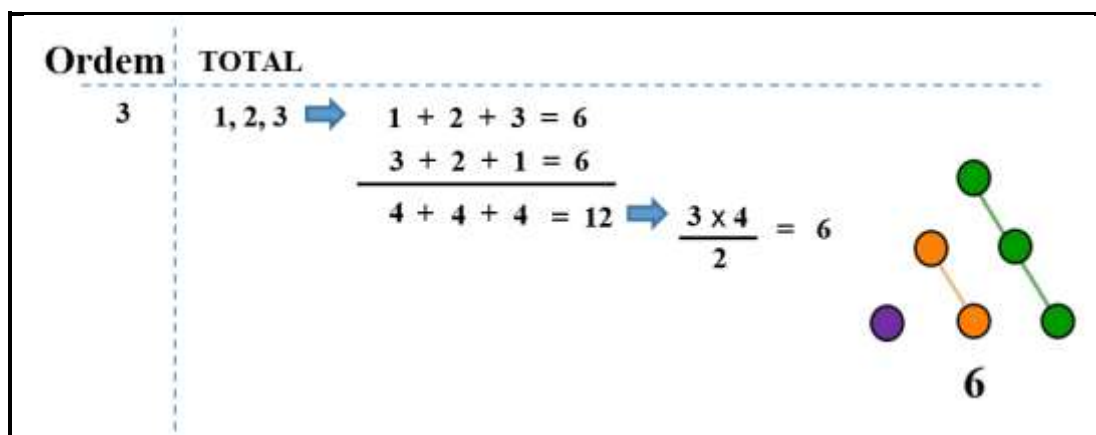
Figura 16 - Soma da ordem 2



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Similarmente, em relação à ordem 3 (Figura 17), temos:

Figura 17 - Soma da ordem 3

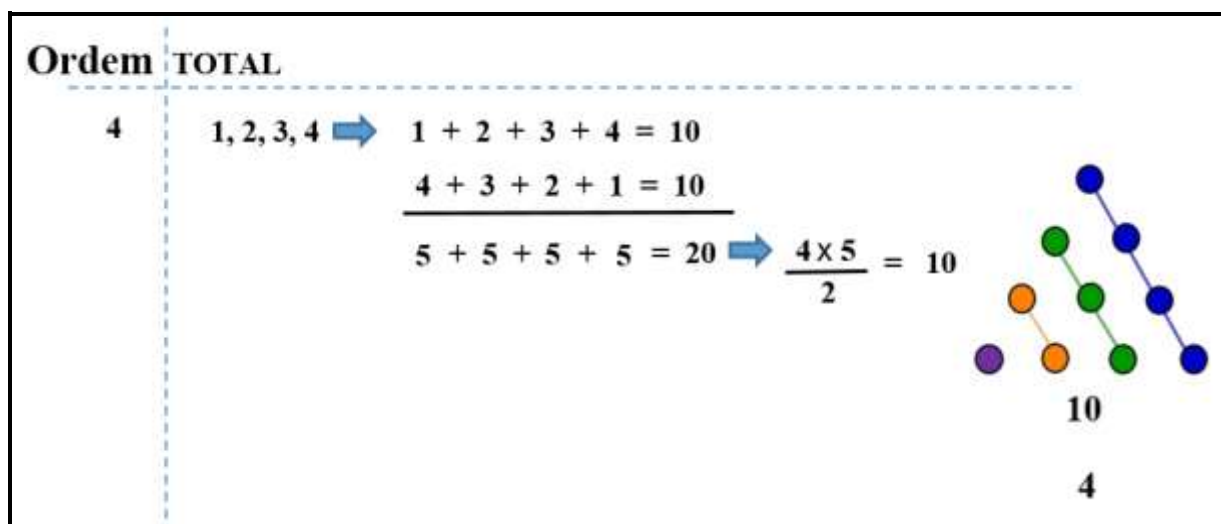


Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Quanto à ordem 4 (Figura 18), temos:



Figura 18 - Soma da ordem 4



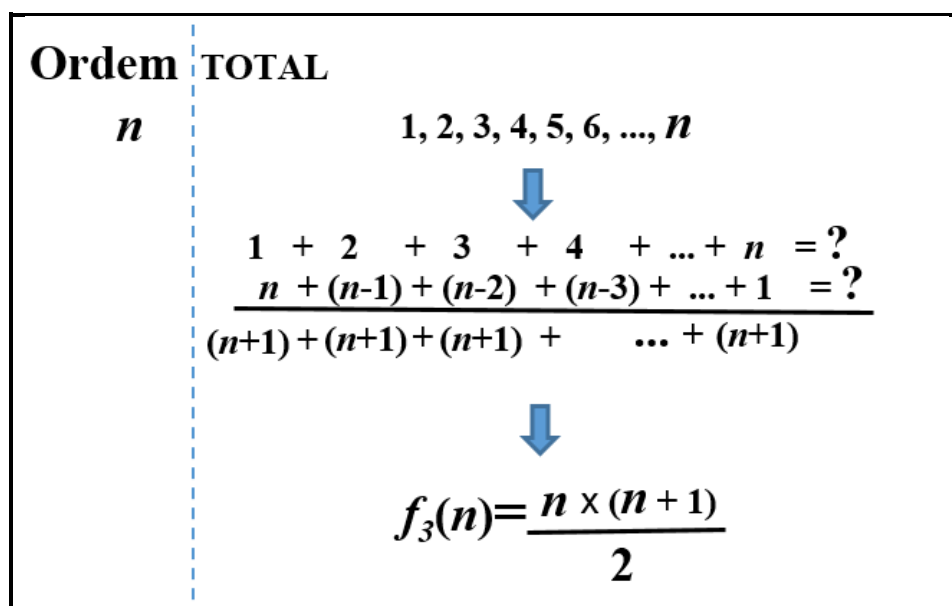
Fonte: Acervo Gepemem (2023).

No procedimento adotado, escrevemos as somas dos termos da sequência na ordem crescente e depois decrescente. Também mantivemos um padrão de dispormos as duas linhas de maneira que em cada coluna possa se observar o primeiro e o último termos na primeira parcela, o segundo e o penúltimo termos na segunda parcela, o terceiro e antepenúltimo termos na terceira parcela etc.

A ideia é que, comparando o que ocorre a cada ordem, pelo processo de soma gaussiana, os grupos de trabalho possam, pelos processos de desenvolvimento cognitivo (Quadro 1), concluir que, na n -ésima ordem, podemos generalizar na maneira a seguir (Figura 19):



Figura 19 - Soma da ordem n



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Como o resultado da soma de cada coluna é $(n + 1)$ e temos n colunas, então o resultado $(n + 1)$ ocorre n vezes. Ou seja, $n \cdot (n + 1)$. Acontece que realizamos duas somas de termos, achando assim o dobro da soma e não a soma. Daí a necessidade de dividirmos por 2, que nos leva a conclusão de que

$$f_3(n) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

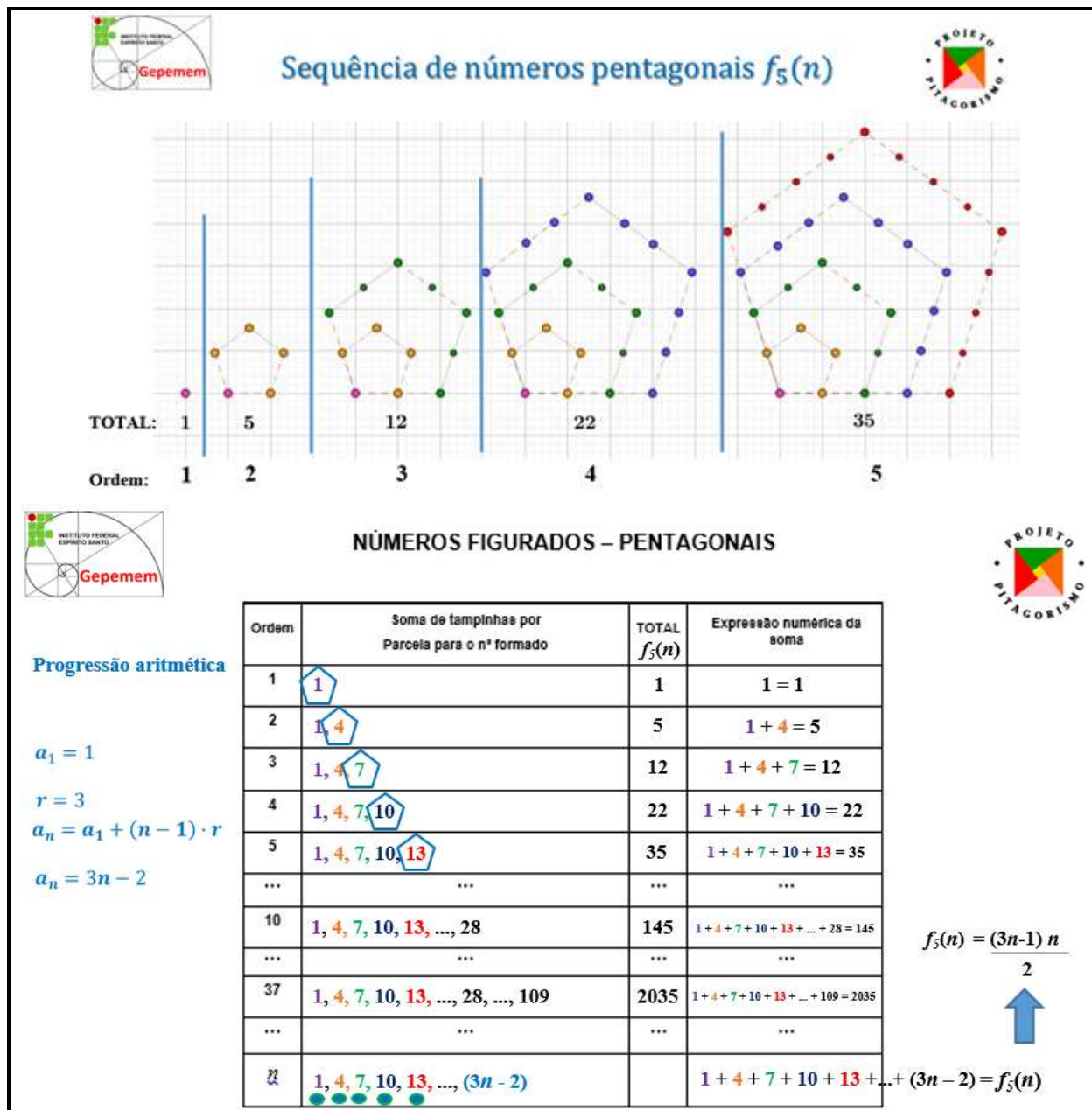
Alguns outros números figurados bidimensionais

