



A Trianguladora e a Semelhança de Triângulos

RUBENS PEDROSO NOGUEIRA JÚNIOR

GALVINA MARIA DE SOUZA



APRESENTAÇÃO

O presente material é o produto final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (POFMAT/UESB). Apresenta uma planilha eletrônica desenvolvida pelos autores no *Microsoft Excel 360*, capaz de indicar a existência de um triângulo por meio da desigualdade triangular; classificar um triângulo em relação às medidas dos seus lados e dos seus ângulos internos; calcular (e aproximar) as medidas de perímetro, de áreas e ângulos internos de triângulos, tudo a partir das medidas dos lados de um triângulo dado; e, capaz de informar se dois triângulos são semelhantes ou não, indicando qual caso de semelhança foi utilizado e a razão de semelhança.

Apresenta, ainda, uma sequência de Atividades a ser desenvolvida em processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático tendo como suporte a Trianguladora.

Para acesso a Trianguladora faça a leitura do código QR abaixo e depois use a senha **trianguladora23** quando solicitado!



Estação 01 – “Conhecendo a ferramenta: **Trianguladora**”

Objetivo:	Conhecer os comandos necessários para utilizar a ferramenta “TRIANGULADORA” e revisar os conceitos significativos relacionado ao estudo de triângulos.
Metodologia:	Após o envio da ferramenta “TRIANGULADORA” e entrega do material impresso “Estação 01”, fazer a leitura oral com os estudantes do texto inicial e logo após, pedir para que os estudantes em fila e individualmente, usem seu celular/tablet/notebook para acessar a ferramenta. Depois, direcionar a leitura atentamente dos comandos da atividade “Estação 01” e realizar os comandos indicados para responder os itens. Após concluir todos os 9 itens, pedir para que os estudantes respondam a “autoavaliação” contida no final do material impresso. (item 10)
Avaliação:	Verificar se os estudantes resgataram conhecimentos prévios relacionados ao estudo de triângulos e se tiveram domínio das ferramentas da TRIANGULADORA

Estação 01 – “Conhecendo a ferramenta: **Trianguladora**”

Texto inicial:

Nessa “Estação 01”, você terá acesso a uma ferramenta em forma de planilha eletrônica que norteará seus estudos em relação aos triângulos e conseqüentemente às semelhanças entre dois triângulos. Para isso, que tal abrir a planilha em seu Smartphone/tablet/notebook e navegar por ela? Ao ser solicitado o uso de uma senha, você digitará **trianguladora23** tudo junto e sem espaço, ok? Depois dessa navegação, você deverá acessar a **página inicial** da trianguladora e para isso recorra sempre ao botão “”.

Agora vamos pôr a mão na massa! Na página inicial clique no botão “” e **prepara-se para começar**.

1 – Nos locais destinados aos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} do triângulo ABC, coloque medidas para

esses lados e clique em “”. Depois **ANOTE ABAIXO** os dados informados sobre esse triângulo.

2 – Gere, separadamente, os triângulos com as medidas abaixo e responda:

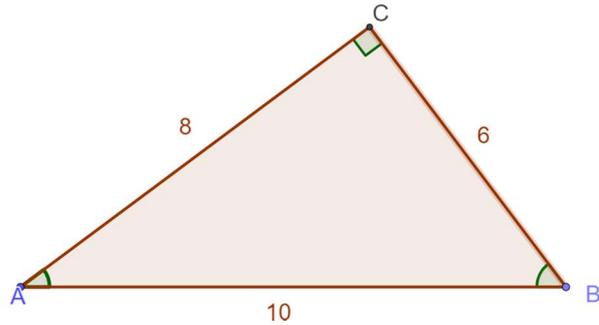
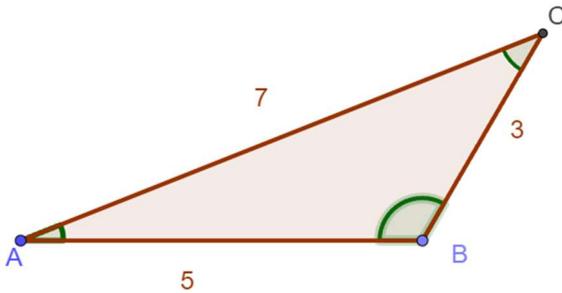
I – (3, 4, 5), II – (6, 6,10), III – (6, 6, 6)

