Guttenberg Sergistótanes Santos Ferreira
Maria Madalena Dullius
Marco Antonio Moreira

# Sequência didática para aprendizagem significativa de limites e derivadas por meio da teoria das situações didáticas

UNIVATES
INSTITUTO FEDERAL
Ceará
Campus Juazeiro do Norte

Universidade do Vale do Taquari – Univates

Doutorado Profissional em Ensino de Ciências Exatas

Produto Educacional

# SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE LIMITES E DERIVADAS POR MEIO DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Guttenberg Sergistótanes Santos Ferreira

Maria Madalena Dullius

Marco Antonio Moreira

Dados internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F383 Ferreira, Guttenberg Sergistótanes Santos

Sequência didática para aprendizagem significativa de limites e derivadas por meio da teoria das situações didáticas [recurso eletrônico] / Guttenberg Sergistótanes Santos Ferreira, Maria Madalena Dullius, Marco Antonio Moreira – Lajeado, RS : Ed. do Autor, 2024.

816 kB; PDF

ISBN 978-65-01-25700-6

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Teoria das Situações Didáticas. I. Ferreira, Guttenberg Sergistótanes Santos. II. Dullius, Maria Madalena. III. Moreira, Marco Antonio. IV. Título.

CDU: 517.2/.3:37

Bibliotecária Gigliola Casagrande – CRB 10/2798

# Sumário

# Apresentação

Este Produto Educacional foi desenvolvido a partir de uma sequência de atividades didáticas que envolve os temas de Limites e Derivadas de funções reais de uma variável. Sendo destinado a professores de Cálculo Diferencial, este material possui o intuito de proporcionar aprendizagem significativa dos conceitos de Limite e Derivada numa proposta de ensino envolvendo problemas contextualizados.

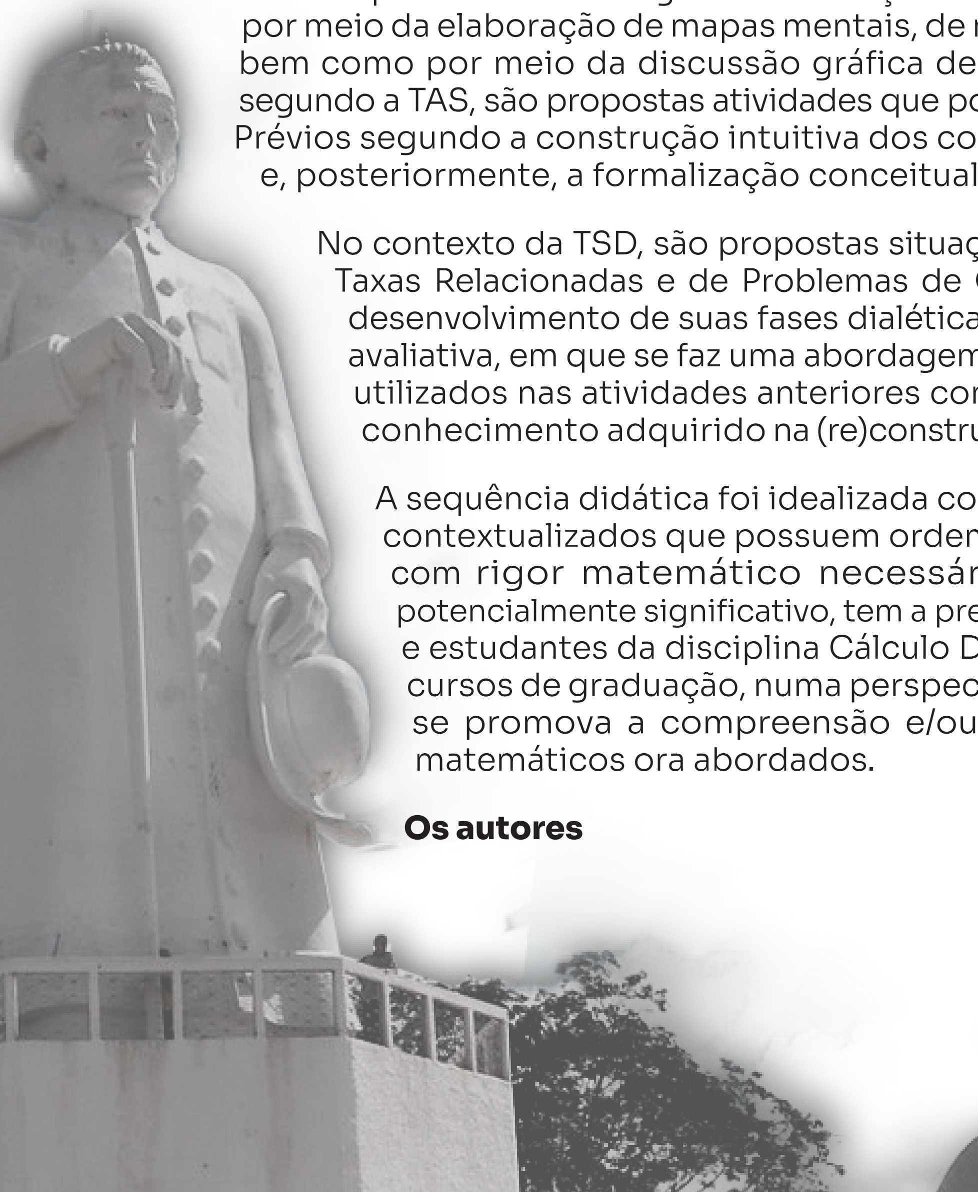
A sequência didática é resultado de estudos desenvolvidos no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas junto à Universidade do Vale do Taquari - Univates, sob a orientação dos professores Dr. Marco Antonio Moreira e Dra. Maria Madalena Dullius, na tese **Aprendizagem Significativa de Limites e Derivadas por meio da Teoria das Situações Didáticas no Cariri Cearense**, que teve como objetivo geral investigar contribuições da Teoria das Situações Didáticas (TSD) para desenvolvimento de aprendizagem significativa de Limites e Derivadas.

No contexto da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), a sequência didática possibilita investigar os subsunçores que os estudantes possuem, por meio da elaboração de mapas mentais, de naturezas livre e direcionado, bem como por meio da discussão gráfica de funções polinomiais. Ainda segundo a TAS, são propostas atividades que podem servir de Organizadores Prévios segundo a construção intuitiva dos conceitos de Limite e Derivada e, posteriormente, a formalização conceitual de Derivada.

No contexto da TSD, são propostas situações envolvendo os temas de Taxas Relacionadas e de Problemas de Otimização, possibilitando o desenvolvimento de suas fases dialéticas. Existe ainda uma atividade avaliativa, em que se faz uma abordagem de todos os conhecimentos utilizados nas atividades anteriores com o objetivo de evidenciar o conhecimento adquirido na (re)construção do conceito de Derivada.

A sequência didática foi idealizada com a proposição de problemas contextualizados que possuem ordem crescente de complexidade com rigor matemático necessário. Este material didático, potencialmente significativo, tem a pretensão de auxiliar professores e estudantes da disciplina Cálculo Diferencial, nos mais diversos cursos de graduação, numa perspectiva autoinstrucional em que se promova a compreensão e/ou ressignificação dos temas matemáticos ora abordados.

**Os autores**



# Contextualização

Este material aborda a temática que envolve aprendizagem significativa e situações didáticas no ensino de Cálculo Diferencial, uma disciplina que historicamente possui altos índices de retenção e de evasão. A proposta didática foi idealizada para professores que possam utilizá-la com estudantes que já tenham tido algum contato com os conceitos de Limite e Derivada, podendo também ser utilizada durante a abordagem inicial da disciplina de Cálculo Diferencial, considerando que:

> *"Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo"* (Ausubel apud Moreira, 2006, p. 13).