A proposta utilizada para se trabalhar os números figurados quadrados e triangulares também pode ser utilizada para outros números poligonais, como, por exemplo, os números pentagonais, hexagonais, heptagonais etc. Quando maior a quantidade de lados dos polígonos, mais tampinhas serão utilizadas, e isso passa a gerar dificuldades na organização das tampinhas, além do padrão dos números; todavia, pelo processo de soma gaussiana é possível estabelecer as generalizações.



Segue, como exemplo, a organização dos números pentagonais e hexagonais (Figuras 20 e 21).

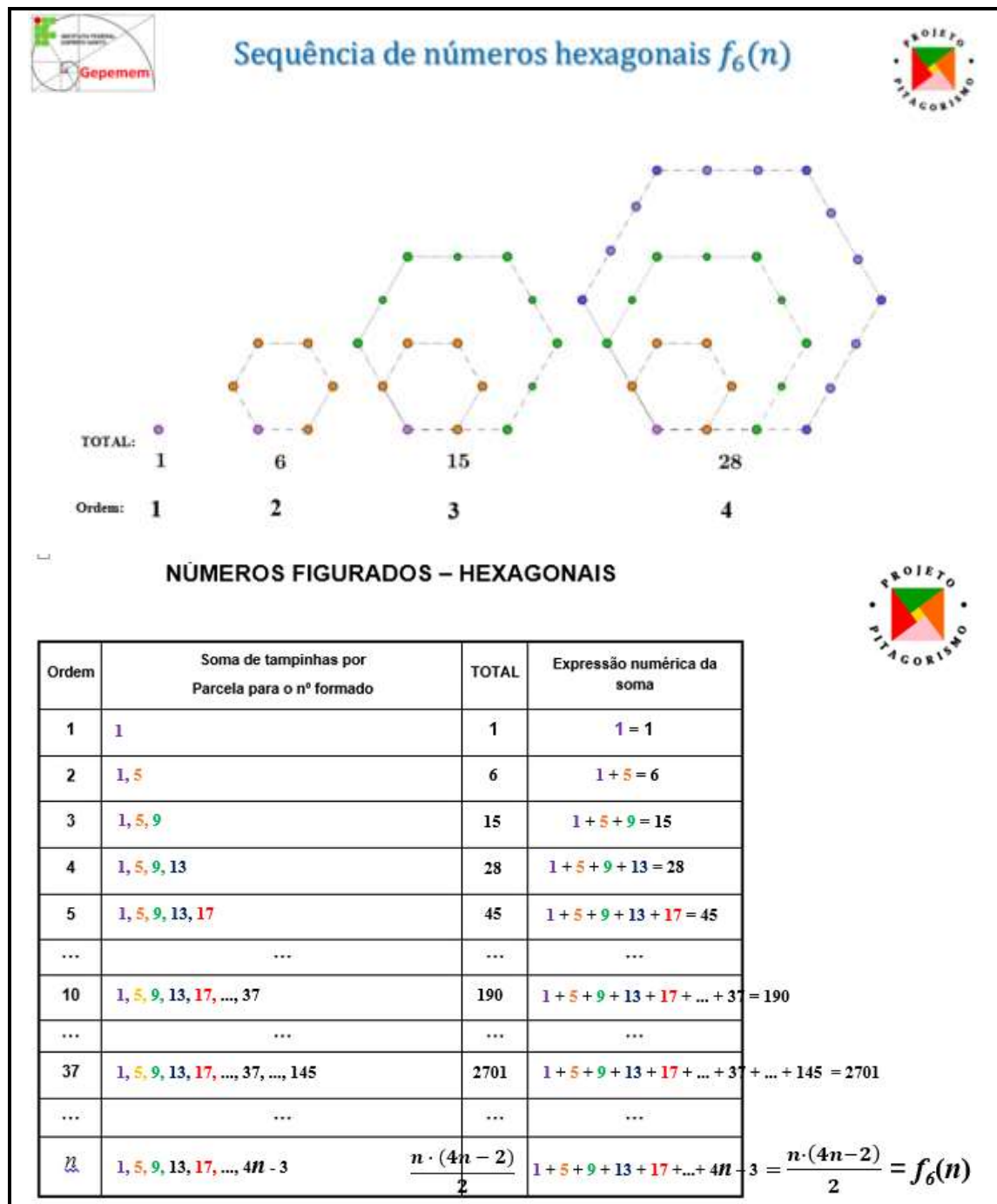
Figura 20 - Números pentagonais ($f_5(n)$)



Fonte: Acervo Gepemem (2023).



Figura 21 - Números hexagonais ($f_6(n)$)



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Como consequência, de processos recursivos, a partir da observação de padrões algébricos relativos à constituição de *gnomons*, ao número de lados e utilizando técnicas de recursividade, é possível observarmos o seguinte processo (Figuras 22, 23 e 24).



Figura 22 – Processo adotado com vistas à generalização do termo geral de gnomons $g_k(n)$ em números figurados planos a partir do número de lados (k)

Nº de lados (k)	Gnonon (g)	Termo geral ($g_k(n)$)
3	$1n - 0$	$(3 - 2)n - (3 - 3)$
4	$2n - 1$	$(4 - 2)n - (4 - 3)$
5	$3n - 2$	$(5 - 2)n - (5 - 3)$
6	$4n - 3$	$(6 - 2)n - (6 - 3)$
7	$5n - 4$	$(7 - 2)n - (7 - 3)$
...	...	...
k	$\Leftrightarrow$	$(k - 2)n - (k - 3)$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Figura 23 – Processo adotado com vistas à generalização do termo geral de números figurados planos $f_k(n)$ a partir do número de lados (k)

Nº de lados (k)	Gnonon (g)	Termo geral ($f_k(n)$)
3	$1n - 0$	$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$
4	$2n - 1$	$\frac{n \cdot (2n)}{2} = \frac{n}{2} \cdot [(2n - 1) + 1]$
5	$3n - 2$	$\frac{n \cdot (3n - 1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot [(3n - 2) + 1]$
6	$4n - 3$	$\frac{n \cdot (4n - 2)}{2} = \frac{n}{2} \cdot [(4n - 3) + 1]$
7	$5n - 4$	$\frac{n \cdot (5n - 3)}{2} = \frac{n}{2} \cdot [(5n - 4) + 1]$
...	...	...
k	$\Leftrightarrow$	$\frac{n}{2} \cdot [(k - 2)n - (k - 3) + 1]$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).



Como síntese, concluíram que (Figura 24):

Figura 24 - Generalização do *gnomon* $g_k(n)$ e do termo geral $f_k(n)$ de números figurados planos a partir do número de lados (k)

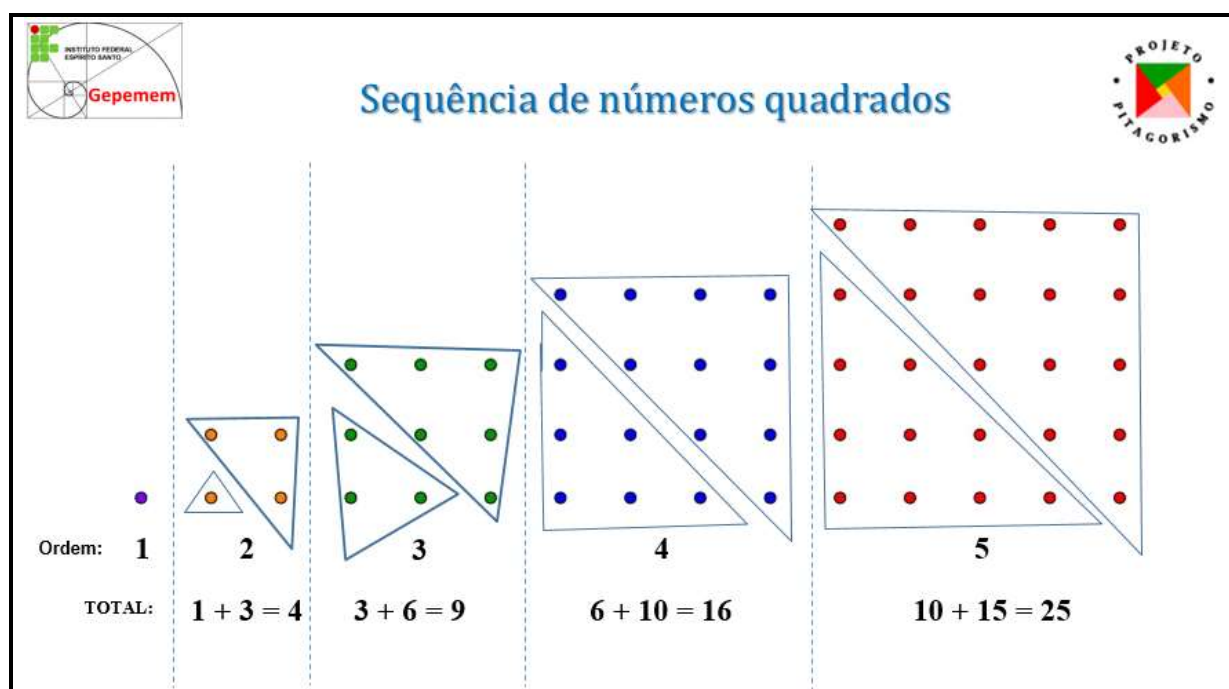
Nº de lados (k)	<i>Gnomon</i> (g)	Termo geral ($f_k(n)$)
k	$(k - 2)n - (k - 3)$	$\frac{n}{2} \cdot [(k - 2)n - (k - 3) + 1]$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Prática sobre a relação entre os números figurados

Os números figurados planos podem ser escritos a partir de números triangulares. Propomos que seja levantada a questão de que um quadrado pode ser dividido em dois triângulos, — o que passa pela ideia da soma dos ângulos internos dos polígonos — e a partir disso pedir para que os estudantes tentem organizar as tampinhas dos números quadrados em dois triangulares (Figura 25).

