# Recurso Didático: Aplicação do Teorema de Pick para cálculo de área dos Estados do Brasil

**Claudio dos Reis Teixeira**
**Walcy Santos**

# Resumo

Este trabalho foi construído com base no Teorema de Pick e como calcular áreas de uma forma diferenciada. O Teorema de Pick revela ser uma ferramenta matemática poderosa, que permite calcular a área de polígonos simples de uma maneira muito eficaz. Sua abordagem é especialmente útil para polígonos que não são regulares, pois não é necessário aplicar fórmulas específicas para cada tipo de polígono. O recurso didático que aqui apresentamos é uma maneira de apresentar aos alunos como poderiam calcular as áreas dos estados brasileiros usando o Teorema de Pick. Nesta atividade os alunos podem experimentar uma maneira diferente de trabalhar com polígonos e a interdisciplinaridade com a área de geografia. Este recurso foi aplicado e se mostrou eficiente para os cálculos realizados, o que ressalta a sua importância como um instrumento para o ensino e a aprendizagem de matemática.

**Palavras-chave:** Área de Polígonos; Teorema de Pick; Geografia

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| $A$ | Área do polígono |
| $B$ | Número de pontos do contorno (borda) do polígono |
| $I$ | Número de pontos no interior do polígono |
| $P$ | Polígono Simples |
| $P_1$ | Polígono Simples 1 (subdivisão de $P$) |
| $P_2$ | Polígono Simples 2 (subdivisão de $P$) |
| $B_1$ | Número de pontos do contorno (borda) do polígono $P_1$ |
| $I_1$ | Número de pontos no interior do polígono $P_1$ |
| $B_2$ | Número de pontos do contorno (borda) do polígono $P_2$ |
| $I_2$ | Número de pontos no interior do polígono $P_2$ |
| $A_P$ | Área do polígono $P$ |
| $A_{P_1}$ | Área do polígono $P_1$ |
| $A_{P_2}$ | Área do polígono P_2 |
| $v$ | Pontos da malha em comum entre $P_1$ e $P_2$ |
| $n$ | Quantidade de lados do polígono |
| $P'$ | Polígono com um lado a menos do que $P$ |
| $P''$ | Subdivisão do Polígono $P$ pela diagonal $DB$ |
| $h$ | Altura do polígono |
| $IBGE$ | Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística |
| $km$ | Quilômetro |
| $cm$ | Centímetro |
| $cm^2$ | Centímetro Quadrado |
| $km^2$ | Quilômetro Quadrado |

# Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| ° | Grau (unidade para medir ângulos) |
| % | Porcentagem |
| $\mathbb{R}^3$ | Espaço; Conjunto dos pontos $(x, y, z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}^2$ | Plano; Conjunto dos pontos $(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$ |
| $\mathbb{Z}^3$ | Conjunto dos pontos com coordenadas inteiras do $R^3$ |
| $\mathbb{Z}^2$ | Conjunto dos pontos com coordenadas inteiras do $R^2$ |

# Introdução

O cálculo de Áreas é uma matéria importante na Geometria e é ensinada na escola desde o sexto ano. Inicialmente por meio de malhas quadriculadas até chegar na aplicação das fórmulas. Nosso objetivo é apresentar uma outra forma de calcular área sem o uso de fórmulas específicas para cada polígono.

Com a ajuda do Teorema de Pick, a ideia é mostrar para uma turma do nono ano, uma nova forma de calcular áreas de polígonos mais complexos. Uma maneira mais concreta, onde eles precisam colocar um pouco mais a mão na massa para encontrar o que precisam para calcular a área, e não somente aplicar uma fórmula sem saber o que aquilo representa. O tema foi aproveitado para criar uma exposição com todos os trabalhos realizados pelos alunos no cálculo da área dos Estados brasileiros.

Vamos inicialmente fazer uma breve introdução do Teorema de Pick e sua demonstração para complemento do Professor interessado em aplicar este recurso.

# 1 Teorema de Pick

O Teorema de Pick consiste em calcular a área de polígonos simples (figuras planas formadas por segmentos de retas, que chamamos de lados, que não se cruzam e que cada um deles se une a mais dois segmentos pelas suas extremidades, formando assim uma figura fechada) sem precisar das fórmulas que habitualmente utilizamos separadamente para cada tipo de figura. A vantagem desse modo de cálculo é que conseguimos calcular a área de qualquer polígono simples, por mais diferente que ele seja. Não ficando preso somente a triângulos, quadrados, pentágonos, etc., os quais já tem cada um a sua fórmula de área pré-definida.

As desvantagens desta prática são a transferência do polígono dado para uma malha pontilhada, que são pontos igualmente espaçados, distribuídos em linhas e colunas (como no apêndice página 38) e que deve-se ficar atento para que os vértices (ponto de encontro dos lados do polígono) estejam coincidindo com os pontos da malha. Desvantagens que, por sua vez, dependendo do polígono que se deseja calcular a área, acaba não tendo tanto prejuízo assim, pois pode ser menos trabalhoso do que fazer os cálculos de forma convencional. Temos também uma limitação para este Teorema, ele não serve para polígonos complexos (polígonos em que seus lados se cruzam em pontos sem ser os extremos), podendo ser utilizado somente em polígonos simples.

**Teorema de Pick:** *A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada é dada pela fórmula*

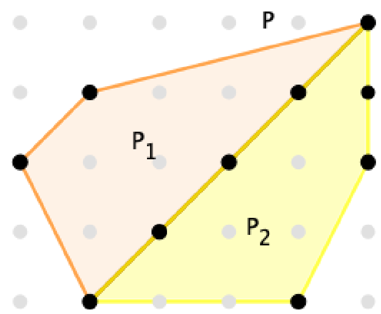
$$\boxed{A = \frac{1}{2}B + I - 1}$$

*em que B é o número de pontos da malha quadriculada, situados sobre o contorno (borda) do polígono e I é o número de pontos da malha quadriculada, situados no interior do polígono.*

Existem diversas formas de demonstrar o Teorema de Pick, aqui vamos realizar a prova por composição de figuras. Os passos a serem seguidos na demonstração seriam: primeiro demonstrar que o Teorema de Pick vale para composição de polígonos simples, depois provar que todo polígono simples pode ser decomposto em triângulos e por fim, verificaremos que o Teorema de Pick vale para triângulos retângulos (triângulo que possui um de seus ângulos igual a 90º) e como todo triângulo pode ser dividido em triângulos retângulos teremos a demonstração dada por encerrada.

Suponha que tenhamos um polígono simples $P$ formado por outros dois polígonos simples $P_1$ e $P_2$, que contenham, sem perda de generalidade, apenas um lado em comum, como na Figura 01.

Figura 1 - Composição de Polígonos




Fonte: Construção Própria

Teremos então que $B_1$ e $I_1$ serão, respectivamente, os pontos na borda e no interior do polígono $P_1$ e, da mesma forma, $B_2$ e $I_2$ serão, respectivamente, os pontos na borda e no interior do polígono $P_2$. E pelo Teorema de Pick, temos:

- Área de $P$ igual a $A_P = \frac{1}{2}B + I - 1$,
- Área de $P_1$ igual a $A_{P_1} = \frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1$,
- Área de $P_2$ igual a $A_{P_2} = \frac{1}{2}B_2 + I_2 - 1$.

Chamando de $v$ o número de pontos da malha que $P_1$ e $P_2$ possuem em comum, então, teremos que $I = I_1 + I_2 + (v - 2)$ e $B = B_1 + B_2 - 2v + 2$. Portanto a área de $P$, ficaria desta forma:

$$A_P = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{(B_1 + B_2 - 2v + 2)}{2} + \big(I_1 + I_2 + (v - 2)\big) - 1$$

$$= \frac{B_1 + B_2}{2} - v + 1 + I_1 + I_2 + v - 2 - 1$$

$$= \frac{B_1 + B_2}{2} + I_1 + I_2 - 2$$

Reagrupando, temos:

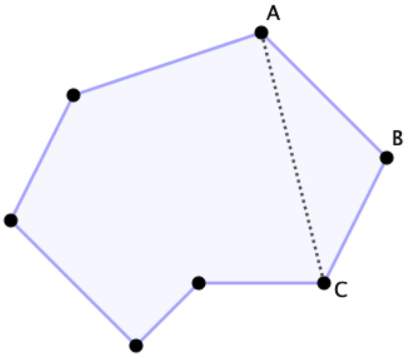
$$A_P = \underbrace{\frac{B_1}{2} + I_1 - 1}_{A_{P_1}} + \underbrace{\frac{B_2}{2} + I_2 - 1}_{A_{P_2}}$$

$$A_P = A_{P_1} + A_{P_2}$$

Provando, então que o Teorema de Pick vale para composição de polígonos simples. Demonstraremos agora que todo polígono simples pode ser decomposto em triângulos traçando diagonais internas que não se cortam.

Vamos supor, por absurdo, ou seja, por contradição, que podemos achar um polígono $P$, com $n$ lados, o qual não pode ser decomposto em triângulos. Escolhemos $P$ de modo que o número $n$ seja o menor possível. Seja $B$ um dos vértices de $P$ e que $A$ e $C$ sejam os seus vértices adjacentes, ou seja, vértices que estão nos mesmos lados que o ponto $B$ se encontra. Podemos ter dois casos possíveis, $A$, $B$ e $C$ são os únicos vértices de $P$ contidos no triângulo $ABC$, como na Figura 02.

Figura 2 - Construindo o Polígono $P'$

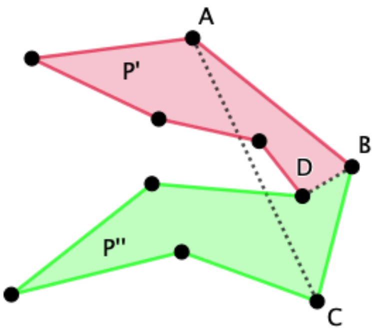



Fonte: Construção Própria

Neste caso, o polígono $P'$ obtido substituindo os lados $AB$ e $BC$ por $AC$, tem $n - 1$ lados. Como $n$ é o menor número de lados para o qual o teorema não vale, $P'$ pode ser decomposto em triângulos na forma como queríamos. Acrescentando-se a $P'$ o triangulo $ABC$, obtemos uma decomposição de $P$, contradição.

No outro caso possível, o triângulo $ABC$ possui outros vértices do polígono $P$ além de $A$, $B$ e $C$, como mostra a Figura 03.

Figura 3 - Dividindo o Polígono $P$ em $P'$e $P''$




Fonte: Construção Própria

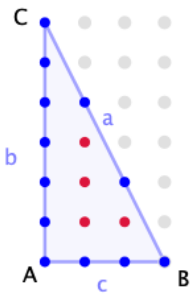
De todos os vértices de $P$ dentro do triângulo $ABC$, seja $D$ o mais distante de $AC$. Portanto a diagonal $DB$ não pode conter outros vértices de $P$ além de $D$ e $B$. Essa diagonal, portanto, decompõe $P$ em dois polígonos $P'$e $P''$, que se decompõem em triângulos como desejávamos. Juntando estas decomposições com $DB$, obtemos uma decomposição de $P$, que é uma contradição. O que demonstra o segundo caso. Podendo concluir, então, que todo polígono pode ser decomposto em triângulos.