## TAS

*desenvolvida por David P. Ausubel, busca relacionar "ideias que expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante, já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende".*

(Moreira, 2012, p. 30, tradução nossa).

## TSD

*desenvolvida por Guy Brousseau, tem por finalidade "estudar as situações que são propícias à aquisição de conhecimento e às relações estabelecidas entre aluno, professor e o saber mobilizado em um ambiente de ensino. Segundo Brousseau (1997), situações didáticas são situações usadas para ensinar; implicam, portanto, todo o ambiente que cerca o aluno, incluindo o professor e o sistema educacional em si".*

(Silva; Almouloud, 2018, p. 117).

Por meio da TAS é possível fazer um enlace entre os conhecimentos prévios e o novo conhecimento adquirido, com o intuito maior de lhes dar significado, de trazer verdadeira compreensão.

Conhecimentos prévios

**TAS**

Predisposição para aprender

Compreendida não somente como a vontade em querer aprender, mas também em ter os conhecimentos mínimos necessários para que a aprendizagem se desenvolva.

Material didático potencialmente significativo

O material didático deve ser desenvolvido para que propicie interação entre as ideias relevantes já existentes e as novas ideias, mas quem pode afirmar que o material é significativo é o estudante.

Representado pelo Triângulo Didático, que denota as relações epistemológica, didática e cognitiva para o desenvolvimento da aprendizagem.

Relações entre saber, professor e estudante

**TSD**

Construção do *milieu*

Antagônico ao estudante, ou seja, que provoque desequilíbrios, exigindo reflexão e criticidade sobre aquilo que aprende.

Fases dialéticas do conhecimento

Responsáveis por evidenciar o desenvolvimento da aprendizagem matemática, são elas:
Ação, Formulação, Validação e Institucionalização.

# Objetivos

## Geral

- Desenvolver atividades para o ensino de Limites e Derivadas por meio de situações didáticas com vistas à construção de aprendizagem significativa.

## Específico

- Apresentar uma sequência didática com problemas potencialmente significativos para aprendizagem de Limites e Derivadas, baseada nos pressupostos da TAS e da TSD.

- Proporcionar uma alternativa metodológica ao ensino de Limites e Derivadas.

# Detalhamento das Atividades

No Quadro 1, consta uma síntese do detalhamento das atividades que podem ser desenvolvidas com os estudantes. A proposta didática é passível de alterações segundo a realidade de cada sala de aula; sendo assim, nem todas as atividades devem ser seguidas na ordem em que estão apresentadas, bem como o quantitativo de aulas previstas pode ser alterado em cada grupo de atividades.

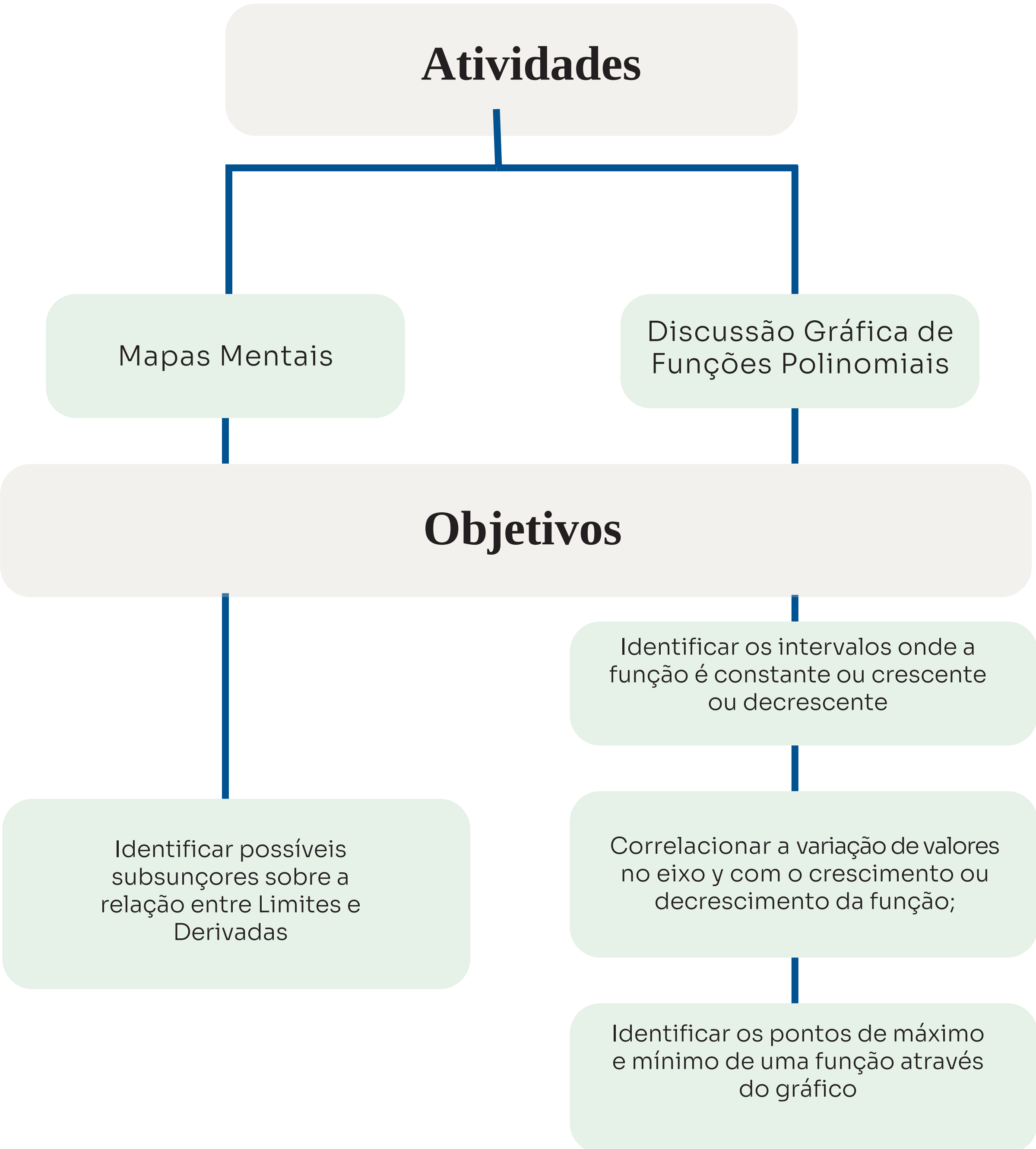
Quadro 1 – Síntese de Atividades

| Grupo | Atividades | Aulas Previstas |
|---|---|---|
| Subsunçores | Mapa Mental Livre<br>Mapa Mental Direcionado<br>Discussão gráfica de funções polinomiais | 2 h/a |
| Organizadores Prévios | Construção intuitiva dos conceitos de Limite e Derivada<br>Formalização do conceito de Derivada | 4 h/a |
| Situações Didáticas I | Problemas de Taxas Relacionadas | 4 h/a |
| Situações Didáticas II | Problemas de Otimização | 4 h/a |
| Situações Didáticas III | Avaliação | 2 h/a |

Fonte: Dos autores (2024).