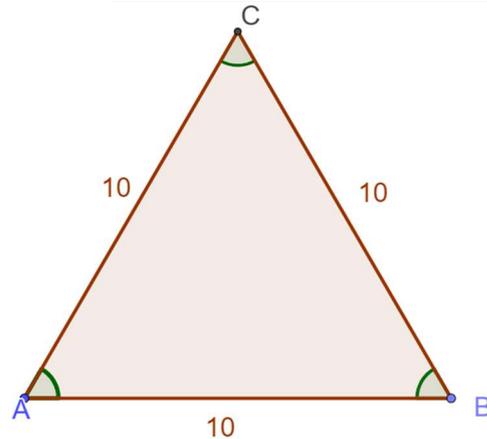
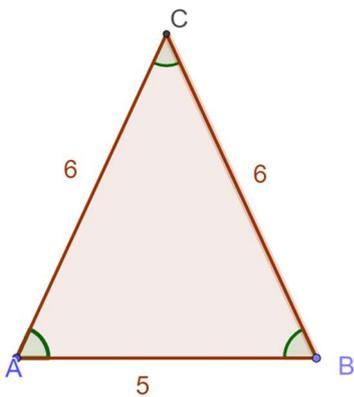
a) Qual a classificação dos três triângulos?

b) Quais as medidas dos ângulos internos dos triângulos gerados em I, II e III?

c) Quais as medidas do perímetro e da área dos triângulos gerados em I, II e III?

3 – Usando a TRIANGULADORA, classifique os triângulos (respondendo na linha) e indique na representação figural a medida dos ângulos internos.





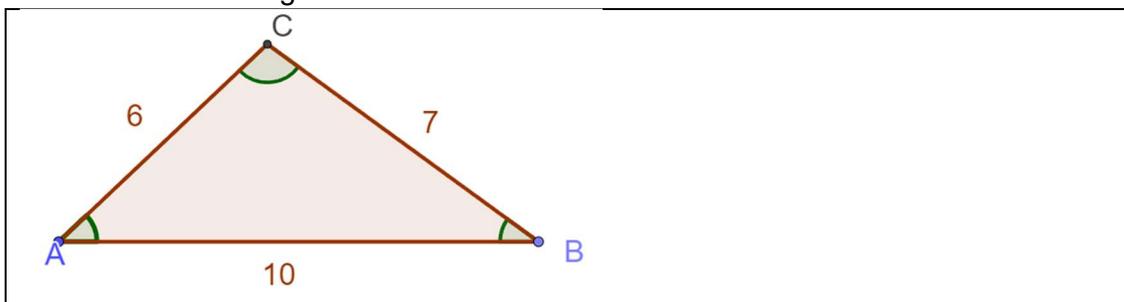


4 – Clicando na ferramenta “ APRENDA MAIS”, contido na página inicial, responda:

a) Os elementos de um triângulo que são utilizados para sua classificação são:

b) Quando é que um triângulo é classificado como: Escaleno, isósceles ou equilátero?

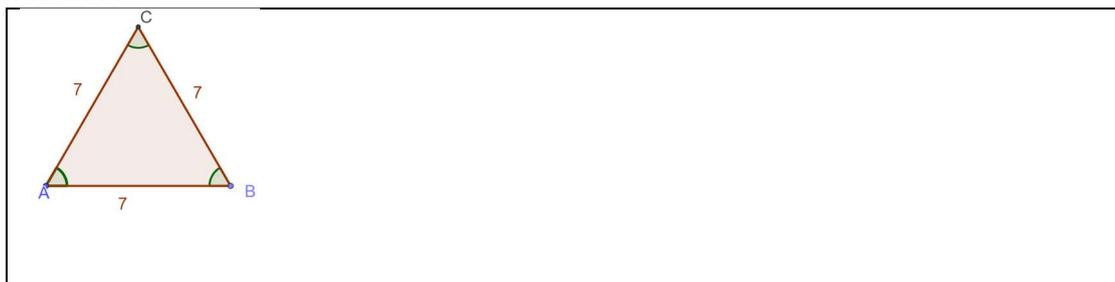
- c) Observe o triângulo escaleno representado abaixo, use a *Trianguladora* e registre na figura a medida dos ângulos internos. Que relação existe entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos?