Como todo triângulo pode ser decomposto em triângulos retângulos, basta provarmos agora que o Teorema de Pick vale para triângulos retângulos.

Seja o triângulo retângulo ABC, como na Figura 04, onde os lados $b$ e $c$ são os catetos e o lado $a$ é a hipotenusa. Então temos a seguinte relação entre a medida dos lados $a$, $b$ e $c$ e a quantidade de pontos da malha sobre eles:

- Lado $b$ tem tamanho de $b$ unidades de comprimento e $(b + 1)$ pontos da malha. A unidade de comprimento é definida pela distância entre os pontos da malha;
- Lado $c$ tem tamanho de $c$ unidades de comprimento e $(c + 1)$ pontos da malha;
- Lado $a$ tem tamanho de $a$ unidades de comprimento e a quantidade de pontos não é possível definir, só seria possível em triângulos pitagóricos. Definiremos somente, de forma geral, a quantidade $d$ de pontos da malha que estão sobre a hipotenusa, mas sem contar os vértices.

Figura 4 - Triângulo Retângulo na Malha Pontilhada




Fonte: Construção Própria

Teremos então em sua borda $(c + b + d + 1)$ pontos e em seu interior $\left(\frac{(b-1)(c-1)-d}{2}\right)$ pontos, esta última seria a quantidade de pontos no interior do retângulo de dimensões $b$ e $c$, retirando os pontos da hipotenusa $d$. Aplicando o Teorema de Pick, teremos:

$$A = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{1}{2}(b + c + d + 1) + \frac{\left((b-1)(c-1) - d\right)}{2} - 1$$

$$A = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2} + \frac{1}{2} + \frac{bc}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{2} - \frac{d}{2} - 1$$

$$A = \frac{bc}{2}$$

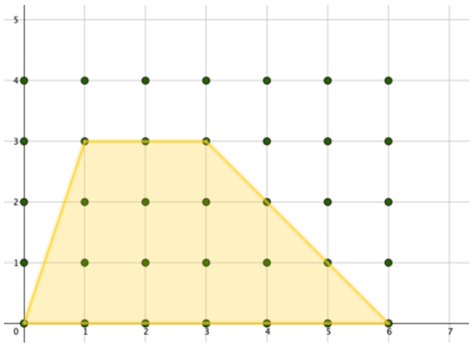
Ou seja, base vezes altura dividido por dois. A fórmula da área de triângulos, provando que o Teorema de Pick vale também para triângulos retângulos, como desejávamos. Concluímos, então, que o Teorema de Pick vale para todos os Polígonos Simples.

## Exemplo de Cálculo de Área com o Teorema Pick

Vamos ver a aplicação do Teorema e Pick e como ele dá certo. No primeiro exemplo vou mostrar a utilização em um trapézio e comparar com a resolução por meio de fórmula. No segundo exemplo mostrarei como que a resolução por meio do Teorema de Pick é muito mais simples.

A Figura 05 mostra um trapézio colocado no plano cartesiano com uma malha pontilhada. Vale lembrar que os vértices do trapézio tem que coincidir com os pontos da malha pontilhada. Vamos admitir escalas de 1 centímetro entre cada unidade no plano. Neste caso, note que as bases desde trapézio valem 6 centímetros e 2 centímetros e a altura 3 centímetros.

Figura 5 - Trapézio na Malha Pontilhada



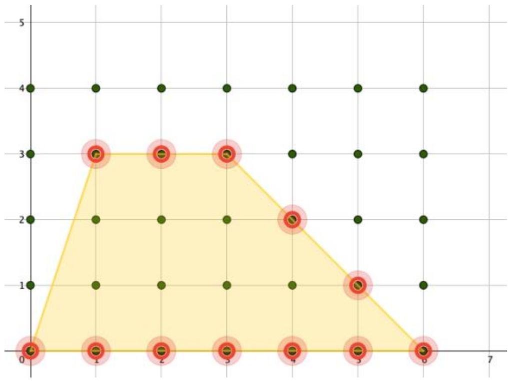
Fonte: Construção Própria

Vamos calcular a área dessa figura por meio de fórmula.

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(6+2)\cdot 3}{2} = \frac{8\cdot 3}{2} = \frac{24}{2} = 12cm^2$$

Portanto, utilizando a fórmula, encontramos como área 12 centímetros quadrados. Vamos agora verificar com o Teorema de Pick. Temos que contar os pontos de Interior e os de Borda.

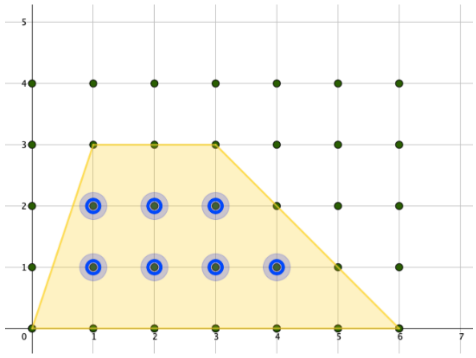
Figura 6 - Pontos de Borda do Trapézio



Fonte: Construção Própria

Podemos notar pela Figura 06 que o trapézio possui 12 pontos em sua borda e pela Figura 07 podemos contar 7 pontos no seu interior.

Figura 7 - Pontos do Interior do Trapézio



Fonte: Construção Própria

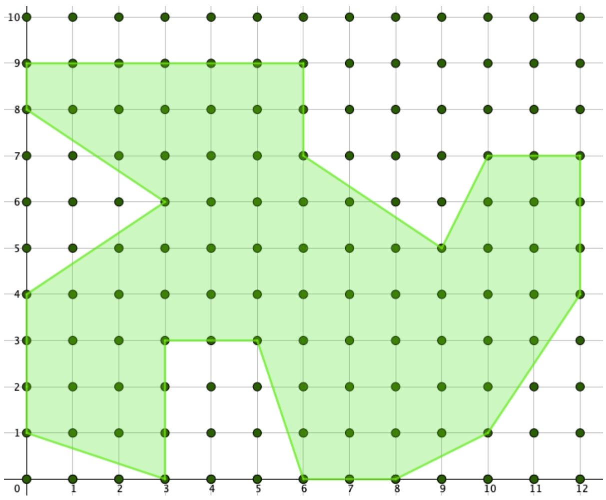
Aplicando o Teorema de Pick

$$\boxed{A = \frac{1}{2}B + I - 1}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 + 7 - 1 = 6 + 7 - 1 = 12cm^2$$

Portanto a resolução pelo Teorema de Pick deu certo! Vejamos agora sua aplicação em uma figura em que usar fórmulas já conhecidas não vai trazer uma solução imediata, mas com o Teorema de Pick calcularemos a sua área muito mais fácil. Eis a figura.

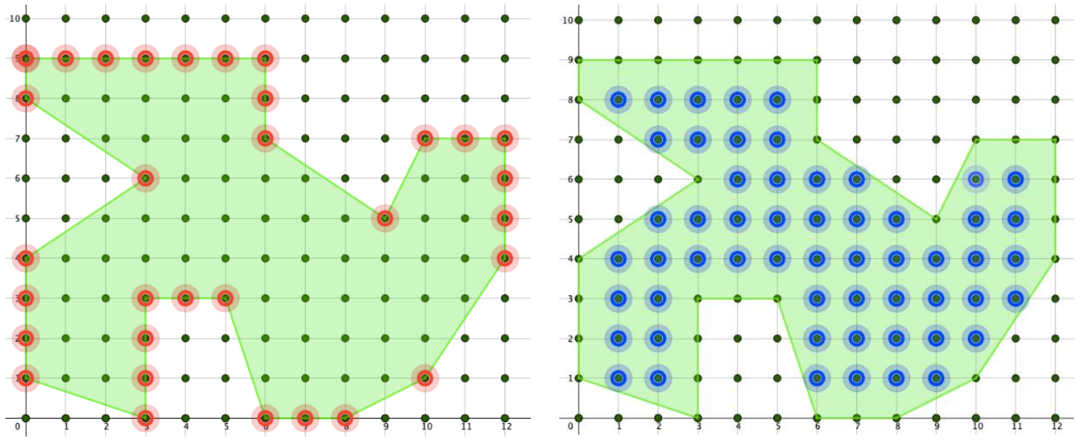
Figura 8 - Polígono na Malha Pontilhada



Fonte: Construção Própria

Vamos admitir, novamente, que a distância entre os pontos da malha seja de 1cm. Precisamos contar os pontos da fronteira e do interior, faremos isso a seguir.

Figura 9 - Pontos da borda em vermelho e pontos do interior em azul



Fonte: Construção Própria

Contando os pontos da borda e do interior, temos: 32 e 56, respectivamente. Então para calcular a sua área basta utilizar o Teorema de Pick.

$$\boxed{A = \frac{1}{2}B + I - 1}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 32 + 56 - 1 = 16 + 56 - 1 = 71\ cm^2$$

Com o Teorema de Pick podemos chegar a uma resolução muito mais rápida e simples.

# Recurso Didático: Aplicação do Teorema de Pick para cálculo de área dos Estados do Brasil

Como pré-requisito, em uma aula anterior, cada aluno deveria escolher seu Estado de preferência, e após esta ação, pesquisariam sobre os seguintes tópicos no site do IBGE:

- Tamanho do Estado em $km^2$;
- Nome do Governador;
- Capital;
- População estimada;
- Densidade demográfica.

Para dar base ao trabalho desenvolvido pela turma, por parte do Professor, é necessário buscar as imagens dos Estados e uma planilha do excel (contida nos Anexos) com todos os dados necessários, como a escala de cada Estado entre o desenho e o tamanho real e a área de cada Estado retirado do site do IBGE.

Para o cálculo das áreas em sala de aula com os alunos, são deixadas duas colunas em branco dessa planilha: a dos pontos interiores e a dos pontos de fronteira, sendo estas informações enumeradas por cada aluno, após as suas verificações. E por último uma coluna de erro para medir a porcentagem de diferença entre a área dada pelo IBGE e a área calculada em sala com os alunos.

O material utilizado para a prática da atividade:

- Estados impressos em folhas A4;
- Papel Vegetal com malha pontilhada de 1cm impressa;
- Folhas A4 coloridas para os estados em formas poligonais;
- Folhas A3 para colar os polígonos coloridos e colocar os dados dos estados;
- Régua;

- Cola;
- Tesoura;
- Clipes;
- Canetinhas ou lápis de cor.

Na atividade foram gastos 2 tempos de 50 minutos e alguns alunos ainda precisaram de parte de mais 1 tempo para a terminarem a colagem e customização do trabalho. No dia da atividade a turma já estava com o material pedido, pois havíamos conversado na aula anterior. Antes de começar a atividade em si, deve ser feito um comentário sobre o Teorema de Pick com a turma, de como se aplica em calcular áreas de figuras mais complexas do que as que eles conheciam somente contando pontos e fazendo uma divisão e uma soma.

Feito isso, deve ser entregue para cada aluno uma folha A4 com o estado escolhido por ele, uma folha vegetal com a malha quadriculada e clipes para prender as duas folhas, com o objetivo de copiar o Estado para o papel vegetal sendo o mais fiel possível. Após copiarem o mapa dos estados, solicite que contem quantos pontos ficam na borda e no interior para o preenchimento da planilha. Dessa maneira, a área de cada Estado estaria calculada com o apoio da planilha.