Figura 25 - Relação dos números figurados



Sugerimos que seja proposto aos estudantes o preenchimento de uma tabela com essa relação (Figura 26).

Figura 26 - tabela dos números quadrados em dois triângulos

NÚMEROS QUADRADOS – SOMA DE TRIANGULARES			
Ordem	TOTAL	Soma de Triangulares	
		Triangular 1	Triangular 2
1			
2			
3			
4			
5			
...	...	...	...
10			
...	...	...	...
37			
...	...	...	...
...			

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Essa relação é estabelecida com o propósito de se chegar à ideia de que, para um número quadrado de ordem n , a soma de dois triangulares de ordem n e $n - 1$.



$$f_4(n) = f_3(n) + f_3(n - 1)$$

Logo, ao preencher a tabela, pode-se estabelecer essa verificação (Figura 27):

Figura 27 - tabela dos números quadrados em dois triângulos

Ordem	TOTAL	Soma de Triangulares	
		Triangular 1	Triangular 2
1	1	0	1
2	4	1	3
3	9	3	6
4	16	6	10
5	25	10	15
...	...	...	...
10	100	45	55
...	...	...	...
37	1369	666	703
...	...	...	...
n	n^2	$\frac{(n-1) \cdot n}{2}$	$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$$f_4(n) = f_3(n-1) + f_3(n)$$

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$n^2$$

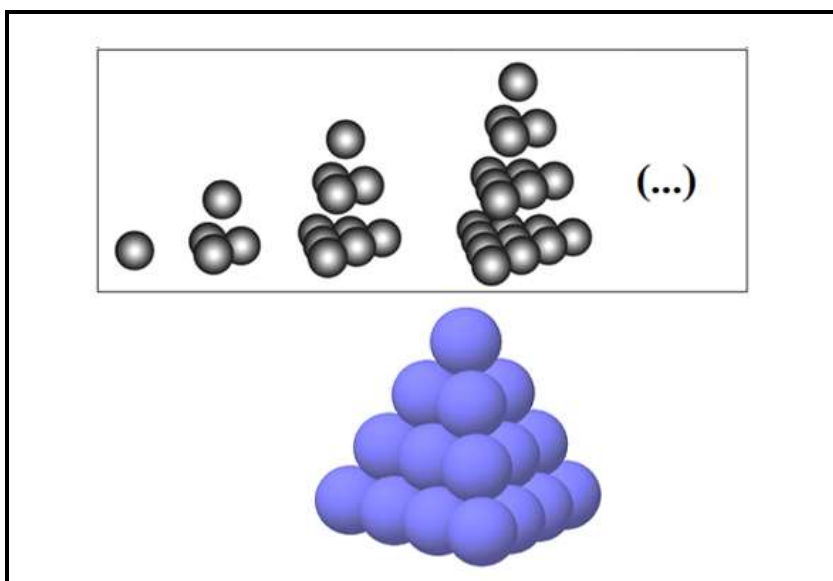
Fonte: Acervo Gepemem (2023).



Prática com os números tetraédricos ($S_3^3(n)$)

O que fizemos até aqui objetiva possibilitar o desenvolvimento de práticas que envolvam os números tridimensionais. Esses são organizados a partir dos poliedros, e podem ser vários, no entanto, vamos tratar dos números tetraédricos (piramida de base triangular) e piramida de base quadrada. Nessa seção vamos falar dos números tetraédricos (figura 28).

Figura 28 - Números tetraédricos



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Se observarmos as camadas apresentadas na figura antecedente (Figura 28) é possível que os estudantes venham a conjecturar que um número tetraédrico é a soma de números triangulares até sua ordem, ou seja,

$$S_3^3(1) = 1 = f_3(1)$$

$$S_3^3(2) = 1 + 3 = 4 = f_3(1) + f_3(2)$$

$$S_3^3(3) = 1 + 3 + 6 = 10 = f_3(1) + f_3(2) + f_3(3)$$



:

Para nossa prática, propomos a construção do tetraédrico utilizando bala de goma (jujuba) e palitos de dentes (Figura 29).

Figura 29 - Materiais para a construção de tetraédricos



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Como vimos, um número tetraédrico pode ser entendido como a soma de números triangulares, então, um procedimento que facilita sua confecção é a construção dos números figurados planos que funcionam como "pisos" dos respectivos "andares" (Figura 30). Essa ideia de pensar na confecção dos tetraédricos como se fosse um edifício partiu dos próprios estudantes e, com tal ideia, automaticamente eles se põem à construção de baixo para cima. Agora, adivinhem qual foi o argumento desses estudantes:



Você já viu algum prédio sendo construído de cima para baixo?



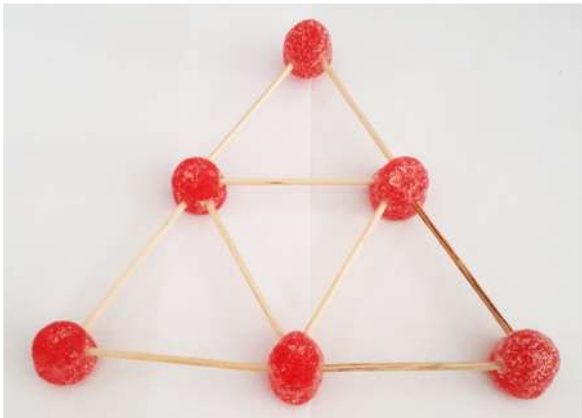
Figura 30 - Materiais



Sequência de números triangulares $f_3(n)$







TOTAL:	1	3	6
Ordem:	1	2	3

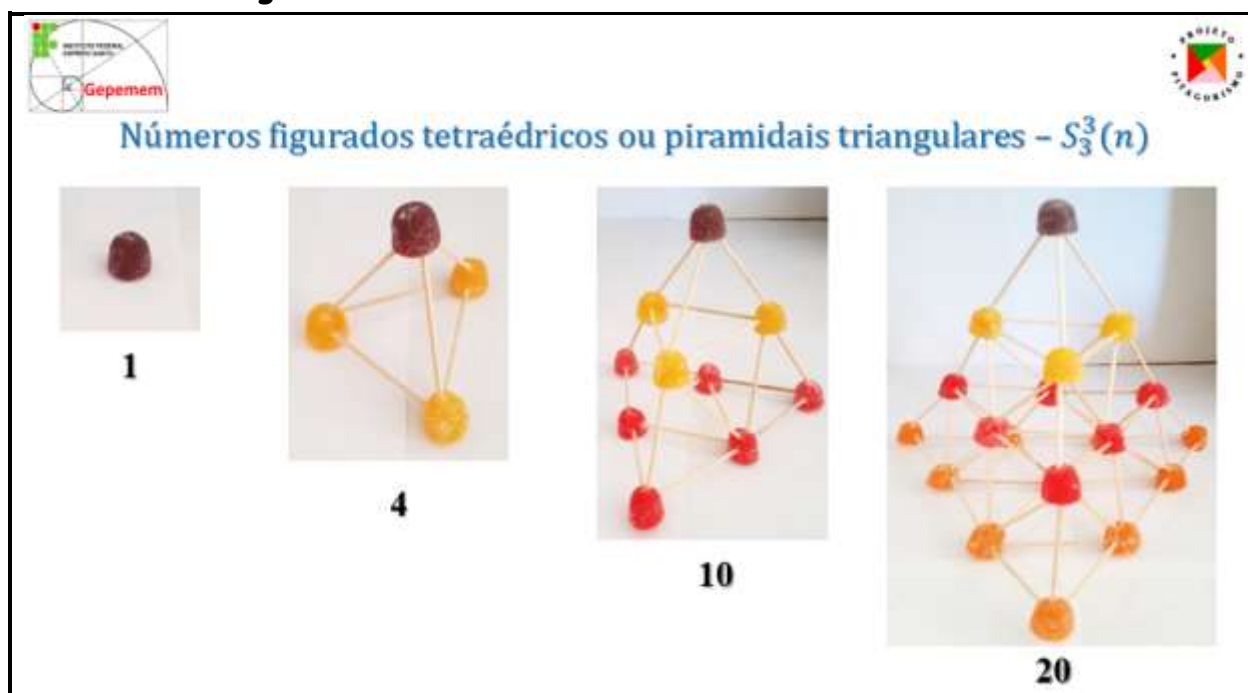
Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Após os “pisos” ou “lajes” estiverem prontos (que matematicamente chamamos de sessões transversais), é hora de juntarmos esses números triangulares, com vistas à confecção dos tetraedros (Figura 31).

