

2023



RECORTES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

PRODUTO EDUCACIONAL

Veraciv Brabo de Vasconcelos
Miguel Chaquiam



Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Jofre Jacob da Silva Freitas
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Pedro Franco de Sá
Coordenador do Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Ana Kelly Martins da Silva
Vice Coordenadora do Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa	Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva	Prof. Dr. José Antônio Oliveira Aquino
Prof. Dr. Antônio José Lopes	Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado	Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha	Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão	Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira	Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Claudianne Amorim Noronha	Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz	Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior	Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira	Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva	Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves	Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva	Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo	Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha	Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias	
Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares	

Comitê de Avaliação

Miguel Chaquiam

Natanael Freitas Cabral

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Vasconcelos, Veraciv Brabo de

Recortes da história da matemática para o ensino de probabilidade/Veraciv Brabo de Vasconcelos; Miguel Chaquiam. - Belém, 2023

Produto educacional vinculado à dissertação “Recortes da história da matemática para o ensino de probabilidade” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1. Matemática-História. 2. Probabilidade-Estudo e ensino. 3. Prática de ensino. 4. . I. Chaquiam, Miguel. II. Título.

CDD 23ed. 511.6

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: “RECORTES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE”

Mestranda: VERACIV BRABO DE VASCONCELOS

Data da avaliação: 16 / 06 / 2023

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

- () Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio
() Professores do Ensino Fundamental () Professores do Ensino Médio
() Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

- () Sequência Didática () Página na Internet () Vídeo
(X) Texto Didático (alunos/professores) () Jogo Didático () Aplicativo
() Software () Outro: HQ sobre os números irracionais.

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: _____
() Não () Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

- (X) Sim
() Não. Justifique? _____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

- (X) Sim
() Não. Justifique? _____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

- (X) Sim
() Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

- a) *Possui sumário:* (X) Sim () Não () Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim () Não () Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:* (X) Sim () Não () Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim () Não () Não se aplica
e) *Possui referências:* (X) Sim () Não () Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim () Não () Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim () Não () Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

(X) Sim, onde: Grupo Facul. de Pedagogia

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

(X) Sim, onde: Instituições de Ensino Médio

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

(X) Sim, onde: Grupo Facul. de Pedagogia

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

() na escola, como atividade regular de sala de aula

() na escola, como um curso extra

(X) outro: Apresentação no grupo de Pedagogia

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

() Alunos do Ensino Fundamental

() Alunos do Ensino Médio

() Professores do Ensino Fundamental

(X) Professores do Ensino Médio

() outros membros da comunidade escolar, tais como _____

() outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO

() APROVADO COM MODIFICAÇÕES

() REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Assinaturas

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Presidente)

Doutor em Educação

IES de obtenção do título: UFRN



Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Examinador 01)

Doutor em Educação

IES de obtenção do título: PUC/RJ



Prof. Dr. Alailson Silva de Lira (Examinador 02)

Doutor em Educação em Ciências e Matemática

IES de obtenção do título: UFPA



“A matemática cresce por acreções,
com pouca necessidade de descartar irrelevâncias”
(BOYER, 1974, p. 246).

Tão pouco de excluir didaticamente os processos de sua evolução que somente a História da Matemática pode contar. Visto que ela desempenha um papel crucial ao revelar o processo evolutivo da Probabilidade, oferecendo conhecimentos que são relevantes e que podem ser trazidos para a sala de aula. Essa abordagem proporciona aos alunos uma experiência de aprendizado diversificada, buscando satisfazer algumas das suas inquietações sobre a existência da matemática na escola.

Veraciv Vasconcelos

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO	7
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	9
3. UMA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE	15
3.1. CONSTITUIÇÃO DA TEORIA DA PROBABILIDADE.....	17
3.2. FORMALIZAÇÃO DA TEORIA DA PROBABILIDADE	27
3.3. INTRODUÇÃO DA PROBABILIDADE NA MATEMÁTICA	34
3.4. AXIOMATIZAÇÃO DA PROBABILIDADE.....	45
4. RECORTES HISTÓRICOS E ATIVIDADES PARA O ENSINO.....	51
4.1. TEXTO 1: UM PROBLEMA QUE DEU INÍCIO A TEORIA DA PROBABILIDADE	52
4.2. TEXTO 2: UMA HISTÓRIA DA TEORIA DA PROBABILIDADE	60
4.3. TEXTO 3: DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA À DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA	70
5. ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES E ALUNOS	79
5.1. AOS PROFESSORES	79
5.2. AOS ALUNOS	81
REFERÊNCIAS.....	82

1. APRESENTAÇÃO

Este Produto Educacional aborda tópicos da História da Matemática no Ensino de Probabilidade para a Educação Básica, elaborado a partir da conclusão da dissertação, como exigência do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Com o objetivo de contribuir como uma ferramenta didática no ensino de matemática.

A inclusão da Unidade Temática Probabilidade no currículo escolar representa uma mudança significativa, que ocorreu com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2017. A partir dessa implementação, a probabilidade passou a ser recomendada desde o 1º ano do ensino fundamental, evidenciando o reconhecimento da sua importância como um conteúdo fundamental para o desenvolvimento dos alunos.

No que se refere à História da Matemática, ela também é recomendada pela BNCC, como um método para auxiliar no ensino e promover o desenvolvimento das habilidades e competências enfatizadas neste documento. Isso significa que o uso da História da Matemática é oficialmente reconhecido e incentivado como uma abordagem pedagógica válida para enriquecer o ensino dessa disciplina.

Para organizar o material didático deste produto educacional, utilizou-se o Diagrama metodológico de Chaquiam (2022), que orienta a construção de um texto abrangente que incorpora uma abordagem multicontextual da história da matemática em relação ao conceito de probabilidade. A partir desse texto, Chaquiam (2022) propõe a seleção de recortes históricos e atividades para apoiar o ensino de probabilidade na educação básica.

Material que foi elaborado com base em estudos acadêmicos e científicos, utilizando resultados de uma extensa pesquisa bibliográfica em documentos oficiais da educação, literatura educacional, formação de professores e fontes que embasam uso da história da matemática no ensino e aprendizagem dessa disciplina. Nesse contexto, foi construída um Texto Histórico intitulado *Uma História da Probabilidade*, com o intuito de produzir recortes históricos e atividades selecionadas a partir deste Texto, que compõe este produto destinado ao uso em sala de aula.

Cada recorte histórico é acompanhado de atividades didáticas, que foram produzidas, buscando envolver os alunos de maneira ativa no processo de aprendizagem, pois foram planejadas para estimular o pensamento e a capacidade de resolver problemas, ao mesmo tempo em que exploram a riqueza histórica da disciplina e do objeto probabilidade, permitindo que

os alunos conheçam os fundamentos teóricos da probabilidade e estabeleçam conexões com eventos e contextos reais que deram origem a essa teoria ao longo dos séculos.

O uso da História da Matemática na educação promove a interdisciplinaridade ao permitir a interação de disciplinas como Matemática, História, Estatística, Filosofia. Essa abordagem busca explicar a história da Probabilidade em diversos contextos sociais, estabelecendo um diálogo entre as disciplinas e estimulando a criatividade e a inovação. Além disso, incentiva os alunos a desenvolverem projetos e os prepara para enfrentar desafios nos quais a interdisciplinaridade é essencial e a leitura é obrigatória.

Do Texto Histórico foram produzidos recortes históricos e suas respectivas atividades intitulados como:

- Recorte I – Um problema que deu início a teoria da probabilidade
- Recorte II – Uma história da teoria da probabilidade
- Recorte III – Da definição clássica à definição axiomática

Esse Produto educacional passou por um processo de validação, garantindo sua qualidade e eficácia. Para isso, foram ouvidos professores por meio de questionário virtual, elaborado no *Google Forms*, no qual puderam avaliar o Texto Histórico e o Conjunto dos Recortes Históricos e Atividades. A participação dos professores nesse processo foi essencial, pois suas opiniões contribuíram para aprimorar ainda mais este produto.

Vale ressaltar que a proposta dos recortes históricos é flexível adaptável, permitindo que cada professor selecione e recorte a História de acordo com seus interesses e preferências. Essa abordagem personalizada possibilita uma maior conexão com os alunos e uma abordagem mais adequada às necessidades de cada região escolar.

Para maiores informações consultar Vasconcelos (2023), onde pode se verificar que os percentuais favoráveis ao seu uso são superiores a 90% do ponto de vista dos participantes, indicando que o material foi produzido com qualidade, alinhado com as demandas e expectativas dos professores, para enriquecer o ensino de probabilidade na Educação Básica.

Por fim, neste produto há orientações para professores e alunos quanto ao uso do conjunto histórico para melhor aproveitamento no ensino de probabilidade e suas histórias. Para os professores foi sugerido estratégias e adaptações das atividades. Já os alunos receberam algumas dicas de como aproveitar o conteúdo, explorar a história da matemática e desenvolver suas habilidades sobre a teoria da probabilidade.

Veraciv Brabo de Vasconcelos

Miguel Chaquiam

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De acordo com Chaquiam (2022, p. 22) “A preocupação com o ensino e aprendizagem da Matemática tem sido um tema constante nos congressos e encontros que reúnem profissionais da educação, sejam eles pedagogos ou matemáticos, professores em exercício ou em formação”, professores que buscam melhorar a qualidade de suas práticas em sala de aula, e assim “diminuir o problema, agravado principalmente pelo fracasso dos alunos” (Ibid., p. 22) na disciplina de matemática, essas dificuldades ficam explícitas, nos resultados que são divulgados de avaliações e pesquisas nacionais e internacionais.

A cerca do ensino e aprendizagem da probabilidade, está compreendido na investigação dessa pesquisa, para analisar uma forma de contribuir para melhoria do ensino, com o intuito de inovar ou renovar práticas pedagógicas que proporcione aos alunos, conhecimento probabilístico. Utilizando a História da Matemática, propõe-se a construção de ideias que se remetem aos conceitos probabilísticos, por julgar que o contexto de sua constituição e evolução contribui para essa aprendizagem, entre outros conceitos relacionados a teoria da probabilidade.

Aprender “probabilidade” exige do aluno, conhecimentos e conceitos que podem e devem ser explorados em trabalhos pedagógicos, independentemente da Tendência metodológica utilizada para este fim, é preciso fortalecer a ideia que o ensino de probabilidade traz para a vida do aluno um conhecimento que faz parte da sua rotina, como: decisões, interpretações, previsões, experimentos, apostas, identificar o que é possível e impossível em uma situação, são muitas ideias que precisam ser fortalecidas.

Segundo Santos (2015) em sala de aula deve-se estabelecer a relação entre a linguagem coloquial e a formal, que são requisitos importantes para o desenvolvimento de conceitos científicos sobre probabilidade. Para Gal (2005) é necessário dar mais atenção a linguagem probabilística, pois ela “apresenta aspectos relevantes nas relações abstratas que se estabelecem entre as situações apresentadas e os termos utilizados para expressar a medida de chance e para apresentar suas reais interpretações probabilísticas” (Apud SANTOS, 2014, p. 42), pois segundo Gal (2005),

Não é uma característica palpável dos acontecimentos, mas uma percepção ampla, que pode ser expressa por meio de uma notação formal da Matemática quanto à probabilidade de ocorrência de um evento. Para o autor, muitas das situações cotidianas exigem que as pessoas sejam “letradas probabilisticamente”; e, para que o letramento aconteça, não basta que haja no processo de ensino uma simples instrução, é preciso que diferentes elementos de conhecimento estejam envolvidos no processo, havendo uma interação entre diferentes conceitos de probabilidade, maneiras de descobrir a probabilidade de um evento, linguagem, contexto e questões críticas (apud Santos, 2014, p. 42).

Enquanto professor é necessário criar maneiras de inovar o ensino mostrando a real importância dessa área do conhecimento sobre o que acontece habitualmente com o uso da matemática, a mediação do professor neste aspecto é fundamental. Segundo Chaquiam (2022, p. 23) “O professor sente por ele mesmo necessidade de mudança, a qual se expressa de dentro para fora, através da angústia de um dia de trabalho que não satisfaz a atitude do professor que tenta ser atuante” no processo de ensino, e assim busca constantemente por métodos e recursos materiais para suprir suas aflições e ter sucesso na aprendizagem sobre os estudos das chances de um evento ocorrer.

As primeiras orientações nacionais, sobre o ensino de probabilidade, estão dispostas no Parâmetro Curricular Nacional (PCN) de matemática, orientações que abrangem toda a Educação Básica, entretanto, apesar da inclusão do ensino da probabilidade e da orientação ao uso da História da Matemática no PCN de matemática, este documento oficial, não evidencia a obrigatoriedade dessas inclusões nos currículos escolares deixando cada escola livre para organizar seu currículo com os conteúdos essenciais, conforme suas decisões.

Mais de vinte anos depois, a importância do Ensino de Probabilidade ainda se justifica e se intensifica na sociedade e no ensino escolar atual. Foi somente com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 20 de dezembro de 2017 que foi integrado a Probabilidade como uma Unidade Temática¹ *Probabilidade e Estatística*, com as devidas descrições de conteúdos e orientações para ser ensinado desde o 1º ano do Ensino Fundamental, com habilidades e competências que devem ser contempladas na aprendizagem, tanto a nível cognitivo quanto ao nível socioemocional.

As competências gerais definidas na BNCC (2017), estabelecem que o aluno tem que ser capaz de usar os saberes ensinados na escola, ou seja, ser capaz de utilizar o conhecimento aprendido aplicando em seu cotidiano, quando necessário. É importante enfatizar que as competências gerais são baseadas em todo o documento oficial e estabelecidas como “conhecimentos essenciais” e “definidas como mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2017, p. 6).

Quanto aos recursos didáticos, a BNCC (2017) indica que devem ser construídos para despertar interesse dos alunos em querer aprender, “esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para sistematização dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2017, p. 297).

¹ No PCN de matemática a nomenclatura é EIXO TEMÁTICO.

Segundo a BNCC toda escola deve criar materiais que orientem os professores sobre os conteúdos essenciais de como os alunos devem aprender, entretanto nela, não se define como serão criados esses métodos e recursos, que atendam a aprendizagem das habilidades e competência tão frisadas neste documento. Mas, na BNCC (2017) orienta a importância em incluir a história da Matemática como recurso didático para despertar o interesse do aluno em querer aprender Matemática, de forma que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Quanto ao livro didático, sabe-se que é um instrumento de importância significativa em sala e funciona “como um elo entre professores, alunos e o conteúdo que carrega em si” (LIMA, 2020, p. 01) o que faz dele um forte aliado no processo de ensino e aprendizagem, principalmente tratando-se de escolas públicas, seu conhecimento deve contemplar o conteúdo exigido nos documentos curriculares oficiais. Da coleção analisada “Matemática Bianchini”, apresenta uma pouquidade de conceitos e tarefas voltadas para o ensino probabilísticos, o que pode acarretar seu não uso para o ensino deste tema.

Segundo os autores Vergnaud (1996, 1986) e Bryant & Nunes (2012),

A escolha de uma coleção que não propõe um trabalho robusto com problemas de natureza probabilística pode fazer com que esse trabalho não seja foco na sala de aula, o que prejudicaria o contato dos estudantes com conceitos e problemas variados, que poderiam proporcionar o desenvolvimento de seus raciocínios probabilístico (Apud LIMA, 2020, p. 08).

O livro didático deve proporcionar uma leitura do desenvolvimento do raciocínio probabilístico e também propor situações ao uso da História da Matemática, por ser uma Tendência Metodológica da Educação Matemática, nesse sentido, o livro deve e tem que abranger os aspectos que envolvam a necessidade de melhorar o ensino e a aprendizagem no ambiente escolar, tornando-se um relevante recurso em sala de aula, devendo contemplar, o que foi aprovado na BNCC (2017), pois ainda o tema *Probabilidade*, está gerando altas expectativas ao ensino e exigindo um conhecimento maior na aprendizagem.

A BNCC foi aprovada no mesmo ano da publicação desta coleção, que já contempla em parte as orientações da Base, enfatizando as competências que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao longa da educação básica e as orientações ao uso da História da Matemática no ensino e aprendizagem da matemática escolar, se os professores utilizarem como recurso a História da Matemática, o que é pouco provável, não teriam êxito, nem estratégias didáticas que despertassem o interesse dos alunos em sua História.

Diante das propostas, dos fatos e da importância deste produto, segundo Chaquiam (2022, p. 09), é “imprescindível ter em mente que escrever uma história é “recompôr” um

passado, circunscrevê-lo, efetuar recortes cronológicos e organizar materiais heterogêneos dos fatos para construir no presente uma razão”. Perante deste fato tem-se como objetivo científico e oficial realizar uma interação da História da Matemática com o ensino de probabilidade, balizado pelo Diagrama Metodológico, em sua versão (2022).

Chaquiam (2022), destaca algumas potencialidades, que foram identificadas durante a aplicação do diagrama metodológico no curso de formação de professores, como:

- i. aproximar os futuros professores da história da disciplina que irão ministrar;
- ii. apresentar-se como uma possibilidade de observar o tema de modo geral e em seus diversos contextos;
- iii. apresentar-se como uma forma de balizar a elaboração de um texto que envolve recortes históricos a respeito de uma temática;
- iv. evidência possibilidades de elaboração de atividades que exploram o texto produzido;
- v. desmistifica o fato de que a história da matemática compreende apenas nomes, datas e personagens.

As orientações que Chaquiam (2022) apresenta, quanto ao uso da Diagrama Metodológico, são frutos de suas práxis na formação de professores, de suas participações em seminários, minicursos, palestras, escola de estudos, enfim, todo um contexto apresentando a evolução/constituição relevante de um objeto de conhecimento dentro da história e trazendo o contexto para o ensino da matemática, com objetivos de construir uma história, a partir de sua revisão bibliográfica, tendo em vista a elaboração de recortes históricos e atividades para uso em sala de aula. De modo que seja possível,

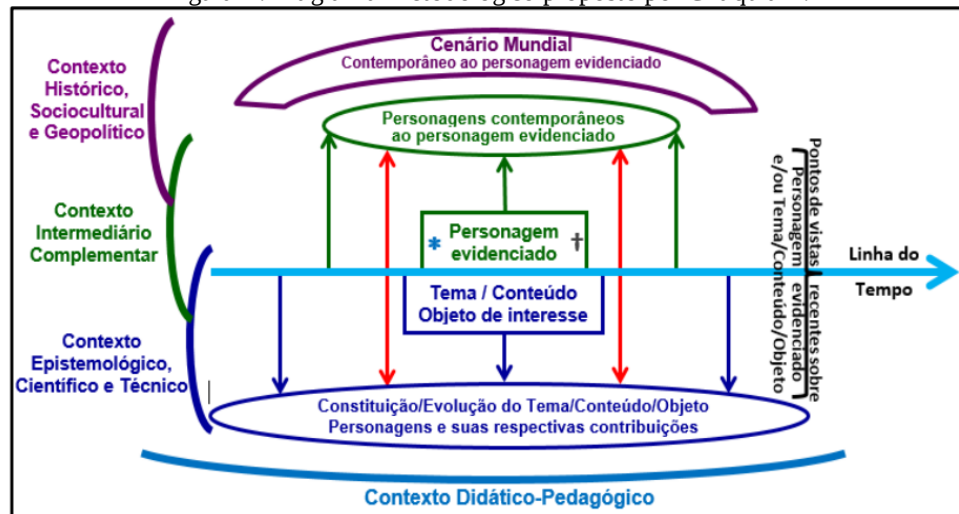
Elaborar outros textos envolvendo a mesma temática a partir de novos recortes temporais ou personagens evidenciados e, além disso, é possível tomá-lo como modelo na elaboração de novos textos que envolvam outras temáticas ou conceitos e remodelá-lo para aplicação noutras ciências, a exemplo, Física, Química e Biologia (CHAQUIAM, 2022, p. 03).

O diagrama Metodológico é constituído de quatro contextos para melhor aproveitamento dos elementos que auxiliarão na elaboração do texto didático, são eles:

- i. Epistemológico, Científico e Técnico;
- ii. Intermediário Complementar;
- iii. Histórico, Sociocultural e Geopolítico e
- iv. Didático-Pedagógico.

Na Figura 1, está exposto o Diagrama Metodológico em sua versão atualizada.

Figura 1: Diagrama Metodológico proposto por Chaquiam.



Fonte: Chaquiam (2022, p. 28)

Para elaborar o texto principal, seguiu-se as orientações e a ordem proposta pelo autor. Iniciou-se com a **Escolha do Tema** (probabilidade), que foi inserido no centro do diagrama, a partir dele foi realizado um levantamento de dados, levando em consideração o período e os aspectos que se pretendia abordar, em livros físicos e digitais, dissertações, teses, artigos científicos, sites nacionais e internacionais identificando personagens e fatos que contribuíram para sua constituição e evolução, ou seja muito do que há de informações disponíveis sobre o tema foi explorado, segundo Chaquiam (2022) essa é a parte mais importante, pois é por meio dela que se embasa qualquer pesquisa e dela que se forma o **Contexto Epistemológico, Científico e Técnico**, fechando o segundo passo.

Chaquiam (2022) ressalta que apesar do diagrama metodológico se apresentar em uma linha temporal, não significa que um texto seja escrito de forma linear, nem mesmo que o objeto em estudo tenha sua constituição ou evolução de forma linear, este formato serve para situar em tempo e espaço os fatos e acontecimentos que o objeto matemático ou conteúdo matemático passou ao longo de seu desenvolvimento.

Existe um caminho fecundo de informações científicas sobre o objeto escolhido, para ser mais específico na pesquisa, foi importante definir, organizar e estruturar dados necessários para elaborar o texto principal de Probabilidade, qual utilizou-se algumas perguntas como: Onde e quando apareceram os primeiros traços sobre o tema Probabilidade? Quais foram os primeiros teóricos a estudá-lo? Qual a necessidade que ocorreu para surgir este objeto? Quais os problemas de probabilidade que surgiram primeiro para se ensinar este tema na forma que

temos hoje na escola? No passado como se resolvia problemas sobre probabilidade? Quando foi que surgiu no contexto da história da matemática a sua fórmula? Quem de fato foi o criador da fórmula? Como a fórmula foi criada? Perguntas que foram essenciais para ajudar a definir o contexto histórico da teoria da probabilidade, dos teóricos que estudaram e contribuíram com este objeto e mesmo o limite desta pesquisa.

No terceiro passo da construção do Diagrama Metodológico, analisou-se as informações levantadas no segundo passo, para então selecionar um **Personagem de Destaque**, que foi o matemático PIERRE -SIMON LAPLACE, que fica no centro do diagrama, está é uma escolha que deve ser criteriosa, pois este personagem precisa ter contribuído de forma relevante com o tema, para fazer parte da História da Matemática, onde informações a seu respeito devem ser identificadas também.

No quarto passo, foi descrito o **Contexto Intermediário Complementar**, “que contempla os personagens contemporâneos ao personagem evidenciado, seus traços biográficos e suas respectivas contribuições. Sugere-se que sejam identificados personagens contemporâneos nas mais diversas áreas do conhecimento para uma melhor localização em tempo e espaço” (Chaquiam, 2022, p. 12).

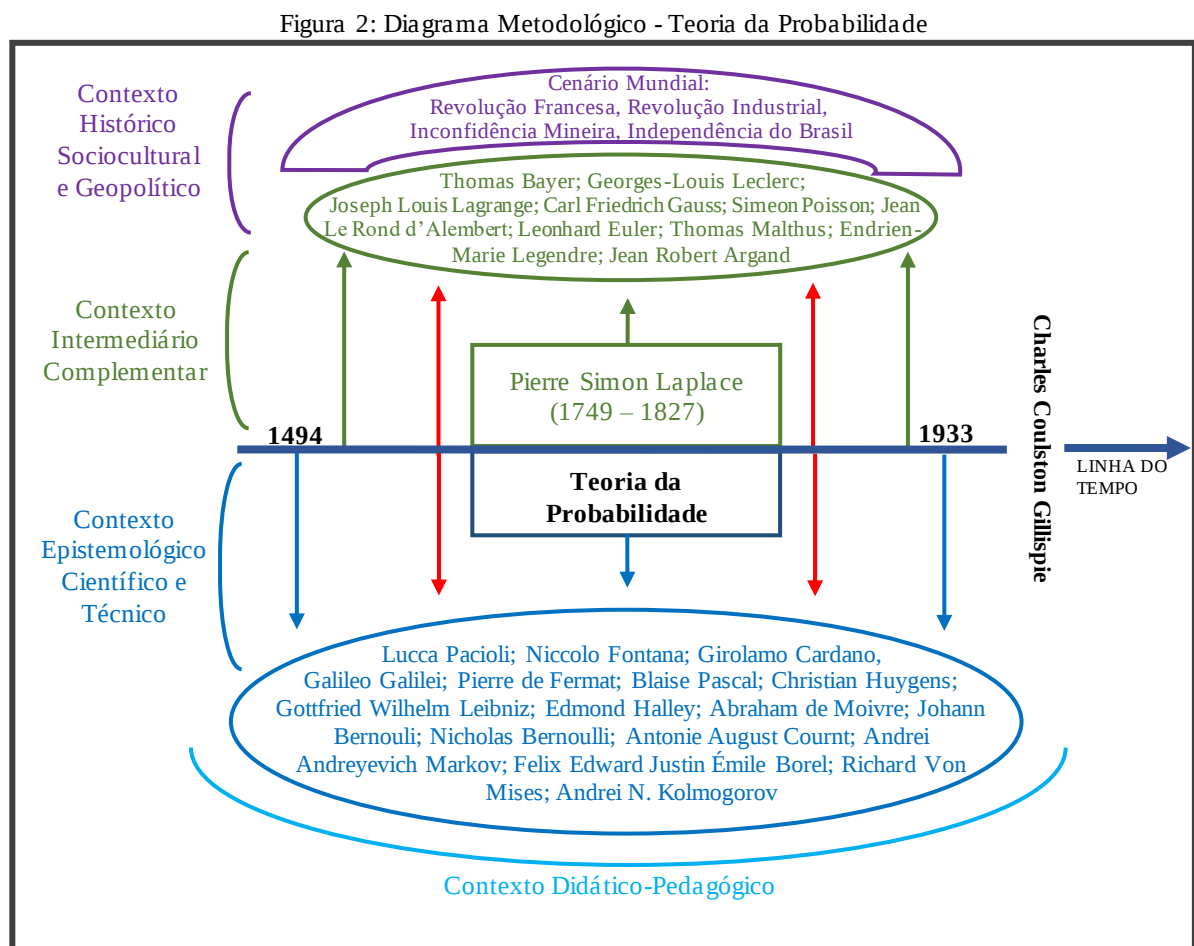
No quinto passo, foi descrito o **Contexto Histórico, Sociocultural e Geopolítico**, contemplando o cenário mundial ao personagem de destaque, aprofundando a pesquisa para identificar o que ocorreu a nível mundial em seu período. E por fim O **Contexto Didático Pedagógico**, a etapa final da construção do diagrama, neste passo foi elaborado três recortes históricos e atividades envolvendo a história da probabilidade a parti da história construída dos passos anteriores, para uso em sala de aula.