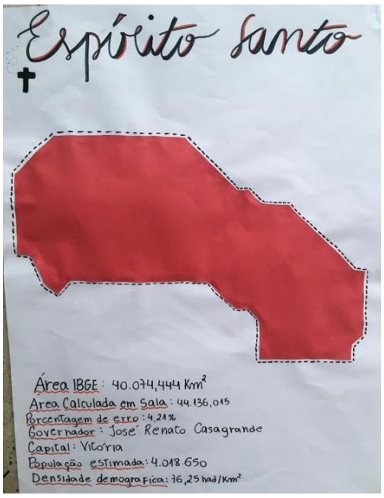
Figura - Alunos copiando o Estado para a malha pontilhada

Depois da contagem, o próximo passo seria realizar o recorte do Estado, transcrito no papel vegetal, em forma poligonal. Após essa etapa, o aluno escolhe uma folha de papel A4 colorida para a colagem do Estado. Na próxima etapa, um outro recorte deve ser realizado.

Com o Estado poligonal colorido em mãos, pede-se a finalização do trabalho, colando o Estado em uma folha A3 e colocando as informações coletadas no site do IBGE e em sala.

Eles devem colocar na folha A3: o nome do Estado, a figura poligonal colorida, a área retirada do site do IBGE, a área calculada em sala (dada pelo professor), porcentagem de erro da área calculada em sala em comparação com a do IBGE (dada pelo professor), população estimada, nome do Governador e densidade demográfica.

Figura 10 - Trabalho realizado por um dos alunos




**Observação:** na experiência já realizada, alguns alunos tiveram dificuldades para desenhar o Estado em forma poligonal, já que o desenho não passava corretamente em todos os pontos da malha. Foi notado também que em alguns Estados, a contagem dos pontos se tornou demorada e cansativa, devido ao tamanho deles. Estas adversidades podem ter sido a causa dos alto índice de percentual de erros, visto que os desenhos e as contagens dos pontos não foram alteradas pelo professor, sendo deixados tudo por conta dos próprios alunos. É claro que dúvidas no momento da atividade foram tiradas e discussões sobre qual melhor caminho na hora de fazer o polígono foram feitas, mas um dos objetivos do trabalho foi desenvolver a autonomia, principalmente sobre as decisões finais.

É importante ressaltar que este trabalho pode ser utilizado em parceria com outras disciplinas, tornando assim a aprendizagem mais completa e agradável. Neste sentido, a atividade desenvolvida com a turma de 9 º ano foi facilmente confundida com a disciplina de Geografia. Isso nos mostra que a Matemática ainda carrega um complexo de preconceitos, sendo estigmatizada e isolada.

.

# Considerações Finais

O cálculo de Áreas é importantíssimo na Matemática, mas infelizmente, para a maioria dos alunos, esta parte da matéria não será usada nunca mais fora da escola. Esta pode ser a grande causa da falta de interesse dos alunos pela Matemática. Mas, pude perceber que com trabalhos mais lúdicos e concretos como esse, onde há interdisciplinaridade com a Geografia, com relação aos dados dos Estados e também com Artes, na manipulação e pintura dos materiais, os alunos ficam mais focados e interessados em realizar a tarefa.

Dessa forma, posso dizer que o trabalho realizado foi diferenciado e de grande proveito tanto para os alunos que obtiveram uma aprendizagem mais dinâmica, quanto para mim na conduta da turma em uma atividade diferenciada, na preparação e aplicação de um trabalho mais lúdico, com um jeito menos intimidador para eles.

Deixamos claro que não é preciso fazer a demonstração do Teorema de Pick em sala, devido à sua complexidade.

O Teorema de Pick se mostrou muito eficaz no cálculo da área de cada Estado. É claro que não foi usado nenhum equipamento profissional, então temos que levar em consideração os erros que são comuns de acontecerem no desenho, na escala, na escolha do polígono, na contagem dos pontos, etc. Mas mesmo assim, tiverem alguns trabalhos que conseguiram encontrar o valor da área muito, mas muito próximo do real, algo com erro entorno de menos de 1%. Imagine como um aluno do 9º ano conseguiria encontrar a área do Estado do Ceará sem a ajuda das tecnologias, por meio de fórmulas e com um erro de 0,69%? Parece impossível, mas com o Teorema de Pick foi possível! Então, com certeza, foi uma atividade muito proveitosa, foi tanto que até os alunos pediram mais atividades deste tipo nas próximas aulas.

.

# Referência Bibliográfica

Teixeira, C. R. - Teorema de Pick: Apresentando Uma Forma de Calcular Áreas e a Sua Contribuição Para o Cálculo de Volume. Dissertação de mestrado do PROFMAT-UFRJ. 2023

.

# Apêndices

## APÊNDICE A: Planilha com os Estados e o Teorema de Pick preenchida com os dados da aplicação em sala de aula. Ela deve ser preenchida pelos alunos em cada aplicação do recurso didático.

| | ESTADO | Escala *(500km em cm)* | Escala $(1cm^2\ em\ km^2)$ | TEOREMA DE PICK | | | | Área IBGE ($km^2$ em 2018) | Erro (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Pontos na borda | Pontos no interior | Área (em $cm^2$) | Área (em $km^2$) | | |
| 1 | Acre | 16,54771 | 912,98619 | 43 | 142 | 162,5 | 148.360,255 | 164.123,738 | 9,60% |
| 2 | Alagoas | 45,26173 | 122,03312 | 56 | 188 | 215,0 | 26.237,120 | 27.843,295 | 5,77% |
| 3 | Amapá | 15,69091 | 1.015,41540 | 43 | 110 | 130,5 | 132.511,710 | 142.470,762 | 6,99% |
| 4 | Amazonas | 7,25404 | 4.750,94625 | 78 | 319 | 357,0 | 1.696.087,810 | 1.559.168,117 | 8,78% |
| 5 | Bahia | 9,98443 | 2.507,80322 | 63 | 188 | 218,5 | 547.955,004 | 564.722,611 | 2,97% |
| 6 | Ceará | 22,04784 | 514,28980 | 63 | 261 | 291,5 | 149.915,477 | 148.894,757 | 0,69% |
| 7 | Espírito Santo | 38,67011 | 167,18188 | 62 | 234 | 264,0 | 44.136,015 | 46.074,444 | 4,21% |
| 8 | Goiás | 15,27680 | 1.071,21149 | 75 | 348 | 384,5 | 411.880,818 | 340.125,715 | 21,10% |
| 9 | Maranhão | 13,82778 | 1.307,48010 | 79 | 206 | 244,5 | 319.678,883 | 329.642,170 | 3,02% |
| 10 | Mato Grosso | 8,48025 | 3.476,34362 | 70 | 213 | 247,0 | 858.656,874 | 903.206,997 | 4,93% |
| 11 | Mato Grosso do Sul | 13,22941 | 1.428,43031 | 60 | 214 | 243,0 | 347.108,565 | 357.145,535 | 2,81% |
| 12 | Minas Gerais | 9,98443 | 2.507,80322 | 77 | 206 | 243,5 | 610.650,084 | 586.521,121 | 4,11% |
| 13 | Pará | 7,07336 | 4.996,75993 | 68 | 214 | 247,0 | 1.234.199,703 | 1.245.759,305 | 0,93% |
| 14 | Paraíba | 32,01438 | 243,92135 | 70 | 189 | 223,0 | 54.394,461 | 56.467,239 | 3,67% |
| 15 | Paraná | 19,98730 | 625,79451 | 71 | 334 | 368,5 | 230.605,276 | 199.305,236 | 15,70% |
| 16 | Pernambuco | 20,89240 | 572,74769 | 66 | 126 | 158,0 | 90.494,135 | 98.068,021 | 7,72% |
| 17 | Piauí | 16,06889 | 968,20708 | 40 | 230 | 249,0 | 241.083,562 | 251.616,823 | 4,19% |
| 18 | Rio de Janeiro | 33,68167 | 220,37015 | 81 | 127 | 166,5 | 36.691,631 | 43.750,423 | 16,13% |
| 19 | Rio Grande do Norte | 38,16601 | 171,62735 | 81 | 215 | 254,5 | 43.679,160 | 52.809,602 | 17,29% |
| 20 | Rio Grande do Sul | 13,85164 | 1.302,97960 | 54 | 202 | 228,0 | 297.079,349 | 281.707,151 | 5,46% |
| 21 | Rondônia | 15,69091 | 1.015,41540 | 69 | 205 | 238,5 | 242.176,573 | 234.765,233 | 3,16% |
| 22 | Roraima | 12,82144 | 1.520,78003 | 54 | 126 | 152,0 | 231.158,564 | 224.273,831 | 3,07% |
| 23 | Santa Catarina | 23,04536 | 470,73123 | 75 | 186 | 222,5 | 104.737,699 | 95.730,921 | 9,41% |
| 24 | São Paulo | 14,69654 | 1.157,47017 | 69 | 201 | 234,5 | 271.426,754 | 248.219,481 | 9,35% |
| 25 | Sergipe | 57,61079 | 75,32382 | 64 | 206 | 237,0 | 17.851,746 | 21.926,908 | 18,59% |
| 26 | Tocantins | 15,27961 | 1.070,81752 | 79 | 216 | 254,5 | 272.523,060 | 277.720,404 | 1,87% |
| | | | | | | | | Média de Erro: 7,37% | |

- **Escala (500*km* em *cm*):** significa que esta quantidade no mapa em centímetros equivale a 500*km* na vida real. *Exemplo: no mapa do Acre cada 16,55cm equivale a 500km na vida real.*
- **Escala (1$cm^2$ em $km^2$):** significa que a cada 1$cm^2$ no mapa equivale a esta quantidade em $km^2$ na vida real. *Exemplo: no Acre cada 1$cm^2$ no mapa equivale a 912,99 $km^2$ na vida real.*
- **Pontos na Borda:** Quantidade de pontos contados pelos alunos na borda dos polígonos desenhados por eles.
- **Pontos no Interior:** Quantidade de pontos contados pelos alunos no interior dos polígonos desenhados por eles.
- **Área em $cm^2$:** Aplicação do Teorema de Pick com os pontos na borda e no interior calculados nas colunas anteriores pelos alunos.
- **Área em $km^2$:** Conversão da Área em $cm^2$ da coluna anterior para $km^2$.
- **Área IBGE ($km^2$ em 2018):** Área de cada Estado retirado do site do IBGE com dados de 2018.
- **Erro (%):** Porcentagem de diferença entre a área calculada em sala de aula com o Teorema de Pick e o dado retirado no site do IBGE.
- **Média de Erro:** é a Média de erro entre todos os Erros dos Estados.