Também sugerimos, professor, que oriente os estudantes a organizarem os valores numa tabela (Figura 32) para que possam ter mais alternativas na hora de analisar os padrões aritméticos.



Figura 31 - Números tetraédricos das ordens de 1 a 4



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Figura 32 - Tabela dos números tetraédricos ($S_3^3(n)$)

Ordem	Soma das seções transversais	Total – Número tetraédrico $S_3^3(n)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
...		
n		

Fonte: Acervo Gepemem (2023).



O padrão dos números tetraédricos envolve os números triangulares, todavia, o termo geral é mais complexo de se obter. Uma das prováveis estratégias dos estudantes é a de se utilizar a soma gaussiana, assim como nos números planos, só que a soma gaussiana é um método de soma dos termos de uma progressão aritmética de primeira ordem, ou seja, onde a razão é constante. No caso dos números tridimensionais, essa estratégia já esbarra em algumas complicações, pois no caso dos tetraédricos nos deparamos com uma progressão aritmética de terceira ordem.

Com o recurso da tabela, uma possibilidade é que os estudantes a preencham e possam perceber algum padrão, como na tabela preenchida a seguir (Figura 33).

Figura 33 - Tabela dos números tetraédricos preenchida

Ordem	Soma das seções transversais	Total – Número tetraédrico $S_3^3(n)$
1	1	1
2	1 + 3	4
3	1 + 3 + 6	10
4	1 + 3 + 6 + 10	20
5	1 + 3 + 6 + 10 + 15	35
6	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21	56
7	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 $f_3(n)$	84
...	...	...
n	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + ... + $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$	$S_3^3(n)$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Que na ordem n , será a soma de todos os números triangulares até o n -ésimo termo. Sabemos que cada atividade é única e é possível que algum estudante possa



número 1 (no topo do triângulo) a partir daí o restante é obtido com a soma das linhas anteriores. Os números binomiais são escritos na forma de combinatória $\binom{n}{p}$, onde:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

A respeito do tema há vários vídeos que é possível consultar ou até mesmo apresentar aos seus alunos com o propósito de introduzir ou fixar o assunto. A seguir, sugerimos três vídeos (Figuras 35, 36 e 37), mas se procurares na internet encontrarás muito mais.



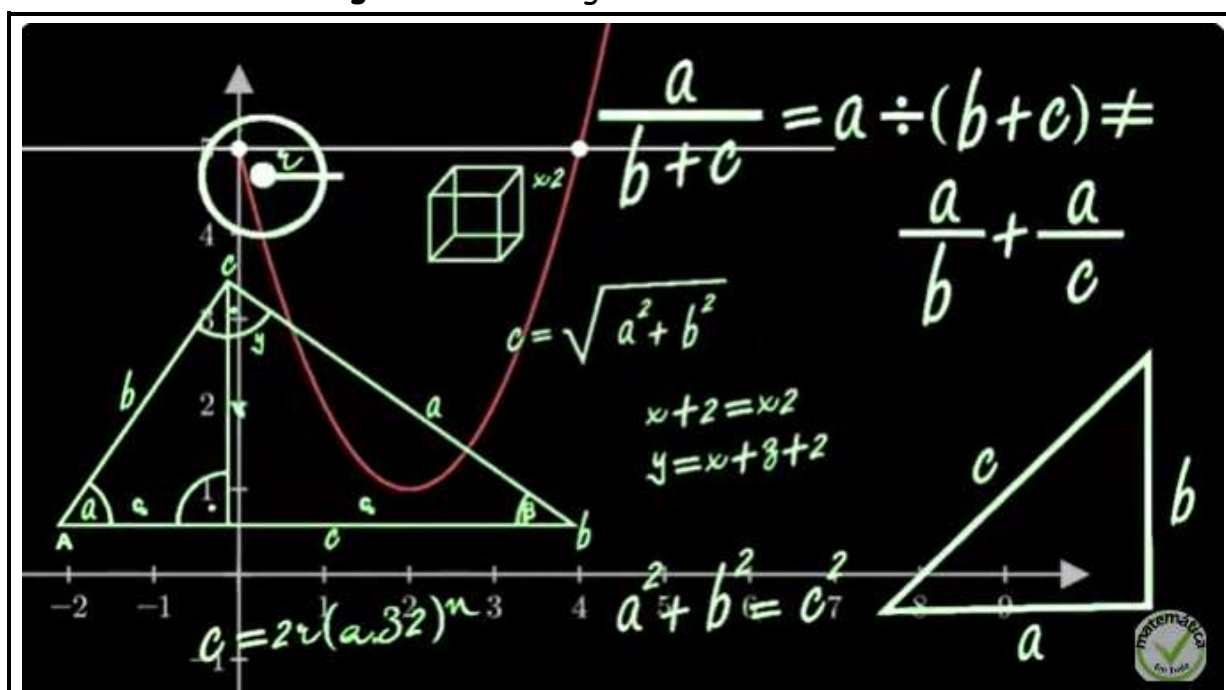
Figura 35 - Curiosidades do Triângulo de Pascal - Matemática Rio



Fonte: https://youtu.be/HymLc234bko?si=1ZjfrSmcV9wE_w0. Acesso em 23 out. 2024

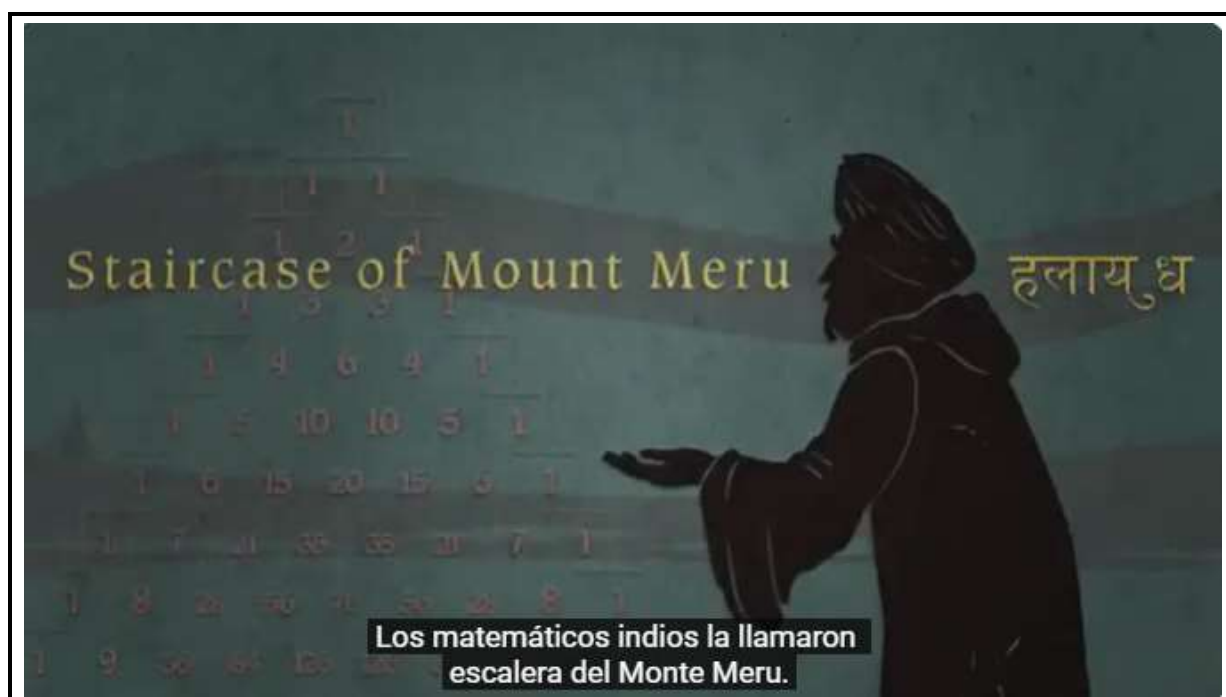


Figura 36 - Triângulo de Pascal Animado



Fonte: <https://youtu.be/y8SfcwOFAck?si=0MX-WIIsEpgzQY25>. Acesso em 23 out. 2024

Figura 37 - Los secretos matemáticos del triángulo de Pascal - Wajdi Mohamed Ratemi



Fonte: <https://youtu.be/8mJCD9ohBj0?si=1RnKhFeKklqL9IsG>. Acesso em 23 out. 2024





O vídeo "Los secretos matemáticos del triángulo de Pascal - Wajdi Mohamed Ratemi" (Figura 37) é dublado em espanhol e traz algumas ideias que vão ao encontro do que estamos tratando a respeito dos números tetraédricos. Vale à pena assisti-lo atentamente.



Blaise Pascal
(1623-1662)



Niccolò Fontana Tartaglia
(1500-1557)

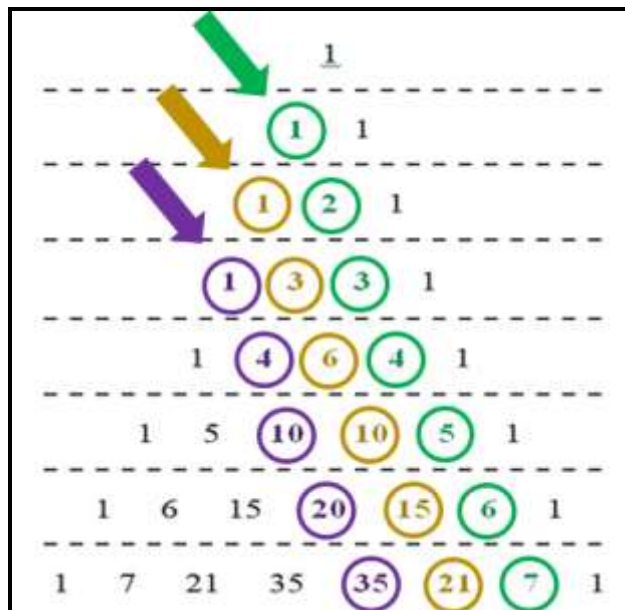
Professor,
Que tal convidar seus alunos a procurarem informações históricas a respeito de Blaise Pascal e Niccolò Tartaglia, bem como suas produções?