Pode ser um desafio o sucesso deste recurso em sala de aula, entretanto a vantagem de proporcionar aos alunos a oportunidade de reconhecer que esta é uma forma de afirmar o quanto a matemática é importante na escola e na vida, além disso pode ser uma explicação que condiz com os fatos da história que está sendo investigada e produzida, enfatizando o suporte teórico que Chaquiam vem destacando em seus trabalhos desde 2005, quanto a elaboração de materiais didáticos, atualmente propondo recortes da história para usar em sala de aula, ou seja, uma interação de conhecimentos que fortalecem o uso da história para ser utilizada no ensino de matemática.

3. UMA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Veraciv Brabo de Vasconcelos
Miguel Chaquiam

Na Figura 2, apresentasse o Diagrama metodológico, sobre a Teoria da Probabilidade, elaborado conforme a ideia de Chaquiam (2022), identificando aspectos essenciais a respeito do tema, organizando os fatos históricos e os contextos, permitindo uma análise disposta em cada período, contando com as contribuições de personagens que colaboraram para a evolução da probabilidade, e com isto definindo a elaboração do *Contexto Didático-Pedagógico*.



Fonte: Vasconcelos (2023).

Desta Pesquisa, é consensual que os jogos de azar, ganharam um destaque significativo, pois é de conhecimento geral que esses jogos existem a milênios de anos na humanidade e são apreciados de maneiras e objetivos diversificados, dependendo de cada cultura, região ou grupos, e seus resultados podem ser imprevisíveis. “No caso de alguns tipos de jogos, os primeiros estudiosos conseguiram encontrar formas eficientes de contar sucessos e insucessos

e dessa forma determinar a probabilidade *a priori*” (KATZ, 2010, p. 763), envolvendo situações práticas da vida.

Do final do século XIV até o final do século XVI², no livro *Historia de la Propabilidad* (s.d., tradução nossa) enfatiza-se que começaram a surgir as preocupações em contar o número de resultados possíveis de um dado lançado várias vezes e como calcular a distribuição de uma aposta quando um jogo é interrompido antes de terminar, começando, então a despertar o interesse para explicar fenômenos que não seguiam um padrão determinístico, mas aleatório, voltados aos jogos de azar.

Em *Historia de la Probabilidad* ([2020], p. 03, tradução nossa) percebe-se também, que o interesse surgiu como tentativas para solucionar situações do dia a dia, buscando ser “justos nas apostas e distribuições ou mesmo para saber as respostas para obter vantagens e consequentemente maiores lucros face a outros jogadores”, o que se sabe, das referências pesquisadas, é que os personagens que utilizavam tais estratégias, em estabelecer matematicamente tais referências, não estavam com o intuito de “modelar o acaso por meio da matemática”, ou pelo menos, não fizeram suas publicações.

Por mais que a teoria da probabilidade, tenha iniciado anteriormente ao século XIV, na história da matemática, não há referência à problemas que foram criados, nem há métodos criados para que esses problemas fossem solucionados, além disso quando surgiu na História da Matemática problemas sobre este tema, ainda assim, levou algum tempo, até mesmo séculos para que matemáticos criassem e aperfeiçoassem estratégias matemáticas para solucioná-los. Segundo Junqueira (2014), anterior ao século XV,

A Igreja Católica era contra o jogo, nem tanto pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões, comum durante os torneios [...]. O fato é que desde sempre os jogos foram utilizados em apostas, como também serviram para prever futuro, decidir conflitos ou dividir heranças (JUNQUEIRA, 2014, P. 56).

De acordo com Eves (2011, p. 394), foi algo impressionante e surpreendente que matemáticos tenham sido capazes de desenvolver uma ciência, que estabelece leis racionais para reger situações determinadas puramente pelo azar, uma ciência que “está muito longe de não ter aplicações práticas, como fica evidente pelas experiências efetuadas em grandes laboratórios, pela existência de companhias de seguro altamente respeitáveis e pela logística das empresas de grande porte e da guerra”.

² Período do Renascimento: que foi destacado por sua atividade comercial, industrial, artística, arquitetônica, intelectual, científica, entre outras, neste período a matemática vai se tornar o principal auxílio de uma arte e de uma sociedade que se preocupa incessantemente em fundamentar racionalmente seu ideal de beleza (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020]).

3.1. CONSTITUIÇÃO DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Os primeiros problemas oficialmente publicados a respeito de situações envolvendo a teoria da probabilidade, foram propostos pelo italiano Luca Pacioli (1445-1517), ao fim do século XIV, contando em seguida com a contribuição dos italianos, Niccolo Fontana (1499-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), Galileu Galilei (1564-1642), considerados personagens importantes, por realizarem estudos nos quais compararam as frequências dos eventos e estimaram as chances de se ganhar em jogos de azar.

Um dos problemas mais importantes sobre o início da noção de aleatoriedade, vem dos *problemas dos pontos*³, publicado em 1494, período em que foi impresso o primeiro escrito matemático, nomeado de *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione e Proportionalita* (Resumo de Aritmética, Geométrica, proporção e proporcionalidade) comumente conhecida por *Summa* (ARAGÃO, 2009), um livro de autoria de **Luca Pacioli** (1445-1517), um frade franciscano e matemático, nascido em Toscana, na Itália.

Este livro, de acordo com Viali (2008) colocou Luca Pacioli, na história do desenvolvimento da probabilidade, sendo o primeiro personagem conhecido a abordar sobre problemas envolvendo situações práticas de algo provável, que gerou certezas e incertezas em sua solução, pois envolveu a repartição do que foi apostado, para um jogo que não pôde ser finalizado.

Summa abordava a respeito de diversos assuntos e problemas matemáticos e sociais, entre eles o *problema dos pontos*, proposto na seguinte questão: “*Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio?*” (ARAGÃO, 2009, p. 86).

Neste problema, Pacioli, sugeriu que com a interrupção do jogo, o prêmio pudesse ser dividido “em proporção ao número de rodadas já vencidas por cada jogador” (Warsi, 2020, p. 164). Ou seja, em *Historia de la Probabilidad* ([2020], p. 03, tradução nossa) foi apresentado o seguinte cálculo proporcional as jogadas sugeridas por Pacioli: o jogador com 5 pontos receberia $\frac{5}{8} \cdot \text{prêmio}$ e o jogador com 3 pontos receberia $\frac{3}{8} \cdot \text{prêmio}$.

Pois considerava-se que o problema “consistia basicamente em estabelecer uma regra fixa que permita a quantidade de aposta em um jogo quando, por qualquer motivo, é

³ também conhecida como repartição das apostas ou divisão das apostas.

interrompido e não pode ser concluído” (SECADES, 2000, p. 10, tradução nossa), porém, a resposta de Pacioli não foi satisfatória para a solução do problema.

Sessenta e dois anos depois o matemático **Niccolo Fontana** (1499-1557), nascido em Brescia, na Itália, de pseudônimo Tartaglia, sabendo da existência do problema dos pontos, tentou solucioná-lo, descrevendo-o em sua obra *General Trattato* (Tratado Geral), porém não teve muito avanço, sua proposta era fazer a divisão da bolada na proporção entre o tamanho da vantagem e a duração do jogo, mas tal divisão falharia quando fosse muitas jogadas, então, Tartaglia duvidou que o problema pudesse ser resolvido de forma a convencer todos os jogadores de sua equidade (WARSI, 2020).

No livro *Historia de la Probabilidad* ([2020] p. 04, tradução nossa) Tartaglia apresentou uma solução, descartando a solução proposta por Pacioli, ele sugeriu que: “se um time ganhou a pontos e o outro b pontos, o jogo é jogado para n pontos e o prêmio total é P , os ganhos devem ser distribuídos da seguinte forma: $\left(\frac{P}{2}\right) \pm P \left[\frac{a-b}{n}\right]$ ”. Ainda, segundo esse mesmo livro, Tartaglia afirmou que neste caso a maior quantidade vai para a equipe que tiver mais vitórias. “No entanto, Tartaglia sabia que sua solução não era a correta e em seu livro deixou claro que era bom para conferir justiça e equilíbrio a um elenco, mas não era exato do ponto de vista matemático” (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020] p. 04, tradução nossa).

Um personagem de destaque nos jogos, foi **Girolamo Cardano** (1501-1576), matemático, médico, astrólogo e filósofo, nascido em Pávia, na Itália, ficou bastante famoso por ser um apostador de jogos de azar que buscava matematicamente estratégias para ganhar em suas apostas, tinha origem de pouca afeição familiar e financeira, aos 15 anos, decidiu que poderia encontrar melhores oportunidades de vida seguindo a carreira médica, contrariando à vontade de seu pai que desejava que ele se formasse em direito (MLODINOW, 2009).

Segundo Mlodinow (2009) no tempo de Cardano, onde ele estava os jogos eram certos de ocorrer e assim eram feitas apostas como, jogos de cartas, dados e até mesmo xadrez, que eram classificados como: os que envolviam alguma estratégia ou habilidade e os que eram governados pelo puro acaso, este último de sua preferência, pois “ele tinha uma vantagem sobre seus oponentes, já que havia adquirido uma compreensão mais apurada da possibilidade de vencer em diversas situações” (MLODINOW, 2009, p. 57).

Mesmo tendo alguns equívocos por parte de Cardano, seu livro foi o “primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza” (MLODINOW, 2009, p. 58) de forma simples, mas com eficácia Cardano escreveu suas estratégias que foi publicado postumamente no ano de 1663 e nomeado de “*Liber de Ludo Aleae*” (Livro sobre os jogos de

azar). A ideia de evento equiprovável começou a ser compreendida, Cardano tornou possível fazer cálculos envolvendo as noções básicas de probabilidades (KATZ, 2010).

Este livro, de acordo com *Historia de la Probabilidad* ([2020], p. 04, tradução nossa), foi a primeira obra relacionada com o cálculo da probabilidade em jogos de azar, no livro destaca-se que Cardano escreveu sobre o *problema dos pontos* de Luca Pacioli, isto em 1539, onde afirmou que a “solução de Pacioli estava incorreta porque, considerando apenas o número de jogos vencidos por cada equipe, ele não contava quantos jogos eles precisavam vencer para ganhar o prêmio”.

A solução de Cardano para este problema, foi definir que: “se n é o número total de partidas e a e b as partidas vencidas por cada equipe, o prêmio deveria ser distribuído da seguinte forma: $[1 + 2 + \dots + (n - b)]: [1 + 2 + \dots (n - a)]$ ”, enfatizando que seria uma solução incorreta, pois só valeria para alguns casos particulares (*HISTORIA DE LA PROBABILIDAD* [2020], p. 04, tradução nossa).

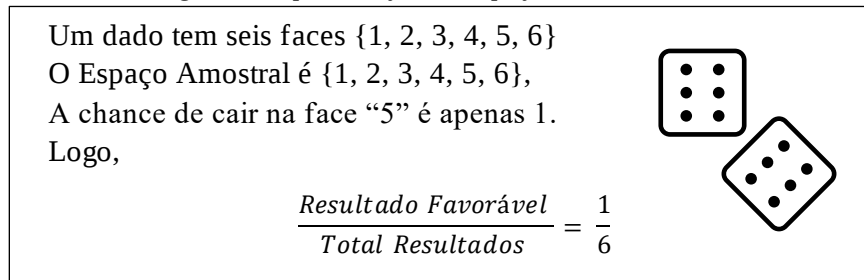
Mlodinow (2009, p. 51) frisa que anterior a Cardano, “ninguém jamais realizara uma análise racional do curso seguido pelos jogos ou outros processos incertos”, tal processo realizado por Cardano também propôs representar os resultados possíveis de um experimento, o que hoje é chamado de lei do espaço amostral. “Essa lei representava uma nova ideia e uma nova metodologia e formou a base da descrição matemática da incerteza” (Ibid., p. 51) ajudando sistematicamente a organizar um conceito aos problemas que pareciam confusos.

Para Cardano o “termo *espaço amostral* se refere à ideia de que os possíveis resultados de um processo aleatório podem ser compreendidos como pontos no espaço” (Ibid., p. 59), este autor de forma habitual atualiza a linguagem de Cardano sobre a proposição de espaço amostral para uma linguagem favorável a compreensão de professores e estudantes na atualidade, como descrito por Mlodinow (2009):

Definição: *Suponha que um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ou seja, ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultado* (MLODINOW, 2009, p. 59).

Na Figura 3, foi representado um exemplo da explicação de Cardano, entre Probabilidade/proporção dos resultados: $Probabilidade = \frac{Resultado\ Favorável}{Total\ Resultados}$. “Em outras palavras, se um dado pode cair em cada um de seus seis lados, esses seis resultados formam o espaço amostral, e se apostarmos em, digamos, dois dele, nossa chance de ganhar será $2/6$ ” (MLODINOW, 2009, p. 59).

Figura 3: Representação do Espaço Amostral de 1 dado.



Fonte: Vasconcelos (2023).

Esta Lei é hoje uma regra nos estudos básicos de ensinamento da probabilidade escolar e foi fundamental para compreensão sobre o funcionamento das probabilidades e da Lei do Espaço Amostral, como diz Mlodinow (2009, p. 54) este processo foi “o arcabouço para a análise de situações que envolvem o acaso”.

Segundo Katz (2010) Cardano resolveu problemas que envolvia regras da multiplicação das probabilidades para eventos independentes, nesta situação primeiramente ele registrou de forma equivocada cálculos que realizou sobre o lançamento de três dados, entretanto posteriormente, percebeu que seu raciocínio devia ser falso e logo fez a correção do seu erro, pois ele entendeu que são as probabilidades que devem ser multiplicadas e não as possibilidades, assim, determinou que as probabilidades de uns eventos são iguais.

Pois se um jogador com dois dados consegue lançar com probabilidades iguais um número par e um número ímpar, não resulta daí que ele possa com igual fortuna lançar um número par em cada um dos três lançamentos sucessivos (KATZ, 2010).

Cardano, devido seu envolvimento e habilidade com jogos de azar, foi considerado por tantos pesquisadores como o primeiro matemático a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento ocorrer, a ele é atribuído, os primeiros passos em observar os lançamentos de jogos dados (VIALI, 2008), portanto,

Não seria fora de propósito considerar Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade, pois foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo nos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele, também, conhecia a idéia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles (VIALI, 2008, p. 146).

Porém, Cardano não publicou o que estava desenvolvendo sobre as possibilidades e as estratégias das apostas nos jogos de azar, de acordo com Mlodinow (2009, p. 60) essa foi “umas das maiores deficiências do trabalho de Cardano”. Ainda segundo este autor, se Cardano tivesse feito uma análise sistemática dos diferentes desenlaces possíveis de uma série de eventos e publicado, a teoria da probabilidade poderia ter sua constituição formal partindo de seus estudos

e de suas teorias, embora sabendo que é partindo de seus métodos e aplicações que posteriormente são feitos os demais estudos.

Em concordância com os estudos de experimentos aleatórios, envolvendo jogos de azar, cita-se o personagem **Galileu Galilei** (1564-1642), nascido em Pisa, na Itália, físico, matemático, astrônomo e filósofo, de todas suas pesquisas para ciência, também escreveu sobre soluções de problemas envolvendo jogos de azar. Segundo Mlodinow (2009) esta contribuição foi realizada a pedido do Grão-duque de Toscana, Ferdinando dei Medici, que por meio de carta, solicitou que Galilei solucionasse o seguinte problema: “*Quando jogamos três dados, porque o número 10 aparece com mais frequência que o número 9?*” (MLODINOW, 2009, p. 70-71, grifo nosso).

Como solução para este problema, Galilei foi instigado a escrever um manual sobre jogos de azar, intitulado *Sopra le scoperta dei dadi* (Sobre o jogo de dados), compreendido em dois sentidos: “primeiro como uma forma de entender as constantes frequências no processo de chances e, segundo, como um método de determinar situações presumíveis de fé” (CALABRIA; CAVALARI, 2013, p. 10), esses problemas de identificação eram análogos as propostas por Cardano.

Mlodinow (2009, p. 72) explica que Galilei apresentou uma solução utilizando o seguinte princípio “*a probabilidade de um evento depende do número de maneiras pelas quais pode ocorrer*” o que não se tratava de uma explicação diferente, mas de como calcular tal problema, pois o número de maneiras de como um resultado pode acontecer é ponto fundamental para determinar sua probabilidade.

Contudo, Galilei parece não ter se importado com tal efeito, pois, “Ele não levou seu trabalho sobre a aleatoriedade além do problema dos dados, e afirmou, no primeiro parágrafo do trabalho, que estava escrevendo sobre esse jogo somente porque havia recebido “a ordem de fazê-lo”” (Ibid., 72). De acordo com Zindel (2015) Galilei fez uma explicação razoavelmente simples para esta situação, ao dizer que alguns eventos podem ocorrer mais facilmente e mais frequentemente que outros, pois ao observar o lançamento de três dados é necessário levar em consideração que há 216 possibilidades de certos resultados. Na Figura 4, há uma representação da solução de Galilei conforme explicação de Olivera (2015):

Ainda segundo este autor, Galilei explicou que para formar o “9 e 12 podem ocorrer em tantas vezes como 10 e 11, e conseqüentemente deveriam ser considerados como sendo igualmente úteis, ainda é sabido, que longas observações tem feito, jogadores de dados considerar 10 e 11 como sendo mais vantajosos que 9 e 12” (ZINDEL, 2015, p. 09).

Figura 4: Solução do Galilei para o problema de grão-duque de Toscana

		Possibilidades
Resultado das Somas dos três dados		
Soma igual a 9 25 possibilidades	$\{6 + 2 + 1\}; \{6 + 1 + 2\}; \{2 + 6 + 1\}; \{2 + 1 + 6\}; \{1 + 6 + 2\};$ $\{1 + 2 + 6\}; \{5 + 3 + 1\}; \{5 + 1 + 3\}; \{3 + 5 + 1\}; \{3 + 1 + 5\};$ $\{1 + 5 + 3\}; \{1 + 3 + 5\}; \{5 + 2 + 2\}; \{2 + 5 + 2\}; \{2 + 2 + 5\};$ $\{4 + 4 + 1\}; \{4 + 1 + 4\}; \{1 + 4 + 4\}; \{4 + 3 + 2\}; \{4 + 2 + 3\};$ $\{3 + 4 + 2\}; \{3 + 2 + 4\}; \{2 + 4 + 3\}; \{2 + 3 + 4\}; \{3 + 3 + 3\}.$	
Soma igual a 10 27 possibilidades	$\{6 + 3 + 1\}; \{6 + 1 + 3\}; \{3 + 6 + 1\}; \{3 + 1 + 6\}; \{1 + 6 + 3\};$ $\{1 + 3 + 6\}; \{6 + 2 + 2\}; \{2 + 6 + 2\}; \{2 + 2 + 6\}; \{5 + 4 + 1\};$ $\{5 + 1 + 4\}; \{4 + 1 + 5\}; \{4 + 5 + 1\}; \{1 + 5 + 4\}; \{1 + 4 + 5\};$ $\{5 + 3 + 2\}; \{5 + 2 + 3\}; \{3 + 5 + 2\}; \{3 + 2 + 5\}; \{2 + 5 + 3\};$ $\{2 + 3 + 5\}; \{4 + 4 + 2\}; \{4 + 2 + 4\}; \{2 + 4 + 4\}; \{4 + 3 + 3\}$ $\{3 + 4 + 3\}; \{3 + 3 + 4\}.$	

Fonte: Vasconcelos (2023)

E com este efeito, Galilei contribuiu com a teoria da probabilidade, ao construir a teoria da medição do erro, pois classificou-os em dois tipos: “sistemático” e “aleatório”, “uma classificação que ainda hoje é mantida e estabeleceu cuidadosamente as propriedades dos erros aleatórios. Com isso, sem saber, ele contribuiu para a criação de ramos fundamentais da estatística e probabilidade posterior” (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], p. 04, tradução nossa).

Segundo Katz (2010, p. 569) foi por volta da década de 1660 “que a probabilidade entrou no pensamento europeu e isso aconteceu em dois sentidos, primeiro, como uma forma de entender frequências estáveis em processos aleatórios, depois, como um método de determinação de graus razoáveis de crença” e assim, consta que formalidade da Teoria da Probabilidade, foi considerada de fato, por meio da publicação do Tratado de Christian Huygens (1629-1695), que se dedicou por compreender as cartas trocadas entre os matemáticos Franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Por isso, é a Pascal e Fermat, a atribuição de informações iniciais do reconhecimento desta teoria ao mundo da matemática, segundo Laplace (2010) não houve antes de Pascal e Fermat, outros personagens que fornecessem contribuições significativas e escritas como,

Princípios e métodos para submeter esse objeto ao cálculo nem resolvera questões desse gênero um pouco complicadas. Portanto, a esses dois geômetras devemos reportar os primeiros elementos da ciência das probabilidades, cuja descoberta pode ser colocada ao lado das coisas notáveis que ilustram o século XVII, aquele que, de todos os séculos, mais honra o espírito humano (LAPLACE, 2010, p. 213).

Quanto ao motivo para início das correspondências, primeiramente, cita-se o matemático **Antonie Gombaud** (1610-1685), nascido na França, de pseudônimo Chevalier de Méré, para melhor esclarecimento a respeito de Chevalier de Méré, ele “era um apostador experiente, que gostava de grandes riscos e ganhava com uma frequência suficiente para despertar suspeita de que estaria trapaceando” (MLODINOW, 2009, p. 76), já que parte de seu conhecimento prático envolvia estratégias em jogos de azar.

Uma observação relevante desse período é o fato de que “jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas ‘mágicas’ que garantissem ganhos substanciais nas bancas de jogo” (JUNQUEIRA, 2014, P. 56). Por essas atitudes que se início deste tema e foram de fato registrada como tal situação.

Com esta intenção, Chevalier de Méré, compartilhou com seu amigo Blaise Pascal, alguns problemas, relacionados aos jogos de azar, como por exemplo o *Problema dos Pontos*, citado e não solucionado por Pacioli e Tartaglia, enviando-os através de carta, ao lê-la, Pascal logo “percebeu o erro de Méré e resolveu encontrar a solução correta” (ARAGÃO, 2009, p. 87). Segundo Pascal, De Méré, “foi enganado por uma falsa analogia, por pensar que nas jogadas o número de todas as chances possíveis, o que não é exato, se aproxima cada vez mais de sê-lo quanto maior for esse número” (LAPLACE, 2010, p. 180).

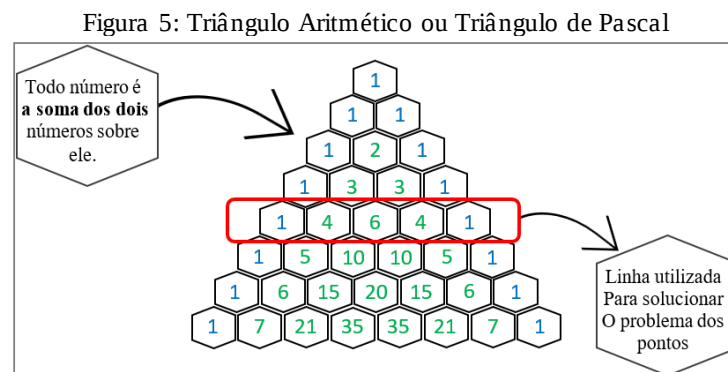
Para compreender sobre as soluções dos problemas dos pontos, apresenta-se os dois matemáticos, primeiro De Méré enviou sua proposta, por meio de carta, a **Blaise Pascal (1623-1662)**, nascido em Clermont-Ferrand, na França, onde mostrou sua precocidade matemática muito cedo, fazendo suas próprias investigações matemáticas e científicas antes dos 20 anos de idade (KATZ, 2010).

Mlodinow (2009, p. 77) enfatiza que “Pascal percebeu que, independentemente da resposta, os métodos necessários para calculá-la ainda eram desconhecidos, e tais métodos, quaisquer que fossem, teriam importante implicações para todos os tipos de situação competitiva” e decidiu compartilhá-la, por meio de cartas, as suas estratégias de solução com Pierre de Fermat. A partir de então, Pascal e Fermat traçaram juntos estratégias para resolver *problemas*, relacionados aos jogos de azar.

- **Pascal** desenvolveu sua resposta baseado no Triângulo Aritmético, apresentando as probabilidades de cada jogador ganhar em diferentes pontos no jogo e mostrando como as apostas deveriam ser divididas. De acordo com Warsi (2020, p. 160) Pascal “descobriu que o triângulo poderia ser usado para achar o número de combinações possíveis quando se escolhe uma quantidade de objetos a partir de um número particular de opções disponíveis [...] e cada linha do triângulo de Pascal dá aos coeficientes binomiais uma potência”.