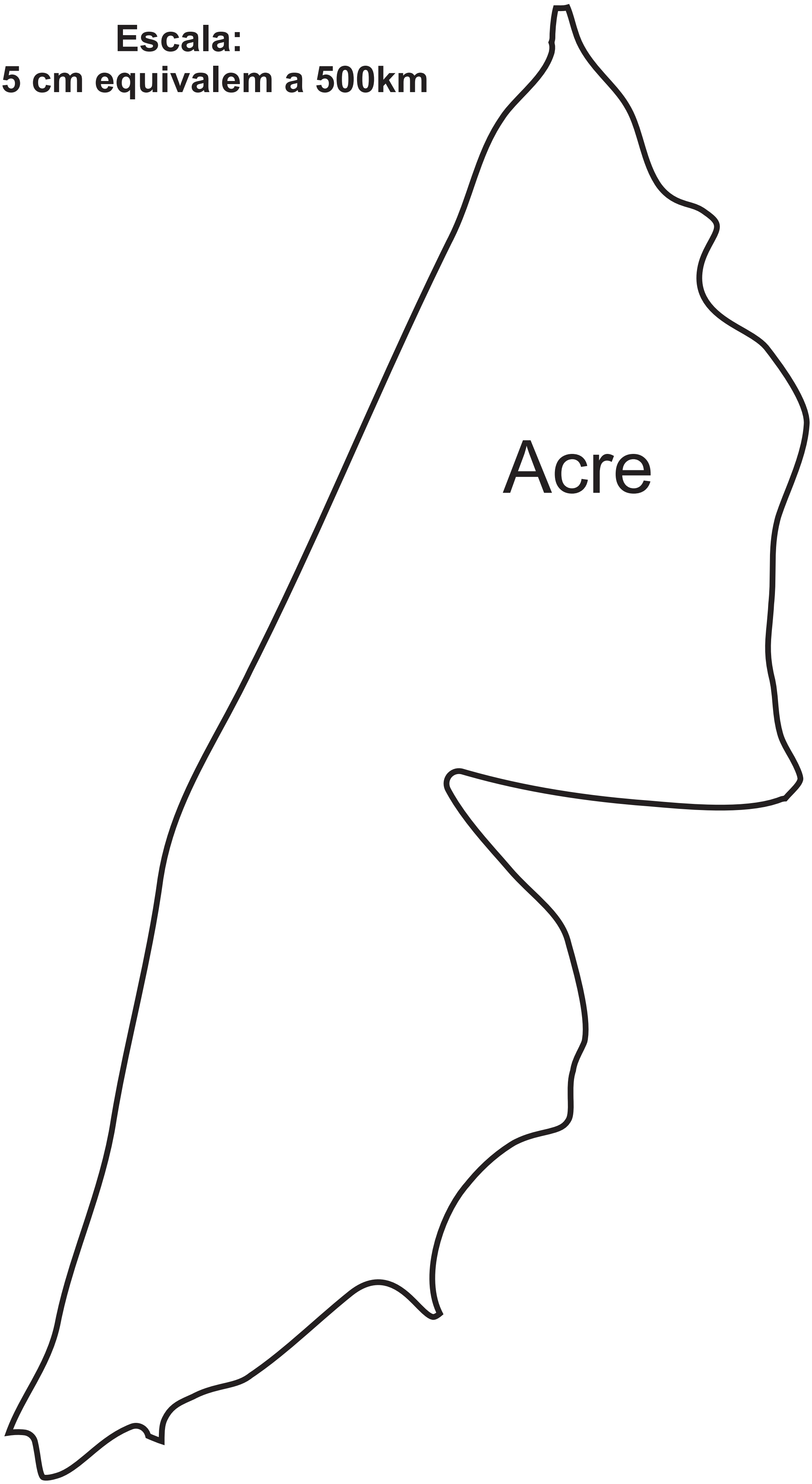
# APÊNDICE C: Malha Pontilhada de 1 cm

Malha pontilhada em folha A4 com espaçamentos verticais e horizontais de 1 centímetro entre cada ponto.

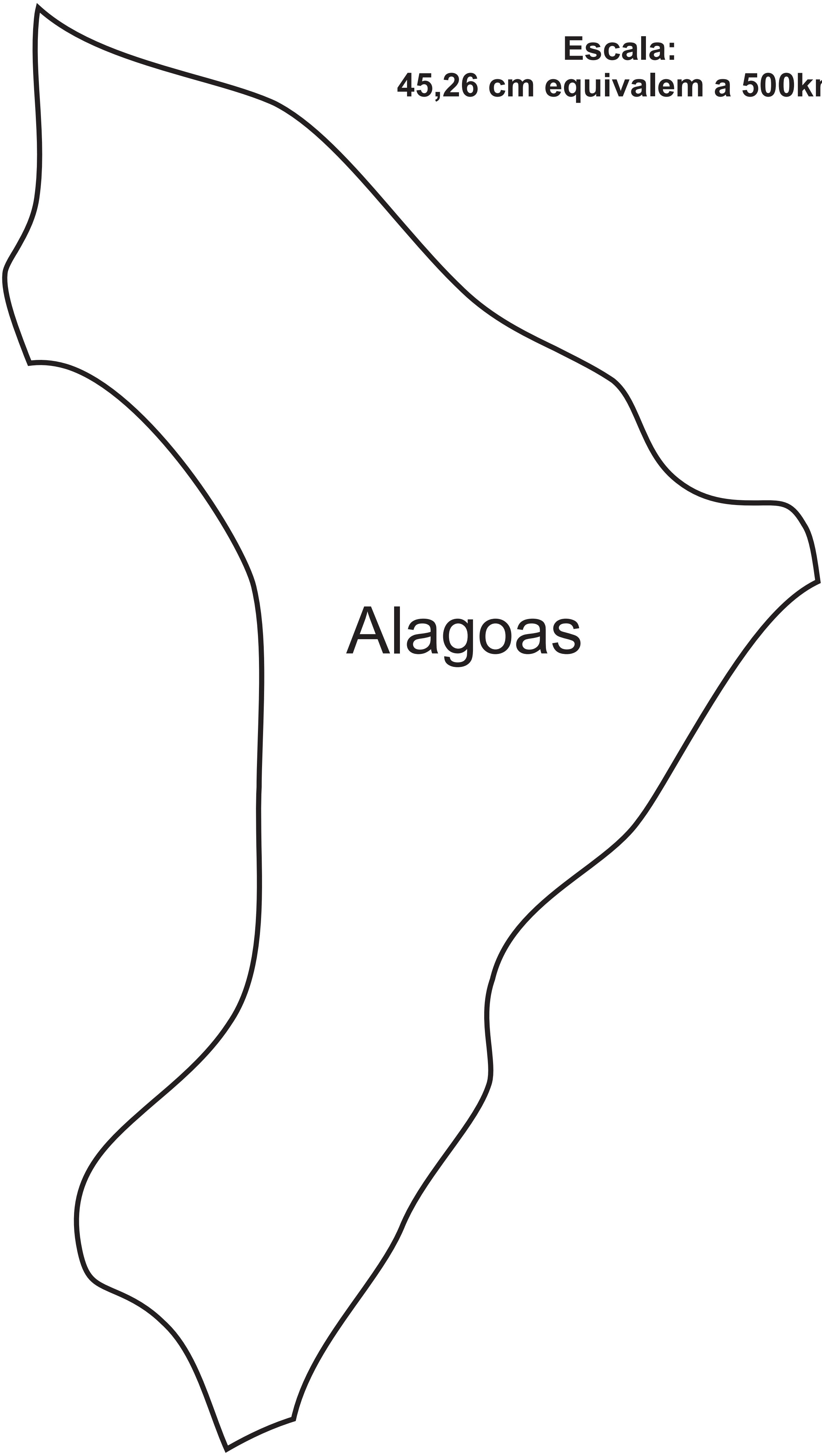
# APÊNDICE D: Estados Brasileiros em Escala

Estados brasileiros em ordem alfabética e com as suas devidas escalas.

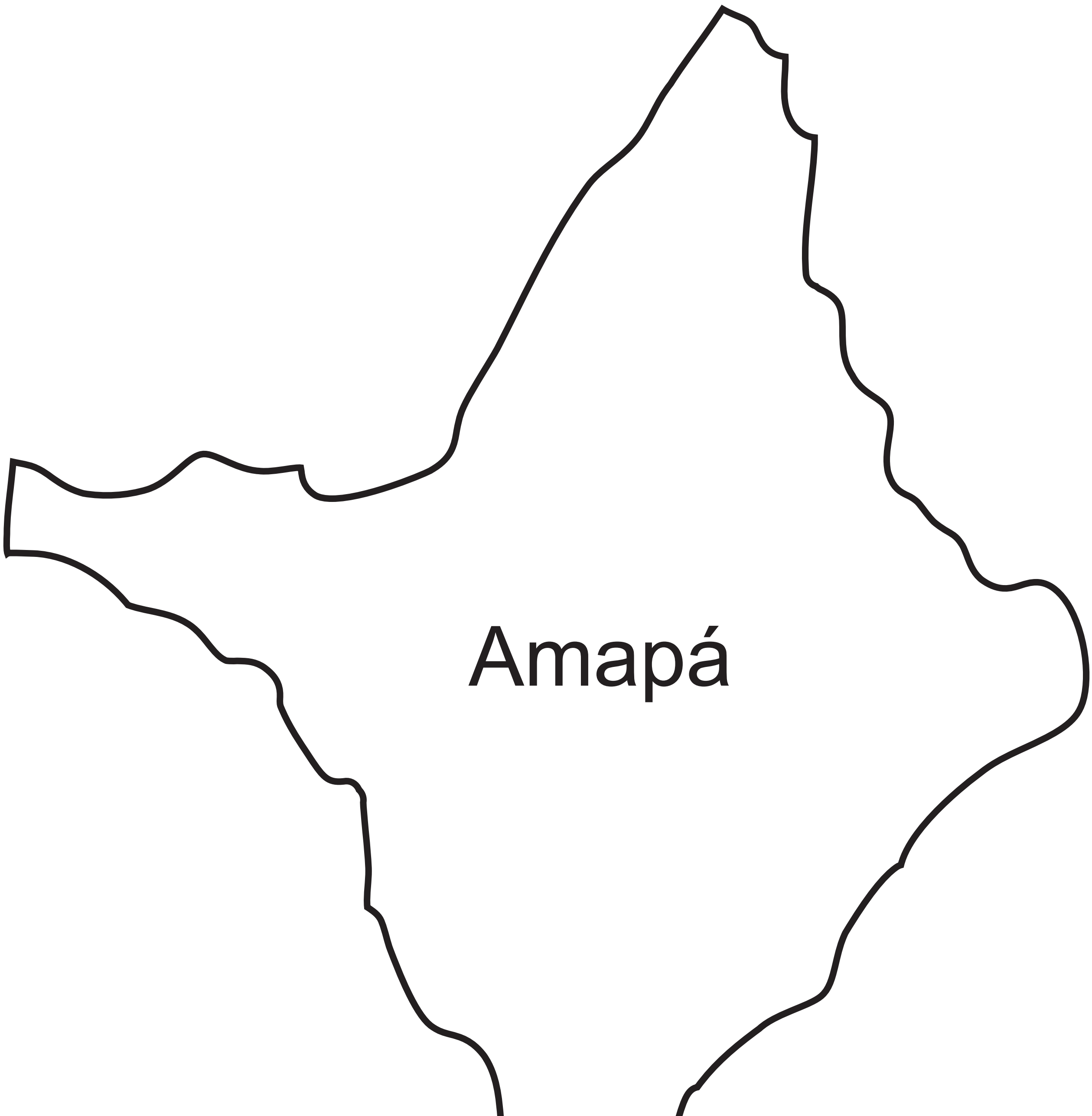
**Escala:**
**16,55 cm equivalem a 500km**