- d) Observe o triângulo Isósceles representado abaixo, usando a calculadora de triângulos registre a medida dos ângulos internos nos seus respectivos lugares. Que relação existe entre as medidas dos lados não congruentes e as medidas dos ângulos internos?



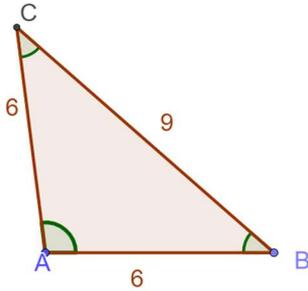
- e) Observe o triângulo equilátero representado abaixo, usando a calculadora de triângulos registre a medida dos ângulos internos nos seus respectivos lugares. Que relação existe entre as medidas dos lados não congruentes e as medidas dos ângulos internos?



- f) Todo triângulo equilátero pode ser classificado como isósceles? E todo isósceles pode ser classificado como equilátero? Utilize o botão “sobre um triângulo” faça alguns testes antes de registrar sua conclusão.

5 – Ainda utilizando o botão “”, responda: Quando é que um triângulo é classificado como acutângulo, retângulo e obtusângulo?

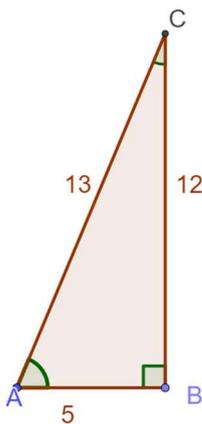
6 – Observe o triângulo abaixo e usando a TRIANGULADORA responda:



- a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: _____
- b) Eleve todas as medidas dos seus LADOS ao quadrado e registre: _____
- c) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: _____
- d) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas?

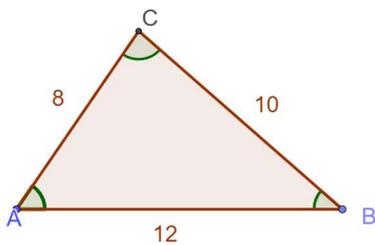
e) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (d)?

7 – Observe o triângulo abaixo e usando a TRIANGULADORA responda:



- a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: _____
- b) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: _____
- c) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas? _____
- d) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (c)?

8 – Observe o triângulo abaixo e usando a TRIANGULADORA responda:



- a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: _____
- b) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: _____
- c) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas?

- d) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (c)? _____

9 – Verifique se a frase “**todo triângulo equilátero é acutângulo**” é verdadeira, por testar alguns exemplos de triângulos equiláteros no botão “sobre um triângulo”, depois registre e justifique a sua conclusão.

10 – Autoavaliação:

- a) Você achou que a ferramenta “TRIANGULADORA” é fácil de utilizar? Por quê?
SIM () NÃO ()

- b) Você acha que essa ferramenta vai ser útil para aprender mais sobre triângulos? Por quê?
SIM () NÃO ()

- c) O que você achou mais interessante na atividade de hoje? Explique
SIM () NÃO ()



ESTAÇÃO 02– “E o triângulo existe?”

Objetivo:	Comprovar, se quaisquer três medidas de lados formam um triângulo e através de investigação passo a passo, deduzir a desigualdade triangular. Depois relacionar a desigualdade triangular com as possibilidades de encontrar um terceiro lado de um triângulo escaleno e/ou isósceles.
Metodologia:	Após organizar a sala em filas e pedir que os estudantes estejam de posse da ferramenta “calculadora de triângulos” através dos seu celular/tablet/notebook, entregar a versão impressa da ESTAÇÃO 02 para cada um. Trazer um feedback da ESTAÇÃO 01, destacando os pontos mais importantes abordados nele, acrescido de outros comentários se necessário. Depois, Fazer a leitura oral do texto inicial e em seguida autorizar os estudantes a realizarem os comandos do ESTAÇÃO 02. Após concluir todos os 9 itens, pedir para que os estudantes respondam a “autoavaliação” contida no final do material impresso. (item 10)
Avaliação:	Avaliar se os estudantes respeitam as instruções dadas pelo professor, se realizam todos os itens da atividade e se preenchem a autoavaliação ao final do <i>ESTAÇÃO 02</i>

Estação 02 – “E o triângulo existe?”