A partir da observação do Triângulo de Pascal, ou de Tartaglia ou Triângulo aritmético, podemos estabelecer a relação entre este dispositivo aritmético, organizado de forma triangular, e os números binomiais como vimos em uma figura anteriormente (Figura 34). No entanto, ainda precisamos de algo mais para estabelecer a relação com os números tetraédricos, e essa relação é exatamente com as diagonais do triângulo de Pascal. (Figura 38).

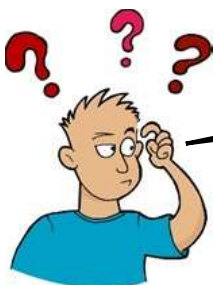


Figura 38 – Diagonais do triângulo de Pascal



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

A primeira diagonal, em verde, forma as respectivas ordens (n), no caso, ordem 1, 2, 3, 4, 5, ... A segunda diagonal, em amarelo, forma a sequência dos números triangulares $[f_3(n)]$, que no caso são os *gnomons* dos números tetraédricos, são eles 1, 3, 6, 10, 15, ... A terceira diagonal, em roxo, forma a sequência dos números tetraédricos $[S_3^3(n)]$, que são 1, 4, 10, 20, 35, ... Com isso podemos associar essa diagonal com o valor dos números tetraédricos, sendo assim, o n -ésimo termo dessa diagonal seria o tetraédrico de ordem n , chegando assim no termo geral.

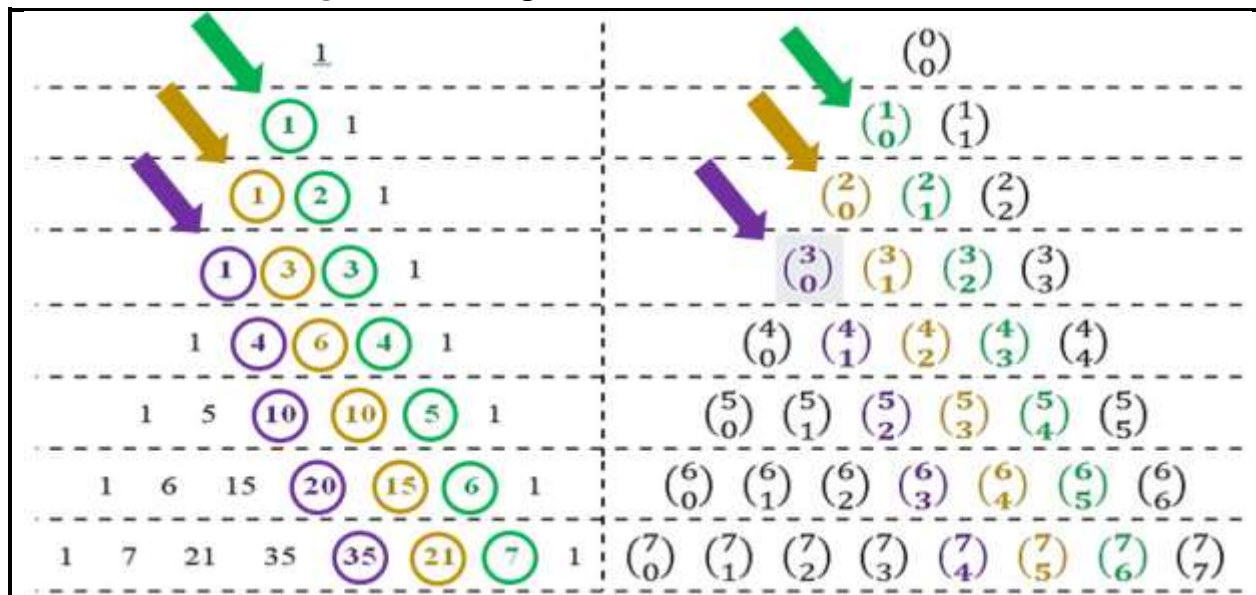


Mas onde entra os números binomiais nisso?



Com os números binomiais, vamos escrever os termos acrescentando uma coluna equivalente à direita do Triângulo de Pascal. Dessa maneira, teremos o seguinte (Figura 39):

Figura 39 - Diagonais como números binomiais



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Veja que a relação entre as diagonais é mantida, mas agora, à direita, temos os de ordem (n) (em verde), os triangulares $[f_3(n)]$ (em amarelo) e os tetraédricos $[S_3^3(n)]$ (em roxo), escritos na forma binomial. Desta forma pode-se organizar esses valores, e, por recorrência, estabelecer uma generalização.

Mas como os números binomiais podem ser escritos como

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Então é possível organizarmos as novas informações horizontalmente em uma tabela (Figura 40).



Figura 40 - Diagonais como números binomiais

Ordens (n)	$\binom{1}{0}$ 1	$\binom{2}{1}$ 2	$\binom{3}{2}$ 3	$\binom{4}{3}$ 4	$\binom{5}{4}$ 5	$\binom{6}{5}$ 6	...	$\binom{n}{n-1}$ n
Gnomons $f_3(n)$	$\binom{2}{0}$ 1	$\binom{3}{1}$ 3	$\binom{4}{2}$ 6	$\binom{5}{3}$ 10	$\binom{6}{4}$ 15	$\binom{7}{5}$ 21	...	$\binom{n+1}{n-1}$ $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$
Tetraédrico $S_3^3(n)$	$\binom{3}{0}$ 1	$\binom{4}{1}$ 4	$\binom{5}{2}$ 10	$\binom{6}{3}$ 20	$\binom{7}{4}$ 35	$\binom{8}{5}$ 56	...	$\binom{n+2}{n-1}$ $\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{6}$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Assim, por recorrência (ou recursividade), ao analisar que a diagonal dos números tetraédricos (em roxo) tem um padrão onde o numerador do binomial é dois valores maior que a ordem, e o denominador é um valor menor que ordem, tem-se o termo:

$$\binom{n+2}{n-1}$$

Que por sua vez, pode ser desenvolvido pela combinatória dos dois termos

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)!}{((n+2) - (n-1))! (n-1)!}$$

Digite a equação aqui.



$$= \frac{(n+2)(n+1)(n)(\cancel{n-1})!}{3!(\cancel{n-1})!}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)(n)}{3!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\therefore S_3^3(n) = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{6}$$

E assim, chegando no termo geral dos números tetraédricos.



A mesma maneira de operar pode ser adotada para se chegar à ordem e ao termo geral dos números triangulares, partindo do princípio que

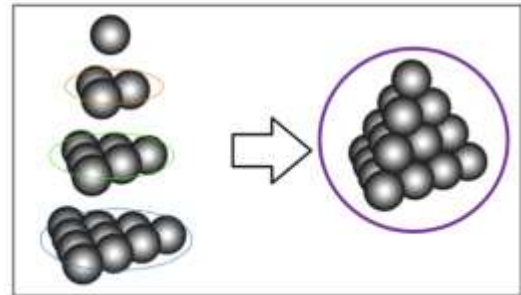
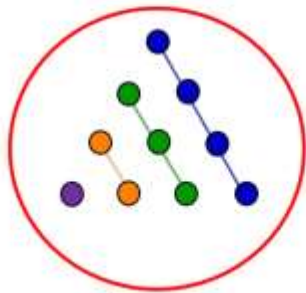
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$



(ii) Somatório (Σ)

Agora temos uma outra possibilidade, pela ideia de somatório e suas propriedades

Somatório (Σ)



$$S_3^3(n) = \sum_1^n f_3(n) = \sum_1^n \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Essa estratégia consiste na ideia da notação de somatório (Σ), na qual

$$\sum_1^n n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + n$$

Partindo dessa maneira de representar então, podemos dizer que um número triangular ($f_3(n)$) é o somatório de dos termos de 1 a n , que é igual a $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

$$\sum_1^n n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

ou seja,



$$f_3(n) = \sum_1^n n$$

Seguindo a mesma ideia, tem-se que os números tetraédricos $S_3^3(n)$ poderão ser escritos como o somatório de números triangulares ($f_3(n)$) de 1 até n .

$$S_3^3(n) = \sum_1^n f_3(n)$$

Assim, podemos utilizar as propriedades do somatório para desenvolver o termo geral.

$$S_3^3(n) = \sum_1^n f_3(n) = \sum_1^n \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \sum_1^n \left(\frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) \right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n (n^2 + n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_1^n n^2 + \sum_1^n n \right) =$$

O termo $\sum_1^n n$ já apresentado anteriormente, sendo ele o termo geral dos números triangulares, logo

$$\sum_1^n n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

O que nos permite chegarmos à seguinte expressão:

$$S_3^3(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_1^n n^2 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)$$



Agora precisamos encontrar o valor de $\sum_1^n n^2$.

E como encontrar $\sum_1^n n^2$?



Para isso, precisaremos de um desenvolvimento algébrico pautado em algumas propriedades de somatório. Aplicando tais propriedades do somatório encontraremos o valor do termo geral. Entendemos que essa proposta demanda mais tempo, mas o professor pode optar por apresentar essa etapa rapidamente (de forma expositiva) ou então sugerir que os estudantes façam como tarefa e, em outro momento, passariam a discuti-la.