**Escala:**
**45,26 cm equivalem a 500km**



**Escala:**
**15,69 cm equivalem a 500km**

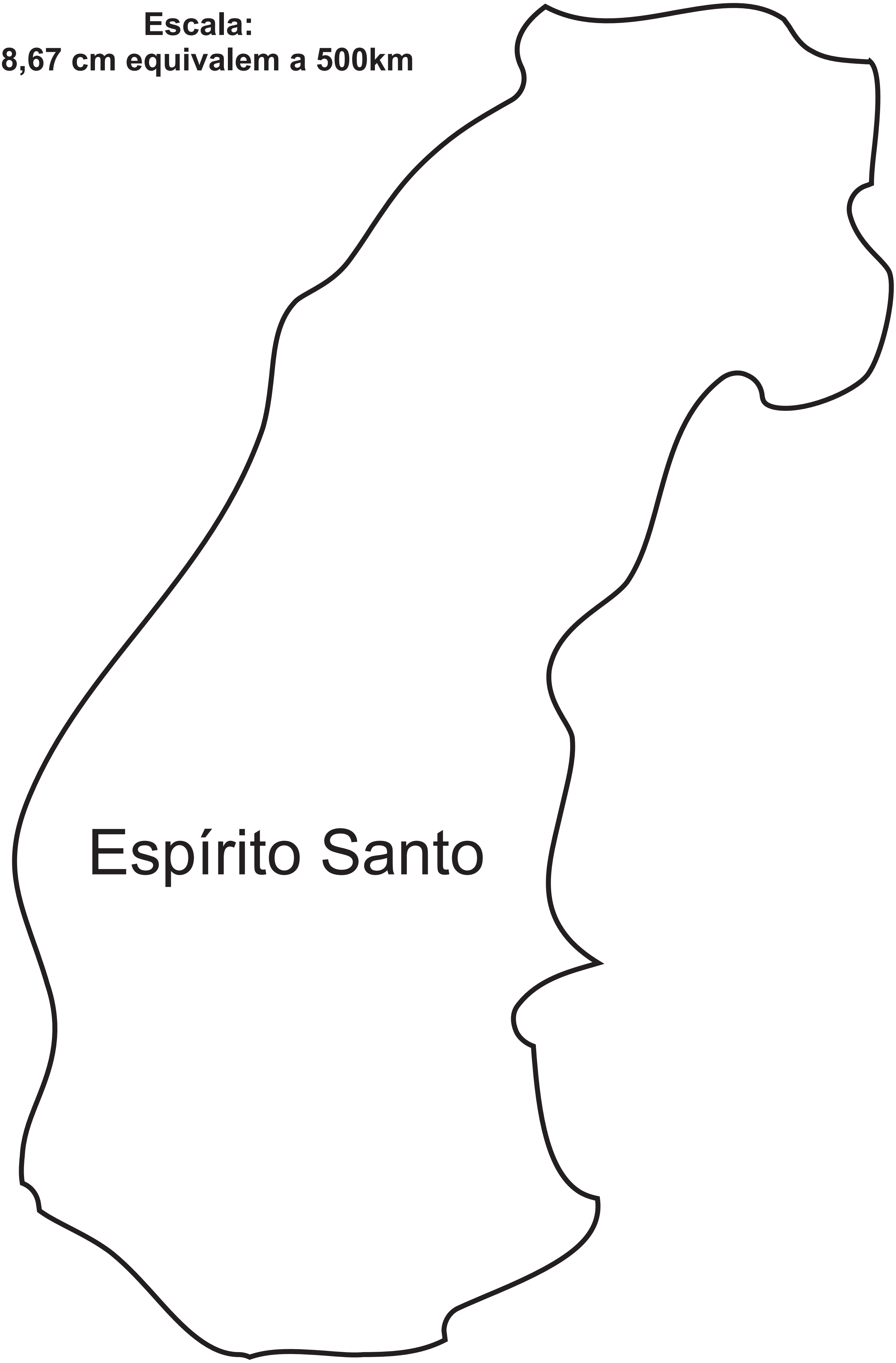



**Escala:**
**45,26 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**9,98 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**22,05 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**38,67 cm equivalem a 500km**



**Escala:**
**15,28 cm equivalem a 500km**

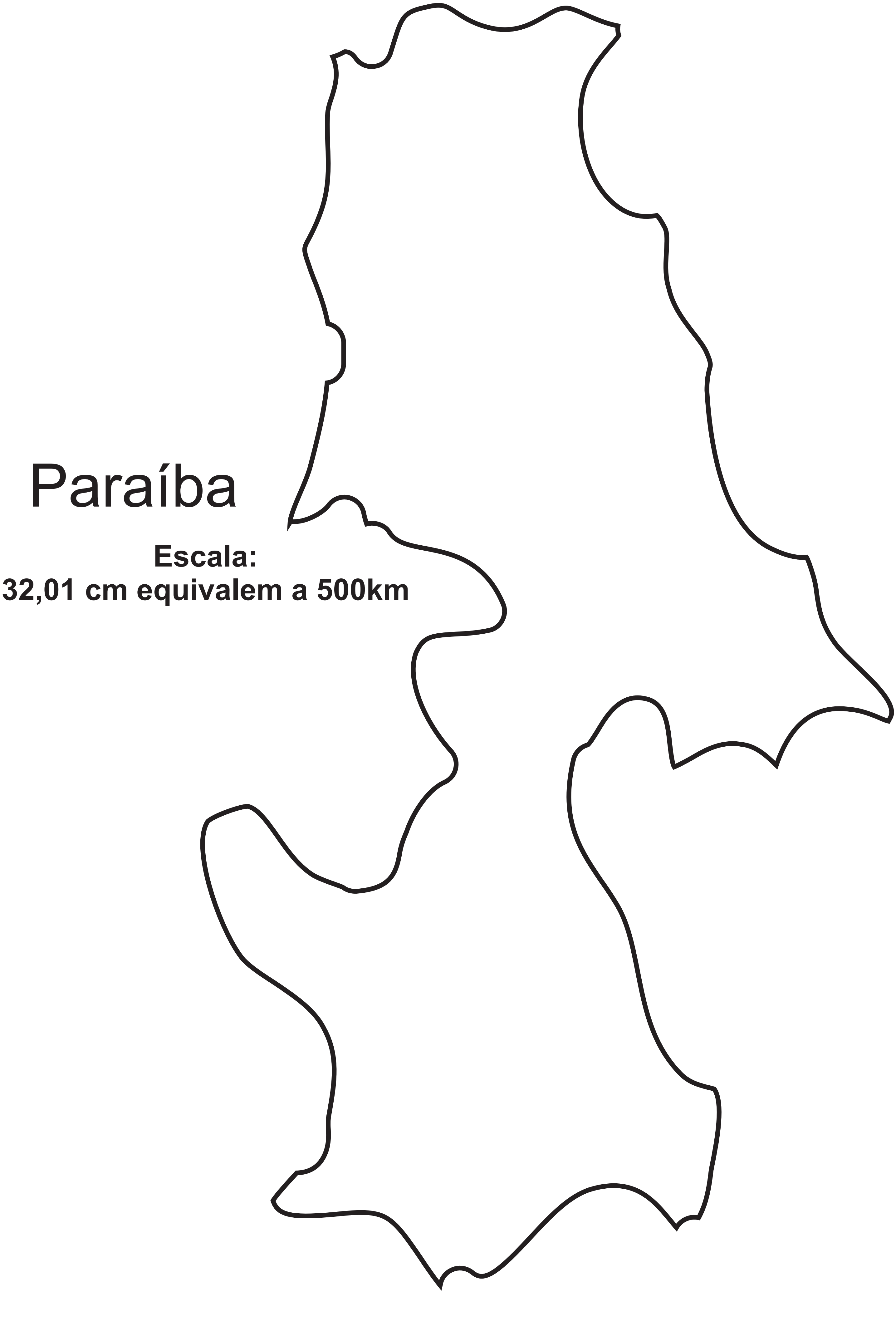

Maranhão
Escala:
13,83 cm equivalem a 500km

**Escala:**
**8,48 cm equivalem a 500km**

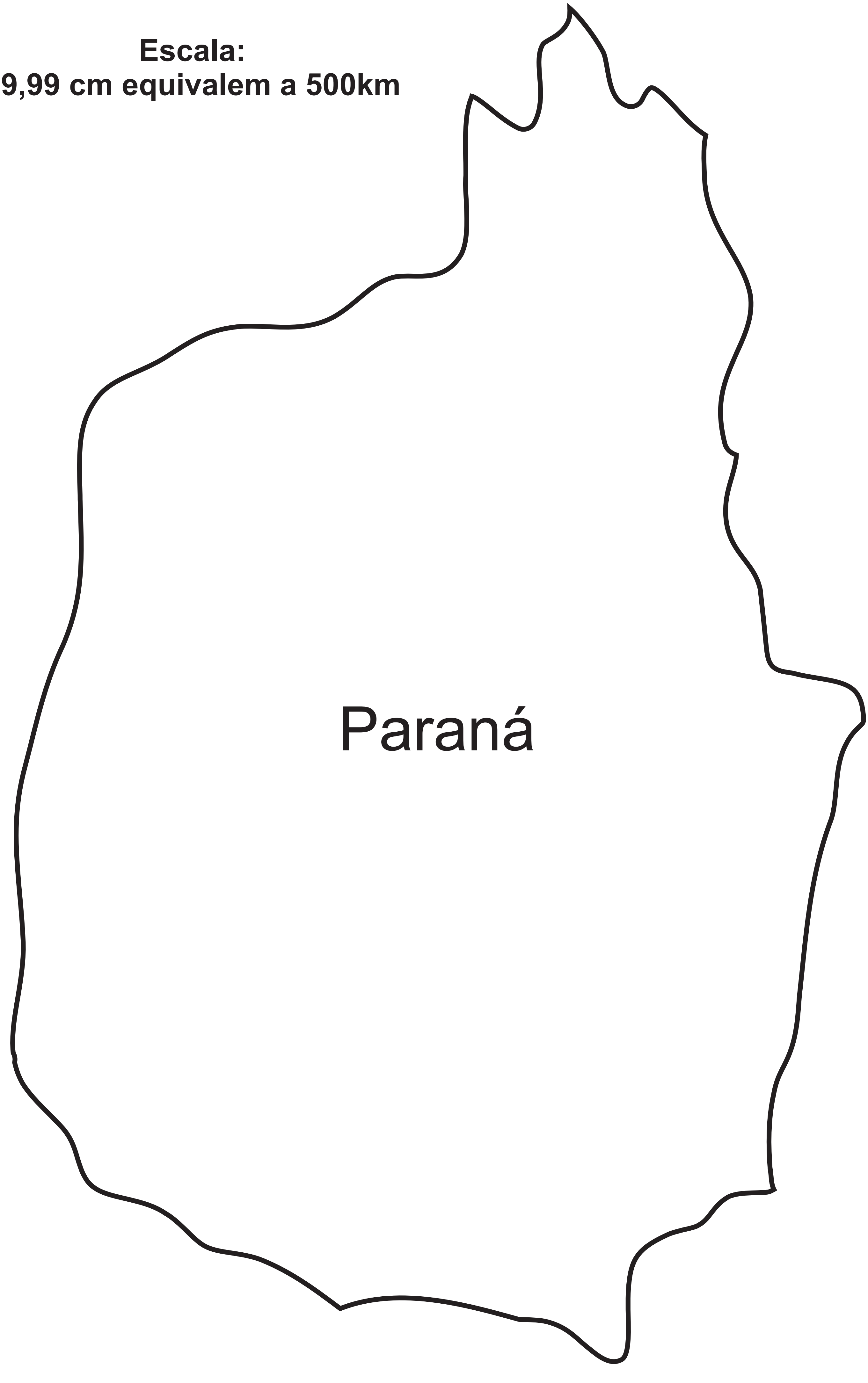
**Escala:**
**13,23 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**9,98 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**7,07 cm equivalem a 500km**