# Subsunçores

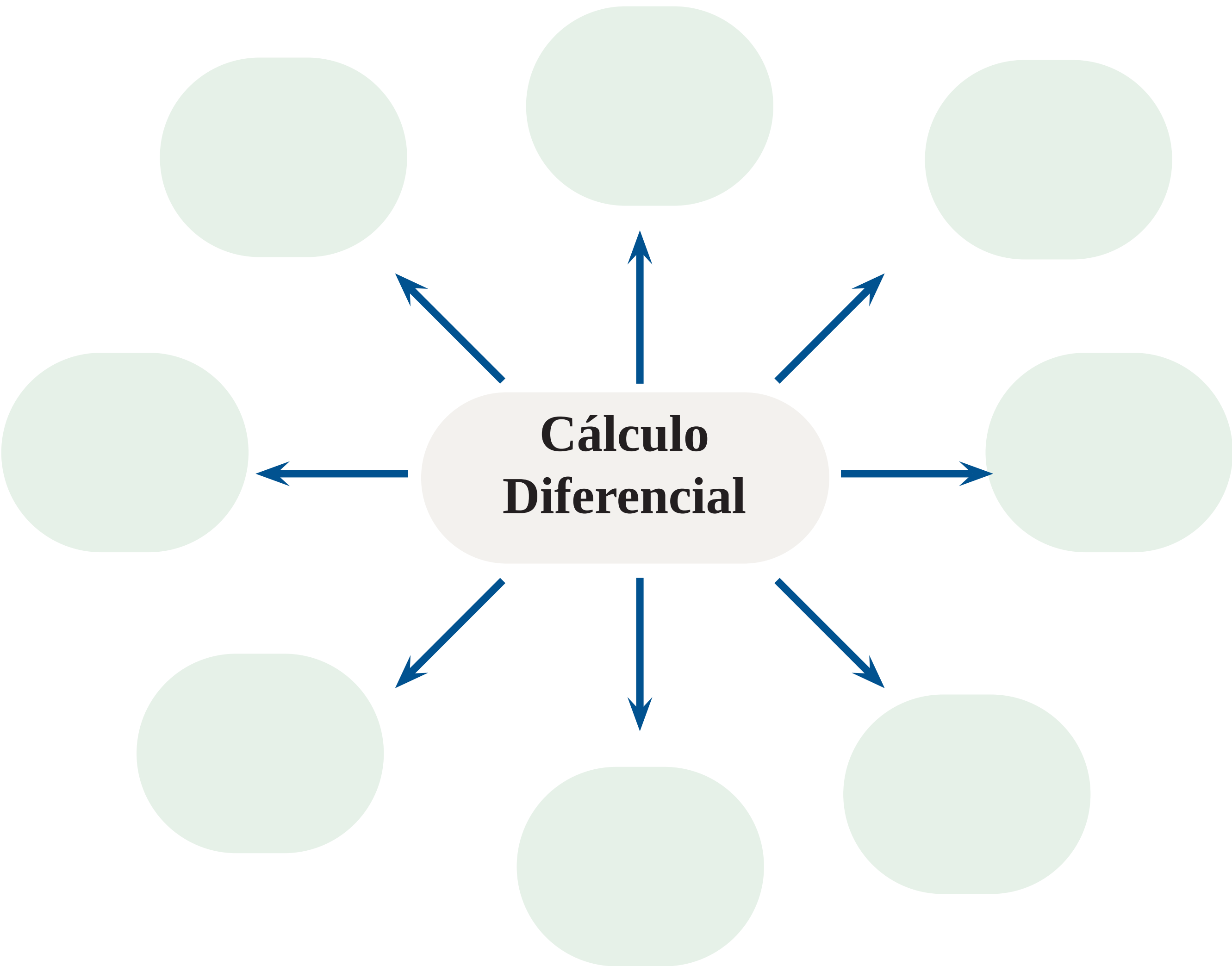
*“Subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto” (Moreira, 2012, p. 30).*



## Mapa Mental Livre

Mapa mental é uma ferramenta de organização de ideias, cujo desenvolvimento ocorre por meio de palavras-chave, cores e imagens (opcionalmente), dispostos ao centro, do qual se irradia um encadeamento hierarquizado de informações que se estrutura de maneira não linear (Batista et al., 2013; Galante, 2014).

Figura 1 – Mapa Mental Livre




Fonte: Dos autores (2024).

Os mapas mentais podem ser utilizados para identificar subsunçores quanto à relação entre Limites e Derivadas (Stefenon; Moreira; Sahelices, 2019); para tanto, pode-se construir nuvens de palavras para discussão dos significados evidenciados, tanto de ordem epistemológica quanto pessoal e cognitiva.

## Mapa Mental Direcionado

> *"Os mapas [mentais] são ferramentas de planificação e de anotação de informações de forma não linear [...], isto significa que a ideia principal é normalmente colocada no centro e as ideias associadas são descritas apenas com palavras-chave"* (Galante, 2014, p. 16).

Figura 2 – Mapa Mental Direcionado

1. Observando as palavras centrais, correlacione-as com os termos indicando o nível de relação:
1 - Forte; 2 - Moderada; 3 - Fraca.


2. Escreva sobre a relação que existe entre Limites e Derivadas, e sobre a correlação entre estes termos centrais e as demais palavras.

Fonte: Dos autores (2024).

O desenvolvimento do mapa mental direcionado pode revelar a existência de subsunçores no estudo de Cálculo Diferencial, considerando que as marcações "forte", "moderada" e "fraca" podem denotar uma reconciliação integrativa realizada pelos estudantes durante o desenvolvimento da atividade.

## Discussão Gráfica de Funções Polinomiais

1. Nas funções representadas pelos gráficos 1 e 2, responda em cada caso:

   a. Em quais intervalos a função é crescente? E decrescente?

   b. Existem intervalos nos quais a função é constante? Quais?

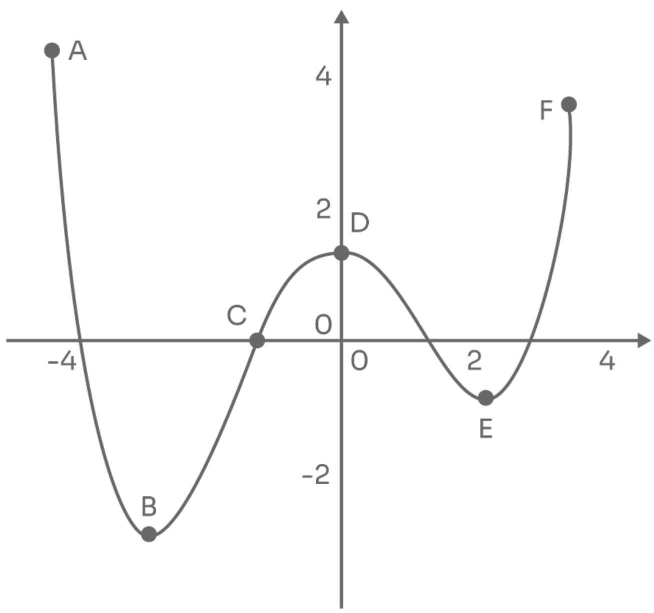
   c. É possível perceber se existem zeros da função explícitos nesses gráficos? Quais?

   d. Existem pontos de máximo (ou mínimo) absolutos nesses gráficos? Quais?

   e. Existem pontos de máximo (ou mínimo) locais nesses gráficos? Quais?

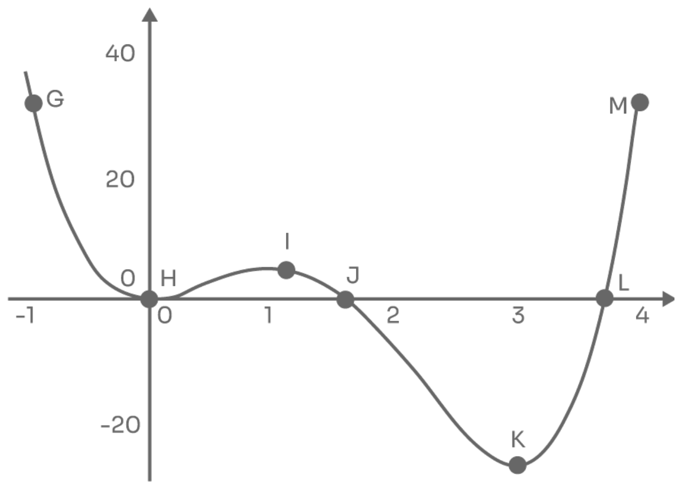
   f. Em qual intervalo ocorre maior (menor) variação dos valores de $y$? É possível estabelecer uma relação entre essa variação de valores e o crescimento (decrescimento) da função?