Para tornar esse texto mais atualizado e compreensível para alunos da educação básica, podemos reescrevê-lo da seguinte forma, tanto em estratégia de cálculos quanto da apresentação do triângulo aritmético, disponível em Eves (2011), segundo este autor Pascal criou um número de combinações simples, usando o triângulo aritmético. Então ele escolheu a quarta linha do triângulo, que tem respectivamente os coeficientes: 1, 4, 6, 4, 1, e combinou na condição, de que cada combinação simples é o número maneiras de obter as quantidades de letras, para análise da solução do problema.

Nesse sentido, Eves (2011) destaca que Pascal, tomou como ordem r , de n objetos, usando a expressão C_r^n seguindo as estratégias dispostas no triângulo aritmético, como pode ser observar na Figura 5.



Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de Warsi (2020, p. 158)

Aplicando sua estratégia para os jogadores na seguinte condição:

- Para o primeiro jogador (A): $C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$; $C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$; $C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$;

sendo $\frac{C_4^4 + C_3^4 + C_2^4}{\text{casos possíveis}} = \frac{1+4+6}{16} = \frac{11}{16} \cdot \text{prêmio}$;

- Para o segundo jogador (B): $C_1^4 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$; $C_0^4 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1$; sendo

$\frac{C_1^4 + C_0^4}{\text{casos possíveis}} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16} \cdot \text{prêmio}$;

De acordo com Laplace (2010, p. 2013) “O método de Pascal é bastante engenhoso; no fundo é o emprego da equação a diferenças parciais relativa ao problema, aplicada para determinar as probabilidades sucessivas dos jogadores, indo dos números menores aos seguintes”, sendo este método limitado a dois jogadores.

A proposta de **Pierre de Fermat (1601-1665)**, nascido em Beaumont-de-Lomagne no sul da França, formado em Direito, exercia advocacia na cidade de Toulouse, foi membro de vários corpos oficiais, incluindo câmaras do Parlamento, serviu como jurista, mas não foi considerado um advogado brilhante (KATZ, 2010), isto pode ser atribuído aos estudos de

matemática que era reservado a estudar em seu tempo livre, por puro prazer, assim, “Fermat enriqueceu tantos ramos da matemática com tantas contribuições importantes que é considerado o maior matemático francês do século XVII” (EVES, 2011, p. 390).

- **Fermat**, desenvolveu sua estratégia utilizando combinações das possíveis alternativas de ganhar ou de perder durante as jogadas, ou seja, ele organizou a situação e representou a solução deste caso, considerando que o “jogador A precisava de 2 pontos para ganhar e o jogador B de 3”, deduziu que como “quatro partidas decidem o jogo, seja a uma partida ganha por A e seja b uma partida ganha por B”, organizou todas as possibilidades de a e b , “formando 6 arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b ” (EVES, 2011, p. 393).

Segundo Laplace (2010, p. 213), o método utilizado por Fermat foi “fundado nas combinações, e se estende a um número qualquer de jogadores”. Na Figura 6, tem-se a combinação organizada por Fermat:

Figura 6: Combinações do problema dos pontos, proposta por Fermat.

<u>aaaa</u>	<u>aaab</u>	<u>abba</u>	<u>bbab</u>
<u>baaa</u>	<u>bbaa</u>	<u>abab</u>	<u>babb</u>
<u>abaa</u>	<u>baba</u>	<u>aabb</u>	<u>abbb</u>
<u>aaba</u>	<u>baab</u>	<u>bbba</u>	<u>bbbb</u>

Fonte: EVES, 2011, p. 393

De acordo com Eves (2011), as combinações que aparecem a duas ou mais vezes, e nesta situação há 11 casos, são favoráveis a A, as combinações que aparecem b três ou mais vezes, e neste há cinco casos, são favoráveis a B. A combinação de Fermat foi identificar que A precisava de m pontos para ganhar e B precisava de n pontos, formando a expressão 2^{m+n-1} arranjos completos, de ordem: $m + n - 1$, das letras a e b indicadas.

Em seguida fez o número α de casos em que a aparece m ou mais vezes e o número β de casos em que b aparece n ou mais vezes. Finalizando, fez com que as apostas deveriam ser divididas na razão $\frac{\alpha}{\beta}$ (EVES, 2011). Dessa forma, propôs que para divisão ser justa, deveria multiplicar o valor do prêmio, por: $\frac{11}{16} \cdot \text{prêmio}$ para o jogador A e para o jogador $\frac{5}{16} \cdot \text{prêmio}$ para o jogador B.

De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 212) Pascal e Fermat “generalizaram o problema e sua solução, estendendo suas investigações a outros jogos de azar”. Embora tenham utilizado o mesmo princípio descrito por Cardano, segundo os autores, este conhecimento não era um ponto de domínio e discussão entre os matemáticos da época, principalmente porque o

livro *Liber de ludo Aleae* de Cardano foi publicado nove anos depois que Pascal e Fermat resolveram os problemas, o que implica que eles não tiveram acesso a um livro ou a qualquer documento que abordasse as estratégias de Cardano.

Segundo Secades (2000, p. 08, tradução nossa) das correspondências e das soluções é importante evidenciar que Pascal e Fermat, contribuíram na “construção de critérios analíticos sistemáticos para medir com validade universal o conceito de probabilidade”, pois Pascal e Fermat, solucionaram os problemas, por seus próprios métodos e refletiram sobre outros problemas envolvendo jogos, viabilizando “que o estudo do *acaso* tomasse uma expressão matemática, introduzindo o *Cálculo das Probabilidades*” (JUNQUEIRA, 2015, p. 05), generalizando tanto os problemas quanto suas soluções.

Calabria e Cavalari (2013) apresentam as traduções das cartas trocadas entre Pascal e Fermat, de acordo com as autoras estas cartas foram publicadas por Smith em 1929, a primeira carta, que foi enviada por Pascal à Fermat, não foi encontrada, mas foi possível encontrar na segunda carta a resposta sobre a forma que Pascal utilizou para solucionar o *Problema dos Pontos* e outros problemas.

Após um ano, que Pascal e Fermat solucionaram os problemas propostos por Chevalier de Méré, **Christian Huygens (1629-1695)**, matemático, físico e astrônomo, nascido em Haia, na Holanda, em 1655 ele foi visitar Paris e lá ficou sabendo da história sobre as correspondências entre Pascal e Fermat, causando-lhe interesse pelo assunto, então começou a estudar sobre problemas semelhantes partindo das ideias igualmente prováveis (KATZ, 2010). Após conclusão, decidiu, em 1657, publicar seus resultados em um tratado conhecido como *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Raciocínio Relacionado aos Jogos dos Dados), considerado o primeiro documento publicado sobre probabilidade.

De acordo com Mlodinow (2009, p. 84) “A análise de Pascal e Fermat mostrou-se um grande primeiro passo na busca de uma teoria matemática coerente da aleatoriedade”. E coube a Huygens apresentar os problemas e as devidas soluções propostas pelos matemáticos, além de publica neste mesmo tratado suas contribuições, contendo catorze proposições e mais exercícios para resolver.

Segundo Katz (2010, p. 576) “Huygens forneceu discussões pormenorizadas acerca do raciocínio por trás das soluções, em particular como calcular num jogo de azar”, ainda segundo este autor, Huygens declarou que os resultados dos jogos de azar podem ser incertos, pois as chances de um jogador ganhar ou perder, dependia de um determinado valor, considerando que o “valor de uma hipótese é o **valor esperado**, é a quantidade média que uma pessoa ganharia

se jogasse o jogo muitas vezes. É esta quantidade que o jogador presumivelmente pagaria para ter o privilégio de jogar um jogo equitativo” (KATZ, 2010, p. 576, grifo do autor).

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 213) Huygens baseava na expectativa ou resultado esperado de uma situação. Como, por exemplo: “*Oferecem-lhe a chance de jogar um único dado. Se aparecer o 6, você ganha \$10; Se aparecer 3, você ganha \$5; de outro modo, você não ganha nada. Qual é um preço justo para jogar esse jogo?*”.

Nesse sentido, “a expectativa matemática de um jogo é encontrada somando os produtos de cada recompensa possível pela probabilidade de você a obter” (Ibid., p. 213). De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 214) Sabe-se nestas situações que ao jogar um dado, a possibilidade de cair em qualquer lado, são iguais e deve-se considerar que o dado não é viciado, então tem-se “uma chance em seis de receber \$10; uma chance em seis de ganhar 3, e quatro em seis de nada ganhar, sendo a expectativa matemática igual a: $\frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{4}{6} \cdot 0 = 2,50$.”

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 216) Huygens “inverteu o processo, usando a expectativa para calcular a probabilidade, em vez do contrário. Mas a ideia fundamental era a mesma: resultados igualmente prováveis significam expectativas iguais”, de situações iguais e repetidas, foi o que o levou a escrever suas proposições, sobre os jogos de azar relacionados as chances para se obter sucesso, este autor ainda salienta, que Huygens propôs, exercícios a resolver, sendo que seu tratado “era a única introdução disponível à teoria da probabilidade até o início do século dezoito” (Ibid., p. 578).

Observa-se que o método utilizado por Huygens, para organizar os dados e resolver os problemas, não definia uma fórmula conclusiva para aplicar a probabilidade, contudo é evidente que eram considerados casos possíveis e casos favoráveis, pois, segundo Gneri (S.d, p. 03) foi considerado as chances de um jogador ganhar, onde “no contexto de um jogo e desde o ponto de vista de um jogador, consideram-se o conjunto de todos os resultados ou *casos possíveis*, sendo feita uma partição em dois subconjuntos: o dos resultados ou *casos favoráveis* e o dos não favoráveis”, aos apostadores/jogadores, organizada como: $\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$.

3.2. FORMALIZAÇÃO DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Contribuindo com a Teoria da probabilidade, aponta-se o matemático **Jacob⁴ Bernoulli** (1654-1705), nascido em Basileia, na Suíça. Segundo Boyer (1974), nenhuma

⁴ É possível que seu nome possa ser encontrado na literatura como: Jakob, Jacques, Jacob, Jacob I.

família na história da matemática produziu tantos matemáticos célebres quanto a família Bernoulli e o primeiro a atingir proeminência na matemática foi Jacob Bernoulli, nos estudos a respeito da probabilidade, “reconheceu a ampla aplicabilidade das probabilidades” (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 214) e dedicou-se a testar na prática e escrever o que ocorria durante cada prova, em cada situação do seu longo teste.

Segundo Aragão (2009, p. 88) a partir das observações e aplicações de Jacob Bernoulli, inicia-se um “processo de abstração das possibilidades fora das limitações dos jogos e dos seguros; á ele é atribuído a primeira sistematização de uma teoria das probabilidades, tendo em vista suas aplicações práticas”, ampliando-a para além do ramo da matemática. No geral, Jacob Bernoulli pretendia determinar um tratamento formal para os casos de probabilidade, propondo as chances de um evento ocorrer ou não ocorrer, assim,

examinou a relação entre probabilidade teórica e sua relevância para várias situações práticas [...] afirmou que, se uma experiência reproduzível tivesse uma probabilidade teórica p de resultar em certo modo “favorável”, então, para qualquer margem de erro especificada, a razão dos resultados favoráveis para total de resultados em algum número (grande) de tentativas repetidas desse experimento estaria dentro daquela margem de erro. Por esse princípio dados observados podem ser usados para estimar a probabilidade de acontecimentos em situações do mundo real (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 214).

Katz (2010) frisa que ele usou as ideias de Huygens e generalizou as ideias de Pascal, entretanto a experiência e tratamento que Jacob Bernoulli deu para a teoria da probabilidade foi algo não realizado anteriormente, ele “propôs a determinação de certas probabilidades *a posteriori* por observação dos resultados obtidos em várias instâncias semelhantes [...] pois, queria ser capaz de quantificar o risco em situações em que era impossível enumerar todas as possibilidades” (KATZ, 2010, p. 764). Segundo este autor, parecia razoavelmente óbvio a Jacob Bernoulli, que,

Quanto maior o número de observações feitas de uma dada situação, melhor seria a previsão de ocorrências futuras. Mas ele queria ter uma “prova científica” deste princípio, que mostrasse que o aumento no número de observações levaria a probabilidade do acontecimento a ser estimada com qualquer grau de precisão desejado, e também mostrasse como calcular o número exacto de observações necessárias para garantir que o resultado estivesse dentro de um intervalo predeterminado em torno da verdadeira resposta (KATZ, 2010, p. 764).

De acordo com Laplace (2010) Bernoulli, trabalhou fazendo suas devidas observações e anotações por vinte anos e quando considerou satisfeito, ou seja, quando conseguiu a prova científica que o levou a experiência de quantificar a medida da incerteza, nomeou de *Teorema Áureo*, apresentando “uma teoria geral das combinações e das sequências, aplicando-a a várias questões difíceis relativas aos acasos” (LAPLACE, 2010, p. 214), conhecido como: Teorema de Bernoulli, Lei dos Grandes Números e Lei Fraca dos Grandes Números

Segundo Boyer (1974, p. 309, grifo nosso) o teorema é definido como: “se p é a probabilidade de um evento, se m é o número de ocorrências do evento em n experiências, se ε é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se P é a probabilidade de que a desigualdade $|m/n - p| < \varepsilon$ esteja satisfeita, então: $\lim_{n \rightarrow \infty} P = 1$ ”.

Segundo Mlodinow (2009) este teorema trata de como os resultados refletem as probabilidades subjacentes quando se faz muitas jogadas observando o que ocorre no limite de um número arbitrariamente grande de jogadas repetidas, observações que Jacob Bernoulli testou com diversas situações problemas, como por exemplo:

Numa situação, vislumbrou uma urna cheia, contendo 3 mil pedrinhas brancas e 2 mil pedrinhas pretas, uma razão de 60% de brancas contra 40% de pretas, qual foi submetida a condição de retiradas, com “reposição” para não alterar a proporção de 3:2, onde a probabilidade *a priori* de se tirar uma pedrinha branca é de 3/5 ou de 60%, a pergunta central de Jacob Bernoulli é saber com que precisão deve-se esperar que a proporção de pedrinhas brancas retiradas se aproxime de 60% e com qual probabilidade? (MLODINOW, 2009, p. 105).

Em 1713, foi publicado o livro *Ars Conjectandi* (A arte de conjecturar), da autoria principal de Jacob Bernoulli, isto, oito anos após sua morte. Boyer (1974, p. 308) ressalta que o *Ars Conjectandi* é “o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades, pois o *De Ratiociniis in ludo Aleae* de Huygens fora apenas uma breve introdução”, que Bernoulli reproduziu como a primeira de quatro partes do livro *Ars* e devidamente comentado por Jacob Bernoulli, a segunda Parte deste livro aborda sobre a teoria geral de permutações e combinações e sobre os “números de Bernoulli⁵” (BOYER, 1974).

Jacob Bernoulli fez suas experiências com muitas repetições e considerou que seria suficiente “estimar a probabilidade deste evento pela frequência estabilizada, observada experimentalmente” (QUEIROZ; COUTINHO, 2007, p 62), o que o levou a propor a definição sobre a probabilidade, pois, Bernoulli, consentiu identificar através da experiência “uma nova maneira de estimar as chances de realização de um evento: o método experimental, supondo que a probabilidade é um dado objetivo ligado ao evento e à experiência” (Ibid., p. 68).

De acordo com Zindel (2018, p. 12), Jacob Bernoulli queria demonstrar que “onde termina a arte de pensar – a análise objetiva – começa a arte da conjectura”. Agindo assim, ele foi mais profundo ao analisar a probabilidade de um evento ocorrer, o que até então era estudado

⁵ úteis para escrever as expansões em série infinita das funções trigonométricas e hiperbólicas. (Boyer, 1974, p. 309)

ao analisar partidas de jogo de azar, ampliando essa análise para as possibilidades de eventos que podem ocorrer em situações do cotidiano.

Segundo Katz (2010, p. 767) a contribuição que Jacob Bernoulli deu a teoria da probabilidade é digno de menção. Entretanto, não coube a ele sua publicação, este autor reforça que isto pode ter ocorrido, talvez porque “Bernoulli pode ter sentido que tinha falhado na sua busca para quantificar a medida da incerteza, principalmente porque sua intuição lhe disse que 25.550 era bastante mais do que necessário”.

Segundo Gillispie (2007), a quarta parte deste livro também não foi concluída por Jacob Bernoulli. No entanto, após ser publicado, proporcionou a outros personagens uma visão ampliada a respeito da teoria da probabilidade, pois “a lei dos Grandes Números foi introduzida na teoria da probabilidade, como um dos conceitos mais importantes no cálculo de probabilidades [...] e com aplicações em muitos campos da estatística, da matemática e da ciência em geral” (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], tradução nossa).

Contribuindo com o desenvolvimento da teoria da probabilidade, cita-se o matemático **Abraham De Moivre** (1667-1754), nascido em Vitry-le-François, na França. Segundo Boyer (1974, p. 312), De Moivre, mudou-se para Inglaterra “onde conheceu Newton e Halley e tornou-se professor particular de matemática. Em 1697 foi eleito para a Royal Society e subsequentemente para as Academias de Paris e Berlim”.

De acordo com Retrespo e Gonzáles (2003, tradução nossa) em 1718, De Moivre publicou o livro *The Doctrine of Chances* (Doutrina das chances), considerado um avanço para a história da probabilidade, por apresentar mais detalhes que as publicações anteriores a respeito deste tema. Segundo Katz (2010) isto ocorreu devido as regras matemáticas que também estavam evoluindo, permitindo a De Moivre apresentar regras gerais e aplicações detalhadas dessas regras, que faziam parte das práticas dos jogos, comum no seu tempo.

De acordo com Boyer (1974, p. 313), neste livro De Moivre, havia uma variedade de exercícios, como lançamentos de dados, bolas na urna, seleção de bolas em urna, saco com bolas diferentes, o problema dos pontos e exercícios referentes a anuidades vitalícias. “De modo geral De Moivre derivava a teoria das permutações e combinações dos princípios de Probabilidade [...] dizia que a probabilidade de um evento composto é o produto das probabilidades dos componentes”.

Em Historia de la Probabilidad ([2020], tradução nossa), enfatiza-se que De Moivre reformulou em termos mais modernos a definição dada por Jacob Bernoulli, onde representou que a probabilidade que um evento ocorra é: *Uma fração em que o numerador é igual ao número de ocorrências do evento e o denominador é igual ao número total de casos em que o*

evento pode ou não ocorrer” (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 08, tradução nossa), representado matematicamente para situações prováveis:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de ocorrências do evento}}{\text{número de casos possíveis}}$$

De Moivre, segue seus estudos, sobre soluções envolvendo probabilidade, neste caso buscou solucionar uma situação posta por Chevalier de Méré, que segundo Katz (2010) era para descobrir o número de tentativas necessárias para que um acontecimento provável ocorra, ou quantas tentativas seriam necessárias para que seja indiferente apostar no acontecimento ou em sua falha, supondo que a é o número de possibilidades para o acontecimento numa qualquer tentativa e b é o número de possibilidades para a sua falha.

De Moivre tomou a probabilidade do acontecimento (b) falhar x vezes, utilizando a expressão $\frac{b^x}{(a+b)^x}$ e para que x satisfaça essa expressão igualou a $\frac{1}{2}$. Formando a equação: $\frac{b^x}{(a+b)^x} = \frac{1}{2}$ (KATZ, 2010). Ainda segundo este autor, as hipóteses de obter sucesso pelo menos uma vez em x tentativas são iguais as hipóteses de não obter sucesso nenhum, então a probabilidade tem que ser igual a $\frac{1}{2}$.

De Moivre, resolveu esta equação recorrendo a função logarítmica: $x = \frac{\log 2}{\log(a+b) - \log b}$. Assim, ele tomou que $a : b = 1 : q$ e observou que as vantagens contra o sucesso são de q para 1, tomando a equação na forma: $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^x = 2$ ou $x \log \left(1 + \frac{1}{q}\right) = \log 2$, De Moivre conclui que do $\log \left(1 + \frac{1}{q}\right)$ em série de potências, “ q é infinito, ou muito grande relativamente à unidade [...] e o primeiro termo $\frac{1}{q}$ da série é suficiente e a solução pode ser escrita como: $x = q \log 2$ ou $x \approx 0.7q$ (KATZ, 2010).

De Moivre pensou nos diferentes valores de: $Q = P \left(X = \frac{n}{2} + 1\right)$. Segundo Katz (2010, p. 772) os valores referentes a Q formam uma curva: “se pensar nos termos da binomial como colocados ao alto, igualmente espaçados em ângulos retos para acima de uma linha reta, as extremidades dos termos acompanham a curva. A curva assim descrita tem dois pontos de inflexão, um de cada lado do termo máximo”.

Então, De Moivre analisa que para encontrar o número de lançamentos de dados necessários para que a probabilidade de lançar dois seis seja igual a $\frac{1}{2}$, o valor de $q = 35$, logo o resultado de $x = 24,5$. Então, o número de lançamentos necessários está entre 24 e 25 (KATZ,

2010), segundo este autor, essa é a mesma resposta que Huygens encontrou através de um cálculo bastante mais pormenorizado.

Segundo Katz (2010, p. 769) para De Moivre, “o método de cálculo das probabilidades relevantes residia no cálculo de certos coeficientes binomiais”, assim ele tentou ser um pouco mais preciso, como consta em *Historia de la Probabilidad* ([2020], tradução nossa) demonstrando a constante: $m! \approx B \cdot e^{-m} \cdot m^{m+\frac{1}{2}}$. E para determinar o valor dessa constante, construiu a seguinte expressão logarítmica: $\ln B = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \dots$ e concluiu de acordo com seu cálculo que $B = 2.5074$

Assim ocorreu com o *Teorema do Limite Central*, que segundo *Historia de la Probabilidad* ([2020], pp. 13-14, tradução nossa) De Moivre pretendia calcular uma probabilidade que Jacob Bernoulli já havia demonstrado a respeito “de que o número de sucessos de um evento com probabilidade p e n tentativas estaria entre A e B ” e para isto Jacob Bernoulli utilizou a seguinte expressão: $\sum_{A < K < B} \binom{m}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}$, ainda de acordo com *Historia de La Probabilidad* ([2020], tradução nossa) a dificuldade envolvida nessa operação era o cálculo do número combinatório: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

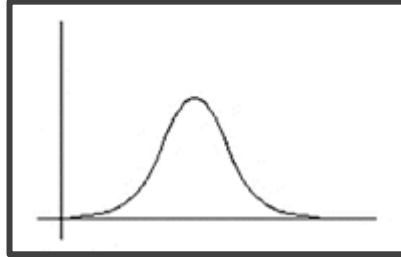
Assim, De Moivre Sabia que para n grande $\frac{(n-1)^2}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima de e^{-1} , logo o termo intermédio M de $(1+1)^n$ para a soma 2^n é igual a $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$. Dos dados obtidos, de acordo com Katz (2010) De Moivre calculou e chegou a seguinte resultado: $P\left\{X = \frac{n}{2} + t\right\} \approx P\left\{X = \frac{n}{2}\right\} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)}$ (KATZ, 2010).

De Moivre não estava satisfeito, com este resultado, “por não poder ligá-lo a nenhuma constante matemática conhecida, então pediu conselho e ajuda ao seu bom amigo **James Stirling** (1692-1770), que provou que $B = \sqrt{2\pi}$.” (*HISTORIA DE LA PROBABILIDAD* ([2020], p. 11, tradução nossa). Possivelmente com um argumento semelhante ao de De Moivre, mas partindo do produto de Wallis para o número π , resultando em $\log B = 1 - \log T$, então o $\log T = 1 - \frac{1}{2} \log 2\pi$ ou $T = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$ (KATZ, 2010).

De acordo com *Historia de la Probabilidad* ([2020], p. 11, tradução nossa) “os pontos de inflexão estão a uma distância $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{n}$ desse máximo. Então, aqui está o Teorema do Limite Central, conhecido como o fato de que a média de uma amostra aleatória independente adequadamente normalizada é aproximadamente normal”. A Figura 7 mostra o gráfico da curva

da *frequência normal* elaborada por De Moivre, como uma representação do conceito de “distribuição normal”.

Figura 7: Curva normal – elaborada por De Moivre



Fonte: Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 221)

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 221) De Moivre descreveu a *curva da frequência normal* “como uma aproximação para distribuições binomiais, usando essa ideia para melhorar a estimativa de Bernoulli quanto ao número de observações necessárias para se tirar conclusões precisas”, segundo este autor nem sempre os resultados encontrados eram satisfatórios, pois a probabilidade necessitava de mais matemática, precisava ser “desenvolvida até o ponto em que pudesse ser aplicada frutiferamente a questões práticas” (Ibid., p. 221).

Dos seus estudos com a expansão binomial, De Moivre “conseguiu calcular as somas de grande número desses termos melhorando consideravelmente a quantificação de incerteza de Bernoulli” (KATZ, 2010, p. 772) ao encontrar: $\sum_{t=0}^k P\left(X = \frac{n}{2} + t\right)$ e apresentar a integral para uso nas situações probabilísticas: $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^k e^{-\frac{(2t)^2}{n}} dt$.

De acordo com Katz (2010) De Moivre, realizou um número infinito de experiências, a probabilidade de um acontecimento, que tem igual número de possibilidades de ocorrer e de falhar, pode não ocorrer com uma frequência superior a: $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$ e nem com uma frequência inferior a $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$, ou seja, na terminologia dos dias atuais, De Moivre, “tinha mostrado que para n grande, a probabilidade de número de ocorrências de uma experiência binomial simétrica distar: $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ do valor médio $\frac{1}{2}n$ era 0.682688” (KATZ, 2010, p. 772).