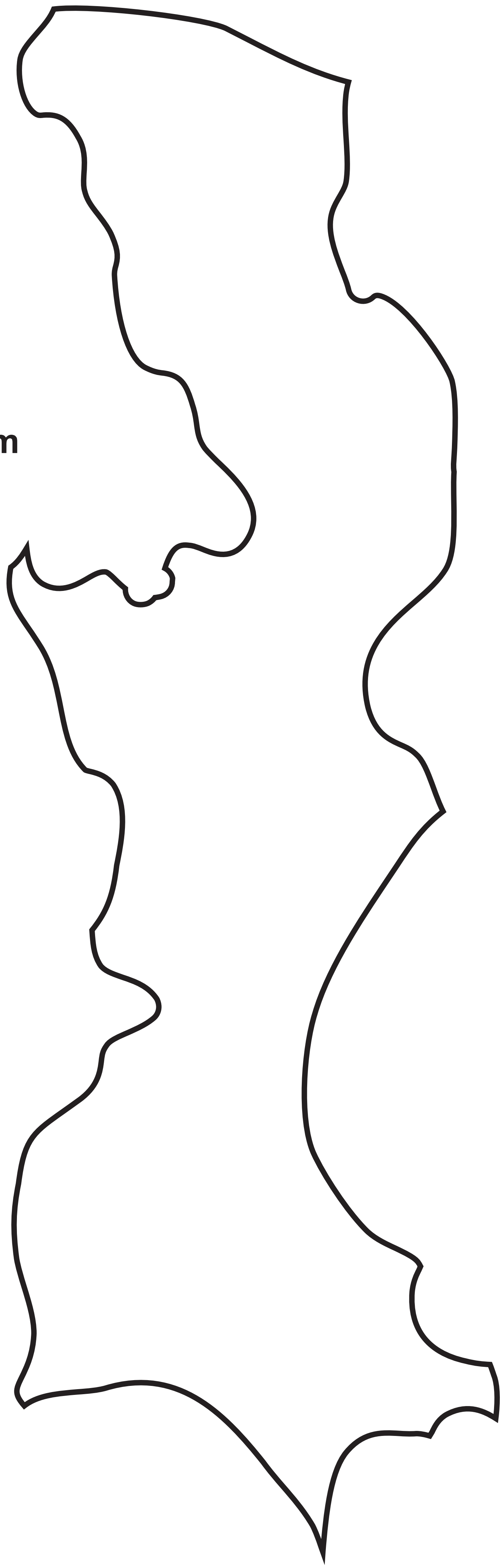

Paraíba
Escala:
32,01 cm equivalem a 500km

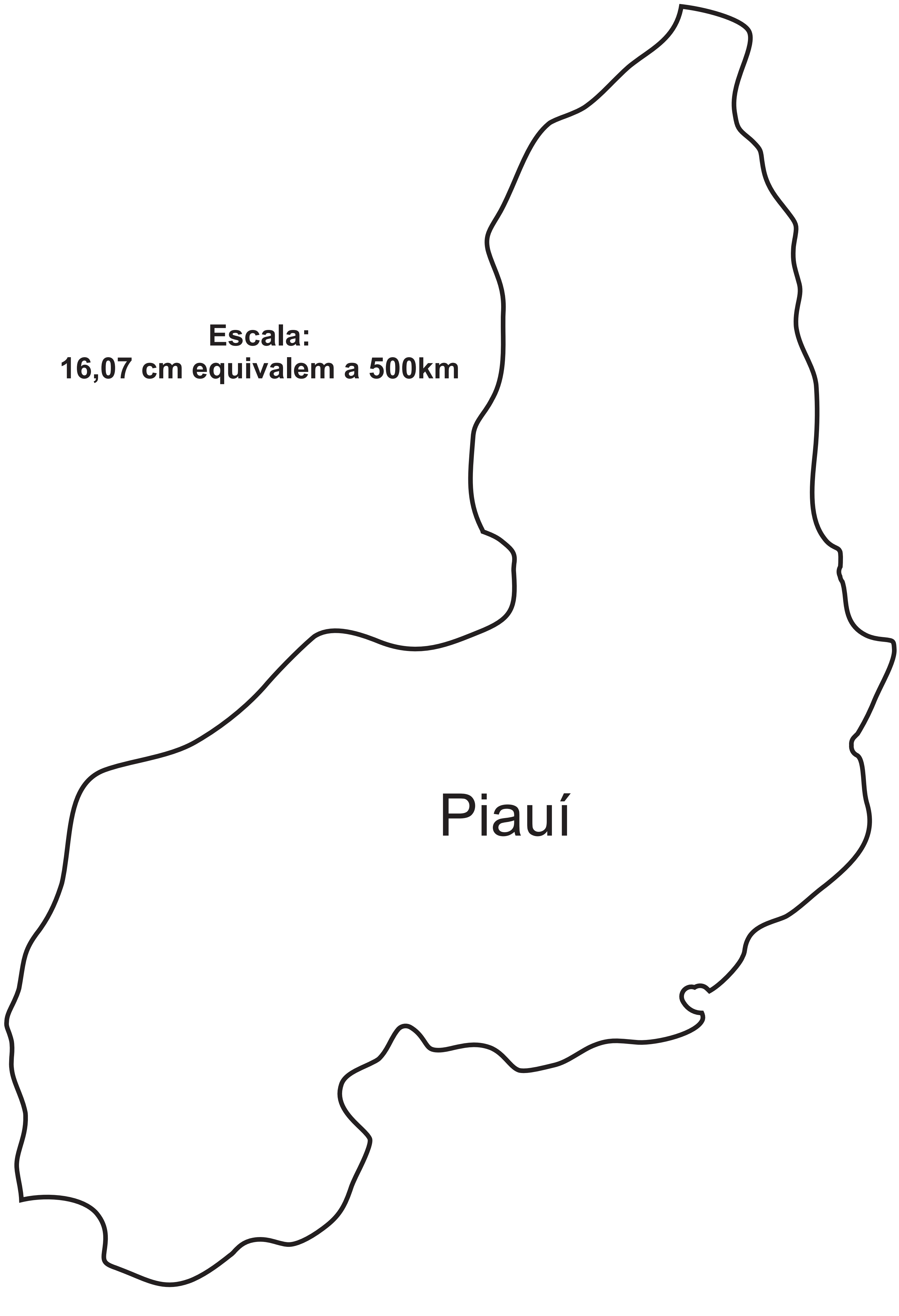
**Escala:**
**19,99 cm equivalem a 500km**

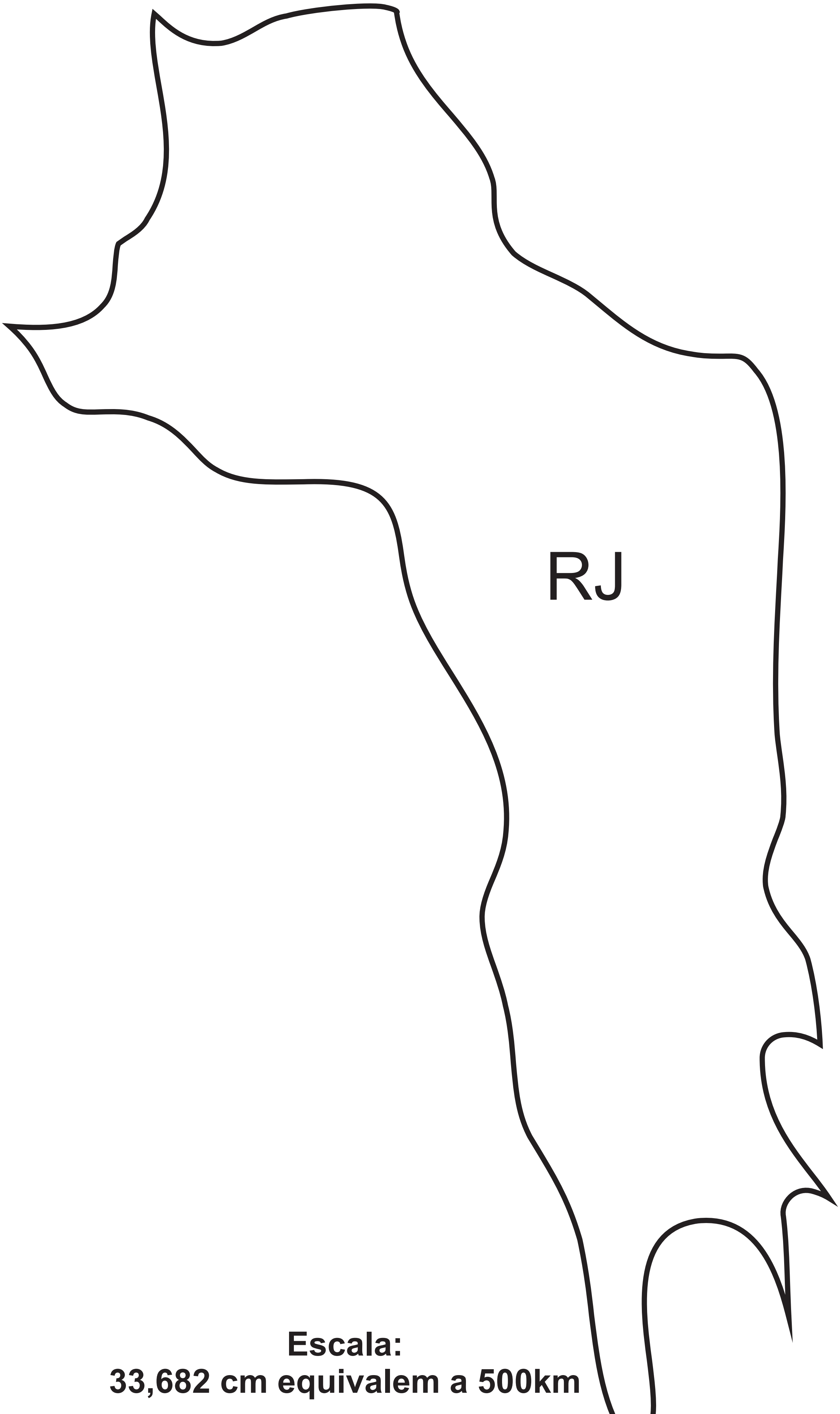


# Pernambuco

**Escala:**
**20,89 cm equivalem a 500km**




Escala:
16,07 cm equivalem a 500km
Piauí




**Escala:**
**33,682 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**38,17 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**13,85 cm equivalem a 500km**