Gráfico 1




Fonte: Dos autores (2024).

Gráfico 2




Fonte: Dos autores (2024).

Com essa atividade espera-se perceber de que forma os estudantes entendem e interpretam esses gráficos, ou seja, os conhecimentos prévios que possuem. O conhecimento prévio pode ser considerado uma das variáveis mais importantes para que ocorra aprendizagem significativa (Moreira, 2011).

# Organizadores Prévios

*“Organizadores prévios são materiais introdutórios, apresentados antes do próprio material a ser aprendido, porém, em nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que esse material” (Moreira, 2006, p. 23).*

## Atividades

Construção intuitiva dos conceitos de Limite e Derivada

Formalização do conceito de Derivada

## Objetivos

Perceber a convergência de valores no eixo y de uma função dada a variação de valores no eixo x

Compreender a relação entre as retas secantes e tangente a uma curva, utilizando o conceito de Limite através da exploração gráfica

Correlacionar o conceito de variação entre dois pontos com o coeficiente angular da reta tangente

Associar a variação nos eixos coordenados com o conceito de Derivada

Evidenciar a Derivada de uma função por meio de Limites

Identificar os pontos críticos de uma função através do gráfico da Derivada

Identificar os pontos de máximo e mínimo de uma função através do gráfico

2. Uma caixa d'água retangular tem capacidade para 1000 litros e é drenada pela base em apenas 30 minutos. Os valores da Tabela 1 mostram o volume , em litros, de água que ainda resta na caixa após *t* minutos.

Tabela 1 – Quantidade de água X tempo

| *t* (minutos) | *V* (litros) |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 5 | 694 |
| 10 | 444 |
| 15 | 250 |
| 20 | 111 |
| 25 | 28 |
| 30 | 0 |

Fonte: Adaptado de Stewart (2016).

a. Calcule a variação de água restante na caixa d'água entre $t_1$=0$min$ e $t_2$=5$min$;

b. Qual a variação de água restante na caixa d'água entre $t_2$=5$min$ e $t_3$=10$min$? E entre $t_3$=10$min$ e $t_4$=15$min$? E entre $t_4$=15$min$ e $t_5$=20$min$?

c. Observando os intervalos registrados a cada 5 min na Tabela 1, determine o intervalo em que houve maior e menor variação de água. Justifique sua resposta;

d. A Tabela 1 traz uma relação entre o tempo *t* e o volume *V*de água restante na caixa d'água. Você percebe uma relação de dependência entre as variáveis *t* e *V*? Pode-se dizer que existe uma função que correlaciona *t* e *V*? Justifique sua resposta;

e. No intervalo de tempo entre $t_1$=0 e $t_7$=30, em minutos, qual o valor de $\Delta t$?

f. No intervalo de tempo entre $t_1$=0 e $t_7$=30 em minutos, qual o valor de $\Delta V$?

g. Determine o valor $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ quando *t* varia no intervalo de 0 a 30 minutos;

h. Quando você se depara com a razão $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, qual sua compreensão sobre isto?

Esse problema retrata os conhecimentos prévios que podem estar disponíveis na estrutura cognitiva do estudante a fim de conseguir compreender, posteriormente, o conceito de taxa de variação.

3. Ainda considerando a tabela do problema anterior, que correlaciona a quantidade de água restante no tanque após passados *t* minutos, faça uma discussão gráfica segundo os itens a seguir.

   a. Seja *P* o ponto (15,250) sobre o gráfico do volume *V*. Determine as inclinações de todas as retas secantes *PQ*, em que *Q* é o ponto sobre o gráfico de *V* com $t_1$=0, $t_2$=5, $t_3$=10, e $t_5$=20, $t_6$=25 e $t_7$=30;

   b. Uma vez obtidas as retas secantes *PQ* do item (a), de que forma você interpreta a variação das inclinações obtidas?

   c. Faça uma estimativa da inclinação da reta tangente de *P* pela média das inclinações de duas retas secantes;

   d. Suponha que a variação do ponto *Q* sobre o gráfico do volume *V* seja a menor possível, de modo que o ponto *Q* esteja tão próximo quanto possível do *P* (15,250) Nestes termos, qual a taxa de variação média com a qual a água ainda resta no tanque? (tome com exemplo t = 15,001);

   e. Que considerações podem ser feitas a partir das respostas dos itens (c) e (d)?

Neste problema pode-se observar a resolução de algoritmos e uso de símbolos que já remetem à notação formal do Cálculo Diferencial. Possivelmente alguns estudantes farão uso de uma aprendizagem representacional, que também é significativa, mas ocorre em sua forma mais simples, aproximando-se da aprendizagem por memorização (Ausubel, 2003).

4. O aeroporto de uma cidade de médio porte possui estimativa anual de chegada de passageiros segundo os dados da Tabela 2.

Tabela 2 – Quantidade de passageiros X ano

| Ano | Passageiros |
|---|---|
| 2011 | 8490 |
| 2013 | 9650 |
| 2015 | 11780 |
| 2017 | 14540 |
| 2019 | 12840 |

Fonte: Adaptado de Stewart (2016).

a. Calcule a taxa de variação média na quantidade de passageiros entre os anos de 2011 a 2013, de 2013 a 2015, de 2015 a 2017, e de 2017 a 2019 ;

b. Calcule a quantidade de passageiros que aumentou por ano, em média, durante todo período;

c. Determine uma estimativa da taxa de crescimento instantâneo no ano de 2015, tomando a média de duas taxas de variação médias;

d. Determine uma estimativa da taxa de crescimento instantâneo no ano de 2015, medindo a inclinação da reta tangente;

e. Segundo esses dados é possível fazer uma estimativa da taxa de crescimento instantâneo no ano de 2018? Caso seja possível, determine essa estimativa e justifique sua resposta.

Neste problema é possível que se evidencie a existência de lacunas conceituais na aprendizagem de Limites e Derivadas; no entanto, durante o seu desenvolvimento, os estudantes podem realizar o processo de reconciliação integrativa.

## Formalização do conceito de Derivada

5. Numa atividade experimental sobre cálculo de velocidades, tomou-se um foguete que sobe verticalmente segundo a função $f(t)=\frac{-4,9t^2}{2}+60t$ , em que $f(t)=y$ representa a altura (em metros) atingida pelo foguete e $t$ denota o tempo (em segundos) (Hoffman et al., 2016, adaptado).

a. Faça a construção do gráfico do lançamento desse foguete, destacando o intervalo ($0 \leq x \leq 6$) ;

b. No plano cartesiano, localize os pontos $A(0; y_1)$, $B(2; y_2)$, $C(2{,}1; y_3)$, D(2,5; $y_4$) e D(3; $y_5$);

c. Qual a altura do foguete no instante $t=6s$?

d. Determine a velocidade média do foguete no intervalo ($2 \leq t \leq 6$);

e. Faça uma estimativa para determinar a velocidade instantânea do foguete quando $t$=2, usando *B, C, D* e *E*;

f. Qual a relação que existe entre a velocidade do foguete calculada no item (e) e a curva de $f(t)$?