Particularmente, em nossa proposta metodológica, optamos por dividir a classe em grupos de no máximo quatro estudantes, reservando um tempo para trabalharem colaborativamente e depois passamos à plenária, onde todos os grupos apresentam suas respectivas produções. Essa forma de trabalho possibilita que a classe observe as maneiras de operar de seus colegas, ampliando a possibilidade de entendimento em relação ao que está sendo abordado.



De todo modo, seguindo a dinâmica proposta,

Vamos determinar $\sum_1^n n^2$

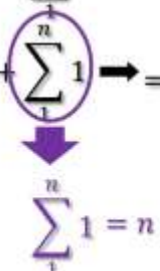
→ Se tomássemos $(n+1)^3$ chegaríamos a um polinômio de grau 3. Então, eliminemos n^3

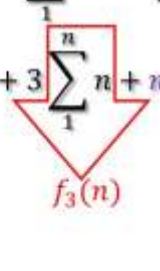
$$\rightarrow (n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\rightarrow (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\rightarrow \sum_1^n ((n+1)^3 - n^3) = \sum_1^n (3n^2 + 3n + 1) = \sum_1^n 3n^2 + \sum_1^n 3n + \sum_1^n 1$$

$$\rightarrow = 3 \sum_1^n n^2 + 3 \sum_1^n n + \sum_1^n 1 \rightarrow = 3 \sum_1^n n^2 + 3 \sum_1^n n + n = 3 \sum_1^n n^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n$$





Resultado 1

$$\rightarrow \sum_1^n ((n+1)^3 - n^3) =$$

$$= ((1+1)^3 - 1^3) + ((2+1)^3 - 2^3) + ((3+1)^3 - 3^3) + \dots + (n^3 - (n-1)^3) + ((n+1)^3 - n^3)$$

$$\sum_1^n ((n+1)^3 - n^3) = \cancel{1^3} - 1^3 + \cancel{2^3} - \cancel{1^3} + \cancel{3^3} - \cancel{2^3} + \dots + \cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3} + ((n+1)^3 - \cancel{n^3})$$

$$\rightarrow \sum_1^n ((n+1)^3 - n^3) = (n+1)^3 - 1$$

Resultado 2

$$\rightarrow \sum_1^n ((n+1)^3 - n^3) = \sum_1^n (3n^2 + 3n + 1) = 3 \sum_1^n n^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n$$

Resultado 1

→ Igualando os resultados 1 e 2, temos

$$3 \sum_1^n n^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1$$



$$3 \sum_1^n n^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_1^n n^2 = \frac{1}{3} \cdot \left\{ [(n+1)^3 - 1] - \left[3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \right] \right\}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_1^n n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}}$$

Assim, chegamos que

$$\sum_1^n n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$

Agora, voltando em nossa expressão, podemos substituir e desenvolver.

$$S_3^3(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_1^n n^2 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_3^3(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_3^3(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{3n \cdot (n+1)}{6} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_3^3(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{[n \cdot (n+1)] \cdot (2n+1+3)}{6} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_3^3(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$



Assim, chegando no termo geral dos números tetraédricos. Entendemos que essa estratégia por somatório, apesar de envolver um desenvolvimento algébrico mais rebuscado, pode ser utilizado como outra possibilidade, mostrando que não existe uma única forma de se obter um resultado. Contudo, cabe ao professor observar se tal procedimento está adequado ou não à realidade de cada classe em que leciona.

(ii) Taxa de variação

A terceira estratégia é por taxa de variação. Também entendemos que pode ser algo mais rebuscado, mas cabe ao professor analisar e avaliar a forma de apresentar.

Relacionando cada ordem a uma taxa de variação temos que primeira taxa de variação $\frac{\Delta f_3(n)}{\Delta n}$. Observe a figura a seguir (Figura 41).

Figura 41 - Distribuição dos números triangulares em relação à ordem

n	distribuição gnomônica	$f_3(n)$	$\frac{\Delta f_3(n)}{\Delta n}$	$\frac{\Delta^2 f_3(n)}{(\Delta n)^2}$
1	1	1		
2	1 + 2	3	2	
3	1 + 2 + 3	6	3	1
4	1 + 2 + 3 + 4	10	4	1
5	1 + 2 + 3 + 4 + 5	15	5	1



Dessa organização, observando a quarta coluna (Figura 41), temos:

$$\frac{\Delta f_3(n)}{\Delta n} = \frac{f_3(n) - f_3(n-1)}{n - (n-1)}$$

$\frac{3-1}{2-1} = 2$	$\frac{10-6}{4-3} = 4$
$\frac{6-3}{3-2} = 3$	$\frac{15-10}{5-4} = 5$

Observando a quinta coluna é possível identificarmos que os valores encontrados são iguais, ou seja, a segunda variação é constante.

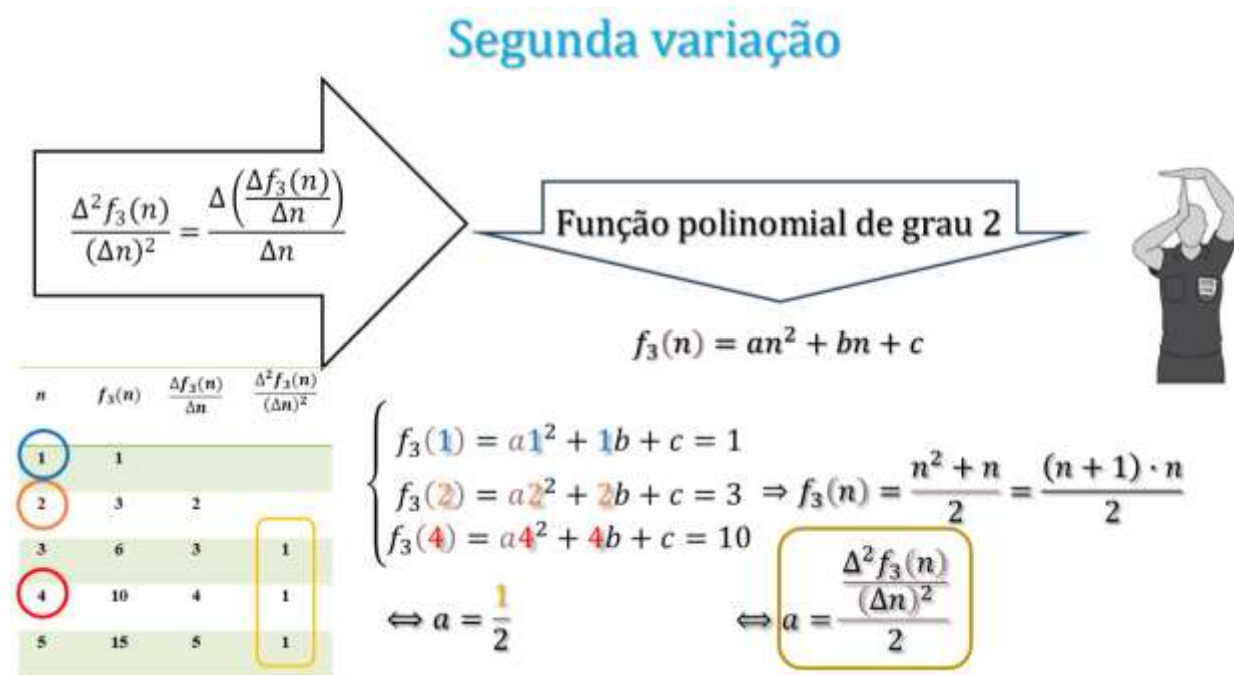
$$\frac{\Delta^2 f_3(n)}{(\Delta n)^2} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta f_3(n)}{\Delta n} \right)}{\Delta n}$$

$\frac{3-2}{3-2} = 1$
$\frac{4-3}{4-3} = 1$
$\frac{5-4}{5-4} = 1$

Por ser constante a segunda variação, temos um comportamento que nos remete a uma função polinomial do segundo grau e isso ocorre porque taxa de



variação média está associada à derivada de segunda ordem de uma função polinomial de segundo grau resulta em uma constante.



Passemos agora a analisar a distribuição dos números tetraédricos, adotando o mesmo recurso utilizado para os números triangulares (Figura 42).

Figura 42 - Distribuição dos números tetraédricos em relação à ordem

n	distribuição gnomônica	$S_3^3(n)$	$\frac{\Delta S_3^3(n)}{\Delta n}$	$\frac{\Delta^2 S_3^3(n)}{(\Delta n)^2}$	$\frac{\Delta^3 S_3^3(n)}{(\Delta n)^3}$
1	1	1			
2	1 + 3	4	3		
3	1 + 3 + 6	10	6	3	1
4	1 + 3 + 6 + 10	20	10	4	1
5	1 + 3 + 6 + 10 + 15	35	15	5	1

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Dessa organização, observando a quarta coluna (Figura 42), temos:



$$\frac{\Delta f_3(n)}{\Delta n} = \frac{f_3(n) - f_3(n-1)}{n - (n-1)}$$

$$\frac{\Delta^2 f_3(n)}{(\Delta n)^2} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta f_3(n)}{\Delta n} \right)}{\Delta n}$$

$$\frac{\Delta S_3^3(n)}{\Delta n} = \frac{S_3^3(n) - S_3^3(n-1)}{n - (n-1)}$$

Por ser constante a terceira variação, temos um comportamento que nos remete a uma função polinomial do terceiro grau e isso ocorre porque taxa de variação média está associada à derivada de terceira ordem de uma função polinomial de terceiro grau resulta em uma constante.