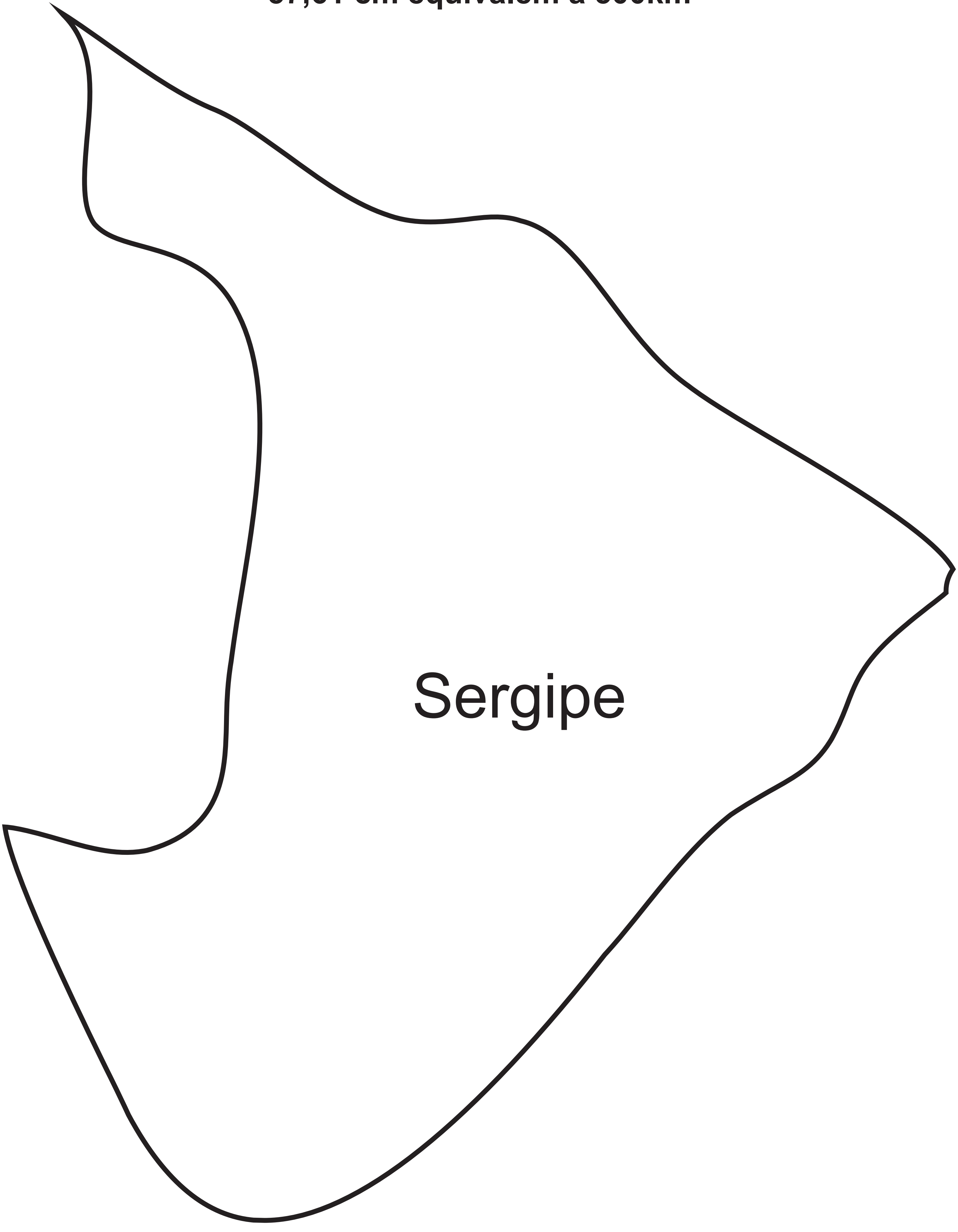
**Escala:**
**15,69 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**12,82 cm equivalem a 500km**

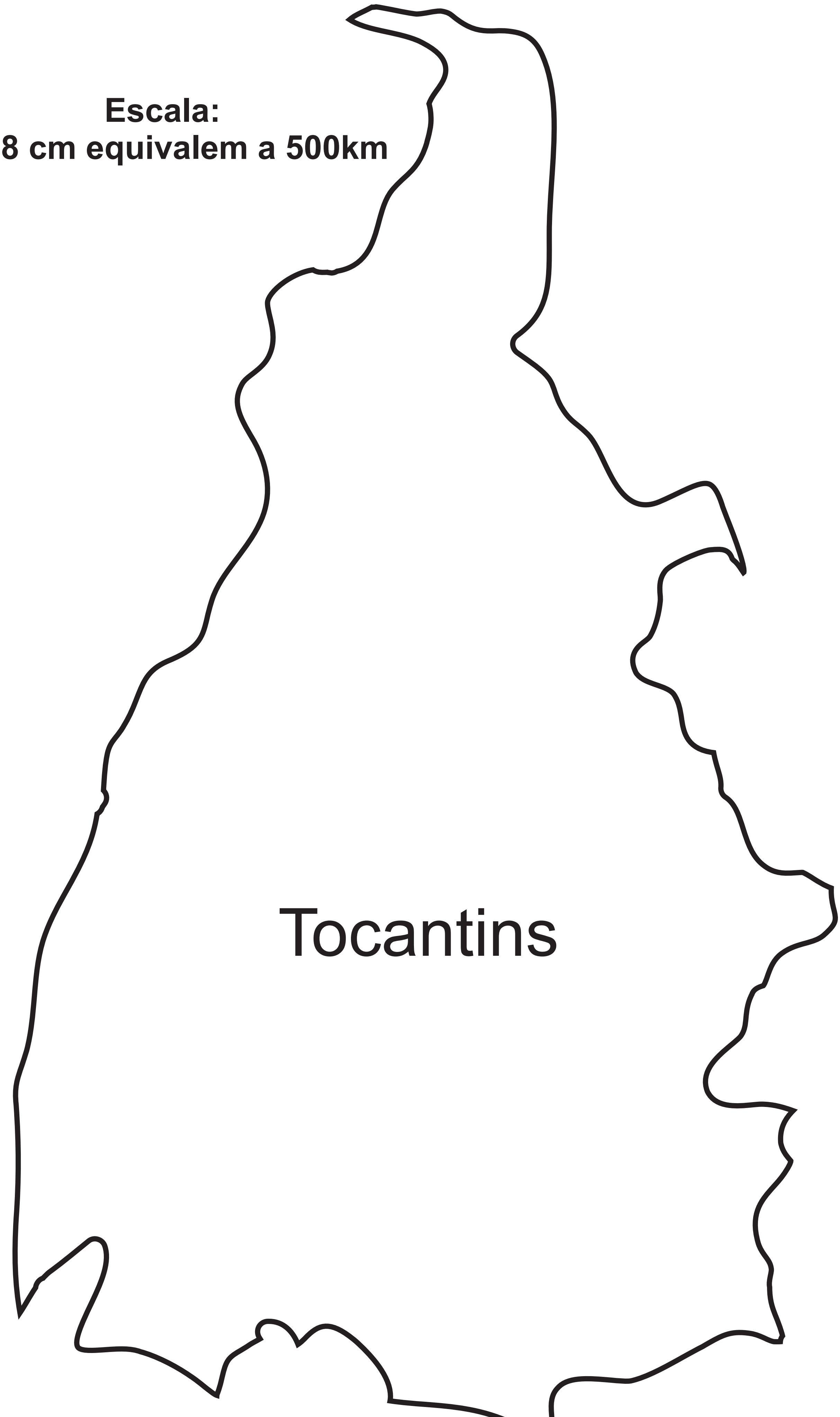

**Escala:**
**23,05 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**14,69 cm equivalem a 500km**

**Escala:**
**57,61 cm equivalem a 500km**

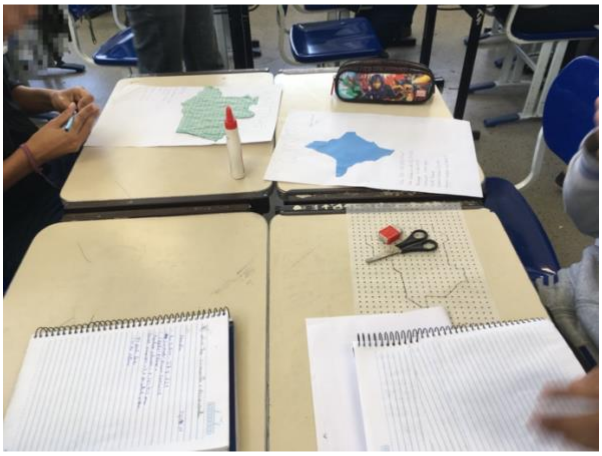
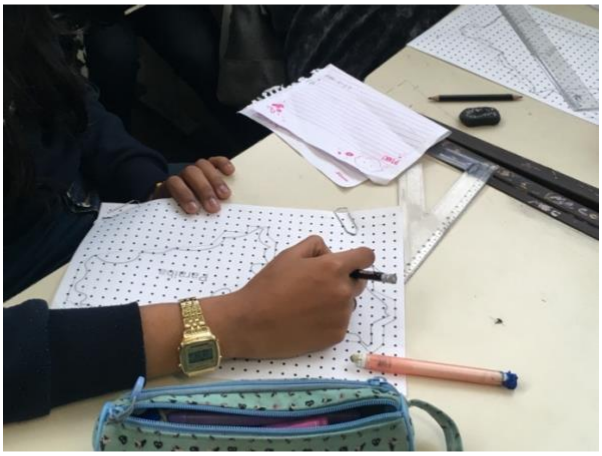


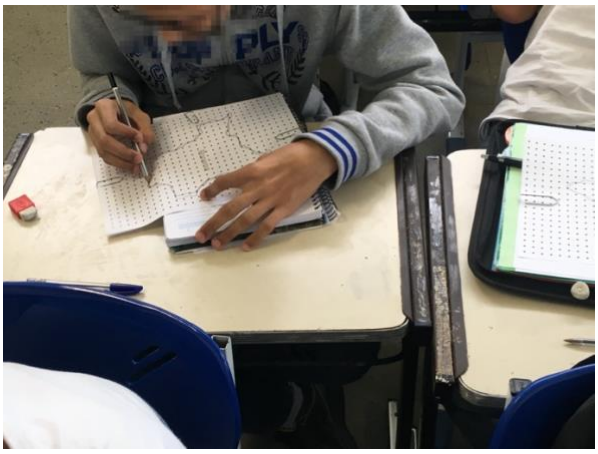
**Escala:**
**15,28 cm equivalem a 500km**