Texto inicial:

É bem possível que você já saiba que triângulos existem e provavelmente, tenha condições de classificá-los de acordo com seus lados e de seus ângulos internos, conforme vimos na Estação 01. Agora, na Estação 02, queremos entender se um triângulo pode ser formado por quaisquer três medidas de lados. O que você acha? A ferramenta calculadora de triângulos pode te ajudar a chegar a uma conclusão sobre esse assunto. Agora siga atentamente os comandos dessa estação, recorrendo sempre que possível a Calculadora de triângulos para validar seus resultados.

Mãos a obra!

1 – Abra a **Trianguladora** em seu aparelho eletrônico e clique em “”. Digite as medidas 3, 2 e 6 para os respectivos lados de um possível triângulo ABC.

a) Registre as informações dadas pela calculadora.

b) Se invertemos a ordem dessas medidas o resultado do item (a) muda?

c) Se dobrarmos as medidas propostas as informações sobre esse triângulo mudam? E se triplicarmos? Repita o processo na **Trianguladora** multiplicando cada lado dele por

2 e depois por 3. Anote os resultados explicando que: “se quando um triângulo não existe, multiplicar suas medidas por um mesmo número, faz com que ele exista ou não?”

2 – Gere separadamente, por meio da calculadora de triângulos, os possíveis triângulos com as medidas abaixo e responda:

I – (3, 5, 9), II – (6, 8, 10), III – (1, 2, 3)

d) Qual dessas medidas (I, II e III) é possível formar um triângulo?

e) **Utilizando as medidas do triângulo II**, adicione separadamente a medida do **lado AB** com a medida do **lado BC** e compare com a medida do **lado AC**. A soma das medidas do lado AB com BC é maior ou menor que a medida do lado AC?

f) **Utilizando as medidas do triângulo II**, adicione separadamente a medida do **lado AB** com a medida do **lado AC** e compare com a medida do **lado BC**. A soma das medidas do lado AB com AC é maior ou menor que o lado BC?

g) **Utilizando as medidas do triângulo II**, adicione separadamente a medida do **lado BC** com a medida do **lado AC** e compare com a medida do **lado AB**. A soma das medidas do lado BC com AC é maior ou menor que o lado AB?

h) **Se REPITIRMOS o comando dos itens “b”, “c” e “d”, porém utilizando as medidas I e III.** O que irá acontecer de diferente?

i) A que conclusão você chegou sobre a existência de triângulos?

3 – Utilizando o botão “”, contido na página inicial, responda:

O que é a desigualdade triangular? Que relação tem com a condição de existência de um triângulo?

4 – Sem usar a **Trianguladora**, indique quais medidas abaixo podem formar triângulos registrando sua estratégia de resposta.

a) 18 cm, 40 cm e 24 cm

b) 11 cm, 25 cm e 11 cm

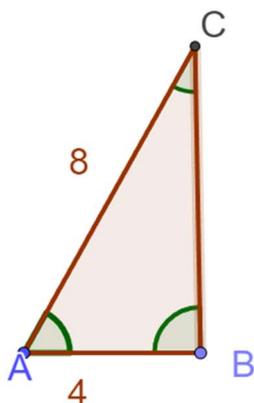
c) 34 cm, 76cm e 42 cm

d) 12,5cm, 12,5 cm e 12,5 cm

e) 14cm, 20cm e 14 cm

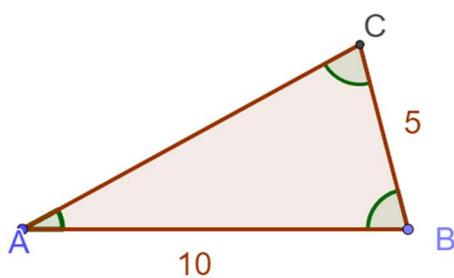
f) Use a ferramenta calculadora de triângulos para verificar seus resultados dos itens “a”, “b”, “c”, “d” e “e”, e classifique os triângulos que existirem quanto a medida dos seus lados e ângulos.