Figura 43 - Distribuição dos números tetraédricos em relação à ordem

$$\frac{\Delta^3 S_3^3(n)}{(\Delta n)^3} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta^2 S_3^3(n)}{(\Delta n)^2} \right)}{\Delta n}$$

n	$S_3^3(n)$	$\frac{\Delta S_3^3(n)}{\Delta n}$	$\frac{\Delta^2 S_3^3(n)}{(\Delta n)^2}$	$\frac{\Delta^3 S_3^3(n)}{(\Delta n)^3}$
1	1			
2	4	3		
3	10	6	3	1
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1

Fonte: Acervo Gepemem (2023).



Função polinomial de grau 3

$$S_3^3(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

n	$S_3^3(n)$	$\frac{\Delta S_3^3(n)}{\Delta n}$	$\frac{\Delta^2 S_3^3(n)}{(\Delta n)^2}$	$\frac{\Delta^3 S_3^3(n)}{(\Delta n)^3}$
1	1			
2	4	3		
3	10	6	3	1
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1

$$\begin{cases} S_3^3(1) = a1^3 + 1^2b + 1c + d = 1 \\ S_3^3(2) = a2^3 + 2^2b + 2c + d = 4 \\ S_3^3(3) = a3^3 + 3^2b + 3c + d = 10 \\ S_3^3(4) = a4^3 + 4^2b + 4c + d = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_3^3(n) = \frac{n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{6}$$

$$a = \frac{\frac{\Delta^3 S_3^3(n)}{(\Delta n)^3}}{6} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$$



Esse método é bem mais rebuscado e por isso sugerimos que não seja adotado em turmas do ensino médio que não adotam a unidade de derivada no Ensino Médio.

Contudo, há escolas, como, por exemplo, o Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Viçosa (CAP-Coluni/UFV), que adotam tal unidade programática na terceira série do Ensino Médio e essa passa a ser uma possibilidade de se trabalhar de uma forma diferente das usuais.

Em um curso de Cálculo Diferencial, para turmas do Ensino Superior, essa também é uma oportunidade de desenvolver tarefas que fujam às usuais, que se encontram nos compêndios que são adotados e denominados de "livro texto".

Essa proposta se configura como mais uma forma de mostrar aos estudantes que a matemática escolar (e também a matemática acadêmica) não são coisas que só possuem uma forma de fazer, e sim como algo bem abrangente que permite uma gama de produção de significados.

Trouxemos três estratégias para se chegar no termo dos números tetraédricos. Mas, para se trabalhar com classes do Ensino Médio, com raras

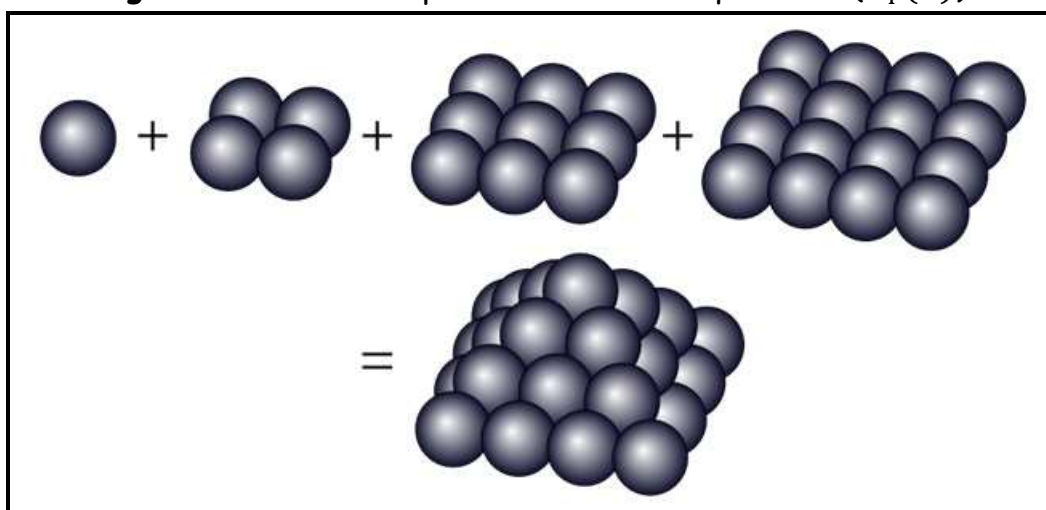


exceções (como o exemplo do CAP-Coluni/UFV), sugerimos a utilização da estratégia (i) Triângulo de Pascoal e os números binomiais, que envolve mais componentes habituais dos estudantes da educação básica. Salientando que é sempre bom trazer outras estratégias. Fica a critério do professor.

Prática com os números piramidais de base quadrada ($S_4^3(n)$)

Os números piramidais de base quadrada, ou simplesmente os números piramidais quadrados ($S_4^3(n)$) seguem a mesma lógica dos tetraédricos. Vimos que os números tetraédricos — que também são números piramidais, só que de base triangular — se configuravam como a soma dos números triangulares. Agora, nos números piramidais de base quadrada temos que eles são a soma dos números quadrados ($f_4(n)$) (Figura 44).

Figura 44 - Números piramidais de base quadrada ($S_4^3(n)$)



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Para essa prática, sugerimos o uso das tampinhas. Assim, dividindo os estudantes em grupo e disponibilizando kits com 55 tampinhas (Figura 45).

Figura 45 - Ordem de cores dos *gnomons*



- Uma de cor A
- Quatro de cor B
- Nove de cor C
- Dezesseis de cor D
- Vinte e cinco de cor E



Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Com as tampinhas, os estudantes podem construir os números piramidais quadrados (Figura 45). Ressaltamos a importância de construir os respectivos números piramidais quadrados, ordem a ordem, preenchendo uma tabela (Figura 46) para facilitar a observação de padrão.

Figura 46 - Tabela dos números piramidais quadrados $S_4^3(n)$



Ordem	Distribuição gnomônica	Piramidal $S_4^3(n)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
⋮	⋮	⋮
n		

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Ao construírem e preencherem a tabela, os estudantes poderão tentar recorrer ao método usado nos números tetraédricos, contudo o Triângulo de Pascoal não possui nenhuma diagonal que se relacione com os números piramidais quadrados. Sugerimos então que convide os estudantes a pensarem em suas estratégias, principalmente se adotarem a metodologia que propusemos anteriormente (de trabalhar em pequenos grupos colaborativos e depois apresentando suas produções em plenária), com vistas a procurar estabelecer espaços comunicativos diferentes, além de tentar evitar possíveis limites epistemológicos. Uma possibilidade de preenchimento de tabela é a seguinte (Figura 47).



Figura 47 - Tabela de números piramidais quadrados preenchida

Ordem	Distribuição gnomônica	Piramidal $S_4^3(n)$
1	1	1
2	1 + 4	5
3	1 + 4 + 9	14
4	1 + 4 + 9 + 16	30
5	1 + 4 + 9 + 16 + 25	55
6	1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36	91
⋮	⋮	⋮
n	1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + ⋯ + n^2	$S_4^3(n) = \sum n^2$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Como dissemos anteriormente, os números piramidais quadrados se configuram a soma de números quadrados, ou, em uma linguagem relativa a somatório: um número piramidal quadrado é o somatório de números quadrados.

$$S_4^3(n) = \sum_1^n f_n(n) = \sum_1^n n^2$$



Isso não me é estranho...
Onde será vimos $\sum n^2$?



Exatamente, esse termo vimos quando falamos da estratégia (ii) Somatório, lá nos números tetraédricos. Ou seja, já vimos que

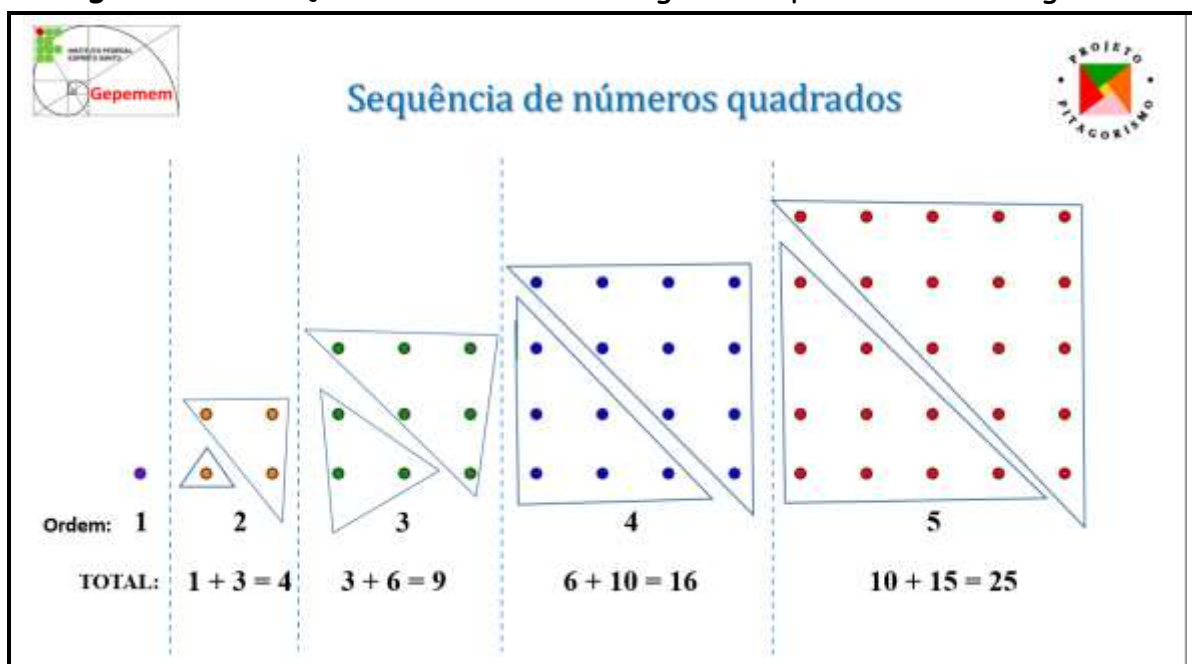
$$\sum_{1}^n n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{6}$$

Daí, podemos concluir que o termo geral dos números piramidais quadrado é:

$$S_4^3(n) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{6}$$

Chegando assim ao resultado. Todavia, temos outra proposta a apresentar. Essa proposta parte das relações entre números bidimensionais quadrados e triangulares. Os números figurados quadrados podem ser escritos como a soma de dois triangulares (Figura 48).