Para resolver esse problema, o uso de intervalos para cálculo de velocidades pode ser um obstáculo. Caso isso ocorra, possivelmente a compreensão sobre o cálculo de velocidades pode estar restrita à aplicação de fórmulas, num processo semelhante à aprendizagem mecânica, quando não se exige muito da criticidade ante os resultados encontrados.

6. Considere o gráfico da questão anterior que relaciona o tempo *t* (em segundos) com a altura *f(t)* (em metros) atingida por um foguete durante uma subida vertical (Hoffman et al., 2016, adaptado).

   a. Faça a construção do gráfico da função derivada *f'(t)* do lançamento desse foguete; O que esse gráfico representa?

   b. Para qual valor de *t* temos o maior *f'(t)*?

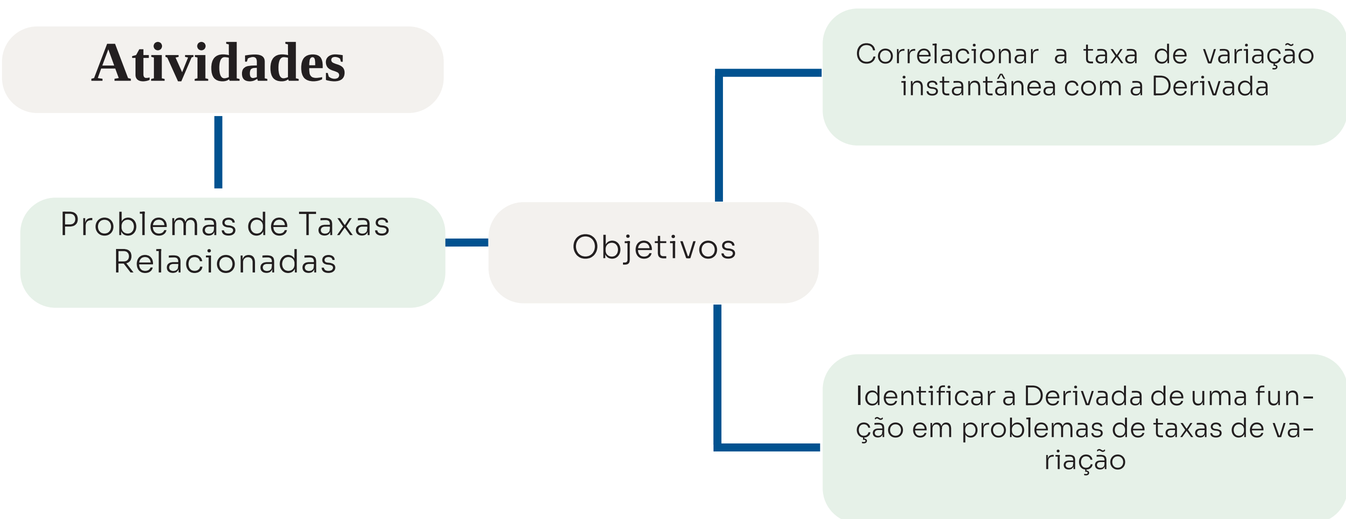
   c. Em quais intervalos a função *f(t)* é crescente ou decrescente? Que relações podem ser feitas entre esses intervalos e a função derivada *f'(t)*?

   d. Como você explica o fato de a função derivada *f'(t)* ser sempre decrescente e após um certo tempo *t* (em segundos) o foguete começar a cair?

A abordagem qualitativa na resolução de questões de matemática pode ser uma importante aliada para compreender que saberes os estudantes estão desenvolvendo. Isto pode ser potencializado com a formação de grupos de estudo, numa perspectiva colaborativa, em que se possa auxiliar os estudantes que tenham maiores dificuldades.

## Situações Didáticas I

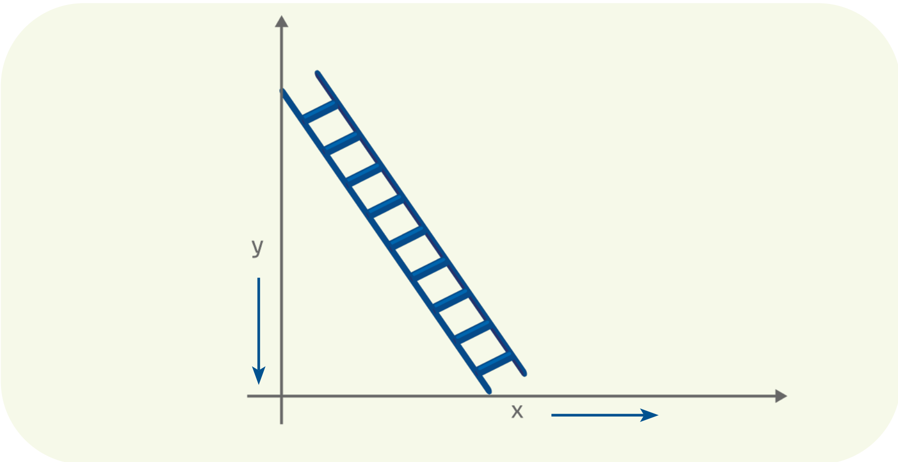
*"Situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico"* (Pais, 2015, p. 65).



## Problemas de Taxas Relacionadas

7. Suponha que uma escada de *8m* de comprimento esteja encostada em uma parede. De repente a extremidade inferior da escada começa a se afastar do pé da parede, fazendo com que a escada escorregue para baixo, e o faz com uma velocidade de *2m/s*. A Figura 3 ilustra essa situação (Guidorizzi, 2008, adaptado). Nestes termos responda:

Figura 3 – Movimento da Escada




Fonte: Dos autores (2024).

a. Qual a função que denota o movimento da escada?

b. Qual a função derivada associada ao item (a)?

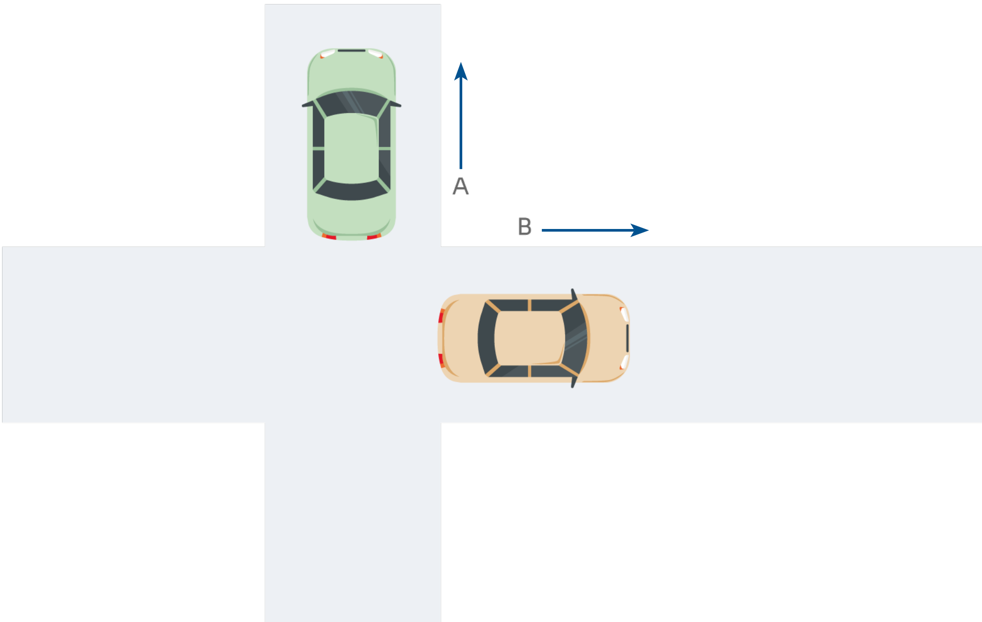
c. Qual a velocidade com que a extremidade superior estará deslizando para baixo, no instante em que a extremidade inferior estiver a *3m* da parede?