Boyer (1974) ressalta que De Moivre foi o primeiro a trabalhar com a fórmula de probabilidades. No geral sua contribuição, passou a ser utilizada por Carl Friedrich Gauss “como ferramenta estatística útil por si própria” (Warsi, 2020, p. 193) e por Pierre Simon Laplace, que usou “ao modelar curvas para erros aleatórios, como erros de medida [...]. Hoje a distribuição normal é muito usada ao modelar dados estatísticos, com aplicações que vão de estudos de população a análise de investimentos” (Warsi, 2020, p. 193).

“De Moivre interessava-se particularmente por desenvolver para a teoria das probabilidades processos gerais e notações que ele considerava como uma nova ‘álgebra’” (BOYER, 1974, p. 313). Segundo Katz (2010, p. 768) ele “utilizava frequentemente séries para efetuar os seus cálculos probabilísticos”, ainda segundo este autor, o mais importante era a sua discussão pormenorizada sobre como aproximar a soma dos termos do binômio $(a + b)^n$.

Segundo Gadelha (2004, p. 09) O livro *Doctrine of Chances*, assim como o Livro *Ars Conjectandi*, foram considerados os mais importantes para a formalização da teoria da Probabilidade no século XVII, abrindo um caminho fecundo para que personagens matemáticos no século XVIII, se aprofundassem sobre o tema.

3.3. INTRODUÇÃO DA PROBABILIDADE NA MATEMÁTICA

No início do século XVIII, os estudos sobre probabilidade são explorados por personagens que elevam sua forma de representação e aplicação, contando com a colaboração de matemáticos como Thomas Bayes (1702-1761); Georges-Louis Leclerc (1707-1788); Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783); Joseph Louis Lagrange (1736-1813); Pierre Simon Laplace (1749-1827); Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Simeon Denis Poisson (1781-1840), século que organizou e introduziu a teoria da probabilidade no mundo da matemática.

Neste momento da pesquisa, encontra-se os estudos e publicações das experiências e pesquisas de **Pierre Simon Laplace (1749-1827)**, nascido na cidade de Beaumont-en-Auge, Normandia, na França, pertencente a uma família nobre e rica. Laplace estudou na Universidade de Caen, matriculou-se na faculdade de Arte, com o intuito de seguir para a faculdade de teologia, mas em 1768 desistiu e seguiu para Paris, para continuar seus estudos e consequentemente arrumar um emprego.

De acordo com Historia de la Probabilidad ([2020], p. 21) Laplace “ficou conhecido pela sua curiosidade universal que o levou a investigar quase todas as áreas do conhecimento, alcançando os seus resultados mais exitosos tanto na mecânica celeste como na teoria das probabilidades”, foi por meio de seus trabalhos, que os jogos de azar, ganharam um reconhecimento, sendo analisado por meio de cálculo probabilísticos, em diferentes campos de estudos e assim conseguiu introduzir a teoria da probabilidade no mundo da matemática.

Laplace é considerado um dos cientistas mais influente da história da matemática, “Sua carreira foi importante pelas contribuições técnicas para as ciências exatas, pela visão filosófica

que desenvolveu na exposição de seu trabalho e pelo papel que exerceu na formação das modernas disciplinas científicas” (GILLISPIE, 2007, p. 1431).

Laplace afirma que “devemos à debilidade da mente humana uma das mais delicadas e engenhosas teorias matemáticas: a ciência do azar ou probabilidade” (LAPLACE, 1974, p. 114), assunto do qual se dedicou a estudar e escrever diversos artigos, concomitantemente com outros assuntos de seus interesses, do qual se dedicou por um longo período, vivendo suas experiências e compartilhando delas com outros matemáticos.

Laplace em seus estudos iniciais “estabelece com clareza o sentido das palavras *acaso* e *probabilidade*”. Da primeira palavra, ele definiu que não tem realidade em si, quando nela não se ver nada de regular, quando não se conhece as causas que a acarretam; e da segunda palavra, definiu como um conjunto de objeções à probabilidade, como as que não são possíveis quantificar, como esperança, medos e estados mentais (GILLISPIE, 2007, p. 1442).

Segundo Gillispie (2007) Laplace, necessitou aprimorar sua epistemologia, na teoria do acaso, para distinguir o procedimento e prática que estava sendo utilizada, pois as abordagens para determinar as possibilidades de um evento, tinham sido determinadas na seguinte condição: *A priori* – pela suposição da possibilidade igual; *A posteriori* – por experimentos repetidos; Por quaisquer razões que se tivesse para julgar a ocorrência provável do evento, ou seja pelas possibilidades em relação às nossas informações (GILLISPIE, 2007).

Em respeito a possibilidade absoluta, da condição *a priori*, Laplace indicou que era formado pelo *conjunto* de fatores que produzem um evento, “Alguns são diferentes em todas as ocasiões, como os movimentos exatos da mão ao lançar dados. É o efeito global desses fatores que chamamos de acaso. Outros fatores são constantes, como a habilidade relativa dos jogadores ou o peso dos dados” (GILLISPIE, 2007, p. 1461). Laplace se dedicou em estudar cada aspecto relevante das condições para avançar com os estudos da probabilidade, levando-o a observar que o conhecimento humano também era um dos fatores, pois considerou que,

A situação do conhecimento entrava na determinação da probabilidade em dois níveis: no que sabemos (possibilidade relativa) sobre a possibilidade absoluta (fatores invariantes) dos eventos e em nosso desconhecimento das leis que sempre parecem produzir os eventos fortuitos (GILLISPIE, 2007, p. 1462).

Este foi um acerto inovador no que Laplace buscava, para desenvolver a teoria de compreender as estimativas das causas a partir dos efeitos, aplicados a vida real⁶, que o fez solucionar o primeiro obstáculo, ele tomou como exemplo estatístico, os dados populacionais,

⁶ Laplace não mencionava sobre a teoria e os problemas de Bayes, entretanto “Condorcet mencionou Price e Bayes no resumo da memória laplaciana” (GILLISPIE, 2007, p. 1462).

de interesse público, dados sobre nascimentos, casamentos e óbitos, tendo informações reais sobre uma situação real (GILLISPIE, 2007).

Dos dados publicados entre 1709 e 1770 em Paris, mostrava que “havia nascido 251.527 meninos e 241.945 meninas; a proporção de aproximadamente 105 para 101 manteve-se praticamente constante ano a ano” (GILLISPIE, 2007, p. 1462), informações essenciais para que Laplace aplicasse a sua teoria. Então, a partir desses dados, ele formulou a probabilidade do nascimento de um menino como $\frac{p}{(p+q)}$, onde p é o nascimento de menino e q o nascimento de menina (GILLISPIE, 2007).

De acordo com Gillispie (2007), Laplace determinou que a probabilidade de nascer um menino, estava nos limites $\frac{p}{(p+q)} + \theta$ e $\frac{p}{(p+q)} - \theta$, onde θ era uma quantidade muito pequena, para esta situação, então Laplace “representou a integral definida de P por uma série altamente convergente, a qual, ao ser calculada, reduzir-se a unidade, quando p e q tornam-se infinitos” (Ibid., p. 1462), então ele tomou a seguinte integral definida: $\int x^p (1-x)^q dx$, onde x é a probabilidade de nascimento de um menino e $(1-x)$ a probabilidade de nascimento de uma menina, Laplace pretendia com esses dados, determinar a probabilidade de que x se enquadre em limites arbitrário.

Em seguida atribuiu valores para $x = 1$ e $x = 0$ e p e q muito grande, considerou que $y = x^p (1-x)^q$. Integrando $ydx = \frac{x(1-x)}{p-(p+q)x} dy$, onde $p = \frac{1}{\alpha}$ e $q = \frac{\mu}{\alpha}$, sendo α uma fração muito pequena, ficando $ydz = azdy$ em que: $z = \frac{x(1-x)}{1-(1+\mu)x}$ para qualquer que fosse o valor de z , Laplace aplicou: $\int ydx = C + ayz \left\{ 1 - a \frac{dz}{dx} + a^2 \frac{d(zdz)}{dx^2} - a^3 \frac{d[zd(zdz)]}{dx^3} + \dots \right\}$, em que C é uma constante arbitrária que depende do valor inicial de: $\int ydx$, onde, os valores desta integral, fornecidos por Laplace, estão entre os limites: $x = 0$ e $x = \frac{1}{(1+\mu)} - \theta$, desde que a fosse muito menor do que θ^2 (GILLISPIE, 2007).

Laplace definiu que se $x = 0$, e fazendo $y = 0$ e $z = 0$, transformou a série:

$$\int ydx = C + ayz \left\{ 1 - a \frac{dz}{dx} + a^2 \frac{d(zdz)}{dx^2} - a^3 \frac{d[zd(zdz)]}{dx^3} + \dots \right\}$$

em

$$\int ydx = \frac{a\mu^{q+1}[1 - (1+\mu)\theta]^{p+1}(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1}}{\theta(1+\mu)^{p+q+3}} x \left\{ 1 - \frac{a[\mu + (1+\mu)^2\theta^2]}{\theta^2(1+\mu)^3} + \dots \right\}$$

“série que indicava os limites entre os quais o valor de $\int ydx$ estava contido, valor inferior ao primeiro termo entre colchetes e maior do que a soma dos dois primeiros termos” (GILLISPIE, 2007, p. 1463). Entretanto, Laplace também utilizou outra demonstração para a série:

$$\int ydx = C + ayz \left\{ 1 - a \frac{dz}{dx} + a^2 \frac{d(zdz)}{dx^2} - a^3 \frac{d[zd(zdz)]}{dx^3} + \dots \right\}$$

que fornecia valores da integral $\int ydx$ para: $x = \frac{1}{(1+\mu)} + \theta$, até $x = 1$, com este caso “Laplace provou que, quanto mais aumentavam p e q mais diminuía α , e que a diferença entre P e a unidade era proporcional a α ” (GILLISPIE, 2007, p. 1463), aplicando assim, a diferença podia ser reduzida abaixo de qualquer grandeza dada. Ainda segundo este autor, Laplace calculou a probabilidade para o nascimento de menino em Paris, chegando a seguinte solução:

Calculando a probabilidade de que a possibilidade de um nascimento masculino em Paris fosse maior do que 0,5, Laplace constatou que ela era inferior à unidade pela fração de $1,1521 \times 10^{-13}$. Calculou ainda que a probabilidade de, em um dado ano, o número de meninas deixar de ultrapassar o de meninos era de $\frac{1}{259}$ em Paris (GILLISPIE, 2007, p. 1463).

Segundo Gillispie (2007) Laplace elaborou “um *método* para encontrar soluções numéricas para um tipo de problema cujas soluções analíticas continham termos elevados a potências tão altas que as expressões se tornavam inviáveis quando se usavam número nas fórmulas, em lugar de sinais” (GILLISPIE, 2007, p. 1463). Este método também podia ser aplicado ao cálculo prático de eventos futuros, dada a experiência do passado, extraindo dados de fontes reais, como este exemplo da população, que por fim foi considerado dentro da inferência estatística (Ibid., 2007).

Gillispie (2007) evidência que pela aplicação da probabilidade aos estudos populacionais, Laplace estaria ampliando a teoria da probabilidade além dos jogos de azar, ademais foi nestas situações de repetições que “o levava a compreender, inicialmente, a inconveniência de avaliar fórmulas em que era preciso substituir o número desses eventos para chegar a uma solução numérica” (GILLISPIE, 2007, p. 1522), precisava com isso de um *método geral* para “reduzir o termo médio de um binômio, elevado a uma potência alta, a uma série de convergente” (Ibid., 1522). foi nestas condições que o método fornecido por Laplace,

Transformava as integrais de equações diferenciais lineares, ou equações de diferenças finitas, fossem parciais ou ordinárias, em séries convergentes, quando se usavam grandes números nos termos incluídos sob o sinal da integral, sendo tão maiores os números quanto mais convergente era a série. Entre as fórmulas que ele pudera transformar dessa maneira, a mais notável era a da diferença finita da potência de uma variável (GILLISPIE, 2007, p. 1522).

Laplace considerou esta aplicação ao problema das urnas, que se remete a duração de uma partida, no caso de jogos de azar e “Com isso, enfatizou a vasta utilidade do método na teoria do acaso, dizendo que seu objetivo era a média a ser escolhida entre os resultados fornecidos por diferentes conjuntos de observações” (GILLISPIE, 2007, p. 1524).

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 215) Laplace deu um intervalo de tempo em seus estudos sobre probabilidade, retornando em 1809 para rever “a análise do erro provável ao reunir dados científicos”, aprofundando suas ideias e teorias sobre a sua aplicabilidade. Neste retorno aos estudos sobre este tema, publicou o livro *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades), o qual teve três publicações. Segundo Gillispie (2007) sua primeira versão foi publicada em 23 de Março de 1812, trazendo novas ideias para aplicar a teoria das probabilidades.

Nesta obra Laplace “concentra os avanços conseguidos à época e marca um patamar no desenvolvimento do cálculo das probabilidades. Sua contribuição é tão forte que alguns aspectos “clássicos” do conceito de probabilidade tendem a ficar associados ao seu nome” (ALMEIDA, 2005, p.14-15). Segundo Gillispie (2007), Laplace passou do cálculo da probabilidade para as propriedades da probabilidade, pois dos seus estudos,

É lícito dizer que ele organizou o tema, reunindo os principais tipos de problemas da teoria do acaso já abordados por muitos matemáticos, inclusive ele mesmo, de maneira meio fortuita, e tornando a abordá-los em conjunto com problemas das novas áreas de aplicação na filosofia da ciência, na astronomia, na geodésia, na instrumentação, na teoria dos erros, nas estimativas populacionais E nos procedimentos de foros judiciais e órgãos eleitorais (GILLISPIE, 2007, p. 1526).

Este “foi o primeiro estudo em larga escala inteiramente dedicado a uma nova especialidade, partindo de problemas antigos e amiúde triviais para áreas em que, até então, a quantificação fora inexistente ou quimérica” (GILLISPIE, 2007, p. 1527). De acordo com Gillispie (2007) a *Théorie Analytique des Probabilités* é um tratado em 4 volumes com 464 páginas, onde na primeira edição é dividido em duas partes, que ocupa 2/3 do volume aplicados às soluções de uma quantidade significativa de problema de probabilidade, envolvendo jogos de azar, probabilidade da causa, seguro e demografia.

Laplace organizou os princípios gerais da probabilidade, a definição, a regra da multiplicação as probabilidades de eventos independentes, o teorema sobre a probabilidade das causas, análise sobre a distinção entre a expectativa matemática e a expectativa moral, ele forneceu com seu estudo uma “caracterização da probabilidade como um ramo do conhecimento exigido pelas limitações da inteligência humana, e que servia para corrigir

parcialmente suas deficiências” (GILLISPIE, 2007, p. 1527), buscando aplicação de métodos a eventos práticos, formulando e reformulando problemas desta natureza, deste,

Problemas reais, discutidos nos primeiros capítulos, também consistem, em parte, em exemplos reelaborados a partir daqueles e de outros textos anteriores sobre a teoria do acaso. Laplace resolveu usando as funções geratrizes e os dispôs não por seu próprio interesse, mas para ilustrar a tipologia dos problemas na probabilidade em geral, entretanto novos conteúdos onde a metodologia os tornava apropriado (GILLISPIE, 2007, p. 1527).

Segundo Katz (2010) Laplace utilizou a definição proposta desde Cardano, como sendo “a razão do número de casos favoráveis e o número de casos possíveis”, incluindo também a demonstração do teorema do limite central e sua aplicação à questão das inclinações das órbitas dos cometas. Laplace “era de opinião que a teoria das probabilidades podia vir a ter implicações nas ciências sociais, do mesmo modo que o cálculo era o maior instrumento de matematização das ciências físicas” (KATZ, 2010, p. 979). De diversos problemas que Laplace formulou, reformulou, extraiu e outras situações, cita-se em Gillispie (2007) que,

Em uma discussão do antigo problema de **determinar a probabilidade de que todos os n números de uma loteria saiam pelo menos uma vez em t sorteios, tirando-se r bilhetes a cada sorteio**, ele citou o exemplo da loteria nacional francesa, composta de noventa números, sorteados cinco em cinco. Laplace passou então a outros **problemas clássicos de probabilidade direta: de números pares e ímpares ao se tirarem bolas de uma urna, de extração de um dado número de bolas de determinada cor a partir de misturas em várias urnas, de ordem sequências na retirada de bolas numeradas**, de divisão de prêmio e de derrota ou Vitória de um de 2 jogadores em jogos regulamentares (GILLISPIE, 2007, p. 1527, grifo nosso).

Laplace apresentou, sua ideia de resolução dessas situações estabelecendo ligações entre cada estratégia que explica detalhadamente a combinação e a expressão para determinar a probabilidades dos eventos (GILLISPIE, 2007). Por exemplo, propôs um problema de binômio: “as probabilidades de dois eventos, a e b , são, respectivamente, p e $1 - p$. A probabilidade de que a ocorra x vezes e de que b ocorra x' vezes em $x + x'$ tentativas é dada pelo $(x' + 1)$ -ésimo termo do binômio $[p + (1 - p)]^{x+x'}$ ” (GILLISPIE, 2007, p. 1529).

Laplace utilizou a fórmula: $n = x + x'$. $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi x x'}} e^{\frac{-nl^2}{2xx'}}$, quando $t = \frac{l\sqrt{n}}{2xx'}$ a soma de todos os pares é $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi x x'}} e^{-t^2}$ (Ibid., p. 1529).

Em sua análise, Laplace descreve que aproximações a serem consideradas como: limite da probabilidade *a priori* do evento a e a proporção de ocorrências de a em relação ao número total de eventos esteja contida dentro de um certo limite, para este caso, à medida que os eventos se repetem, tendo o limite permanecido o mesmo, a probabilidade aumenta (GILLISPIE, 2007).

Laplace também identificou situações que podem ocorrer como se “A probabilidade se mantivesse a mesma, os limites ficam mais próximos. Quando o número de eventos chega ao infinito, os limites convergem para um ponto e a probabilidade transforma-se em certeza” (GILLISPIE, 2007, p. 1529). Outro sim sobre estes termos, Gillispie (2007) enfatiza que “levaram os leitores modernos a achar que, de algum modo, Laplace devia ter uma ideia (ou talvez uma convicção reprimida) de que ocorriam processos aleatórios na própria natureza. Eles não eram apenas decorrentes da nossa ignorância” (GILLISPIE, 2007, p. 1529).

Um dos problemas, utilizados para esta explicação foi utilizando equações diferenciais parciais, sobre o problema das urnas, exemplo que “gira em torno de uma sucessão de urnas” (GILLISPIE, 2007, p. 1530). Uma urna com todas as bolas brancas e outra urna somente com bolas pretas, o que Laplace pretendia era provar que,

Se uma bola for retirada de uma urna qualquer e colocada em sua vizinha, e se esta for sacudida, e dela se retirar uma bola e esta for colocada na seguinte, e assim por diante, num número indefinido de vezes em todo o círculo, a proporção entre bolas brancas e pretas em cada urna acabará sendo idêntica à proporção de bolas pretas e brancas em todas elas (GILLISPIE, 2007, p. 1530).

Segundo Gillispie (2007, p. 1530) Laplace é “levado ao problema de corrigir valores aproximativamente conhecidos pelos resultados de um grande número de observações”, assim passou a “considerar o problema como idêntico àqueles em que se exigia que a probabilidade do erro médio em um grande número de observações se enquadra dentro de certos limites” (Ibid., p. 1422). Analisando que poderia ocorrer um “erro” pela quantidade de observações que identificou, quando realizou o cálculo sobre a amostra populacional, afirmando que neste cálculo existia um erro que ficaria dentro de certos limites. Segundo Gillispie (2007) Laplace pôde mostrar que,

Repetindo as observações um número indefinido de vezes, seu resultado médio convergia para um limite tal que, se um intervalo igual em qualquer dos lados fosse tão reduzido enquanto se aproovesse, a probabilidade de resultado estar contido nesse intervalo se aproximaria tanto da certeza de que a diferença seria inferior a qualquer magnitude calculável. Se os erros positivos e negativos eram igualmente possíveis, esse termo médio era indistinguível da verdade (GILLISPIE, 2007, p. 1522).

Segundo Gillispie (2007) Laplace presumiu que a equipossibilidade do erro seguia uma lei, pois era convicto que todo evento era efetivamente determinado pelas leis gerais do universo e só é provável em relação ao nosso conhecimento (GILLISPIE, 2007), deste modo, estabeleceu

a fórmula $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int e^{\frac{k}{2k'} r^2} dr$, determinando que $\phi\left(\frac{x}{h}\right)$ é a probabilidade do erro $\pm x$, k é

$\int_{-h/2}^{h/2} \phi\left(\frac{x}{h}\right) dx$ e k' é $\int_{-h/2}^{h/2} \frac{x^2}{h^2} \phi\left(\frac{x}{h}\right) dx$. No entanto,

A propriedade só passava a ter validade geral quando cada um dos resultados, dos quais ele fornecia a média, dependia de um número muito grande de observações. Sua base tinha que ser estatística (termo que Laplace não empregou), e só então poderia ser derivada da teoria da probabilidade e empregada, quaisquer que fossem as distribuições de erros dos instrumentos ou das observações (GILLISPIE, 2007, p. 1523).

Tal situação foi mais tarde estudada e aplicada por outros matemáticos, precisamente em estimativas estatísticas. Com a teoria do erro, Laplace buscava minimizar os efeitos necessários na equação feita pelas observações, pois sabia que elas estavam “sujeitas a erro, cujo efeito tinha que ser minimizado. Era preciso considerar um número enorme delas, para que os erros pudessem compensar-se mutuamente nos valores deduzidos do número total” (GILLISPIE, 2007, p. 1525).

Laplace teria que saber como combinar essas equações e segundo Gillispie (2007) Laplace sabia que para isso precisava determinar fatores onde a probabilidade de erro, fosse mínima para cada elemento, definindo o “erro médio como o produto do valor de cada erro multiplicado por sua probabilidade” (GILLISPIE, 2007, p. 1525). No mais, esta definição para Laplace também servia para determinar correções, de acordo com Gillispie (2007) esta seria uma abordagem de regressão linear e não de abordagem bayesiana como é conhecida.

Considerando a existência e os limites dos fenômenos como objetos de cálculo e calculando a probabilidade de exemplos que exigiam uma observação longa e frequente, Laplace pretendia expressar sua confiança nas observações que em algum momento poderia ser suficiente (GILLISPIE, 2007). Em geral sua convicção era determinar que “a mesma análise poderia, em princípios, aplicar-se a questões médicas e econômicas e até em problemas de moral, pois a operação das causas muitas vezes repetidas era tão regular nesses campos” (GILLISPIE, 2007, p. 1524).

Laplace abordou sobre “à sua descoberta do efeito das desigualdades nas probabilidades prévias” (GILLISPIE, 2007, p. 1531), enfatizou que com esta descoberta é necessário certo cuidado ao aplicar cálculos de probabilidade a eventos físicos, ou seja, “era preciso levar em conta ligeiros desvios dos parâmetros em relação aos valores presumidos” (Ibid., p. 1531). Laplace citou como exemplo a situação no jogo de cara ou coroa, sobre a assimetria insuspeitadas na moeda que fosse jogada, “em relação a como seriam injustas para um dos jogadores. Segundo Gillispie (2007) Laplace sugeriu, submeter a probabilidade de assimetria ao cálculo, pois,

Considerou que a probabilidade de tirar cara ou coroa fosse de $\frac{(1+a)}{2}$. Onde a representa a diferença desconhecida entre as probabilidades anteriores de tirar uma ou

outra. assim a probabilidade de tirar cara n vezes seguidas seria $\frac{(1+a)^n + (1-a)^n}{2^{n+1}}$ e o jogador que apostasse consecutivamente em cara ou coroa levaria vantagem sobre aquele que apostasse em uma alternância. Em vez disso, seria mais justo tentar jogar simultaneamente duas moedas similares n vezes seguidas. Neste caso, o verdadeiro valor da probabilidade de que as duas moedas caíssem do mesmo modo seria $\frac{1}{2^{n+1}} [(1 + aa^1)^n + (1 - aa^1)^n]$, o que é mais próximo do $\frac{1}{2^n}$ equipossível (GILLISPIE, 2007, p. 1531).

Segundo Gillispie (2007, p. 1531) “Laplace examina a expectativa de vida, as anuidades, os seguros e a expectativa moral”, este autor enfatiza que isto ocorreu possivelmente atribuído a serviços prestados ao governo, pois “os *procès-verbaux* da Academia” têm registros de que Laplace era convocado para atividades desse tipo algumas vezes (GILLISPIE, 2007, além de seus estudos aplicados a exemplos práticos da vida, registros de algumas de suas palestras na *École Normale* e mesmo dos seus prolegômenos da memória sobre probabilidade, sobre o valor da expectativa moral e matemática.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008) a Teoria Analítica da Probabilidade era,

Um *tour de force* enciclopédico que reunia tudo o que ele e os outros tinham feito quanto à probabilidade e estatística até então. Era realmente uma obra mestra, mas seu estilo técnico, denso, tomava muito dela inacessível a todos, exceto os leitores mais determinados e matematicamente sofisticados (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 215).

Laplace então decidiu “tornar suas ideias mais acessíveis a uma audiência maior [...] escreveu um prefácio expositório de 153 páginas para a segunda edição” (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 215), do livro teoria analítica das probabilidades, Laplace defendia a aplicabilidade da probabilidade a um amplo leque de atividades, incluindo política e ciências sociais (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008).

Em 14 de novembro de 1814, Laplace publicou o livro, *Essai Philosophique Sur Les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades), como uma complementação contendo dois textos⁷, sobre os princípios gerais do cálculo da probabilidade, princípios de esperança na probabilidade, aplicações do cálculo nos jogos, filosofia natural e ciências morais, de acordo com Pedro Leite de Santana⁸. Laplace publicou cinco edições desta obra, tornando-se “um genial homem da ciência do Século das Luzes, ainda pobremente conhecido do público brasileiro” (Santana, 2010, p. 10). Um livro que, Laplace “estendeu sobre assunto passível de interessar a um público mais amplo” (GILLISPIE, 2007, p. 1532).