Figura 48 - Relação entre os números figurados quadrados e triangulares



Fonte: Acervo Gepemem (2023).



De tal forma, temos que

$$f_4(n) = f_3(n) + f_3(n - 1)$$

E como cada seção transversal (ou como disse o aluno: de cada “laje” ou “pisso”) dos números piramidais quadrados é um número quadrado, então podemos pensar cada uma dela como a adição de dois triangulares, um da ordem n e um da ordem anterior (Figura 49).

Figura 49 - Relação entre $S_4^3(n)$ e $S_3^3(n)$

Ordem	Piramidal $S_3^3(n)$	Piramidal $S_3^3(n - 1)$	Piramidal $S_4^3(n)$
1	1	0	1
2	4	1	5
3	10	4	14
4	20	10	30
5	35	20	55
6	56	35	91
⋮			⋮
n	$S_3^3(n) = \sum \left(\frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right)$	$S_3^3(n - 1) = \sum \left(\frac{n \cdot (n - 1)}{2} \right)$	$S_4^3(n) = \sum n^2$

Fonte: Acervo Gepemem (2023).

Ou seja

$$S_4^3(n) = S_3^3(n) + S_3^3(n - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_4^3(n) = \frac{(n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n}{6} + \frac{(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1)}{6}$$



Temos o termo $\frac{(n+1) \cdot n}{6}$ em comum a ambas parcelas, portanto:

$$S_4^3(n) = \frac{(n+1) \cdot n}{6} \cdot [(n+2) + (n-1)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_4^3(n) = \frac{(n+1) \cdot n}{6} \cdot [(2n+1)] \Leftrightarrow$$

$$\therefore S_4^3(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Chegando assim ao termo geral dos números piramidais quadrados $[S_4^3(n)]$. Lembrando que essa é uma possibilidade a partir do momento que temos os números piramidais de base triangulares (Tetraédricos) $[S_3^3(n)]$.

De modo geral, essa proposta pode ser expandida para os outros números piramidais de base poligonal qualquer, pois todos os números figurados bidimensionais podem ser escritos como soma de números triangulares, e assim obtendo os termos para os números piramidais.



ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A respeito da temática aqui abordada, há muito a ser explorado, apresentamos apenas algumas de nossas leituras e nossa expectativa e que o material aqui apresentado seja um incentivo para o professor procurar estabelecer novas diretrizes em suas aulas, seja como ato político, seja como ato pedagógico.

Sabemos o quanto o professor está assoberbado nos dias de hoje, com todo tabelionato escolar que nos é imputado pelos agentes burocráticos de estado (ou da escola privada), desrespeitando o professor com salários aviltantes, condições precárias de trabalho e com o sequestro de nosso princípio liberdade de cátedra, assegurada pela Constituição vigente, em seu Art. 206e pelo Art. 3º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que garante a liberdade de aprender, ensinar e divulgar o pensamento, a arte e o saber, o pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas, e coexistência de instituições públicas e privadas de ensino.

Mesmo diante de todos esses percalços, entendemos que o professor almeja ser voz e não vítima e, para tal, pensamos que subverter a ordem imposta, que é uma forma de romper com a proposta vigente de reduzir nossas aulas à preparação para avaliações em larga escala.

Para rompermos com essa situação, oferecemos uma proposta didática e metodológica, que não passa de um objeto, portanto, na perspectiva que adotamos, secundária em relação aos sujeitos, ou seja, descartáveis, reformuláveis e adaptáveis sempre que convir, pois estes sim (os sujeitos) é que estão no centro do processo. Mas que sujeitos são esses? Seus alunos, as relações entre eles, deles para contigo e de ti para com eles.

Então, caro colega, fique à vontade e mãos a massa!



REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Platão Redimido: a teoria dos números figurados na Ciência antiga & moderna**. Curitiba: Champagnat, 2003. (Coleção Exatas, 2).

ANDRADE, Filyppe Neves de. **Análise da Produção de significados em Práticas Educativas Investigativas envolvendo Números Figurados Tridimensionais**. 2024. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2024.

ANDRADE, Filyppe Neves de. **Significados produzidos a respeito de vieses entre triângulo de Pascal, números tetraédricos e figurados triangulares em um processo de formação de professores de matemática**. 2021. 122 p. Monografia (Graduação) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CHAVES, Rodolfo; SAD, Ligia Arantes; ZOCCOLOTTI, Alexandre Krüger; DOMINGUES, Deborah Pereira; VICTOR, Douglas Araujo. Pitagorismo: bases históricas, filosóficas, epistemológicas e práticas. 26 p. Projeto de Pesquisa. Instituto Federal do Espírito Santo. Sistema Integrado de Gerenciamento da Pesquisa do Ifes. Vitória, 2021. In: <
<https://sigpesq.ifes.edu.br/>>.

CHAVES, Rodolfo. et al. Interface entre os modos de produção de significado em sequências de números figurados com uso de materiais didático-pedagógicos manipulativos reaproveitáveis. In: VI Escola de Inverno de Educação Matemática; XIII Encontro Gaúcho de Educação Matemática; 4º Encontro Nacional Pibid de Matemática. 2018, Santa Maria. **Anais...** v. 4, n. 5. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2018. p. 54-68.

CHAVES, Rodolfo; ZOCCOLOTTI, Alexandre Krüger. Pitágoras: em (e além do) teorema. 24 p. Projeto de Pesquisa. Instituto Federal do Espírito Santo. Sistema Integrado de Gerenciamento da Pesquisa do Ifes. Vitória, 2017. In: <
<https://sigpesq.ifes.edu.br/>>.

CHAVES, Rodolfo; RODRIGUES, Caio Lopes. Produções de significados matemáticos em obras de Leonardo da Vinci. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 04, n. 02, p.128-167, 2014.

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais?** 223p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.



CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história**. 2. ed. v. 1. São Paulo: Livraria da Física, 2008.

DEZA, Elena; DEZA, Michel. Marie. **Figurate Numbers**. Singapore: World Scientific Publishing, 2012.

DUTRA, Tiago Magno de Souza. **Produção de significado a respeito de números figurados em um processo de formação de professores de Matemática**. 128 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) no Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2020.

DUTRA, Tiago Magno de Souza; CHAVES, Rodolfo. **Números Figurados Planos em Formação de Professores**. Vitória: EdIfes, 2020. (Série Guias Didáticos de Matemática, nº 71).

HEATH, Sir Thomas. **Euclid: the thirteen books Of The Elements**. New York: Dover, 1956. (v. 3).

KAHN, Charles H. Os filósofos neopitagóricos. In: KAHN, Charles H. **Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história**. São Paulo: Loyola, 2007. p. 125-173. (Leituras filosóficas).

KNIJNJK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; GIONCO, Ieda Maria; DUARTE, Claudia Glavam. **Etnomatemática em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (Seminários Debates Unesp).

LINS, Romulo Campos. O modelo dos campos semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Lauset al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

LINS, Romulo Campos. Os PCN e a Educação Matemática no Brasil. In: OLIVEIRA, Viviane Cristina Almeida de et al. **Modelo dos Campos Semânticos na Educação Básica**. 1 ed. Curitiba: Appris, 2020, p. 13-18.

LINS, Romulo Campos; Giménez, Joaquin. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LURIA, Alexander Romanovich. **Desenvolvimento cognitivo: seus fundamentos culturais e sociais**. São Paulo: Ícone, 2005 [1990].



MARQUES, Fernanda Santolin; CHAVES, Rodolfo. **Uma proposta para o desenvolvimento de cursos ou práticas a respeito do tema recursividade matemática no âmbito da formação de professores**. Vitória: EdIfes, 2022. (Série Propostas de Formação. Nº 01).

NICÔMACO de Gerasa. Introduction to arithmetic. In: **Enciclopaedia Britannica**. v. 11. Chicago: Great Books, 1952.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2. Reimp. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

RUSSELL, Bertrand. **História do pensamento ocidental**: a aventura das idéias dos pré-socráticos a Wittgenstein. 6. ed. p. 463. Trad. Laura Alves e Aurélio Rebello. Rio de Janeiro: Ediouro, 2002.

SAD, Ligia Arantes. **Cálculo Diferencial e Integral**: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 1999. 371 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

SANTOS, Mário Ferreira dos. **Pitágoras e o tema do número**. São Paulo: IBRASA, 2000.

SCHURÉ, Édouard. **Os grandes iniciados**: esboço da história secreta das religiões. 8. ed. São Paulo: IBRASA, 2021 [1889].

SILVA, Amarildo Melchiades da. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2003.

SILVA, Josildo José Barbosa da. **Eram realmente pitagórico(a)s os homens e mulheres catalogado(a)s por Jâmblico em sua obra Vida de Pitágoras?** 2010. 185 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

TAHAN, Malba. **Diabruras de Matemática: problemas curiosos e fantasias aritméticas**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 1966. (Maravilhas da Matemática).