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: a resolução pode ocorrer por meio das relações métricas envolvendo o triângulo retângulo.
- **Formulação**: o processo de derivação pode ser realizado de modo implícito com inclusão da variável tempo.
- **Validação**: poderá haver alguma dificuldade na interpretação do movimento da escada e também quanto ao uso de valores não inteiros.
- **Institucionalização**: espera-se que o professor (mediador da aprendizagem) sistematize o conhecimento relativo àquele problema e corrija equívocos, se necessário.

8. Dois carros, *A* e *B* viajam em estradas perpendiculares, de modo que o carro *A* vai no sentido norte com velocidade de *60km/h*, enquanto que o carro B vai no sentido leste com velocidade de *45km/h* (Hoffman et al., 2016, adaptado). Considerando que ambos os carros deixaram o cruzamento dessas estradas no mesmo instante e observando a Figura 4, determine:

Figura 4 – Viagem dos Carros




Fonte: Dos autores (2024).

a. Qual a função derivada associada a esse problema?

b. A que taxa a distância entre esses dois carros está variando duas horas após terem deixado o ponto de cruzamento?

c. A taxa de variação da distância do item (b) é constante independente do tempo de viagem? Justifique sua resposta.

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: a resolução pode ocorrer por meio das relações métricas envolvendo o triângulo retângulo.
- **Formulação**: o processo de derivação pode ser realizado considerando o aumento da distância entre os carros que ocorre com o passar do tempo.
- **Validação**: poderá haver alguma dificuldade na interpretação da distância entre os carros, considerando que não é fixa, e isso possui influência direta no resultado.
- **Institucionalização**: espera-se que o professor (mediador da aprendizagem) sistematize o conhecimento relativo àquele problema e busque reflexões quanto ao processo de generalização do processo de derivação.

9. Dado um triângulo qualquer, tem-se que sua altura aumenta a uma taxa de *1cm/min* enquanto que sua área aumenta a uma taxa de *2cm²/min* (Stewart, 2016, adaptado). Com base nessas informações, resolva os itens abaixo.

   a. Faça um esboço da situação apresentada acima;

   b. Escreva uma equação que relacione todas as quantidades envolvidas;

   c. Determine a taxa de variação da base do triângulo no instante em que a altura for *10cm* e sua área for *100cm²*;

   d. Qual sua compreensão quanto à resposta obtida no item (c)?

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: a resolução pode ocorrer por meio das relações métricas envolvendo o triângulo qualquer.
- **Formulação**: o processo de derivação pode ser realizado considerando a variável tempo.
- **Validação**: espera-se que se argumente quanto ao uso de $b = \frac{2A}{h} = 20cm$ e ainda justificativas sobre o porquê de a base do triângulo estar diminuindo.
- **Institucionalização**: é esperado que o professor (mediador da aprendizagem) sistematize o conhecimento relativo àquele problema e suscite reflexões sobre o uso de outras áreas da temática que se fazem presentes, ainda que indiretamente, em problemas envolvendo taxas relacionadas no processo de derivação.

10. Tem-se um reservatório em forma de um cone invertido, circular e reto. Esse reservatório passa a ser enchido com água que flui a uma taxa de $0{,}1m^3/s$. Sabe-se ainda que o vértice desse reservatório está a *15m* do topo e que o raio desse topo mede *10m* (Guidorizzi, 2008, adaptado). Com base nessas informações, resolva os itens abaixo.

   a. Construa um esboço que represente a situação acima;

   b. Escreva uma equação que relacione todas as quantidades envolvidas;

   c. Determine a velocidade com a qual o nível da água está subindo no instante em que essa água atinja a marca de *5m* de altura;

   d. Determine a velocidade com a qual o nível da água está subindo no instante em que essa água atinja a marca de *12m* de altura;

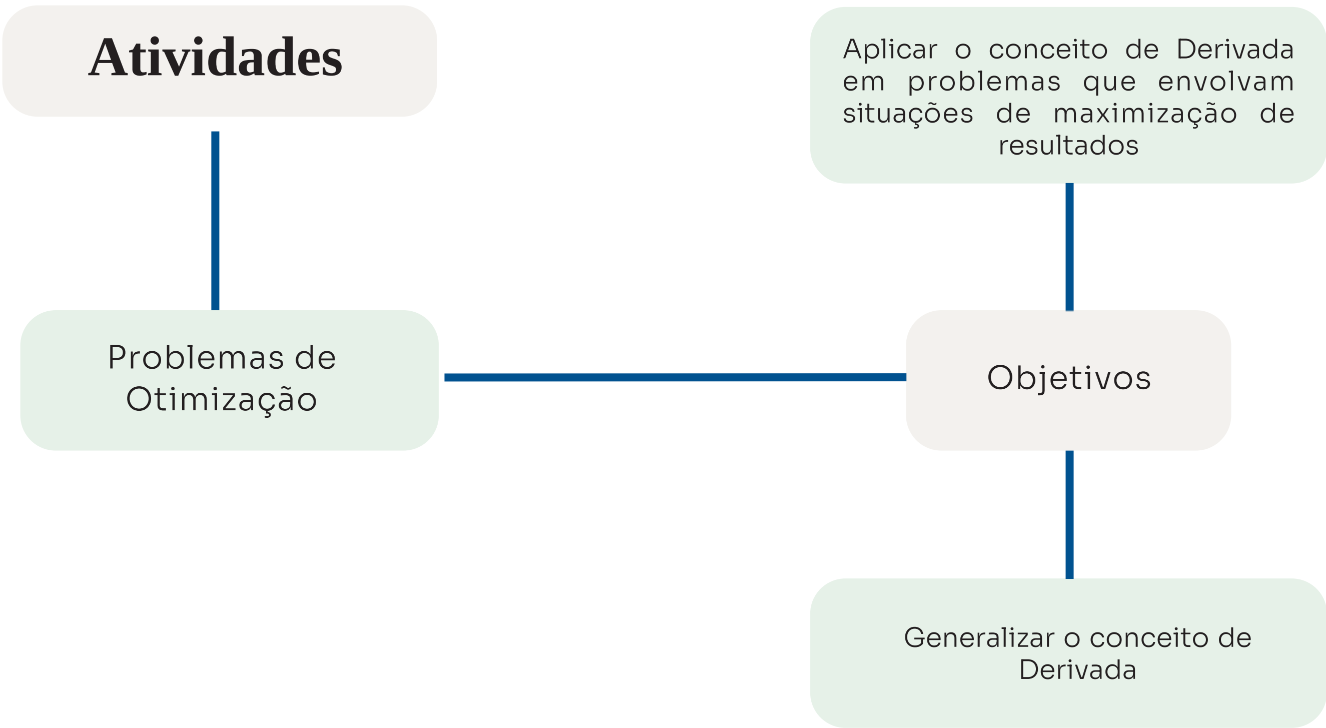
   e. Observando os itens (c) e (d) pode-se afirmar que a velocidade com a qual a água flui no reservatório está aumentando ou diminuindo? Justifique, por que isso ocorre?

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: presume-se a necessidade de usar os conceitos de semelhança de triângulos associado a conceitos de geometria espacial para que o problema tenha apenas uma variável, para tanto é esperado que se faça $r=\frac{2h}{3}$.
- **Formulação**: espera-se que se trabalhe com o número $\pi$, e não com uma aproximação, por exemplo 3,14, evitando assim erros de aproximação.
- **Validação**: explicitar porque a variação do nível da água está diminuindo, apesar de a altura no reservatório continuar aumentando.
- **Institucionalização**: é esperado que o professor (mediador da aprendizagem) proponha a discussão sobre o conhecimento relativo àquele problema, observando indícios de aprendizagem significativa não somente na correta resolução do problema, mas também na forma como os estudantes argumentam e defendem suas conjecturas.