⁷ Um texto como introdução e outro texto como o capítulo décimo primeiro (GILLISPIE, 2007).

⁸ tradutor do livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités*

Laplace complementa-se com seus estudos, da prática aplicada nos jogos de azar, das observações e análises que teve durante anos de dedicação e escreveu “de maneira mais persuasiva na linguagem comum do *Essai Philosophique* do que na linguagem matemática da *Théorie analytique*” (Ibid., p. 1532), pois conseguiu abranger um número maior de leitores, pela clareza ao expor o tema, elevando-o ao sucesso, nele consta a “importância que a probabilidade, a estatística e a análise estocástica foram assumindo mais e mais na ciência, nas ciências sociais e na filosofia da ciência” (Ibid., p. 1532) elevando a teoria da probabilidade à disciplina de probabilidade no ensino de matemática.

De acordo com Laplace (2010) o *Essai Philosophique* foi desenvolvido de suas lições ministradas nas Escolas Normais, onde era professor de matemática junto com Lagrange, que enfatizou que a probabilidade podia ser aplicada a diversas questões da vida, defendia que a maioria dos casos demandava problemas que envolvia probabilidade. Para Gillispie (2007, p. 1426) este livro “sem dúvida teve vida mais longa e, quase certamente, um número maior de leitores do que qualquer outro texto” feito por Laplace, que afirmou em seus estudos que,

Quase todos os nossos conhecimentos são apenas prováveis; e no pequeno número de coisas que podemos saber com certeza, mesmo nas próprias ciências matemáticas, os principais meios para se chegar à verdade – a indução e a analogia – são fundados nas probabilidades (LAPLACE, 2010, p. 41).

Sobre isso, Laplace (2010) tem um princípio evidente de que qualquer acontecimento não pode começar sem que tenha uma causa. Princípio este que gerou seu axioma *princípio da razão suficiente*, usado para qualquer ação, pois “Todos os eventos, mesmo aqueles que por sua irrelevância, parecem não se relacionar às grandes leis da natureza” (LAPLACE, 2010, p. 42).

Laplace organizou exemplos práticos que satisfizessem as suas ideias, dos muitos fenômenos que estudou, concluiu que “a probabilidade se deve em parte a nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos” (LAPLACE, 2010, p. 46). No entanto, determinou das análises dos possíveis resultados das apostas nos jogos de azar, que “quando todos os casos são favoráveis a um evento, sua probabilidade se transforma em certeza, e sua expressão torna-se igual à unidade” (Ibid., p. 46).

Formando, com sua teoria a definição clássica da probabilidade como sendo o *número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis*, aplicados a experimentos finitos e igualmente possíveis (equiprováveis), organizada na seguinte forma (LAPLACE, 2010):

$$Probabilidade = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Em Junqueira (2014), destaca-se, a probabilidade de ocorrência de um evento dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \text{ onde: } P(A) = \text{probabilidade do evento; } (A) = \text{nº de elementos do evento; } (S) = \text{nº de elementos do espaço amostral. Com } 0 \leq P(A) \leq 1, \text{ que devem satisfazer as Propriedades:}$$

- i. $P(S) = 1$
- ii. $P(A) \geq 0$, para todo $A \subset S$
- iii. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Entretanto, Laplace (2010, p. 49) explica que “A teoria das probabilidades se relaciona a considerações tão delicadas que não é surpreendente que, a partir dos mesmos dados, duas pessoas encontrem resultados diferentes, sobretudo em questões muito complexas”. Para organizar suas ideias Laplace definiu dez Princípios gerais do Cálculo das probabilidades expondo sobre o que se remete a uma relação geral das observações de Laplace, informadas no quadro 1.

Quadro 1: Princípios Gerais do Cálculo de Probabilidade

10 Princípios Gerais do Cálculo das probabilidades – Laplace	
1º	É a relação entre o número de casos favoráveis e aquele de todos os casos possíveis;
2º	A soma das possibilidades de cada caso favorável. Princípio que serve para reduzir os diversos casos a casos igualmente possíveis;
3º	Se os eventos são independentes um dos outros, a probabilidade da existência de seu conjunto é o produto de suas probabilidades individuais;
4º	Quando dois eventos dependem um do outro, a probabilidade do evento composto é o produto da probabilidade do primeiro evento pela probabilidade de que, tendo ocorrido o primeiro, o outro ocorrerá;
5º	Se forem calculadas <i>a priori</i> a probabilidade do evento ocorrido e aquela de um evento composto desse e de um outro que se espera, a segunda probabilidade dividida pela primeira será a probabilidade do evento esperado, inferida do evento observado;
6º	É uma fração cujo numerador é a probabilidade do evento resultante da causa considerada e cujo denominador é a soma das probabilidades semelhantes relativas a todas as causas. Esse princípio fornece a razão por que todos os eventos regulares são atribuídos a uma causa particular;
7º	a probabilidade de um evento futuro é a soma dos produtos da probabilidade de cada causa, obtida do evento observado, pela probabilidade de que, existindo essa causa, o evento futuro ocorra;
8º	Quando a vantagem depende de vários eventos, ela é obtida torando-se a soma dos produtos da probabilidade de cada evento pelo bem relacionado com sua ocorrência;
9º	Em uma série de eventos prováveis, onde uns produzem um benefício e outros uma perda, obter-se-á a vantagem resultante fazendo a soma dos produtos da probabilidade de cada evento favorável pelo benefício que ele confere, e subtraindo dessa soma aquela dos produtos da probabilidade de cada evento desfavorável pela perda que lhe é relacionada. Se a segunda soma supera a primeira, o benefício torna-se perda e a esperança transforma-se em temor;
10º	o valor relativo de uma soma infinitamente pequena é igual ao seu valor absoluto dividido pelo bem total da pessoa interessada. Isso supõe que todo homem tem um bem qualquer cujo valor nunca pode ser suposto nulo.

Fonte: Laplace (2010, p. 49)

Os dez princípios probabilísticos propostos por Laplace no livro *Ensaio Filosófico* e podem ser usados em diversas áreas do conhecimento. Sobre os jogos, sabe-se que foram os primeiros eventos que as pesquisas mostram na história, “na infinita variedade dessas

combinações, várias delas se prestam com facilidade ao cálculo, enquanto outras exigem cálculos mais difíceis” (LAPLACE, 2010, p. 85). Para Rotunno (2007) as obras e princípios que Laplace atribuiu a Teoria da Probabilidade,

São obras reconhecidas como a Teoria Clássica da Probabilidade, conceitos básicos, desenvolvidos de forma precisa, em dez princípios fundamentais [...] A concepção determinista de Laplace permitiu saltar de um tratamento causal a uma concepção estatística dos acontecimentos. **Pode-se dizer que os trabalhos de Laplace podem ser considerados como o final da terceira etapa na evolução da teoria matemática da probabilidade** (ROTUNNO, 2007, p. 21, grifo nosso).

Segundo Boyer (1974) “a Teoria de Probabilidade deve mais a Laplace do que a qualquer outro matemático”. A partir dele, as disciplinas cálculo de probabilidade e estatística, que tinham até então permanecido separadas, “se fundiram de maneira que o cálculo das probabilidades se constitui no andaime matemático da estatística. Toda a base matemática que permitiu desenvolver a teoria da probabilidade é extraída da análise combinatória” (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, tradução nossa).

Com base nesse acúmulo de conhecimentos teóricos e avanços anteriores, os pesquisadores do século XIX puderam explorar e aprimorar ainda mais a teoria da probabilidade, favorecendo um avanço importantíssimo tanto em sua formulação teórica quanto em sua aplicação (ROTUNNO, 2007), pois se beneficiaram de trabalhos pioneiros estabelecendo bases sólidas para o desenvolvimento futuro dessa área do conhecimento.

3.4. AXIOMATIZAÇÃO DA PROBABILIDADE

No século XX, o matemático Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), nascido em Tombov, na Rússia. Segundo O'Connor e Robertson (1999, tradução nossa), seus pais não eram casados, sua mãe faleceu em seu parto, então foi criado pela irmã de sua mãe, seu nome foi dado por seu avô materno Yakov Stepanovich Kolmogorov que era da nobreza. Segundo Almeida (2005) Kolmogorov avançou com os estudos da Teoria da Probabilidade para um nível de crescimento exponencial, tornando-se um ramo importante da matemática.

Em 1920, Kolmogorov publicou o artigo intitulado “Über konvergenz Von Reihern, deren Glieder durch Zufall Bestimmt Werden” (Sobre a convergência de séries cujos membros são determinados ao acaso) o que se trata de probabilidade. Nessa época o autor estava longe de se comprometer com a matemática, tendo estudado diversas outras áreas, como metalurgia e história russa (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999, tradução nossa), entretanto este artigo,

pode ter iniciado seu interesse na formulação dos seus axiomas, pois ele começou a dedicar-se intensamente ao estudo da teoria da probabilidade, publicando outros trabalhos sobre o tema.

Em “1927, Kolmogorov havia concluído suas pesquisas sobre proficiência e condições necessárias da lei fraca dos grandes números, iniciada por J. Bernoulli” (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, p. 89, tradução nossa) e em 1929 completou seu doutorado, tendo publicado 18 trabalhos, entre eles o artigo “A Teoria Geral da Medição e o Cálculo de Probabilidades” (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, p. 89, tradução nossa), trabalhos que o embasaram a construir uma definição consistente.

Segundo Kolmogorov (1956, p. 2) “Existem outros sistemas postulacionais da teoria da probabilidade, particularmente aqueles em que o conceito de probabilidade não é tratado como um dos conceitos básicos, mas é ele próprio expresso por meio de outros conceitos”, então, Kolmogorov determinou que precisava organizar ou mesmo fundamentar este objeto matemático, de uma forma que integrasse “o mais próximo possível a teoria matemática com o desenvolvimento empírico da teoria da probabilidade” (Ibid., p. 2), sem excluir os créditos que a probabilidade já tinha como definição e propriedades.

No livro *Historia de la Probabilidad* ([2020], p. 18, tradução nossa) destaca-se que a definição axiomática da probabilidade incorpora exemplos clássicos e frequentistas, ou seja, “vem das propriedades fundamentais da probabilidade observadas nos exemplos que ilustram as definições clássicas e frequentistas. Assim, a definição axiomática os inclui como casos particulares e supera as deficiências de ambos”. Essa perspectiva histórica e axiomática enriquece o ensino da probabilidade, permitindo aos alunos compreender a evolução do conceito e sua aplicação em diversas áreas.

É importante enfatizar que nesse livro ressalta-se que “Kolmogorov deu uma solução para uma parte do sexto problema de Hilbert, que pedia um fundamento axiomático da teoria da probabilidade” (*Historia de la Probabilidad*, [2020], p. 17, tradução nossa), justificando a necessidade desse tema. O que foi muito importante, pois permitiu que Kolmogorov definisse os axiomas que fundamentaram a teoria da probabilidade de forma rigorosa e matemática, estabelecendo que a teoria da probabilidade se tornasse uma disciplina matemática bem fundamentada, com suas próprias leis e regras.

Em 1930 Kolmogorov (1956, p. 01, tradução nossa) estabeleceu que “a teoria da probabilidade, como disciplina matemática, poderia e deveria ser desenvolvida a partir de axiomas exatamente da mesma forma que a Geometria e a Álgebra”. Ainda segundo este autor, com base nas frequências relativas e na teoria dos conjuntos ele estabeleceu uma comparação dos eventos aleatórios com os conceitos da teoria dos conjuntos, para poder definir certas

condições, em seguida comparou os conceitos da teoria dos conjuntos com os conceitos da teoria da probabilidade.

De acordo com Kolmogorov (1956, p. 05, tradução nossa) “muitos conceitos da teoria dos conjuntos são designados por outros termos”. O quadro 2 apresenta uma comparação entre os conceitos da teoria dos conjuntos e os termos utilizados na teoria da probabilidade, com essa comparação, Kolmogorov estabeleceu a linguagem necessária para tornar mais clara e consistente sua ideia em relação aos axiomas da teoria da probabilidade.

Quadro 2: Comparação – Terminologia entre as teorias

Teoria dos conjuntos		Eventos aleatórios	
1	A e B não se cruzam, ou seja, $AB = 0$	1	O Eventos A e B são incompatíveis
2	$AB \dots N = 0$	2	O Eventos $A, B, \dots, N$ são incompatíveis
3	$AB \dots N = X$	3	O Evento X é definido como a ocorrência simultânea de eventos $A, B, \dots, N$
4	$A + B + \dots + N = X$	4	O evento X é definido como a ocorrência de pelo menos um dos os eventos $A, B, \dots, N$
5	O conjunto complementar $\bar{A}$	5	O evento oposto $\bar{A}$ consistindo na não ocorrência do evento A
6	$A = 0$	6	O evento A é impossível
7	$A = E$	7	O evento A deve ocorrer
8	O sistema $\mathfrak{A}$ dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma <i>decomposição</i> do conjunto E se $A_1 + A_2 + \dots + A_n = E$. (isso pressupõe que os conjuntos A não se interceptam, em pares)	8	8. O <i>experimento</i> $\mathfrak{A}$ consiste em determinar qual dos eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ ocorre. Chamamos, portanto $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ os resultados possíveis do experimento $\mathfrak{A}$.
9	B é um subconjunto de $A : B \subset A$.	9	9. Da ocorrência do evento B segue-se a ocorrência inevitável de A .

Fonte: Kolmogorov (1956, p. 05, tradução nossa)

De acordo com Eugênio (2016), Kolmogorov buscou essa relação para garantir a fundamentação e a validade dos axiomas, para poder contribuir significativamente para o desenvolvimento da probabilidade como área da matemática, pois,

O significado Axiomático tenta algebrizar tudo o que já existia em relação à Probabilidade produzida pelos matemáticos e tenta generalizá-la para as mais diversas áreas da sociedade. Foi o esforço de diversos matemáticos em conseguir fazer a Probabilidade ter um lugar de destaque na Matemática formal, mais conhecida como Matemática pura. Esse esforço rendeu o reconhecimento da Probabilidade enquanto função Matemática e convergência entre a teoria dos Conjuntos e a teoria da Medida, as quais até então nunca tinham tido diálogo com áreas da Matemática (EUGÊNIO, 2016, p. 26).

Neste sentido, Kolmogorov (1956, tradução nossa) determina elementos e relações essenciais, para permitir maior clareza e rigor em seus estudos e possibilitar a generalização dos resultados até mesmo para outros contextos. Pois, Kolmogorov adotou como fato que toda teoria axiomática (abstrata) admite, que é,

Um número ilimitado de interpretações concretas além daquelas das quais foi derivada. Assim, encontramos aplicações em campos da ciência que não têm relação com os conceitos de evento aleatório e de probabilidade no significado preciso dessas palavras. A base postulacional da teoria da probabilidade pode ser estabelecida por diferentes métodos no que diz respeito à seleção de axiomas, bem como na seleção de conceitos e relações básicas. No entanto, se nosso objetivo é alcançar a máxima simplicidade, tanto no sistema de axiomas quanto no desenvolvimento posterior da teoria, então os conceitos postulacionais de um evento aleatório e sua probabilidade parecem os mais adequados (KOLMOGOROV, 1956, p. 02, tradução nossa).

Dessa forma, em sua busca por uma teoria axiomática para a probabilidade, publicou em 1933, o livro *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Fundamentos da Teoria da Probabilidade)*. Nesta obra, ele utilizou axiomas já existentes e enfatizou que seu “objetivo é alcançar a máxima simplicidade tanto no sistema de axiomas quanto no desenvolvimento posterior da teoria” (KOLMOGOROV, 1956, p. 01, tradução nossa).

A proposta dos axiomas de Kolmogorov foi bem-sucedida mostrando sua aplicação a diversas áreas do conhecimento e estabelecendo uma definição mais formal, pois tem “uma fundamentação teórica rigorosa e não se limita aos casos de eventos equiprováveis, pois ela pode ser aplicada a qualquer tipo de evento e/ou espaço amostral” (SALSA; MOREIRA, 2014, p. 18), dando a probabilidade uma função relevante e significativa para a matemática.

A definição moderna que Kolmogorov atribuiu a teoria da probabilidade, baseada na teoria das medidas, considera experimentos em que os resultados possíveis podem ser infinitos e não necessariamente equiprováveis, pois com os axiomas Kolmogorov definiu uma medida de certeza, mais ampla e flexível, aplicada a experimentos mais complexos. Em *História de la Probabilidad* ([2020], tradução nossa), ver-se que,

Dos três axiomas fundamentais de Kolmogorov, a maioria das propriedades fundamentais de probabilidade que conhecemos e manuseamos hoje são deduzidas. Além disso, esses axiomas têm a vantagem de serem consistentes, pois existem objetos reais que os satisfazem e, portanto, especificam a Matemática em nossas vidas (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 19, tradução nossa).

A partir destes fatos, Kolmogorov (1956, p. 16, tradução nossa) apresenta “que a probabilidade $P(A)$ é uma função de conjunto completamente aditiva em $\mathfrak{F}$ ”, para poder definir conceitos axiomáticos para a teoria da probabilidade, quais ele indicou que podem ser chamados de campo de probabilidade generalizadas. Então, determinou as seguintes condições:

§ 1. Axiomas

Seja E uma coleção de elementos $\xi, \eta, \zeta, \dots$, que chamaremos de *eventos elementares*, e $\mathfrak{F}$ um conjunto de subconjuntos de E ; os elementos do conjunto $\mathfrak{F}$ serão chamados de eventos aleatórios.

I. $\mathfrak{F}$ é um campo de conjuntos.

II. $\mathfrak{F}$ contém o conjunto E .

III. A cada conjunto A em $\mathfrak{F}$ é atribuído um número real não negativo (P) A . Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A .

IV. $P(E)$ é igual a 1.

V. Se A e B não têm elemento em comum, então: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Um sistema de conjuntos, $\mathfrak{F}$, juntamente com uma atribuição definida de números $P(A)$, satisfazendo os Axiomas I-V, é chamado de *campo de probabilidade*.

Nosso sistema de Axiomas I-V é *consistente*.

Segundo Rotunno (2007) após a publicação de Fundamentos da Teoria da Probabilidade, elevou-a para Etapa Moderna de seus estudos e aplicação a diversas áreas de conhecimentos, um fato não determinado anteriormente por nenhum outro matemático que estudou e contribuiu significativamente com seu avanço. Nestas condições, Kolmogorov foi considerado o primeiro matemático a apresentar uma forma axiomática da probabilidade, este autor afirma que os axiomas de Kolmogorov,

Tomaram a Teoria das Probabilidades uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nesta área, sobretudo sob o aspecto teórico. A utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo científico, seja nas ciências humanas ou nas políticas (ROTUNNO, 2007, p. 33).

Entretanto, os axiomas definidos por Kolmogorov também não invalidaram as definições da probabilidade clássica organizadas por Laplace. Em Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021, pp. 98-99) apresentaram as definições de Laplace usando os axiomas de Kolmogorov (1956), nas seguintes situações:

- Considerando o espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e a σ –álgebra discreta das partes de Ω . Nesse caso, o $\mathcal{F} = 2^\Omega$ mensurável será o conjunto de partes de Ω ;
- Definindo a função de probabilidade para qualquer evento A da seguinte maneira:

Para os n eventos elementares $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, associamos uma probabilidade $p_i = P(\{a_i\})$ que satisfaz as seguintes condições:

$$A - p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n;$$

$$B - p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Para um evento qualquer $A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}\} \in \mathcal{F}$, definindo como

$$P(A) = P_{j_1} + P_{j_2} \dots + P_{j_k}.$$

Assim, o espaço de Probabilidade para esse caso seria $(\Omega, 2^\Omega, P)$.

Se no caso anterior temos a propriedade $p = P(\{a_1\}) = \dots = P(\{n\})$, diz-se que Ω é um espaço amostral finito equiprovável. Fazendo uso do item B, obtém-se que $p = \frac{1}{n}$. Assim, neste caso a definição clássica de Probabilidade torna-se: $P(A) = \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{número total de elementos de } \Omega}$.

De acordo com Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021), a definição clássica da probabilidade tem sido usada com sucesso para resolver muitos problemas por meios de técnicas de análise combinatória e de contagem. A história da matemática desempenha um papel importante na compreensão da evolução da probabilidade, desde os primeiros problemas e soluções, passando pela definição frequentista e clássica, até a modernização feita por Kolmogorov, que axiomatizou a probabilidade usando uma abordagem formal baseada em axiomas matemáticos.

Em Salsa e Moreira (2014) destaca-se uma notação atual das ideias de Kolmogorov, primeiramente foi estabelecido as propriedades que definiriam os axiomas como sendo:

- *Seja ε um experimento aleatório e Ω um conjunto formado por todos os eventos elementares desse experimento*, em seguida estabeleceu que:
- *Seja A o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω , inclusive o próprio Ω (evento certo) e o conjunto vazio φ (evento impossível)*. Assim,
- *Uma função P definida em A , que associa a cada evento de A um número no intervalo $[0,1]$, é chamada probabilidade do evento, isto é: $P : A \rightarrow [0, 1]$, que deve satisfazer as seguintes condições, estabelecidas em Kolmogorov (1956, p. 02, tradução e adaptação nossa):*

I - A cada conjunto A em Ω é atribuído um número real não negativo $(P)A$. Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A , ou seja, $P(A) \geq 0$

II - $P(\Omega) = 1$

III - Se A e B não têm elemento em comum, então: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

A Axiomatização dada por Kolmogorov na teoria da probabilidade desempenha um papel fundamental na compreensão e aplicação em diversas áreas do conhecimento, pois ele estabeleceu uma base sólida e rigorosa, uma estrutura matemática necessária para o estudo de eventos aleatórios. Ele forneceu um conjunto de regra e princípios que validaram o cálculo e a interpretação da probabilidade, garantindo uma abordagem matemática precisa.

4. RECORTES HISTÓRICOS E ATIVIDADES PARA O ENSINO

Este capítulo é constituído de três textos, que foram recortados do texto principal. Apresenta a história e a evolução da teoria da probabilidade, balizado pelo Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022), referentes a momentos históricos específicos e em alguns momentos foram adaptados para serem utilizados em atividades pedagógicas no ensino de probabilidade para a educação básica.

Com base na Base Nacional Comum Curricular (2017), elaboramos instruções e orientações, que estão na página inicial dos três recortes históricos que compõem este trabalho sobre a teoria da probabilidade, são informações que garantem que os textos atendam aos critérios estabelecidos na BNCC, proporcionando uma abordagem alinhada às diretrizes educacionais, como consta abaixo:

Orientações e Recomendações Oficiais para a Educação Básica

A Base Nacional Comum Curricular, estabelece as orientações essenciais para a aprendizagem durante a trajetória escolar, nestas estão amparadas o ensino de probabilidade e uso da história da matemática, com ambas será enfatizado o desenvolvimento das habilidades e competências necessárias a aprendizagem dos alunos, que inicia pela compreensão das noções dos conceitos de probabilidade, perpassando por conhecimentos que ajudam a compreender a importância da probabilidade em diversas áreas e seus devidos cálculos.

Plano de aplicação

 Explorar a História da Probabilidade, mediada pelo uso da História da Matemática, apresentada e instruída de forma online, pelo google Forms, a professores de matemática da educação básica.

Objetivos

 Apresentar os Recortes Históricos e as Atividades a respeito da História da Probabilidade, balizada pelo Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022);

 Refletir sobre a importância do uso da história da matemática no ensino de probabilidade, na educação básica, mediante a compreensão dos professores, que responderam aos formulários.

Habilidades da BNCC

 (EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

 (EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

🧠 (EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Competência de Matemática da BNCC

🧠 Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho

Avaliação

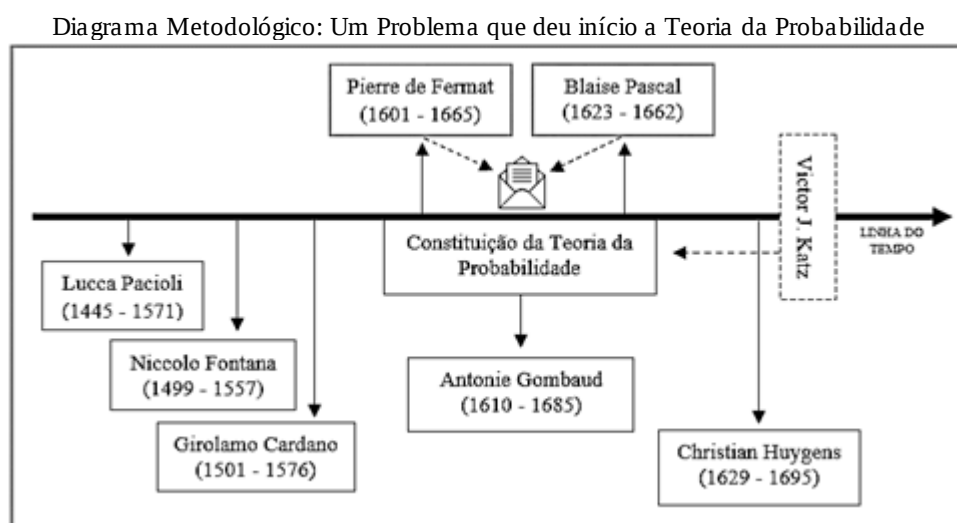
- 🧠 Participação de professores nas tarefas, enviadas online.
- 🧠 Análise das respostas dos professores;
- 🧠 Reflexão sobre a importância da probabilidade por meio da História da matemática.

Recursos

- 🧠 Recortes Históricos e suas respectivas atividades;
- 🧠 Computador ou celular conectados à internet

4.1. TEXTO I: UM PROBLEMA QUE DEU INÍCIO A TEORIA DA PROBABILIDADE

Este texto apresenta um *recorte histórico* proposto por Chaquiam (2022). Neste recorte em específico, evidenciou-se os personagens que contribuíram com os primeiros relatos, situações, problemas e soluções que levaram a constituição da teoria da probabilidade.