5- Analisando a figura abaixo responda:



- a) O segmento BC pode ter medida 15? Por quê?
- b) O segmento BC pode ter medida 2? Por quê?
- c) Qual o menor número inteiro que BC pode ter como medida?
- d) Qual o maior número inteiro que BC pode ter como medida?

6 – Para que o triângulo abaixo seja isósceles, qual deve ser a medida do segmento AC. Explique sua resposta.



- a) somente 5
- b) Somente 10
- c) 5 ou 10
- d) 15
- e) nenhum valor

7 – (USE UMA FOLHA ANEXO ENTREGUE PELO PROFESSOR)

Usando régua e compasso vamos aprender a montar um triângulo a partir das medidas 8cm, 5cm e 4cm dos seus lados, para isso siga os passos abaixo:

I - Trace um segmento de reta qualquer

II – No segmento traçado marque um ponto A. (mais próximo de um dos extremos do segmento traçado)

III – Faça a abertura do compasso em 8 cm. Para isso coloque a ponta seca no compasso em 0 e a outra ponta em 8 na régua.

IV - Com essa abertura, coloque a ponta seca do compasso no ponto A, e risque o segmento criado no item I. nesse “risco” marque o ponto B. Verifique com a régua se o segmento AB mede 8 cm.

V - Com a abertura do compasso em 5 cm, coloque a ponta seca em A e faça um arco de circunferência de tamanho significativo

VI - Agora com a abertura em 4 cm, coloque a ponta seca do compasso em B e faça outro arco de circunferência significativo de tal modo que intercepte o primeiro arco. Nessa interseção dos arcos você deverá marcar o ponto C.

VII - Com a régua, ligue os segmentos AC e BC e verifique se eles medem 5cm e 4 cm respectivamente.

8 – (USE UMA FOLHA ANEXO ENTREGUE PELO PROFESSOR)

Siga os passos dados no Item 7 e construa com régua e compasso os triângulos com medidas de lados abaixo e depois use a **Calculadora de triângulos** para determinar as medidas dos seus ângulos internos e registrá-las em seu desenho:

a) 6cm, 10cm e 8cm b) 5cm, 4 cm e 4 cm c) 5cm, 5cm e 5 cm

9 – (USE UMA FOLHA ANEXO ENTREGUE PELO PROFESSOR)

Siga os passos dados no Item 7 e verifique se é possível construir os triângulos de medidas de lado abaixo. Depois use a **calculadora de triângulos** para validar sua conclusão

a) 8cm, 3cm e 4 cm d) 10cm, 4cm e 4 cm

10 – Autoavaliação:

a) Você já conhecia, ou lembrava da condição de existência de um triângulo? Explique
SIM () NÃO ()

b) Você usaria a calculadora de triângulos para verificar a existência de um triângulo?
Explique
SIM () NÃO ()

c) Você sabia como construir triângulos utilizando régua e compasso? Explique
SIM () NÃO ()

d) Através da construção de triângulos com régua e compasso, você percebeu o porquê que alguns triângulos não existem? Explique
SIM () NÃO ()



Estação 03 – “Conhecendo a Semelhança entre triângulos”

Objetivo:	Identificar e determinar triângulos semelhantes por meio da medida dos seus ângulos internos. Determinar medidas de lados desconhecidos a partir da razão de semelhança entre dois triângulos semelhantes.
Metodologia:	Após organizar a sala em filas e pedir que os estudantes estejam de posse da ferramenta “Trianguladora” através dos seu celular/tablet/notebook, entregar a versão impressa da ESTAÇÃO 03 para cada um. Trazer um feedback da ESTAÇÃO 02, destacando os pontos mais importantes abordados nele, acrescido de outros comentários se necessário. Depois, Fazer a leitura oral do texto inicial e em seguida autorizar os estudantes a realizarem os comandos da Estação 03. Após concluir todos os 8 itens, pedir para que os estudantes respondam a “autoavaliação” contida no final do material impresso. (item 09)
Avaliação:	Avaliar se os estudantes respeitam as instruções dadas pelo professor, se realizam todos os itens da atividade e se preenchem a autoavaliação ao final do ESTAÇÃO 03