## Situações Didáticas II

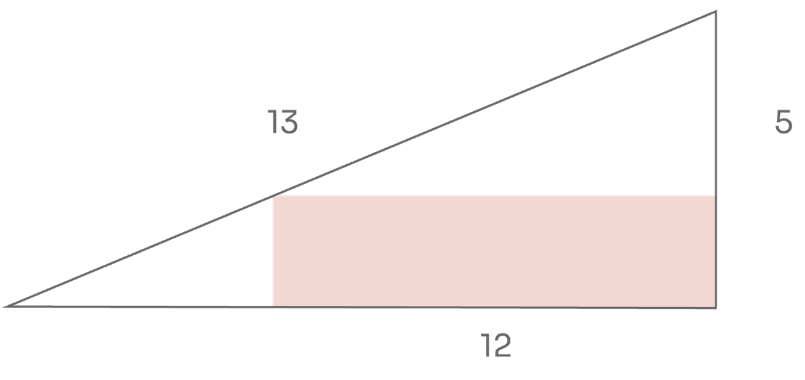
*“Situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional” (Brousseau, 2008, p. 21).*




## Problemas de Otimização

11. Tem-se que um retângulo está inscrito em um triângulo retângulo, conforme Figura 5. Sabe-se que os lados desse triângulo medem *5cm, 12cm e 13cm* (Hoffman et al., 2016, adaptado). Nestes termos, resolva os itens abaixo:

Figura 5 – Retângulo inscrito




Fonte: Dos autores (2024).

a. Determine a função que correlaciona os lados do retângulo de modo que sua inscrição seja possível, ou seja, determine a função que denota essa situação em termos de uma única variável;

b. Determine os números críticos dessa situação. Justifique por que o número crítico escolhido representa um máximo (mínimo) absoluto;

c. Determine as dimensões do retângulo inscrito que fornecem a maior área possível.

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: pode-se relacionar o conceito de Área com o conceito de Função, além de esboçar a situação-problema, conseguindo correlacionar os elementos de geometria plana e espacial com o conceito de variação da área do retângulo inscrito.

- **Formulação**: espera-se a percepção para derivação da função segundo uma única variável.

- **Validação**: correlacionar o conceito de ponto crítico com o ponto de máximo.

- **Institucionalização**: sugere-se que o professor mostre vários retângulos inscritos no triângulo retângulo, culminando com o conceito de otimização, cuja relação e diferenciação com os problemas de taxas relacionadas sugerem que a existência de aprendizagem significativa.

12. Num porto fluvial, um barco deixa as docas às *14h* e segue seu trajeto na direção sul segundo uma velocidade de *20km/h*. Neste mesmo momento, outro barco que estava indo na direção leste, com velocidade de *15km/h*, chega nas docas às *15h*(Stewart, 2016, adaptado). Nestes termos, responda:

a. Construa um esboço que represente a situação acima;

b. Determine a função que correlaciona a distância entre os dois barcos, ou seja, determine a função que denota essa situação em termos de uma única variável;

c. Determine os números críticos dessa situação. Justifique por que o número crítico escolhido representa um máximo (mínimo) absoluto;

d. Determine o momento em que os dois barcos estavam mais próximos um do outro.

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: pode-se esboçar o problema e relacionar o conceito de distância da geometria analítica com o conceito de velocidade.

- **Formulação**: espera-se derivar a função em termos de uma variável e ainda determinar seu ponto crítico.

- **Validação**: espera-se que os estudantes determinem o instante em que os barcos estiveram mais próximos.
- **Institucionalização**: sugere-se que o professor formalize o conceito de otimização, inclusive discutindo a percepção gráfica do problema antes de explicitar sua função.

13. Numa fazenda, o fazendeiro deseja cercar um lote retangular de terra que faz fronteira com o seu celeiro pelo lado leste, de modo que não se faz necessário cercar ao longo desse celeiro. O lado norte do referido lote faz fronteira com outra fazenda e, por isso, haverá apenas uma cerca de separação, de tal forma que o fazendeiro vizinho aceitou dividir os custos da cerca nesse lado. Considerando que a cerca tem custo de R$ 30,00 por metro linear e que o fazendeiro só pode gastar até o limite de R$ 1.800,00, resolva os itens abaixo (Stewart, 2016, adaptado).

    a. Faça alguns esboços que ilustrem essa situação, considerando diferentes valores dos lados do retângulo. Determine as áreas desses retângulos. É possível perceber que existe uma área máxima? Em caso positivo, faça uma estimativa dessa área;
    b. Determine uma expressão para o cálculo da área desse lote, de modo que correlacione todas as variáveis;
    c. A expressão do item (b) é uma função? Se sim, escreva-a em termos de uma única variável;
    d. Determine as dimensões do lote que englobe a maior área possível;
    e. Caso o fazendeiro desejasse cercar uma área de $150m^2$, que dimensões minimizarão o custo dessa cerca?

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: pode-se relacionar o conceito de Área com o conceito de Função, além de esboçar a situação-problema e correlacionar os elementos de geometria plana com os custos para cercar o lote.
- **Formulação**: espera-se que a função que denota a área do lote seja expressa em termos de uma única variável, bem como sua derivada.
- **Validação**: espera-se que além da correta argumentação quanto aos resultados encontrados, os estudantes façam reflexões quanto à necessidade de realizar o processo de derivação apenas quando necessário.
- **Institucionalização**: sugere-se que o professor discuta sobre o processo de otimização do problema e também sobre o processo mecânico de derivar qualquer função que surja durante sua resolução.

14. Uma escola deseja promover uma aula de campo em um município circunvizinho, para tanto alugou um ônibus que possui capacidade para 50 passageiros . A empresa proprietária do ônibus colocou a seguinte condição para fazer a locação: R$ 60,00 por passageiro caso o grupo fosse de 35 passageiros, ou, redução de R$ 1,00 no preço por passageiro quando o quantitativo exceder 35 (Hoffman et al., 2016, adaptado). Nestes termos, resolva:

a. Determine a função que representa a receita da empresa nessa situação;

b. Faça um esboço do gráfico da função do item (a) e determine seus pontos críticos;

c. Determine o quantitativo de passageiros presentes no ônibus a fim de que a receita da empresa seja a maior possível;

d. Supondo que o resultado do item (c) seja um número não inteiro, e considerando que a quantidade de passageiros deve ser representada por um número inteiro, qual seria o valor inteiro da resposta do item (c)? Justifique sua resposta.

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: pode-se relacionar os conceitos de Receita e Função, percebendo que existe uma dependência entre essas variáveis.
- **Formulação**: compreender que, segundo os dados do problema, a função procurada sugere uma função quadrática com ponto de máximo.
- **Validação**: pode-se argumentar quanto ao valor inteiro para determinação da função receita e por que isso não ocorre na observação gráfica.
- **Institucionalização**: sugere-se que o professor possa mostrar o comportamento gráfico da função receita e suscite reflexões sobre variáveis discretas e contínuas.

# Situações Didáticas III

**Atividade**

**Avaliação** — Objetivos — Evidenciar o conhecimento adquirido na (re)construção do conceito de Derivada

## Avaliação

A função custo *C(x)* representa o custo da produção de *x* unidades produzidas. Desse modo, a função custo marginal *C'(x)* representa a taxa de variação do custo *C* em relação a *x*. Considerando a existência da função preço *P(x)*, que associa a quantidade *x* de unidades com o preço *P* que se pode cobrar para vendê-las, chega-se à função receita *R(x)* denotada por *R(x)* = x. *P(x)*; a função receita marginal *R'(x)* representa a taxa de variação da receita *R* em relação a *x*. Por fim, a função lucro *L(x)* é definida por *L(x)*= *R(x)* - *C(x)*, e a função lucro marginal *L'(x)* representa a taxa de variação da função *L* em relação a *x*. A partir dessas definições, resolva a situação abaixo apresentada.