Fonte: Vasconcelos (2023).

Texto I: UM PROBLEMA QUE DEU INÍCIO A PROBABILIDADE

Veraciv Brabo de Vasconcelos
Miguel Chaquiam

Nesse contexto, surgem personagens que “se limitaram a resolver problemas concretos, estritamente numéricos” (TOMAZ, 2011, p. 5), abordando através de teorias matemáticas soluções para as possibilidades de ganhar e elaborar estratégias para obter sucessos em suas apostas, sendo este fator que influenciaria no surgimento da probabilidade



Os primeiros problemas oficialmente publicados a respeito de situações envolvendo a teoria da probabilidade, foram propostos pelo italiano Luca Pacioli (1445-1517) e com a contribuição dos italianos, Niccolo Fontana (1499-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Christian Huygens (1629-1695), considerados personagens importantes, por realizarem estudos nos quais compararam as frequências dos eventos e estimaram as chances de se ganhar em jogos de azar.

O primeiro problema, que despertou o interesse para explicar tal situação, que seguia um padrão aleatório, ficou conhecido como o *problema dos pontos*, publicado em 1494 pelo matemático Luca Pacioli no seu livro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione e Proportionalita* (Resumo de Aritmética, Geométrica, proporção e proporcionalidade) considerado uma referência histórica e fundamental para a noção da probabilidade, que envolvia a distribuição de um prêmio em um jogo de azar interrompido por algum motivo antes de seu termino. Como foi feita a divisão do prêmio já que o resultado era incerto?

O problema: “Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio?” (ARAGÃO, 2009, p. 86).

As tentativas de solução:

Pacioli, sugeriu que com a interrupção do jogo, o prêmio pudesse ser dividido “em proporção ao número de rodadas já vencidas por cada jogador” (Warsi, 2020, p. 164). Pacioli, então recomendou que para o jogador com 5 pontos, o prêmio seria calculado como 6 vezes $\frac{5}{8}$ e para o jogador com 3 pontos seria 6 vezes $\frac{3}{8}$. Porém, a resposta de Pacioli não foi satisfatória para solucionar o problema.

O matemático **Niccolo Fontana** (1499-1557), de pseudônimo Tartaglia, de acordo com Historia de la Probabilidad ([2020] p. 04, tradução nossa) ele descartou a solução proposta por Pacioli e propôs uma divisão proporcional ao número de jogadas vencidas por cada equipe, utilizando uma divisão equitativa, e sugeriu que: “se um time ganhou a pontos e o outro b pontos, o jogo é jogado para n pontos e o prêmio total é P , os ganhos devem ser distribuídos da seguinte forma:

$$\left(\frac{P}{2}\right) \pm P \left[\frac{a-b}{n}\right].$$

Tartaglia afirma neste caso que a maior quantidade vai para a equipe que tiver mais vitórias. “No entanto, Tartaglia sabia que sua solução não era a correta e em seu livro deixou claro que era bom para conferir justiça e equilíbrio a um elenco, mas não era exato do ponto de vista matemático” (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020] p. 04, tradução nossa), permitindo que com esta ideia outros matemáticos a aprimorassem.



Fonte: <https://www.britishmuseum.org/>



Fonte: <https://impa.br/noticias>

Surge, então um personagem de destaque nos jogos, **Girolamo Cardano** (1501-1576), matemático, médico, astrólogo e filósofo, bastante famoso por ser um apostador de jogos de azar que buscava matematicamente estratégias para ganhar em suas apostas, segundo Mlodinow (2009) no tempo de Cardano, onde ele estava os jogos eram certos de ocorrer.

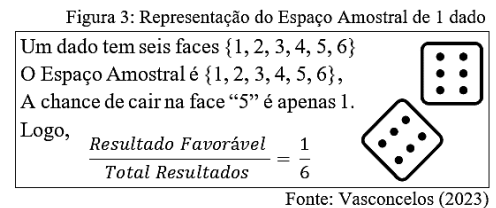
Mesmo tendo alguns equívocos, Cardano, de forma simples, mas com eficácia escreveu suas estratégias em seu livro “*Liber de Ludo Aleae*” (Livro sobre os jogos de azar) este livro foi o “primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza” (MLODINOW, 2009, p. 58), mas, lamentavelmente, este livro só se tornou público em 1663. Cardano, afirmou em seu livro que a solução de Pacioli no problema dos pontos, estava incorreta porque ele não contava quantos jogos cada equipe precisava vencer para ganhar o prêmio (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020]).

Como solução, Cardano definiu uma fórmula para distribuir o prêmio, mas reconheceu que sua solução só valeria para alguns casos particulares, sendo: “se n é o número total de partidas e a e b as partidas vencidas por cada equipe, o prêmio deveria ser distribuído da seguinte forma: $[1 + 2 + \dots + (n - b)]: [1 + 2 + \dots + (n - a)]$ ”.

Cardano fez uma importante contribuição para a teoria da probabilidade ao introduzir a ideia de *espaço amostral*, referindo-se que esta ideia era resultado de um processo aleatório compreendido como pontos no espaço. De acordo com Mlodinow (2009) Cardano definiu o

espaço amostral da seguinte forma: *Suponha que é um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultado possíveis.*

Exemplo, se um dado tem seis lados, esses seis resultados formam o espaço amostral. Apostar em cair em um determinado valor do dado é $\frac{1}{6}$.



Embora, Cardano tenha solucionado este problema e introduzido importantes conceitos na teoria da probabilidade, como o espaço amostral, ele não publicou suas ideias. Somente em 1663 é que ela foi oficialmente conhecida. Anteriormente o matemático Huygens publicou em 1657 uma solução baseada nas ideias dos matemáticos Pascal e Fermat.

Tudo iniciou quando **Antonie Gombaud** (1610-1685) de pseudônimo Chevalier de

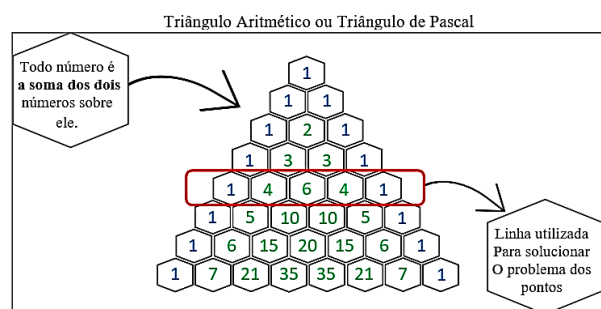


Méré, solicitou a **Blaise Pascal (1623-1662)** que solucionasse o famoso *Problema dos Pontos*, neste período os jogos e apostas eram comuns e quando o jogo começava o dinheiro apostado não pertencia a ninguém até o final do jogo e então o ganhador ficava com tudo, por isso, a divisão deveria ser justa, refletindo as possibilidades de cada jogador vencer a aposta (Berlingoff e Gouvêa, 2008). Pascal compartilhou suas ideias com o Fermat.

“Pascal percebeu que, independentemente da resposta, os métodos necessários para calculá-la ainda eram desconhecidos, e tais métodos, quaisquer que fossem, teriam importante implicações para todos os tipos de situação competitiva” (MLODINOW, 2009, p. 77).

A partir de então, Pascal e Fermat traçaram juntos estratégias para resolver o *problema dos pontos*, compartilhadas por meio de cartas: - **Pascal** desenvolveu sua resposta baseado no Triângulo Aritmético, apresentando as probabilidades de cada jogador ganhar em diferentes pontos no jogo e mostrando como as apostas deveriam ser divididas.

De acordo com Warsi (2020, p. 160) Pascal “descobriu que o triângulo poderia ser usado para achar o número de combinações possíveis quando se escolhe uma quantidade de objetos a partir de um número particular de opções disponíveis [...] e cada linha do triângulo de Pascal dá aos coeficientes binomiais



Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de Warsi (2020, p. 158)

uma potência”. Segundo Eves (2011, p. 939) Pascal tomou a quarta linha do triângulo aritmético, considerando “que mais quatro partidas decidem o jogo”. Nesse sentido Pascal mostrou que “os números no triângulo contam o número de modos com que várias ocorrências podem se combinar” (WARSI, 2020, p. 159).

Segundo Eves (2011) Pascal indicou um número de combinações simples, tomando como ordem r , de n objetos: C_r^n , decidiu que tomando a linha quatro, tem-se, respectivamente os coeficientes: 1, 4, 6, 4, 1, e combinou na condição, de que cada combinação simples é o número maneiras de obter as quantidades de letras, para análise da solução do problema:

- Para o primeiro jogador (A): $\frac{C_4^4 + C_3^4 + C_2^4}{\text{casos possíveis}} \cdot \text{prêmio};$

- Para o segundo jogador (B): $\frac{C_1^4 + C_0^4}{\text{casos possíveis}} \cdot \text{prêmio};$



Pierre de Fermat (1601-1665), por sua vez, utilizou o método “fundado nas combinações, se estende a um número qualquer de jogadores” (LAPLACE, 2010, p. 213), formando 6 arranjos completos de ordem 4, pois afirmou que quatro partidas decidiriam o jogo e assim organizou com as letras a e b e denominou-os como: jogador A e jogador B (EVES, 2011).

De acordo com Eves (2011), as combinações que aparecem a , duas ou mais vezes são favoráveis a A e as combinações que aparecem b , três ou mais vezes, são favoráveis a B . E assim multiplicaria esses dados pelo valor do prêmio para se ter uma divisão justa.

Pascal e Fermat, cada um com seu próprio método, chegaram a um mesmo resultado para o *problema dos pontos*, além de refletirem outros problemas equivalentes, contribuindo com a base do desenvolvimento da teoria da probabilidade, envolvendo também os jogos de azar, viabilizando que o estudo do acaso tomasse uma expressão matemática e assim fosse introduzido um cálculo para a probabilidade (JUNQUEIRA, 2015).

O problema dos pontos foi um desafio matemático no campo da probabilidade. Segundo Mlodinow (2009, p. 84) “a análise de Pascal e Fermat mostrou-se um grande primeiro passo na busca de uma teoria matemática coerente da aleatoriedade”.

Combinações de Fermat			
aaaa	aaab	abba	bbab
baaa	bbab	abab	babb
abaa	baba	aabb	abbb
aaba	baab	bbba	bbbb

Fonte: Eves (2011, p. 393)



No entanto, coube ao matemático **Christian Huygens (1629-1695)**, em 1657, tornar público as cartas, que continham as soluções proposta por Pascal e Fermat sobre o *problema dos pontos*. Huygens apresentou as soluções, com as respectivas estratégias e cálculos utilizados pelos matemáticos, no livro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Raciocínio Relacionado aos Jogos dos Dados), considerado o primeiro documento publicado sobre probabilidade.

Katz (2010, p. 576) enfatiza que “Huygens forneceu discussões pormenorizadas acerca do raciocínio por trás das soluções, em particular como calcular num jogo de azar” (KATZ, 2010, p. 576), segundo este mesmo autor Huygens declarou que os resultados dos jogos de azar podem ser incertos, pois as chances de um jogador ganhar ou perder, dependia de um determinado valor, introduzindo como **valor esperado**, que é a quantidade média que uma pessoa **ganharia** se jogasse o jogo muitas vezes, sendo está a quantidade que um jogador **pagaria** para ter o privilégio de jogar este jogo.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 213) Huygens baseava na expectativa matemática ou resultado esperado de uma situação, Por exemplo: “*Oferecem-lhe a chance de jogar um único dado. Se aparecer o 6, você ganha \$ 10; Se aparecer 3, você ganha \$ 5; de outro modo, você não ganha nada. Qual é um preço justo para jogar esse jogo?*”. Segundo os mesmos autores, nesta situação o valor esperado, consiste em somar os produtos de cada recompensa possível pela probabilidade de obtê-la. Considerando que o dado não é viciado e que todas as possibilidades têm a mesma chance de acontecer, a expectativa matemática desse jogo seria então o valor de \$ 2,50.

Portanto, “a expectativa matemática de um jogo é encontrada somando os produtos de cada recompensa possível pela probabilidade de você a obter” (Ibid., p. 213). Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 216) Huygens “inverteu o processo, usando a expectativa para calcular a probabilidade, em vez do contrário. Mas a ideia fundamental era a mesma: resultados igualmente prováveis significam expectativas iguais”, de situações iguais e repetidas, foi o que o levou a escrever suas proposições, sobre os jogos de azar relacionados as chances para se obter sucesso.

Outro sim, observa-se que o método utilizado por Huygens, para organizar os dados e resolver os problemas, não definia uma fórmula conclusiva para aplicar a probabilidade, contudo é evidente que eram considerados casos possíveis e casos favoráveis, pois, segundo Gneri (S.d, p. 03) foi considerado as chances de um jogador ganhar, onde “no contexto de um jogo e desde o ponto de vista de um jogador, consideram-se o conjunto de todos os resultados

ou *casos possíveis*, sendo feita uma partição em dois subconjuntos: o dos resultados ou *casos favoráveis* e o dos não favoráveis”, aos apostadores/jogadores, organizada como:

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Segundo Katz (2010, p. 578) Huygens se aprofundou nos estudos e forneceu informações relevantes de como calcular num jogo de azar, deixando à exposição de outros matemáticos que por ventura se interessassem por este ramo da matemática, sendo que seu tratado “era a única introdução disponível à teoria da probabilidade até o início do século dezoito”, contribuição que foi fundamental para a evolução da teoria da probabilidade nos séculos posteriores.

Sugestões de Atividades do Texto I

1º) Conhecendo um pouco da História da Constituição da Teoria da Probabilidade, envolva a matemática em suas repostas:

a) Explique com suas palavras, sobre o primeiro problema matemático que gerou interesse na teoria da probabilidade e como essa teoria foi aplicada para resolver este problema.

b) Explique com a teoria da probabilidade foi apresentada oficialmente para o mundo?

c) Resuma sobre as principais contribuições de Cardano para o desenvolvimento da teoria da probabilidade e como elas impactaram a matemática?

d) Qual foi o primeiro conceito matemático utilizado por Pacioli para tentar solucionar o problema dos jogos de azar e como esse conceito influenciou o desenvolvimento da teoria da probabilidade?

2ª) Como a teoria da probabilidade foi oficialmente estabelecida e qual foi o papel desempenhado pelo matemático Huygens nesse processo?

3ª) Resolva o problema dos pontos, utilizando suas próprias estratégias e raciocínio: *Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma*

interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio? Sendo que o valor para o prêmio é de R\$ 500,00.

4ª) Resolve este problema, utilizando suas próprias estratégias e raciocínio. Está é a proposta que o matemático Huygens apresenta no texto: Oferecem-lhe a chance de jogar um único dado. Se aparecer o 6, você ganha \$10; Se aparecer 3, você ganha \$5; de outro modo, você não ganha nada. Qual é um preço justo para jogar esse jogo?

5ª) Em um jogo de moedas, dois jogadores apostam 30 moedas cada um, ganha o prêmio quem primeiro fizer 10 pontos. Considerando os jogadores como A e B , então cada vez que a moeda é lançada, se sair *cara* 1 (um) ponto é de B e se sair *coroa* 1 (um) ponto é de A . Entretanto, por algum motivo o jogo é interrompido quando A tem 8 pontos e B tem 7 pontos.

- Como esse prêmio deve ser dividido de forma justa, considerando a pontuação que A e B tem no momento que o jogo foi interrompido?
- Existe outra forma de dividir o prêmio que possa ser considerada de forma justa. Explique e exemplifique.
- Caso o jogo continuasse e B ganhasse o próximo ponto. Quem seria o vencedor do jogo?

PARA SABER MAIS: Questão adaptada do livro do 9º ano (Matemática – Bianchini, 2007, p. 140).

6ª) Cardano Introduziu o termo *espaço amostral*, Como apresentado no texto I com o resultado de apenas 1 dado.

- Represente o espaço amostral do lançamento de dois dados em uma tabela.
- Imagine: Carol, Rafael e Sofia brincando de jogar esses dados. Responda os itens c, d, e. justificando qual deles tem a probabilidade de ganhar em uma jogada:
- Sendo a soma dos números das faces de cima: Carol = 6; Rafael = 7 e Sofia = 8
- Sendo a diferença em módulo entre os números das faces de cima: Carol = 1; do Rafael = 3 e da Sofia = 0
- Eles apostaram, que o produto dos números das faces de cima seria: Carol = número ímpar; do Rafael = número primo e da Sofia = número par.

Nota Didática aos Professores

A primeira e a segunda questão, o objetivo é incentivar o aluno a investigar respostas que foram contadas neste recorte histórico, fazendo com que eles relatem trechos da história, de acordo a compreensão e entendimento que tiveram sobre a história.

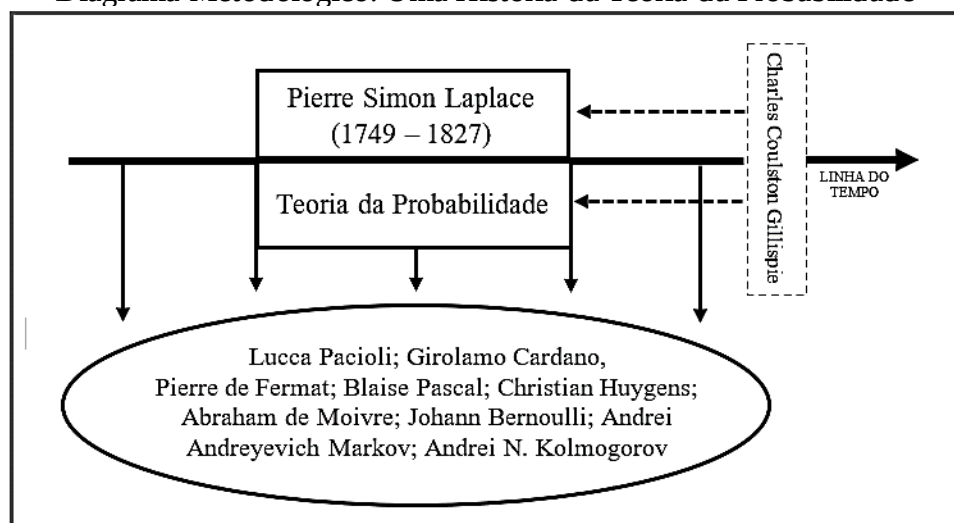
A terceira e a quarta questão, os alunos devem raciocinar e buscar por seus próprios meios para solucionar os problemas, que foram retirados dos recortes históricos, o objetivo é que alunos tenham autonomia para encontrar respostas.

A quinta questão, contém informações que foram geradas e adaptadas do problemas dos pontos, contendo opções: a) para fazer a divisão do prêmio, utilizando qualquer estratégia e neste caso pode ser as propostas por Fermat ou Pascal; a letra b) evidencia que eles possam dividir por outra estratégia de solução, que pode ser algo que eles mesmo saibam e a c) instiga-los a perceber que o jogo está empatado, logo o prêmio deveria ser igualmente dividido, ou seja, cada jogador poderia ter de volta suas 30 moedas e isto seria justo, pode se indagar.

Na sexta, os alunos podem se organizem em dupla e distribuir dados para que possam fazer o experimento de lançá-los e anotar os números que aparecem nas faces voltadas para cima. Outra opção e fazer eles analisarem na tabela construída no item a) para fazer as possibilidades de acordo com o espaço amostral dos resultados de Carol, Rafael e Sofia.

4.2. TEXTO II: UMA HISTÓRIA DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Diagrama Metodológico: Uma História da Teoria da Probabilidade



Fonte: Vasconcelos (2023).

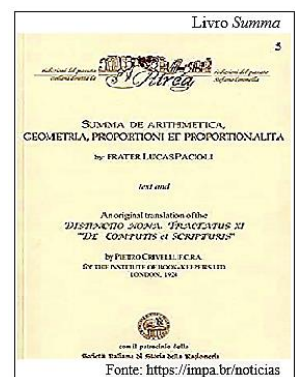
Este texto apresenta um *recorte histórico* proposto por Chaquiam (2022). Neste recorte em específico, foi Construído um texto sobre uma História da Probabilidade, que começou no final no século XIV e foi se desenvolvendo com a colaboração de matemáticos geniais até ser axiomatizada no século XX.

Texto II: UMA HISTÓRIA DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Veraciv Brabo de Vasconcelos
Miguel Chaquiam

Este recorte conta a surpreendente história desenvolvida por matemáticos que foram capazes de desenvolver uma ciência, que estabelece leis racionais para reger situações determinadas puramente pelo azar (EVES, 2011).

O *problema dos pontos*, que foi publicado em 1494, no livro *Summa de Aritmetica, Geometria, Proportione e Proportionalita* (Resumo de Aritmética, Geométrica, proporção e proporcionalidade) de Luca Pacioli (1445-1517), este foi o ponto inicial para origem da teoria da probabilidade.



Consistia na seguinte situação: “Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio?” (ARAGÃO, 2009, p. 86).

A partir de situações como essa, Os matemáticos italianos Luca Pacioli, Niccolo Fontana e Girolamo Cardano foram os primeiros a estudar as possibilidades de ocorrências de eventos aleatórios e a desenvolver métodos para resolver situações parecidas, revelando ser um modo útil de medir as possibilidades de que algo ocorra (WARSI, 2020), teoria que se expandiu para aplicações práticas em diversas áreas.

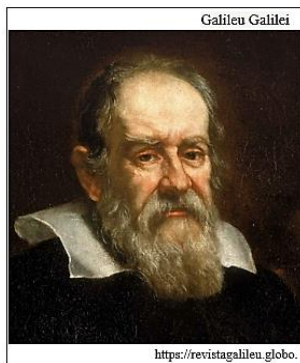
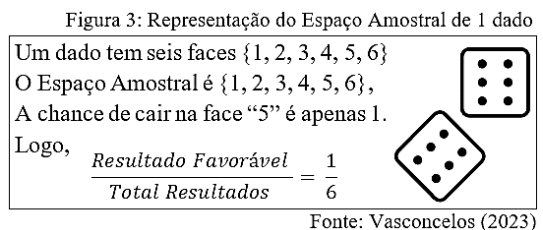
- **Luca Pacioli (1445-1517)** sugeriu que o prêmio fosse dividido “em proporção ao número de rodadas já vencidas por cada jogador” (WARSI, 2020, p. 164), visando “estabelecer uma regra fixa que permita a quantidade de aposta em um jogo quando, por qualquer motivo, é interrompido” (SECADES, 2000, p. 10, tradução nossa).

- **Niccolo Fontana (1499-1557)**, publicou sua solução, em seu trabalho *General Trattato* (Tratado Geral), sua proposta era fazer a divisão da aposta na proporção entre o

tamanho da vantagem e a duração do jogo, mas tal divisão falharia quando fosse muitas jogadas (WARSI, 2020).

- **Girolamo Cardano** (1501-1576), famoso por ser um apostador de jogos de azar que buscava matematicamente estratégias para ganhar em suas apostas, (MLODINOW, 2009), evidenciou que a solução de Pacioli e Fontana seria incorreta, pois só valeria para alguns casos particulares. Cardano escreveu o livro *Liber de Ludo Aleae* (Livro sobre os jogos de azar), este livro foi “primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza” (MLODINOW, 2009), publicado em 1663.

Além do mais, Cardano, propôs a lei do *espaço amostral*, que é à ideia de que os possíveis resultados de um processo aleatório podem ser compreendidos como pontos no espaço” (Mlodinow, 2009, p. 59), lei que formou a base da descrição matemática da incerteza, ele definiu como: “um processo aleatório com resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultados”. Por exemplo, segundo Mlodinow (2009) um dado tem 6 lados, esses seis resultados formam o espaço amostral, e a probabilidade de obter um desses seis lados é $\frac{1}{6}$.



Em concordância com os estudos de experimentos aleatórios, envolvendo jogos de azar, apresenta-se **Galileu Galilei** (1564-1642), que foi solicitado a solucionar tais problemas a pedido do grão-duque de Toscana, Ferdinando Dei Medici, que envio por meio de uma carta o seguinte problema, para ser respondido matematicamente: “Quando jogamos três dados, porque o número 10 aparece com mais frequência que o número 9?” (MLODINOW, 2009, p. 70-71).

Para atender ao pedido do grão-duque, Galileu escreveu um manual sobre jogos de azar, intitulado *Sopra le scoperte dei dadi* (Sobre os resultados dos jogos de dados), compreendido em dois sentidos: “primeiro como uma forma de entender as constantes frequências no processo de chances e, segundo, como um método de determinar situações presumíveis de fé” (CALABRIA; CAVALARI, 2013, p. 10).

De acordo com Zindel (2015) Galileu fez uma explicação razoavelmente simples para esta situação, pois observou que no lançamento dos três dados é necessário levar em consideração que há 216 possibilidades dos resultados. Mlodinow (2009, p. 72) explica que

Galileu apresentou uma solução utilizando o seguinte princípio “a probabilidade de um evento depende do número de maneiras pelas quais pode ocorrer” o que não se tratava de uma explicação diferente, mas de como calcular tal problema, pois o número de maneiras de como um resultado pode acontecer é ponto fundamental para determinar sua probabilidade.

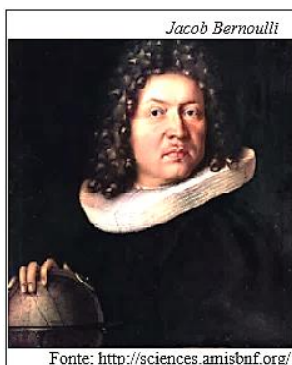
Contudo Galileu parece não ter se importado com tal efeito, pois, “Ele não levou seu trabalho sobre a aleatoriedade além do problema dos dados, e afirmou, no primeiro parágrafo do trabalho, que estava escrevendo sobre esse jogo somente porque havia recebido “a ordem de fazê-lo”” (MLODINOW, 2009, p. 72).