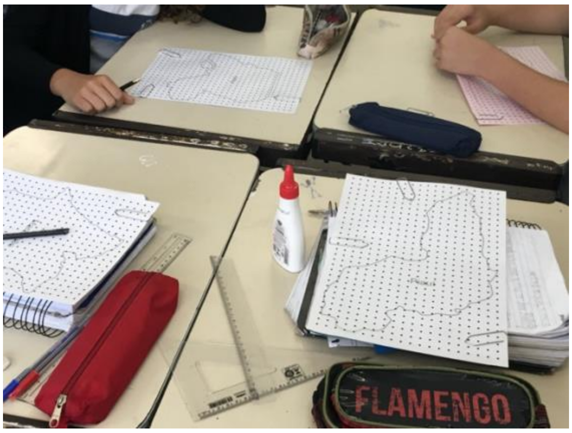


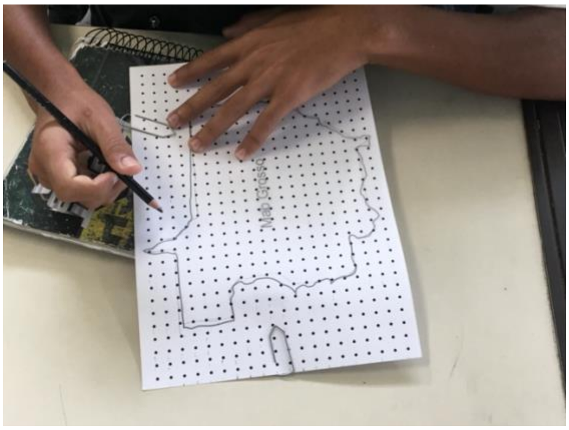
# APÊNDICE E: Fotos de Alguns Trabalhos dos Alunos

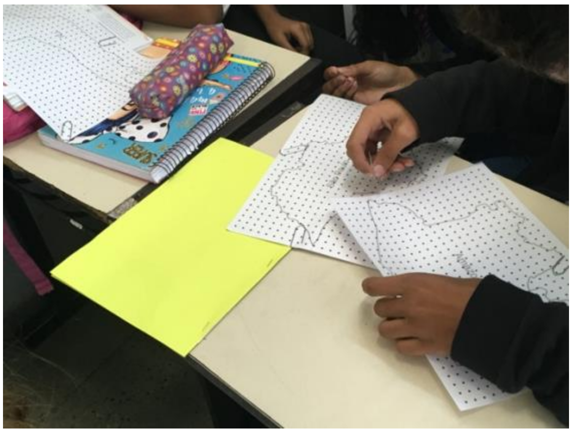
Algumas fotos da Atividade sendo aplicada com os alunos e seus trabalhos.

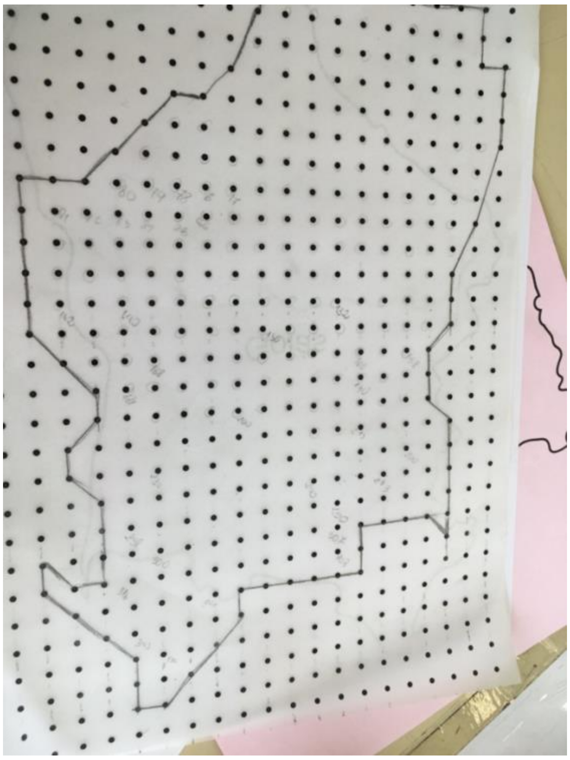





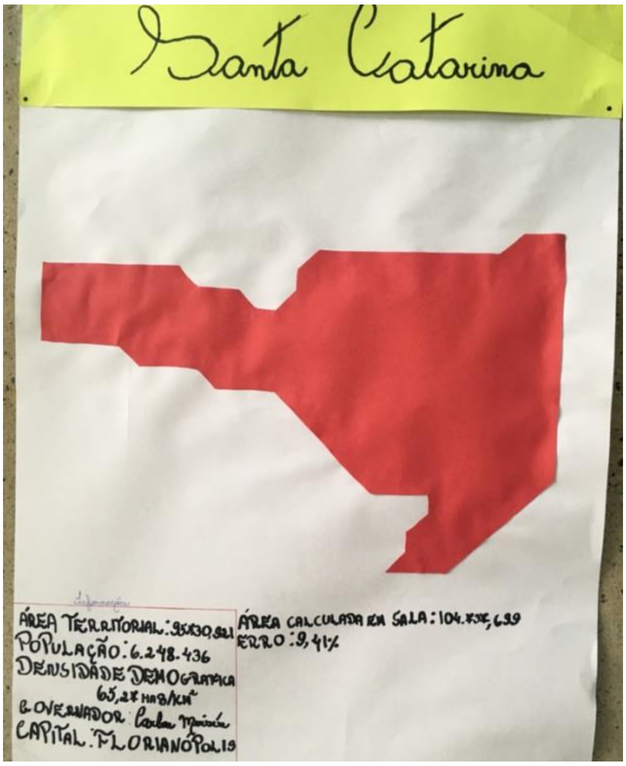

FLAMENGO

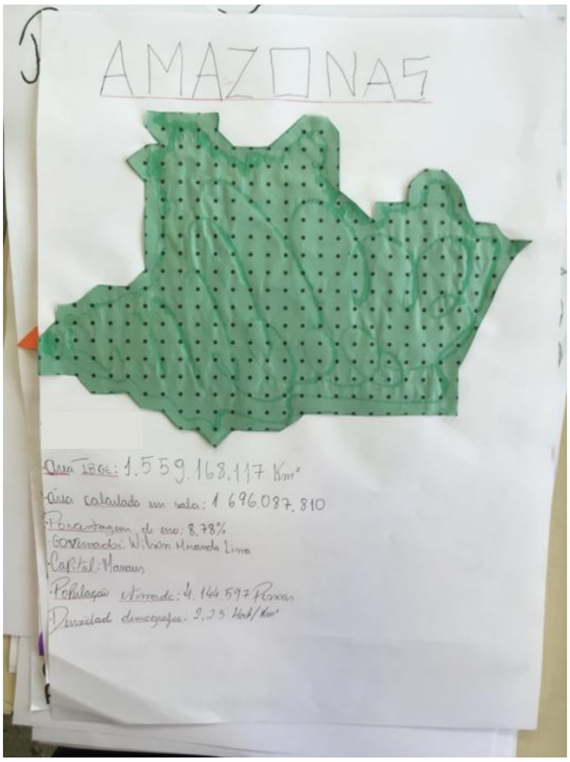


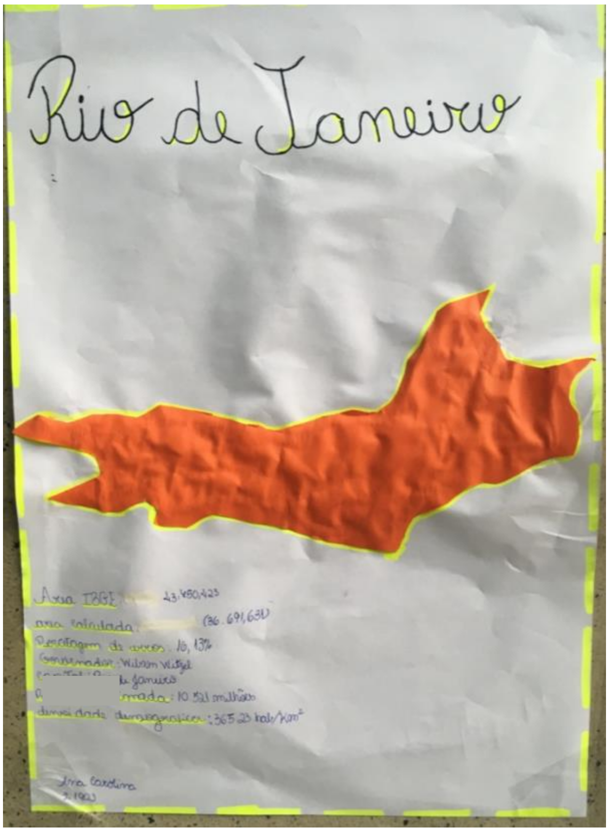


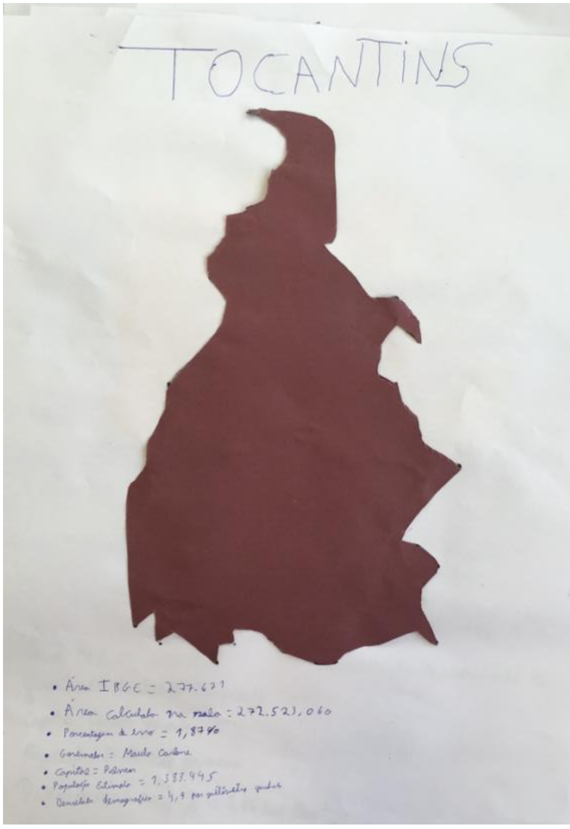



Goiás
Área IBGE:
340.125,715
Área Calculada em Sala:
411.880,818
Porcentagem de erro:
21,10%
Governador:
Ronaldo Caiado
População estimada:
7.018.354
Densidade demográfica
17,20 hab/Km²
Capital: Goiânia


Santa Catarina
ÁREA TERRITORIAL: 95.730,921
POPULAÇÃO: 6.248.436
DENSIDADE DEMOGRÁFICA
65,27 HAB/KM²
CAPITAL: FLORIANÓPOLIS
ÁREA CALCULADA EM SALA: 104.737,639
ERRO: 9,41%


AMAZONAS
Área calculada em sala: 1.696.087.810
Porcentagem de erro: 8,78%
Capital: Manaus


Rio de Janeiro
Área IBGE 43.750,423
(36.691,631)
Porcentagem de erros: 16,13%
10.521 milhões
:365,23 hab/km²
Ana Carolina


TOCANTINS
Área IBGE = 277.621
Área calculada na sala = 272.521,060
Porcentagem de erro = 1,87%