15. Uma fábrica de pequeno porte produz determinada mercadoria que possui custo de fabricação segundo a função $C(x)=1800+25x-0{,}2x^2+0{,}001x^3$ . Também é conhecida a função que denota a variação de preços $P(x) = 48{,}2-0{,}03x$ segundo a quantidade *x* de mercadoria. De posse dessas informações, determine:

   a. Faça a construção gráfica da função lucro *L(x)*, destacando o intervalo $0 \leq x \leq 250$;

   b. No plano cartesiano, localize os pontos $A(60, y_1)$, $B(100, y_2)$, $C(160, y_3)$, $D(250, y_4)$, referentes à função *L(x)* e determine sua taxa média de crescimento;

   c. Observando os pontos coordenados do item (b), determine as retas secantes referentes aos intervalos AB, BC e CD. Que reflexões podem ser feitas quanto à variação das inclinações obtidas?

   d. Determine a taxa instantânea para *x=160 unidades* na função *L(x)* por meio da inclinação da reta tangente nesse ponto;

   e. Observando a função lucro marginal *L'(x)*, determine sua(s) raiz(es) e comente o que isso representa na função *L(x)*;

f. Determine o ponto da função *L'(x)* que apresenta valor máximo. É possível obtê-lo a partir da função *L(x)*? Justifique sua resposta.

g. É possível perceber no gráfico que a função *L(x)* possui valor máximo para *x=161 unidades*, e que *L'(x)* possui valor máximo para *x=57 unidades* (valores aproximados). Considerando que após o valor máximo *x=57 unidades* em *L'(x)*, a função passa a ser decrescente, que correlação pode ser feita para que a função *L(x)* alcance seu ponto de máximo apenas em *x=161 unidades*?

**Dialética da TSD:**

- **Ação**: pode-se correlacionar os conceitos de Custo, Receita, Lucro e Lucro Marginal, inclusive fazendo abordagem aos conceitos de taxa de variação média e de taxa de variação instantânea.
- **Formulação**: é esperada compreensão quanto aos significados de pontos críticos e de função derivada, evidenciando sua percepção sobre pontos de máximo(mínimo).
- **Validação**: pode-se argumentar quanto ao valor inteiro para determinação da quantidade de mercadorias e ainda relacionar os pontos de máximo em todas as funções encontradas.
- **Institucionalização**: sugere-se que o professor instigue discussões sobre a compreensão conceitual da função derivada aplicada, trazendo reflexões sobre quando e por que usar processo de derivação.

# Considerações Finais

As atividades propostas neste produto educacional têm o intuito de favorecer o desenvolvimento da aprendizagem significativa por meio de situações didáticas no ensino de Limites e Derivadas. Isto significa estimular o protagonismo do estudante frente a sua aprendizagem, desenvolvendo criticidade e fazendo reflexões quanto àquilo que estuda; enquanto que ao professor cabe desenvolver suas atividades docentes na perspectiva de mediador de aprendizagem, incentivando a discussão em aulas de Cálculo Diferencial e a proposição de atividades colaborativas.

Dificuldades podem ser encontradas ao longo do desenvolvimento das atividades, seja por carência de conhecimentos prévios necessários ou mesmo quanto à predisposição para aprender; no entanto, há indícios de que essa sequência didática pode auxiliar na atribuição de novos significados ao estudo de retas secantes, retas tangentes, médias de variação, taxas de crescimento, compreensão gráfica e estudo de números críticos; observando-se maior estabilidade cognitiva na relação de dependência entre as variáveis, no estudo de funções e compreensão da Derivada.

Durante o desenvolvimento dessa sequência didática, espera-se que as atividades e situações didáticas propostas consigam instigar os participantes à discussão contínua, favorecendo a conjectura, tomada de decisão e autonomia frente ao aprendizado. Para tanto, almeja-se que a aprendizagem mecânica, caso tenha ocorrido, possa ser ressignificada numa proposta de aprendizagem com significado, que agregue valor educativo quanto à construção do saber.

# Apresentação dos Autores


## Guttenberg Sergistótanes Santos Ferreira

Doutor em Ensino de Ciências Exatas pela Universidade do Vale do Taquari - Univates. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – campus Juazeiro do Norte.

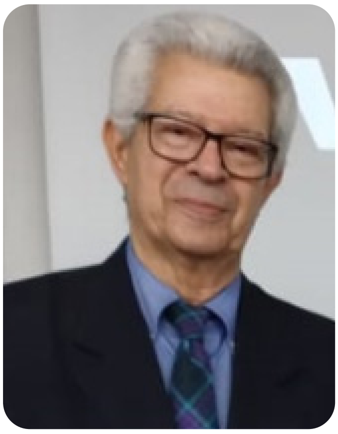
guttenberg@ifce.edu.br.
http://orcid.org/0000-0003-3978-8942.



## Maria Madalena Dullius

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade de Burgos - Espanha. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas e do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

madalena@univates.br.
http://orcid.org/0000-0003-0971-992X.


## Marco Antonio Moreira

Doutor em Educação pela Cornell University – USA. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

moreira@if.ufrgs.br.
http://orcid.org/0000-0003-2989-619X.

# Referências


AUSUBEL, David P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BATISTA, Silvia C. F.; BARCELOS, Gilmara T.; MOREIRA, Larissa S.; BEHAR, Patrícia A**. Mapas Mentais com Tecnologias Digitais**: reflexões na formação inicial de professores de Matemática. In: VIII Conferência Internacional de TIC na Educação, 2013, Braga, Portugal. Atas [...]. Braga, Portugal: Universidade do Minho, 2013. Disponível em: http://www.nonio.uminho.pt/wp-content/uploads/2020/09/atas_challenges2013.pdf. Acesso em 20 set. 2023.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução aos estudos das Situações Didáticas** – conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

GALANTE, Carlos E. S. O uso de Mapas Conceituais e de Mapas Mentais como ferramentas pedagógicas no contexto educacional do Ensino Superior. **Revista Eletrônica Múltiplo Saber**, v. 23, p. 1-23, 2014. Disponível em: https://www.inesul.edu.br/revista/arquivos/arq-idvol_28_1389979097.pdf. Acesso em: 20 set. 2023.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo**. v. 1, 5.ed. reimpr. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HOFFMAN, Laurence D., BRADLEY, Gerald L., SOBECKI, Dave, PRICE, Michael. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora UnB, 2006.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem Significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, Marco Antonio. ¿Al final, qué es aprendizaje significativo? **Revista Qurriculum**, La Laguna, Espanha, n. 25, p. 29-56, mar., 2012. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/96956. Acesso em: 10 fev. 2022.

PAIS, Luiz C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3 ed. 1 reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

SILVA, Cleusiane V.; ALMOULOUD, Saddo Ag. Uma articulação entre o quadro dos paradigmas geométricos e a Teoria das Situações Didáticas. Acta Scientiae – **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas, v. 20, n. 1, p. 111-129, jan./fev., 2018. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3503. Acesso em: 10 ago. 2021.

STEFENON, Letícia O.; MOREIRA, Marco A.; SAHELICES, Concesa C. O uso de mapas mentais para a compreensão da relação de Matemática e Física na Engenharia Ambiental e Sanitária. **RBECT – Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 12, n. 3, p. 223-240, set./dez., 2019. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/8492. Acesso em: 9 jun. 2022.

STEWART, James. **Cálculo**. v.1, 8 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.