Em meados do século XVII, a Teoria da Probabilidade, foi formalmente considerada de fato, através da publicação do Tratado: “*De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Raciocínio Relacionado aos Jogos dos Dados), do matemático **Christian Huygens** (1629-1695), que ficou sabendo que os matemáticos Franceses **Blaise Pascal** (1623-1662) e **Pierre de Fermat** (1601-1665), tinham trocados cartas contendo as soluções para o *problema dos pontos*, enviadas pelo Chevalier de Méré, isto foi considerado fundamental para tornar pública a teoria da probabilidade.



- Pascal usou o Triângulo Aritmético, apresentando as probabilidades de cada jogador ganhar em diferentes pontos e dividir as apostas de forma justa e Fermat utilizou combinações das possíveis alternativas de ganhar ou perder e assim formou 6 arranjos completos de ordem 4. Dando início aos primeiros elementos da ciência das probabilidades.

Segundo Laplace (2010) Pascal e Fermat forneceram contribuições, como princípios e métodos para submeter a probabilidade de um evento ocorrer utilizando cálculo, e enfatiza que ninguém antes deles resolvera questões desse gênero.



Jacob Bernoulli (1654-1705) “reconheceu a ampla aplicabilidade das probabilidades” (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 214) e dedicou-se a testar na prática o que ocorria em cada situação de um longo teste, então propôs a determinação de probabilidades a *posteriori* por observação dos resultados obtidos em várias instâncias semelhantes, visando quantificar o risco em situações em que era impossível enumerar todas as possibilidades

e calcular o número exato dessas observações (KATZ, 2010).

Segundo Aragão (2009, p. 88) a partir das observações e aplicações de Jacob Bernoulli, inicia-se um “processo de abstração das possibilidades fora das limitações dos jogos e dos

seguros; á ele é atribuído a primeira sistematização de uma teoria das probabilidades, tendo em vista suas aplicações práticas”, ele pretendia determinar um tratamento formal para os casos de eventos que não tinham a mesma probabilidade de ocorrer.

Esses resultados, deram origem ao **Teorema Áureo**, conhecido também com **Lei dos Grandes Números**, permitindo a Bernoulli conseguir a prova científica que o levou a experiência de quantificar a medida da incerteza (LAPLACE, 2010, p. 214) e assim apresentou “a teoria geral das combinações e das sequências, aplicando-a a várias questões difíceis relativas aos acasos”. Ele foi considerado o primeiro matemático a apresentar um Teorema nos estudos da teoria da probabilidade e levou 20 anos para provar esta lei, que foi publicada no livro *Ars Conjectandi* (A Arte da Conjectura) lançado em 1713.



A Lei dos Grandes Números estabelece a seguinte definição: se “ p é a probabilidade de um evento, se m é o número de ocorrências do evento em n experiências, se ε é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se P é a probabilidade de que a desigualdade $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$ esteja satisfeita, então $\lim_{n \rightarrow \infty} P = 1$ ” (BOYER, 1974, p. 309), definição que fundamentou a Probabilidade Frequentista, usada em experimentos aleatórios, como jogar dados, lançar moeda, realizar sorteios, na condição que seja realizado um número suficientemente grande de tentativas para que a probabilidade estimada seja precisa.

A definição mais atual da probabilidade frequentista é abordada no site clubes.obmep.org.br/blog (2022) que considera um experimento aleatório como espaço amostral Ω . Deve considerar que um experimento seja repetido nas mesmas condições por n tentativas independentes, sendo $n > 0$, e nesta condição um evento E ocorra m vezes, sendo $m \leq n$. Então, a frequência relativa de E é denotada como $f_r(E)$ e definida como:

$$f_r(E) = \frac{m}{n} \quad \longrightarrow \quad \text{Sendo que } 0 \leq m \leq n, \text{ então } 0 \leq f_r(E) \leq 1$$

Katz (2010) ressalta que a contribuição que Jacob Bernoulli deu a teoria da probabilidade é digno de menção. Segundo Mlodinow (2009, p. 105) o teorema trata de como os resultados refletem as probabilidades subjacentes quando se faz muitas jogadas observando o que ocorre no limite de um número arbitrariamente grande de jogadas repetidas, observações que Jacob Bernoulli testou com diversas situações, como por exemplo, uma urna com pedras coloridas:

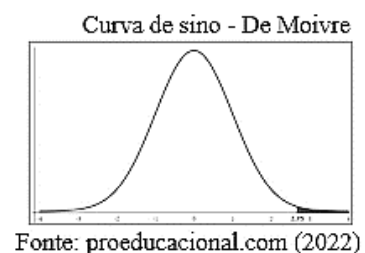
Imaginem uma urna cheia contendo 3 mil pedrinhas brancas e 2 mil pretas, uma razão de 60% de brancas contra 40% de pretas. Então, com que precisão devemos esperar que a proporção de pedrinhas brancas retiradas se aproxime de 60%, e com qual probabilidade?”.

Segundo Mlodinow (2009) essa situação foi submetida a seguinte condição:

- Retira-se uma pedrinha da urna, “com reposição”; para não alterar a proporção 3: 2;
- Deve-se identificar a probabilidade a priori de sair uma pedrinha branca.

Abraham De Moivre (1667-1754) contribuiu com o desenvolvimento da teoria da probabilidade, publicando livros como: *De Mensura sortis* (Sobre as Medidas das Possibilidades), *Miscellanea analytica* (Miscelânea de Análise) e *The Doctrine of Chances* (Doutrina das chances) (BOYER, 1974). Suas obras foram consideradas um avanço na história da probabilidade, devido as regras matemáticas que estavam evoluindo, permitindo que De Moivre apresentasse regras gerais e as aplicações detalhadas dessas regras (KATZ, 2010).

Segundo Warsi (2020) De Moivre analisou que a distribuição binomial, introduzida por Jacob Bernoulli, contendo situações como: **sucesso e fracasso**. Tinham dois resultados igualmente prováveis, ele percebeu que esses resultados binomiais se aglomeravam ao redor de uma média, conforme mais dados eram coletados, decidiu representá-los “criando assim uma curva de sino para distribuição binomial” (WARSI, 2020, p. 193).



Para Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 221) a *curva da frequência normal* era “como uma aproximação para distribuições binomiais, usando essa ideia para melhorar a estimativa de Bernoulli quanto ao número de observações necessárias para se tirar conclusões precisas”.



Pierre-Simon Laplace (1749-1827), estudou profundamente as informações sobre os eventos e situações que envolviam a teoria das probabilidades, estendendo-a “à ciência e introduziu suas ferramentas matemáticas para prever a probabilidade de muitos incidentes e até mesmo de fenômenos naturais [...] além disso ela é usada em outros campos, como: psicologia, economia, engenharia e esporte” (WARSI, 2020, p. 165), e a ele é atribuído também sua aplicação na Estatística.

Em 1812, Pierre-Simon Laplace publicou o livro *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades), abordando temas como jogos de azar, probabilidade da causa, seguro e demografia (GILLISPIE, 2007, p. 1527). Essa obra “foi o primeiro estudo em larga escala inteiramente dedicado a uma nova especialidade”, a Teoria da Probabilidade.

Laplace foi além do cálculo da probabilidade, explorando as propriedades da probabilidade, caracterizando-a “como um ramo do conhecimento exigido pelas limitações da inteligência humana” (Ibid., 2007 p. 1527), buscando aplicar métodos a eventos práticos, formulando e reformulando problemas dessa natureza.

Em 1814, publicou o livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades) tendo uma linguagem mais comum ao entendimento matemático do que *Théorie analytique* (GILLISPIE, 2007, p. 1532), mostrando a “importância que a probabilidade, a estatística e a análise estocástica foram assumindo mais e mais na ciência, nas ciências sociais e na filosofia da ciência”.

Laplace defendia que a maioria dos casos demandava problemas que envolvia probabilidade. Segundo Gillispie (2007, p. 1426) este livro “sem dúvida teve vida mais longa e, quase certamente, um número maior de leitores do que qualquer outro texto” feito por Laplace, pois,

Quase todos os nossos conhecimentos são apenas prováveis; e no pequeno número de coisas que podemos saber com certeza, mesmo nas próprias ciências matemáticas, os principais meios para se chegar à verdade – a indução e a analogia – são fundados nas probabilidades (LAPLACE, 2010, p. 41).

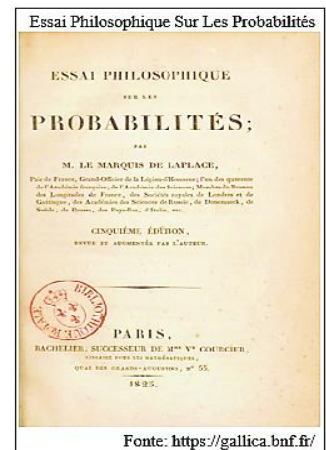
Dos muitos fenômenos que estudou, Laplace concluiu que “a probabilidade se deve em parte a nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos” (LAPLACE, 2010, p. 46), e de suas análises dos possíveis resultados das apostas nos jogos de azar, definiu que “quando todos os casos são favoráveis a um evento, sua probabilidade se transforma em certeza, e sua expressão torna-se igual à unidade” (LAPLACE, 2010, p. 46).

Laplace (2010), organizou a *definição clássica da probabilidade*, como sendo o *número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis*, aplicados a experimentos finitos e igualmente possíveis (equiprováveis), organizada na seguinte forma:

$$Probabilidade = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Junqueira (2014), destaca que a probabilidade de ocorrência de um evento é dada por: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, onde: $P(A)$ = probabilidade do evento; (A) = nº de elementos do evento e (S) = nº de elementos do espaço amostral. Com $0 \leq P(A) \leq 1$, que devem satisfazer as Propriedades:

- i. $P(S) = 1$
- ii. $P(EA) \geq 0$, para todo $A \subset S$



Fonte: <https://gallica.bnf.fr/>

iii. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Laplace (2010, p. 49) explica que “A teoria das probabilidades se relaciona a considerações tão delicadas que não é surpreendente que, a partir dos mesmos dados, duas pessoas encontrem resultados diferentes, sobretudo em questões muito complexas”. Para Rotunno (2007) as obras e princípios que Laplace atribuiu a Teoria da Probabilidade, são definidos como teoria clássica da probabilidade e “Pode-se dizer que os trabalhos de Laplace podem ser considerados como o final da terceira etapa na evolução da teoria matemática da probabilidade” (ROTUNNO, 2007, p. 21).

No século XIX, os personagens que colaboram com a teoria da probabilidade, tinham a seu favor um acúmulo de conhecimentos teóricos que foram desenvolvidos no século XVIII, favorecendo um avanço importantíssimo tanto em sua formulação teórica quanto em sua aplicação (ROTUNNO, 2007) alteando a probabilidade a um determinado ordenamento das relações dos seus conhecimentos.

O estudo da Teoria da Probabilidade, teve um nível de crescimento exponencial no século XX (ALMEIDA, 2005), com a contribuição de **Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)**, que defendeu que “A teoria da probabilidade, como disciplina matemática, pode e deve ser desenvolvida a partir de axiomas exatamente da mesma forma que a Geometria e a Álgebra” (KOLMOGOROV, 1956, p. 01, tradução nossa).



Fonte: <https://timenote.info>

Em 1933, Kolmogorov cumpre seu propósito com êxito e publica o livro *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Fundamentos da Teoria da Probabilidade*), apresentando a forma axiomática da teoria da probabilidade utilizando de axiomas já existentes e enfatizando que seu “objetivo é alcançar a máxima simplicidade tanto no sistema de axiomas quanto no desenvolvimento posterior da teoria” (KOLMOGOROV, 1956, p. 01, tradução nossa).

Axiomas:

“Seja E uma coleção de elementos $\xi, \eta, \zeta, \dots$, que chamaremos de *eventos elementares*, e $\mathfrak{F}$ um conjunto de subconjuntos de E ; os elementos do conjunto $\mathfrak{F}$ serão chamados de eventos aleatórios”, são propriedades que Kolmogorov (1956, p. 16, tradução nossa) definiu, como:

I. $\mathfrak{F}$ é um campo de conjuntos.

II. $\mathfrak{F}$ contém o conjunto E .

Entretanto, as três propriedades que ficaram conhecidas como axiomas de Kolmogorov (1956) do livro *Fundamentos da Teoria da Probabilidade*, são:

III. A cada conjunto A em $\mathfrak{S}$ é atribuído um número real não negativo $(P)A$. Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A .

IV. $P(E)$ é igual a 1.

V. Se A e B não têm elemento em comum, então: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Axiomas que Kolmogorov (1956) estabeleceu fazendo uma comparação da teoria dos conjuntos com a teoria da probabilidade. A utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo científico (ROTUNNO, 2007) em qualquer ciência.

Segundo Avelar (2018) os conceitos que foram sendo atribuídos anteriormente a probabilidade, acabaram não sendo suficientes para embasar uma formulação matemática rigorosa, foi a partir da ideia que Kolmogorov, por meio de seus estudos e experiências e considerando que a probabilidade precisava de uma fundamentação, que decidiu “estabelece uma definição axiomática de probabilidade, em que os conceitos anteriores se tornam casos particulares” (AVELAR, 2018, p. 28).

Isto foi muito importante, pois permitiu que Kolmogorov definisse os axiomas que fundamentaram a teoria da probabilidade de forma rigorosa e matemática, estabelecendo que a teoria da probabilidade se tornasse uma disciplina matemática bem fundamentada, com suas próprias leis e regras.

Sugestões de Atividades do Texto II

1ª) Análise e explique as diferentes probabilidades mencionadas no texto, destacando como elas contribuíram para o desenvolvimento da teoria da probabilidade. Comente também como essas probabilidades são reconhecidas atualmente e de que maneira hoje, e como elas influenciaram a forma como a teoria da probabilidade é entendida e aplicada em diversos contextos.

2ª) Suponha que você esteja participando de um jogo com dois dados justos e idênticos, e queira determinar a probabilidade de obter a soma de 7 resultados. Utilize seu raciocínio e criatividade para calcular os resultados, explorando mais de uma abordagem de probabilidades. Análise e compare as semelhança e diferenças entre as soluções obtidas.

Observação: Represente o espaço amostral completo do lançamento de dois dados em uma tabela.

3ª) Sabendo que no lançamento de 3 dados o espaço amostral é 216, conforme Galilei apresentou no texto. Análise e utilize sua melhor estratégias para fazer os cálculos e responda os seguintes itens;

- a) Represente o espaço amostral completo do lançamento de três dados em uma tabela.
- d) Forme as 25 possibilidades da soma igual a 9 e as 27 possibilidades da soma igual a 10, que Galilei apresentou para o grão-duque.
- b) Calcule a probabilidade de cada uma dessas somas ocorrer,
- c) Calcule a probabilidade de se obter uma soma par neste espaço amostral,
- d) Qual é a probabilidade de se obter a soma de números primos?
- e) Qual é a probabilidade de se obter exatamente duas faces com o número 6 ao lançar 3 dados?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: Questão adaptada do livro do 8º ano (Matemática – Bianchini, 2007, p. 88)

4ª) - Questão 39: Sortear uma letra de um texto qualquer é um experimento aleatório? Porque, identifique sua resposta de acordo com o texto II.

5ª) - Questão 40: Em uma urna, há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Se retiramos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela? Não tendo reposição da bola amarela. Qual é a probabilidade da segunda bola retirada ser preta?

6ª) - Questão 41: a professora vai sortear, ao acaso, um aluno entre os 40 alunos da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala. Qual é a probabilidade de ser sorteado um menino?

7ª) - Questão 43: Olhando para a classe, verifique quantos alunos há neste momento em sala de aula. Quantos são meninos? Qual é a probabilidade de que, ao sortear um aluno ao acaso, seja uma menina?

Nota Didática aos Professores

Na primeira questão os alunos devem investigar as diferentes probabilidades mencionadas no texto e explicar como elas contribuíram para o desenvolvimento da probabilidade. Mostrando que houver acertos, erros e maneiras distintas de solução, suas respostas devem contemplar um pouco de cada personagem que contribui ao longo dos séculos.

Na segunda questão devem calcular a probabilidade utilizando diferentes abordagens como a clássica e a frequencista e comparar as soluções realizadas por ambas. Na terceira

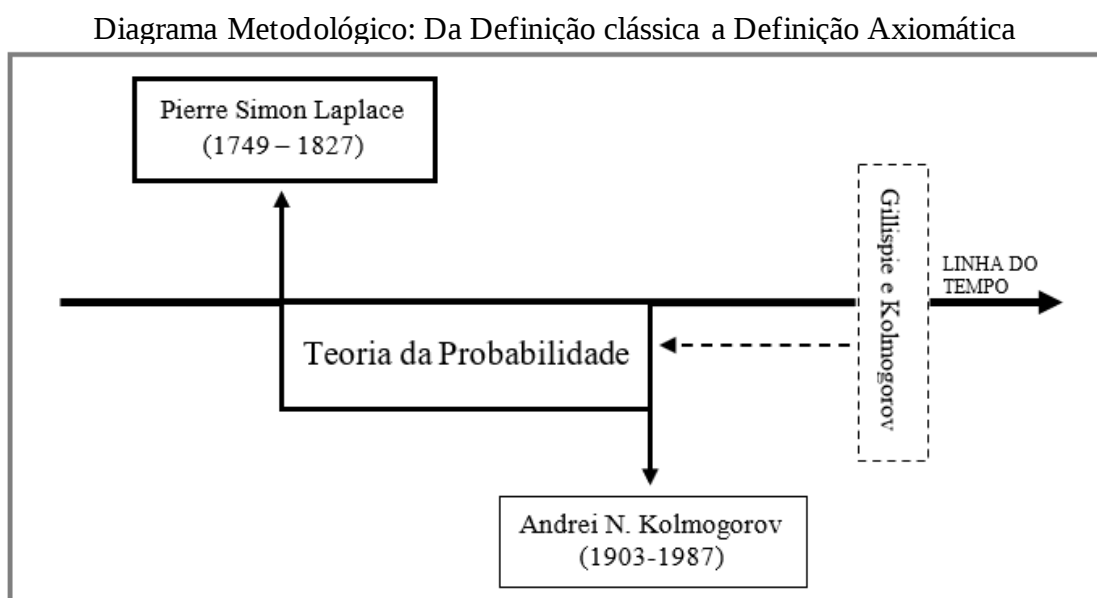
questão devem primeiramente representar o espaço amostral em uma tabela, para melhor visualização e calcular as probabilidades determinadas nas alternativas.

Na quarta, os alunos podem responder de acordo com seu entendimento sobre experimento aleatório, de acordo com isto, deve ficar esclarecido para eles que o processo de seleção de uma letra é imprevisível e cada letra pode ter a mesma chance de ser escolhida, pois não há indicações de que a escolha da letra seja influenciada por algum critério, o que confirma a aleatoriedade desse experimento.

Na quinta, sexta e sétima questão os alunos devem interpretar e analisar informações essenciais que definem o uso do cálculo das probabilidades. realizada através de experimento em sala de aula.

4.3. TEXTO III: DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA À DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA

Este texto apresenta um *recorte histórico* proposto por Chaquiam (2022). Neste recorte em específico, foi Construído um texto sobre a Probabilidade Clássica, definida pelo matemático Laplace até sua Axiomatização definida pelo matemático Kolmogorov, ou seja, uma história da Probabilidade Clássica à Probabilidade Moderna.



Fonte: Vasconcelos (2023).

Texto III: DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA A DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA

Veraciv Brabo de Vasconcelos
Miguel Chaquiam

No início do século XIX, o matemático Pierre Simon Laplace (1749-1827), foi responsável pela primeira definição conhecida como *Definição clássica da Probabilidade*, foi por meio de seus trabalhos, que os jogos de azar, ganharam um reconhecimento, sendo analisado por meio de cálculo probabilísticos, em diferentes campos de estudos e assim conseguiu introduzir a teoria da probabilidade no mundo da matemática.



www.catalunyavanguardista.com

Para Laplace, “a ciência do azar ou probabilidade” (LAPLACE, 1974, p. 114) era uma das teorias matemáticas mais delicadas e engenhosas, resultante da debilidade da mente humana. Em seus estudos iniciais, ele definiu com clareza o sentido das palavras *acaso* e *probabilidade*. Em relação à primeira, ele afirmou que não possui realidade em si, quando nela não há nada de regular ou quando não se conhece as causas que a acarretam. Quanto a segunda, ele definiu como um conjunto de objeções à probabilidade, como aquelas que não são possíveis quantificar, como esperança, medos e estados mentais (GILLISPIE, 2007).

A probabilidade está ligada a um espaço amostral

Nesse contexto, duas relações eram pertinentes à Laplace, como “a tarefa de calcular a probabilidade de eventos complexos, compostos de eventos elementares cujas respectivas possibilidades não eram conhecidas” e “determinar numericamente a influência que acontecimentos passados exerciam na probabilidade de acontecimentos futuros” (GILLISPIE, 2007, p. 1461). Para Laplace, com relações bem definidas, seria possível elaborar uma lei que pudesse revelar as causas desses acontecimentos.

Gillispie (2007) apresenta uma análise da necessidade de Laplace em aprimorar sua epistemologia, para distinguir a abordagem para determinar as possibilidades de um evento, em duas condições: *A priori* e *A posteriori*, ele se dedicou a estudar cada aspecto relevante das condições para avançar com os estudos da probabilidade e observou que o conhecimento humano também era um dos fatores determinantes. Pois, “a situação do conhecimento entrava na determinação da probabilidade em dois níveis: no que sabemos sobre a possibilidade absoluta dos eventos e em nosso desconhecimento das leis que sempre parecem produzir os eventos fortuitos” (GILLISPIE, 2007, p. 1462).

E foi desses conhecimentos que Laplace publicou, em 23 de Março de 1812, o livro *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades), seu primeiro “estudo em larga escala inteiramente dedicado a uma nova especialidade, partindo de problemas antigos e amiúde triviais para áreas em que, até então, a quantificação fora inexistente ou quimérica” (GILLISPIE, 2007, p. 1527), trazendo os principais tipos de problemas já abordados por matemáticos geniais e trazendo novas ideias para aplicar a probabilidades, passando do cálculo da probabilidade para as propriedades da probabilidade. Este autor ressalta, que,

É lícito dizer que ele organizou o tema, reunindo os principais tipos de problemas da teoria do acaso já abordados por muitos matemáticos, inclusive ele mesmo, de maneira meio fortuita, e tornando a abordá-los em conjunto com problemas das novas áreas de aplicação na filosofia da ciência, na astronomia, na geodésia, na instrumentação, na teoria dos erros, nas estimativas populacionais E nos procedimentos de foros judiciais e órgãos eleitorais (GILLISPIE, 2007, p. 1526).

Nesta obra, Laplace concentrou os avanços conseguidos à época, marcando um patamar no desenvolvimento do cálculo das probabilidades. “Sua contribuição é tão forte que alguns aspectos “clássicos” do conceito de probabilidade tendem a ficar associados ao seu nome” (ALMEIDA, 2005, p.14-15). Pedro Leite de Santana⁹ afirma que Laplace foi “um genial homem da ciência do Século das Luzes, ainda pouco conhecido do público brasileiro” (SANTANA, 2010, p. 10).

Gillispie (2007) destaca que Laplace organizou os princípios gerais da probabilidade, incluindo a definição, a regra da multiplicação, as probabilidades de eventos independentes, o teorema sobre a probabilidade das causas e também analisou a distinção entre a expectativa matemática e a expectativa moral, fornecendo com seu estudo uma “caracterização da probabilidade como um ramo do conhecimento exigido pelas limitações da inteligência humana, e que servia para corrigir parcialmente suas deficiências” (GILLISPIE, 2007, p. 1527).

De acordo com Katz (2010) Laplace utilizou a definição proposta por Cardano, ou seja, “a razão do número de casos favoráveis e o número de casos possíveis”, incluindo também a demonstração do teorema do limite central e sua aplicação à questão das inclinações das órbitas dos cometas. Laplace sugeriu que “era de opinião que a teoria das probabilidades podia vir a ter implicações nas ciências sociais, do mesmo modo que o cálculo era o maior instrumento de matematização das ciências físicas” (KATZ, 2010, p. 979).

De diversos problemas que Laplace formulou, reformulou e elaborou, Gillispie (2007) cita situações como problemas clássicos de probabilidade direta, tais como analisar situações de retirar números pares ou ímpares, retirar determinada cor de bola, ordem sequencial na

⁹ tradutor do livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités*

retirada de bolas numeradas, divisão de prêmio, derrota ou vitória em jogos regulamentares. Berlingoff e Gouvêa (2008) enfatizam que o livro *Teoria Analítica da Probabilidade* era,

Um *tour de force* enciclopédico que reunia tudo o que ele e os outros tinham feito quanto à probabilidade e estatística até então. Era realmente uma obra mestra, mas seu estilo técnico, denso, tomava muito dela inacessível a todos, exceto os leitores mais determinados e matematicamente sofisticados (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 215).

Diante desta situação, Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 217) enfatizam que Laplace decidiu escrever um livro que tornasse suas ideias mais acessíveis a um público maior, então em 14 de novembro de 1814, publicou o livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre as Probabilidade), neste livro Laplace conseguiu abranger um número maior de leitores, pela clareza ao expor o tema, elevando-o ao sucesso, pois nele consta a “importância que a probabilidade, a estatística e a análise estocástica foram assumindo mais e mais na ciência, nas ciências sociais e na filosofia da ciência”.

Laplace (2010) organizar exemplos práticos que satisfizessem as suas ideias, dos muitos fenômenos que estudou e concluiu que “a probabilidade se deve em parte a nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos” (LAPLACE, 2010, p. 46) e criou uma fórmula para calcular a probabilidade, baseada na regra posta por Cardano para os jogos de azar, segundo esta regra, “quando todos os casos são favoráveis a um evento, sua probabilidade se transforma em certeza, e sua expressão torna-se igual à unidade” (LAPLACE, 2010, p. 46).