Estação 03 – *Conhecendo a Semelhança entre triângulos*

Texto inicial:

Você chegou na Estação 03 dessa incrível viagem ao conhecimento. É possível que agora você já seja capaz de verificar a existência de um triângulo e classificá-lo quanto as medidas dos seus lados e ângulos. O que ainda mais podemos aprender? Nessa estação, faremos um estudo sobre Semelhança de triângulos e é claro que a Trianguladora nos auxiliará novamente. Então, abra-a na página inicial e vamos começar!

1 – Sobre o triângulo ABC de medidas dos lados iguais a 5 cm, 6 cm e 5 cm, faça o que se pede:

- a) Usando régua e compasso, construa esse triângulo e depois use a calculadora de triângulos para determinar os ângulos internos desse triângulo. Anote também a medida do perímetro e a medida da área.

- b) Construa agora o triângulo DEF, sendo suas medidas o triplo das medidas do triângulo ABC do item (a). Depois use a Trianguladora para determinar os ângulos internos desse triângulo. Anote também a medida do perímetro e a medida da área.

c) A medida dos ângulos do triângulo DEF triplicaram em comparação aos de ABC?

d) A medida do PERÍMETRO do triângulo DEF triplicou em comparação a ABC?

e) A medida da ÁREA do triângulo DEF triplicou em comparação a ABC?

f) Que conclusão você chega em relação as medidas dos ângulos internos, medida do perímetro e medida da área quando geramos um triângulo multiplicando as medidas por um número 3?

g) E se multiplicarmos as medidas dos lados de um triângulo por “k”, o que aconteceria com a medida dos ângulos internos, a medida do perímetro e a medida da área?

2 – Usando a ferramenta  , digite as medidas dos lados dos triângulos ABC e DEF, definidas no item 1).

a) Que informação a Trianguladora fornece sobre esses dois triângulos? Registre as informações fornecidas

b) Mantendo as medidas do lado ABC e trocando as medidas dos lados de DEF para 7cm, 7cm e 8cm, que informações a Trianguladora fornece agora sobre esses triângulos

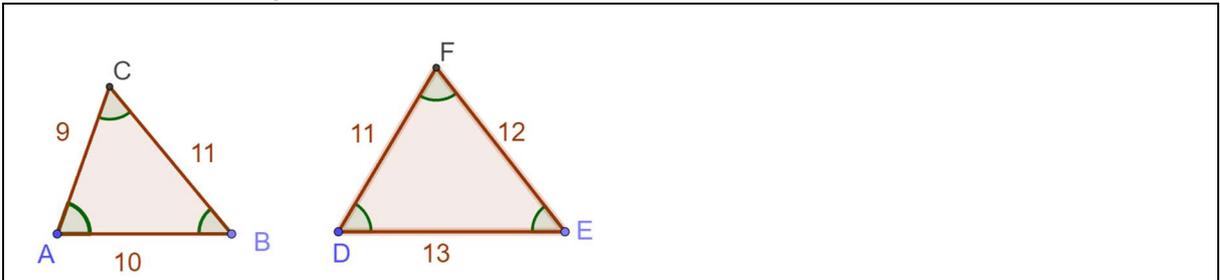
3 – Use o botão  , para obter mais informações e responda:

a) O que é a semelhança entre triângulos?

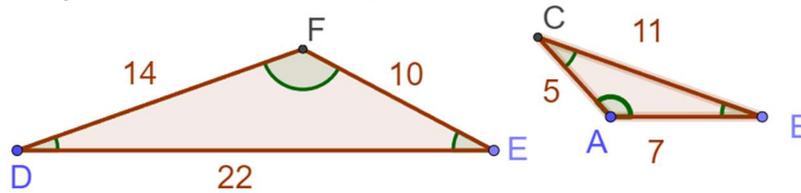
b) O que são lados homólogos?

c) O que é a constante de proporcionalidade ou razão de semelhança?

4 – Observe os triângulos ABC e DEF. Eles são semelhantes? Por quê?



5 – Observe os triângulos ABC e DEF, e responda:



a) Os triângulos ABC e DEF são semelhantes? Por quê?

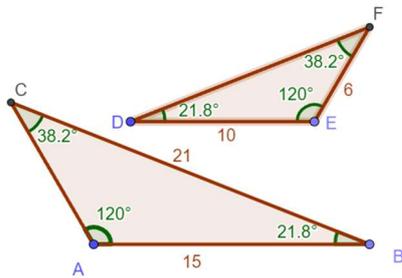
b) Quais são seus lados homólogos?

c) Qual é sua razão de semelhança? E o que isso significa?

6 – Usando a Trianguladora, determine se um triângulo equilátero de medida de lado 5, pode ser semelhante a outro triângulo equilátero de medida de lado 7. EXPLIQUE

7 – Que conclusão você pode chegar sobre semelhança entre triângulos equiláteros?

8 – Observe os triângulos ABC e DEF abaixo e responda:



- a) Eles são semelhantes? Por quê? _____
- b) Quais são seus lados homólogos? _____
- c) Qual a razão de semelhança? _____
- d) Qual é a medida dos segmentos AC e DF? _____

09 – Autoavaliação:

- a) Você já sabia que triângulos com medidas dos ângulos internos congruentes são semelhantes, mesmo que as medidas dos seus lados não sejam?

SIM () NÃO ()

- b) Você acha que a Calculadora de triângulos foi necessária para entender o conceito de triângulos semelhantes? Explique

SIM () NÃO ()

- c) Que instrumento poderia ser usado no lugar da calculadora de triângulos para identificar se triângulos são semelhantes, você sabe? Qual?

SIM () NÃO ()

REFERÊNCIAS

ANGELIN, Arlindo Moacir. **Semelhança de triângulos: atividades práticas com o auxílio do Geogebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, p. 98. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CABRAL, Clara Alice Ferreira. **Uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas para o desenvolvimento de conhecimentos de semelhança de triângulos.** Universidade Federal do Pará, 2020.

CALIANI, Fabrício José Oliveira. **Um aplicativo de celular como alternativa metodológica para o ensino de semelhança de triângulos e pirâmides.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto, p. 61. 2021.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.** Tradução Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2010.

CRUZ, Josinaldo dos Santos. **O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e aplicações.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe. Itabaiana, p. 67. 2015.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana.** – 9. ed. - São Paulo: Atual, 2013.

DUVAL, Raymond, Trad. Mérciles Thadeu Moretti. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis -SC, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). 8ª ed. - Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica- Campinas, São Paulo. Papyrus, pp. 125-148. 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FACCHINI, Camila. **Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto, p. 80. 2021.

FLORES, C. R. **Registros de representação semiótica em matemática: história,**

epistemologia, aprendizagem. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro - SP, v. 19, n. 26, p. 1-22, 2006. Disponível em <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221866005.pdf>.

KITCHENHAM, Barbara; CHARTERS, Stuart. **Guidelines for performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering**. Technical Report EBSE 2007-001, Keele University and Durham University Joint Report, 2007.

LIMA, Luís Gomes de. **A teoria dos registros de representação semiótica: contribuições para o ensino e aprendizagem da física**. Investigações em Ensino de Ciências, v. 24, n. 3, 2019.

MUNIZ, Rafaela dos Santos Souza. **O ensino de função pela perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica apoiado por tecnologias digitais**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, p. 245. 2019.

OLIVEIRA, Bárbara Pimenta de. **Reflexões à luz da teoria dos registros de representação semiótica acerca das práticas dos professores que ensinam matemática**. Dissertação (Mestrado em Formação de Professores) - Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, p. 142. 2014.

SOUZA, Galvina Maria de Souza; LIMA, Gabriel Loureiro de Lima. **Processos de Ensino e de Aprendizagem das Integrais Duplas: uma revisão de literatura**. REMATEC, Belém, v. 19, n. 47, p. e2024031, 2024.

SOUZA, Galvina Maria de. **Integrais duplas: um estudo à luz de uma articulação entre a teoria antropológica do didático e a teoria da matemática no contexto das ciências**. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.