Laplace (2010), organizou a *definição clássica da probabilidade*, como sendo o *número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis*, aplicados a experimentos finitos e igualmente possíveis (equiprováveis), organizada na seguinte forma:

$$Probabilidade = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Em Junqueira (2014), destaca-se, a probabilidade de ocorrência de um evento dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} P(A) = \text{probabilidade do evento;} \\ (A) = \text{nº de elementos do evento;} \\ (S) = \text{nº de elementos do espaço amostral.} \end{array}$$

Com $0 \leq P(A) \leq 1$, que devem satisfazer as Propriedades:

- i. $P(S) = 1$
- ii. $P(EA) \geq 0$, para todo $A \subset S$
- iii. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Laplace (2010), ressalta que para organizar as ideias definiu dez *Princípios Gerais*, considerados fundamentais para o Teoria Clássica da Probabilidade, por permitirem que o uso da teoria da probabilidade pudesse ser aplicado em diversas áreas do conhecimento e “na

infinita variedade dessas combinações, várias delas se prestam com facilidade ao cálculo, enquanto outras exigem cálculos mais difíceis” (LAPLACE, 2010, p. 85).

De acordo com Rotunno (2007, p. 21) “Pode-se dizer que os trabalhos de Laplace podem ser considerados como o final da terceira etapa na evolução da teoria matemática da probabilidade”. Para Boyer (1974), a Teoria de Probabilidade deve mais a Laplace do que a qualquer outro matemático dessa história. Pois seus trabalhos são referências a leituras do tema, sem contar que “propicia grande ganho intelectual” (SANTANA, 2010, p. 20).

No século XX, o matemático Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), avançou com os estudos da Teoria da Probabilidade para um nível de crescimento exponencial, tornando-se um ramo importante da matemática (ALMEIDA, 2005). De acordo com O'Connor e Robertson (1999, tradução nossa), os matemáticos russos, desempenharam um papel fundamental nos estudos das áreas relacionadas ao cálculo de probabilidades e estatística. Eles formaram uma escola liderada principalmente por Kolmogorov, que se destacou por seus trabalhos na teoria da probabilidade.



<https://timenote.info>

Kolmogorov (1956, p. 01, tradução nossa) estabeleceu que “a teoria da probabilidade, como disciplina matemática, poderia e deveria ser desenvolvida a partir de axiomas exatamente da mesma forma que a Geometria e a Álgebra”. De acordo com Eugênio (2016, p. 26) foi “o esforço de diversos matemáticos em conseguir fazer a Probabilidade ter um lugar de destaque na Matemática formal, mais conhecida como Matemática pura”, ainda segundo este autor, esse esforço “rendeu o reconhecimento da Probabilidade enquanto função Matemática e convergência entre a teoria dos Conjuntos e a teoria da Medida, as quais até então nunca tinham tido diálogo com áreas da Matemática” (EUGÊNIO, 2016, p. 26).

Kolmogorov (1956) publicou o livro *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Fundamentos da Teoria da Probabilidade*) em 1933, apresentando a forma axiomática da teoria da probabilidade e mostrando sua aplicação a diversas áreas do conhecimento, estabelecendo “uma fundamentação teórica rigorosa e não se limita aos casos de eventos equiprováveis, pois ela pode ser aplicada a qualquer tipo de evento e/ou espaço amostral” (SALSA; MOREIRA, 2014, p. 18).

Nestas condições, Kolmogorov foi considerado o primeiro matemático a apresentar uma forma axiomática da probabilidade. Rotunno (2007) afirma que os axiomas de Kolmogorov,

Tornaram a Teoria das Probabilidades uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nesta área, sobretudo sob o aspecto teórico. A

utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo científico, seja nas ciências humanas ou nas políticas (ROTUNNO, 2007, p. 33).

Em Salsa e Moreira (2014) destaca-se uma notação atual das ideias de Kolmogorov. Primeiramente, ele estabeleceu propriedades que definiriam os axiomas como sendo: Seja ε um experimento aleatório e Ω um conjunto formado por todos os eventos elementares desse experimento, em seguida definiu: Seja A o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω , inclusive o próprio Ω (evento certo) e o conjunto vazio φ (evento impossível). Uma função P definida em A , que associa a cada evento de A um número no intervalo $[0,1]$, é chamada probabilidade do evento, isto é: $P : A \rightarrow [0,1]$ que deve satisfazer as seguintes condições, estabelecidas em Kolmogorov (1956, p. 02, tradução e adaptação nossa):

I - A cada conjunto A em Ω é atribuído um número real não negativo $(P)A$. Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A , ou seja, $P(A) \geq 0$

II - $P(\Omega) = 1$

III - Se A e B não têm elemento em comum, então: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Essa definição moderna que Kolmogorov atribuiu a teoria da probabilidade, baseada na teoria das medidas, considera experimentos em que os resultados possíveis podem ser infinitos e não necessariamente equiprováveis, pois com os Axiomas Kolmogorov definiu uma medida de certeza, mais ampla e flexível, pois pode ser aplicada a experimentos mais complexos. Em Historia de la Probabilidad ([2020], tradução nossa), ver-se que,

Dos três axiomas fundamentais de Kolmogorov, a maioria das propriedades fundamentais de probabilidade que conhecemos e manuseamos hoje são deduzidas. Além disso, esses axiomas têm a vantagem de serem consistentes, pois existem objetos reais que os satisfazem e, portanto, especificam a Matemática em nossas vidas (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 19, tradução nossa).

Entretanto, os axiomas definidos por Kolmogorov não invalidaram as definições da probabilidade clássica organizadas por Laplace. Em Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021, pp. 98-99) apresentaram as definições de Laplace usando os axiomas de Kolmogorov (1956), nas seguintes situações:

- Considerando o espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e a σ –álgebra discreta das partes de Ω . Nesse caso, o $\mathcal{F} = 2^\Omega$ mensurável será o conjunto de partes de Ω ;

- Definindo a função de probabilidade para qualquer evento A da seguinte maneira:

Para os n eventos elementares $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, associamos uma probabilidade $p_i = P(\{a_i\})$ que satisfaz as seguintes condições:

$$A - p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; \quad \text{e} \quad B - p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Para um evento qualquer $A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}\} \in \mathcal{F}$, definindo como

$$P(A) = P_{j_1} + P_{j_2} \dots + P_{j_k}.$$

Assim, o espaço de Probabilidade para esse caso seria $(\Omega, 2^\Omega, P)$.

Se no caso anterior temos a propriedade $p = P(\{a_1\}) = \dots = P(\{n\})$, diz-se que Ω é um espaço amostral finito equiprovável. Fazendo uso do item B, obtém-se que $p = \frac{1}{n}$. Assim, neste caso a definição clássica de Probabilidade torna-se:

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{número total de elementos de } \Omega}$$

De acordo com Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021), a definição clássica da probabilidade tem sido usada com sucesso para resolver muitos problemas por meios de técnicas de análise combinatória e de contagem. A história da matemática desempenha um papel importante na compreensão da evolução da probabilidade, desde os primeiros problemas e soluções, passando pela definição frequentista e clássica, até a modernização feita por Kolmogorov, que axiomatizou a probabilidade usando uma abordagem formal baseada em axiomas matemáticos.

De acordo com Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021), a definição clássica da probabilidade tem sido usada com sucesso para resolver muitos problemas por meios de técnicas de análise combinatória e de contagem. A história da matemática desempenha um papel importante na compreensão da evolução da probabilidade, desde os primeiros problemas e soluções, passando pela definição frequentista e clássica, até a modernização feita por Kolmogorov, que axiomatizou a probabilidade usando uma abordagem formal baseada em axiomas matemáticos.

Sugestões de Atividades do Texto III

1ª) Faça uma analogia entre a definição clássica e a definição moderna da probabilidade, e como elas podem ser utilizadas para ajudar a entender os conceitos relacionados a experimentos simples do cotidiano?

2ª) Explique a definição dada por Laplace para os termos “acaso” e “probabilidade” em seus estudos iniciais? Dê um exemplo matemático de cada um.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO: Questão adaptada do livro do 6º ano (Matemática – Bianchini, 2007, p. 205).

3ª) - Questão 1: Possibilidades e probabilidades

Hugo está jogando trilha com sua irmã. Para andar o número de casas necessárias e vencer o jogo na próxima rodada, ele precisa de uma soma de pelo menos 10 pontos ao lançar dois dados.

a) Represente o espaço amostral completo do lançamento de dois dados.

b) Destaque os pares, do espaço amostral, que satisfazem a condição da soma igual a 10 pontos ou maior que Hugo precisa para ganhar.

c) Qual é a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada?

d) Supondo que Hugo precise obter nos dados uma soma igual a 8 ou maior, a probabilidade de ele ganhar o jogo aumenta? Justifique sua resposta.

e) Se a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada fosse de 100%, quantas casas ele precisaria andar?



4ª) Em um jogo de cartas, um jogador precisa retirar duas cartas de um baralho completo, que tem 52 cartas. O jogador ganha se a soma dos valores das duas cartas retiradas for um número par. Qual é a probabilidade de o jogador ganhar?

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO: Questão adaptada do livro do 6º ano (Matemática – Bianchini, 2007, p. 271)

5ª) - Questão 1: utilizando probabilidade clássica responda as questões adaptadas.

A probabilidade das cores

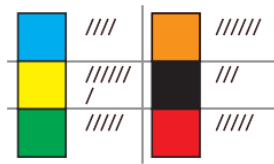
As irmãs Neusa e Nilza fizeram uma experiência de jogar um dado cúbico e anotar a cor que ficava na face superior para verificar a probabilidade das cores. Elas esperavam que a probabilidade de ficar na face superior fosse a mesma para todas as cores, isto é, $\frac{1}{6}$.

Enquanto uma delas jogava o dado, a outra anotava a cor da face superior e colocava em um saquinho uma ficha com essa cor. Depois de Nilza jogar o dado 30 vezes, Neusa verificou a frequência de cada cor, ou seja, quantas vezes cada cor ficou na face voltada para cima e organizou as informações, de acordo com suas anotações em uma tabela.



a) faça a anotação na tabela correspondentes a frequência de cada cor:

Tabela de frequências das cores do dado						
Cor	Azul	Amarela	Verde	Laranja	Preta	Vermelha
Frequência						



b) Calcule a probabilidade de cada cor do experimento que as irmãs fizeram.

c) Análise, calcule e explique: Se as irmãs dobrarem o resultado de cada cor, a probabilidade de cada uma continuar sendo a mesma?

Nota Didática aos Professores

A primeira questão refere-se a uma explicação da definição Clássica, a resposta deve evidenciar os ventos equiprováveis e a relação entre o número de eventos favoráveis e o número total de eventos possíveis e da definição moderna que é mais geral, se aplica a qualquer tipo de evento, sendo baseada na teoria da medida e em conceitos como a função de probabilidade, os alunos devem explorar informações do texto. A segunda questão, precisa-se entender o conceito de cada palavra e sua utilização nos eventos que seguem na teoria da probabilidade explorando as informações no texto.

A terceira questão é uma adaptação do livro didático, na opção a) precisa representar o espaço amostral, que são 36 pares, na b) deve-se destacar os pares que a somar for 10 o maior, neste caso há 6 pares, na c) deve-se aplicar a formula para calcular a probabilidade de Hugo vencer, na d) deve destacar os pares que soma 8 ou mais para que ele possa ganhar e a e) analisar a probabilidade de quantas casas ele precisa andar pra vencer o jogo com 100%, neste caso 1 ou duas devido ao resultado.

A quarta questão envolve um experimento com cartas de baralho, objetivo é separar em pares e ímpares, calcular a probabilidade de retirar duas cartas, multiplicar essas probabilidades e somar os valores das duas retiradas para obter a probabilidade esperada. A quinta questão, envolver preencher a tabela com os resultados da experiências que as irmãs fizeram e calcular a probabilidade de cada cor. É necessário analisar se a probabilidade de obter a mesma quantidade de cores em uma outra retirada se mantem e explicar por que isso ocorre.

5. ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES E ALUNOS

Relacionar a História da Matemática com Ensino de Probabilidade, pode não ser uma tarefa difícil, pois o contexto da origem do uso da probabilidade é uma história que interagi com exemplos com que são rotineiros, dinâmicos, agradáveis a todas as idades e mais interessante ainda por ser muito usado fora da escola, de acordo com Roque (2012) utilizar a História no Ensino de matemática, fortalece uma reinvenção do problema no qual os conceitos de um conteúdo ou objeto de conhecimento foram criados.

Sabe-se que algumas situações probabilísticas são difíceis e complexas de prever e interpretar. Por isso, o ensino de probabilidade pode e deve ser articulado com outros conceitos matemáticos, como álgebra, números decimais, fracionários e porcentagens, para ajudar a utilizar adequadamente a interpretação da fórmula e saber usar sua aplicação em situações diversas que envolvam cálculos.

5.1. AOS PROFESSORES

Recomenda-se, sobre o uso deste produto educacional, que consiste em utilizar a História da Matemática no Ensino de Probabilidade, com o propósito de tornar o conteúdo mais significativo para os alunos, além de proporcionar uma conexão entre a teoria e sua aplicação para uso em sala de aula.

É importante ressaltar que este produto pode ser adaptado de acordo com a realidade e as necessidades do local onde será aplicado, permitindo ao professor ter a flexibilidade de selecionar os aspectos históricos, ou seja, os recortes históricos do texto principal e os problemas matemáticos que melhor se adequam ao seu planejamento escolar e aos objetivos que pretendem na aprendizagem estabelecida.

No entanto, no decorrer de sua construção, percebe-se que algumas etapas podem ser úteis para utilizar efetivamente neste produto educacional, que vieram das percepções dos professores que participaram do questionário virtual para validação deste produto, tendo em vista que este “é um recorte rico e que deve ser apresentado em um tempo mais longo do que uma ou duas aulas. Sem perder de vista instigar o interesse dos alunos pelo conteúdo”.

- Familiarize-se com o texto principal: *Uma História da Probabilidade*. Estude o material fornecido e compreenda as diferentes teorias, conceitos e contribuições matemáticas

ao longo do tempo. Isso ajudará a contextualizar o ensino da probabilidade para aplicar em sala de aula.

- Adapte o material à sua realidade: considere as características e o conhecimento prévio dos alunos, faça adaptações das atividades e dos exemplos para que sejam relevantes e compreensíveis, de acordo com fatos que vivem em suas rotinas, de forma a estimular a aplicação da probabilidade.

- Crie atividades práticas, experimentos, jogos ou projetos que permitam aos seus alunos explorar e vivenciar os conceitos de probabilidade.

- Utilize recursos visuais, tecnológicos e manipuláveis para promover uma aprendizagem ativa e significativa, experimente jogos interativos, vídeo aulas, seminários, simulações práticas e reais, contação de história, (para textos muito longos) no sentido de materializar os pontos históricos em atividades prontas que possam ser aplicadas aos alunos

- Estimule o pensamento crítico dos seus alunos, incentive-os a refletir sobre as soluções encontradas, comparar diferentes abordagens, discutir as implicações da probabilidade em situações que fazem parte da sua rotina, promova o raciocínio lógico e a argumentação com a intenção de que possam até mesmo criar outros problemas na prática.

- Avalie o aprendizado, utilizando diferentes estratégias de avaliação para verificar o progresso dos seus alunos. Além de testes tradicionais, pode incluir projetos, apresentações, discussões em grupo, solicitar que criem problemas parecidos e envie a outros alunos para solucionarem.

- Procure, na medida do possível fazer uma conexão entre a história da probabilidade e o estudo da economia mundial, que envolve diversos elementos probabilísticos, como apostas, riscos, incertezas, previsões, tendências, desenvolvimento estatístico. Com essa sugestão é possível enriquecer o conhecimento dos alunos sobre os conceitos probabilísticos, fornecendo uma perspectiva de uso mais abrangente e prática.

- Estimule nos alunos apresentar a história, por meio de recursos e situações possíveis, como nos eventos que são propostos durante o ano letivo, faça com que os alunos busquem por diversos meios que venham auxiliá-los a fazer tais representações como teatro, dança, jogos.

Este produto educacional é uma ferramenta flexível e adaptável. Sinta-se à vontade para personalizar de acordo com as suas necessidades e a realidade da turma, do local e da região, buscando sempre tornar o ensino de probabilidade mais atraente, compreensível e aplicável aos alunos.

5.2. AOS ALUNOS

Este produto educacional foi elaborado para auxiliar o professor especialmente em suas aulas de probabilidade, utilizando a História da Matemática, com o objetivo de ajudar o aluno a compreender como a teoria da probabilidade se constitui e se desenvolvendo ao longo do tempo, pois “pra tudo houve um começo, que somente a História pode contar”.

Buscamos esclarecer alguns questionamentos da existência da probabilidade. Sabe-se que é um desafio estudar, aprender, saber recriar de fato uma história, para fazer você estudante, viver um pouco essa construção histórica, para mostrar quais foram os primeiros encaminhamentos que a humanidade necessitou para começar a usar probabilidade e assim responder perguntas do tipo “porque a matemática?” e “quem inventou matemática?”.

Mostrar que matemáticos geniais, de uma época, também erraram resolvendo problemas, com estes recortes possibilita apresentar ao estudante que nem tudo se acertar, mas é possível estudar, compreender e aprender, pois o erro sempre vai existir. Então estudante:

- Permita-se aprender a História da Matemática, você vai se surpreender com muitas descobertas, desafios, erros, soluções e muitas ideias.
- Conecte-se com os personagens que a História conta, conheça o quanto importante eles foram e contribuíram para o desenvolvimento da teoria da probabilidade, perceba que a matemática é uma ciência viva e cheia de possibilidades.
- Explore os problemas históricos, que muitas vezes parecem ser tão atuais.
- Desafie-se a aprender para resolver situações reais e complexas.
- Busquem exemplos práticos e situações de suas rotinas em que a probabilidade está presente, reflita sobre como a matemática pode ajudar a tomar decisões e entender melhor as incertezas que nos cercam
- Participe das atividades propostas pelo professor, ele estudou para proporcionar um meio melhor de aprender este conteúdo, esteja presente, participe ativamente contribua, dê sua opinião para melhorar este produto,
- Faça perguntas, quando não entender o assunto e se for preciso busque por respostas para que possa ajudar as dúvidas de outros colegas e assim você terá muito mais a ensinar do que a aprender. Lembre-se que a aprendizagem é um processo contínuo e as perguntas são fundamentais para ampliar seus conhecimentos.
- Tenha autonomia no processo de resolução dos problemas propostos e mesmo proponha problemas e soluções, seu conhecimento é muito válido em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Alfredo Betâmio de. **O Problema Epistemológico da Probabilidade e a contribuição de Karl Popper para o respectivo debate**. 2005. Universidade Nova Lisboa. Disponível em <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/36874/2/BETaMIODEALMEIDA.pdf>. Acesso em 2021.
- ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática**. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2009.
- AVELAR, Afonso Reis de. **Reflexões Sobre o Ensino de Probabilidade em Nível Básico e Resolução de Alguns de seus Problemas Clássicos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Brasília, 2018.
- BERLINGOFF, William P; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática Através dos Tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. Editora Edgard Blücher. São Paulo, 2008.
- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática - Bianchini**: manual do professor. 9. Edição. Coleção 4v. de 6º ao 9º ano. Editora Moderna, São Paulo, 2017.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. Editora da Universidade de São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. MEC, Brasília - DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: novembro de 2020.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p
- CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. In: **X Seminário Nacional de História da Matemática**. Campinas, 2013.
- CHAQUIAM, Miguel. **História e Matemática: um elo entre contextos, textos e atividades**. SBEM, Belém, Outubro 2022. 68p.
- CHAQUIAM, Miguel. **História e Matemática: um elo e quatro contextos**. Revista COCAR, n. 14, Edição Especial – Dossiê Tendências de Educação Matemática; Belém, 2022.
- CHAQUIAM, Miguel. História e Matemática: dos contextos às atividades. In: **Anais da X Bienal de matemática**, SBEM, SBEM-PA, Belém, 2022. 72p.
- CHAQUIAM, Miguel. Historia y Matemáticas Integradas a Través de un Diagrama Metodológico. In: **Revista Paradigma**, Vol. XLI, Nº Extra 1; Abril de 2020 / 197-211.
- CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio Temáticos: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.
- CHAQUIAM, Miguel. O Uso da História da Matemática e dos Conteúdos Matemáticos na Sala de Aula. In: **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo. 2016.

EUGÊNIO, Robson da Silva. O Letramento Probabilístico nos anos Finais do Ensino Fundamental. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática. Curitiba, Paraná, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. edição. Editora da Unicamp. Campinas, São Paulo. 2011

GADELHA, Augusto. **Notas de Aula Teoria de Probabilidade I**. Uma Pequena História da Probabilidade. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GILLISPIE, Charles Coulston. **Dicionário de Biografias Científicas**. Volume II. Tradutor: Carlos Almeida Pereira. Contraponto. Rio de Janeiro, 2007.

GNERI, Mario Antonio. **A Evolução Histórica do Conceito de Probabilidade**. IMECC, UNICAMP. <https://www.ime.unicamp.br/~veronica/ME203ME414/apostilaprob.pdf>. Acesso em 15/03/2023.

JUNQUEIRA, Ana Lucia Nogueira. **A Probabilidade que a História nos Conta**. In: XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Chiapas, México, 2015

JUNQUEIRA, Ana Lucia Nogueira. **A Probabilidade na Educação básica: um estudo sobre concepções de professores de matemática**. 2014, J94p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo, Universidade Anhanguera de São Paulo. UNIAN, 2014.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Tradução: Filipe Duarte. Segunda Edição. Lisboa, 2010

KOLMOGOROV, A. N. Foundations of Probability Theory. Tradução: Nathan Morrison. Segunda edição em língua inglesa. New Jersey: Chelsea Publishing Company, 1956.

LAPLACE, Pierre-Simon. **Ensaio Filosófico sobre as probabilidades**. Tradução: Pedro Leite de Santana. Ed. PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2010.

LIMA, E. T. D. Probabilidade em livros didáticos de Matemática dos anos Finais: diferentes concepções. In: **Zetetiké**, campinas, São Paulo, v. 28, n.1, p. 1-18, dez. 2020.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Tradução Diego Alfaro; Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2009.

O'CONNOR, J. J. and ROBERTSON, E. F. Last Update January 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kolmogorov/>. Acesso em 02/09/22.

QUEIROZ, Cileda; COUTINHO, Silva. **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?** In: REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.3, p.50-67, UFSC. São Paulo. 2007

RESTREPO B, Luis F; GONZÁLEZ L, Julián. **La Historia de la Probabilidad**. Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias. Universidad de Antioquia, vol. 16, núm. 1, marzo, 2003, pp. 83-87, Medellín, Colombia. ISSN: 0120-0690.
Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=295026121011>> Acesso em 20/02/2020.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

ROTUNNO, Sandra Aparecida Martins. **Estatística e Probabilidade: Um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SALSA, Ivone da Silva. MOREIRA, Jeanete Alves. **Probabilidade e Estatística** – 2. ed. – Natal: EDUFRRN, 2014.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **A Produção de Significações sobre Combinatória e Probabilidade numa Sala de Aula do 6º ano do Ensino Fundamental a Partir de uma Prática Problematicadora**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade São Francisco, Itatiba, 2015

SECADES, Marta García. **El Surgimiento De La Teoría De La Probabilidad**. Comunicación presentada a las VII Jornadas de ASEPUMA Universidad de Sevilla. Universidad Pablo de Olavide. Sevilla. 2000

TOMAZ, Priscilla Steffani Santos. **Gerolamo Cardano: Pai da Teoria da Probabilidade ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar?** in: Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. 2011.

VASCONCELOS, Veraciv Brabo de. **Recortes da História da Matemática para o Ensino de Probabilidade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

VIALI, Lorí. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. In: **Revista Brasileira de História da Matemática** - Vol. 8 nº 16 - pág. 143-153. ISSN 1519-955X, PUC-RS/UFRGS, 2008

VIDARTE, J.; CHACHAPOYAS, N.; CAVALARI, M. F. O paradoxo de Bertrand e os axiomas de Kolmogorov: uma proposta para a formação de professores. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 24, p. 84–103, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i24.5078. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5078>. Acesso em: set. 2022.

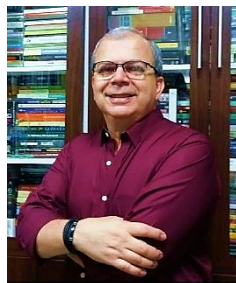
WARSI, Karl. **O Livro da Matemática**. Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. 1ª edição. Globo livros. Rio de Janeiro. 2020.

ZINDEL, Marcia Longen. **Tomada De Decisão E Risco: A Contribuição Dos Matemáticos E Estatísticos**. Estadística y Sociedad, México, p.05-30, n.5 Noviembre. 2018

Historia de la Probabilidad. Disponível em: https://www.academia.edu/25039875/HISTORIA_DE_LA_PROBABILIDAD>. Acesso em 10/02/2023

DADOS REFERENTES AOS AUTORES:

VERACIV BRABO DE VASCONCELOS - Mestranda em Ensino de Matemática pela Universidade do Estado do Pará. Especialização em Gestão Educacional e Docência do Ensino Superior pela Faculdade Integrada de Goiás. Especialização no Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Pará. Especialização no Ensino de Matemática para o Ensino Médio pela Universidade do Estado do Pará. Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1232-645X>. E-mail: veraciv466@gmail.com



MIGUEL CHAQUIAM - Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2012). Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001). Licenciado em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1984). Atualmente é professor da Universidade do Estado do Pará (UEPA/PA/Brasil) e pesquisador do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM/UEPA). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Computacional, Álgebra Linear; Estruturas Algébricas, Análise Real, História da Matemática, História das Ciências e Formação de Professores. Líder do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ). Tem interesse Matemática, Ensino de Matemática e História da Matemática. Mais informações no Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9356361533701895>. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1308-8710>. E-mail: miguelchaquiam@gmail.com.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem

