



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE
DO PARANÁ**
Campus Cornélio Procópio
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO**
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

DIEICON CRISTHIAN DA SILVA
DANIEL TREVISAN SANZOVO

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

**UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA
COM INTEGRAÇÃO DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES
NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE
MATEMÁTICA**

DIEICON CRISTHIAN DA SILVA
DANIEL TREVISAN SANZOVO

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

**UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA
COM INTEGRAÇÃO DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES
NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE
MATEMÁTICA**

**POTENTIALLY SIGNIFICANT TEACHING UNIT WITH
INTEGRATION OF MULTIPLE REPRESENTATIONS IN
THE INITIAL TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS**

Produção Técnica Educacional apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em Ensino
da Universidade Estadual do Norte do Paraná
– *Campus* Cornélio Procópio, como requisito
parcial à obtenção do título de Mestre em
Ensino.

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem
em Ciências Naturais e Matemática

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2024

Ficha catalográfica elaborada por Juliana Jacob de Andrade – Bibliotecária, CRB 9/1669, através
do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

S586u Silva, Dieicon Cristhian da
Unidade de ensino potencialmente significativa com
integração de múltiplas representações na formação
inicial de professores de matemática. / Dieicon
Cristhian da Silva; orientador Daniel Trevisan Sanzovo
- Cornélio Procópio, 2024.
61 p. :il.

Produção Técnica Educacional (Mestrado
Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do
Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da
Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2024.

1. Unidade de Ensino Potencialmente
Significativa. 2. Múltiplas Representações. 3.
Aprendizagem Matemática. I. Sanzovo, Daniel
Trevisan, orient. II. Título.

CDD: 372.7

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação esquemática do Mapa Conceitual	14
Figura 2: Cronograma dos encontros do curso de extensão.....	50
Figura 3: MC construído com os estudantes sobre Expressões Algébricas	51
Figura 4: Mapa Conceitual construído pelo participante no primeiro encontro.....	51
Figura 5: Fotos da implementação das situações problemas	53
Figura 6: Mapa Conceitual Final apresentado pelo participante.....	55

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Etapas associados de uma UEPS.....	19
Quadro 2: Estrutura geral das etapas da UEPS.....	22

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AS	Aprendizagem Significativa
MC	Mapas Conceituais
MR	Múltiplas Representações
UENP-CJ	Universidade Estadual do Norte do Paraná, <i>Campus Jacarezinho</i>
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO.....	8
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	10
2.1. FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E A APRENDIZAGEM DE LIMITE.....	10
2.2. BREVES CONCEITOS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA	12
2.2.1. MAPAS CONCEITUAIS	13
2.3. BREVES CONCEITOS DAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES	16
2.4. UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA	18
3. PRODUTO EDUCACIONAL	22
4. RELATO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL.....	50
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS.....	58

1. APRESENTAÇÃO

O presente trabalho expõe o Produto Educacional sistematizado mediante a pesquisa realizada, que originou a dissertação intitulada: *Aprendizagem Matemática de Limite: uma sequência de atividades com base nas Múltiplas Representações e nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas*, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino – Mestrado Profissional, da Universidade Estadual do Norte do Paraná¹.

Destacamos que este material foi aprovado por banca de defesa de mestrado e espelho dos conhecimentos adquiridos para responder a questão de investigação: *De que modo uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa integrada às Múltiplas Representações pode auxiliar a aprendizagem de Limites na formação inicial de licenciando em Matemática?*

Nesse sentido, estruturamos este Produto Educacional (PE) como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), apresentando-o como uma sequência de atividades a respeito de Limites, princípio básico do conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral I. Para tanto, integramos a pluralidade das Múltiplas Representações (MR) para promover uma relação substantiva do conteúdo e os modos de expressá-lo por meio de representações.

Este estudo contou com a participação de estudantes do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática que ainda não haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A escolha desses participantes teve como objetivo observar os conceitos prévios deles sobre Função e, por meio da sistematização proposta, ampliar seus conhecimentos e alinhá-los às MR.

A adoção do ambiente natural para esse estudo qualitativo aconteceu em uma Universidade pública do estado do Paraná. E destacamos que este material é passível de adaptação de acordo com a situação de ensino e suas particularidades.

O objetivo primordial deste PE é de apresentar uma nova Unidade de Ensino Potencialmente Significativa integralizada as Múltiplas Representações que proporcione um ensino significativo de Limites a licenciandos em Matemática.

¹ Detalhes da fundamentação teórica e metodológica da proposta, bem como a análise de dados de implementação do curso podem ser consultados na dissertação de mestrado que acompanha este produto educacional, com acesso livre e gratuito pela página do Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEN) da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), Campus Cornélio Procópio.

Com essa finalidade, estruturamos e adaptamos a unidade de ensino de acordo com a proposta de Moreira (2011b), em que estabelece oito etapas a serem desenvolvidas. Neste sentido, definimos as MR e suas respectivas funções pedagógicas (Ainsworth, 2006) como potencializadores do processo de diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

O desenvolvimento da UEPS reconhece e considera as características cognitivas dos alunos, promovendo a interdisciplinaridade e a contextualização da temática, o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais e, principalmente, na construção de significados. E para além disso, a sequência de atividades entrelaça sua organização e o conceito de Limite com as MR, inovando sua estruturação por meio das diversas maneiras de representar o objeto matemático.

Mediante a integração das MR na UEPS evidenciamos o diferencial do PE gerado em relação a outros já desenvolvidos na área de Ensino, visto que essa abordagem sobressai no aspecto de incorporar o conceito de Limite com as representações que ele admite e aplicá-lo em situações problemas, constituindo um vínculo claro entre a teoria e sua perspectiva no mundo real, potencializando a atribuição de significado pelo estudante.

Apresentamos no próximo tópico uma síntese do referencial teórico que embasou o delineamento deste PE.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E A APRENDIZAGEM DE LIMITE

Desde da consolidação, no século XVII, do Cálculo Diferencial mediante a Newton e Leibniz, este integra uma linguagem eminente do paradigma científico, análoga a um objeto substancial ao pensamento.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) tem o intuito de preestabelecer dois objetivos primários para o ensino e a aprendizagem. O primeiro deles compõe em integrar o estudante ao processo de cognição de modo ordenado, sistematizado e flexível. Já o segundo visa conceder ao discente subsídios a fim de dispor autonomia na resolução de problemas em situações concretas, recorrendo aos princípios e técnicas do CDI (Lachini, 2001).

O componente de CDI presente na grade curricular na formação inicial de professores salienta a relevância para o desenvolvimento da linguagem Matemática, sobrepondo habilidades essenciais, além de integrar uma compreensão dos conceitos, mediada por uma formação estruturada e sólida, que também propicia aos estudantes aprender e posteriormente ensinar de forma efetiva e clara os conteúdos da Matemática (Nasser, 2007).

Por sua vez, o Conselho Nacional de Educação (CNE) tem co,o papel primordial redigir as Diretrizes Curriculares da Educação Nacional, assim como os pressupostos que fundamentam os cursos de formação de professores. Nesse sentido, o Parecer CNE/CES 1.302/2001 ampara a Licenciatura Matemática apresentando as competências e habilidades a serem desenvolvidas ao longo da formação, além dos conteúdos curriculares mínimos, afirmando que:

Os conteúdos descritos a seguir, comuns a todos os cursos de Licenciatura, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; Geometria Analítica (Brasil, 2002, p. 5-6).

Por meio da introdução de conceitos como Limites, Derivadas, Integrais e Séries de Potência no processo de ensino, os futuros docentes podem desenvolver competências para a compreensão e aplicação desses conceitos em diferentes contextos, tais como, por exemplo, a modelagem de problemas de otimização, a

exploração de problemas reais, a utilização de tecnologias educacionais, a descrição de fenômenos físicos e a resolução de equações diferenciais, visando incorporá-los em sua aprendizagem, dentre outros.

Com relação ao ensino de Limite, este perpassa desafios e inquietações na Educação Matemática, visto que é apresentado aos estudantes de modo abstrato e intangível a sua realidade, com uma visão academicista, não contribuindo para uma formação autônoma (D'Ambrosio, 2005).

Ao ministrar a temática de Limite, a prática do professor se limita a apresentar o conteúdo e expor a maneira de resolver aos problemas e solicitar aos discentes que solucionem numerosos exemplares com o mesmo método elucidado por ele, não potencializando sua aprendizagem, isto é:

Nessa visão de ensino o aluno recebe instrução passivamente e imita os passos do professor na resolução de problemas ligeiramente diferentes dos exemplos. Predomina o sucesso por memória e repetição (D'Ambrósio, 1993, p. 38).

Evidenciamos, também, as dificuldades a respeito da compreensão dos conceitos de CDI, como enfatizado nos estudos de Vinner (1989), Tall (1991), Meyer (2003), em virtude da abstração de seus conceitos.

Vinner (1989), em seus estudos, enfatiza o esforço dos estudantes em lidar com o conceito de Limite, dado que a abordagem formal e rigorosa dessa temática, distam da noção intuitiva inicial, constituindo obstáculos na compreensão. Segundo ele, essa transição entre intuição e abstração exige um ajuste cognitivo significativo no processo de aprendizagem.

Nessa perspectiva, Tall (1991) expande a discussão sobre a dificuldade cognitiva na aprendizagem de Limite. Segundo ele, a passagem do pensamento concreto para o simbólico e/ou abstrato necessita de compreensão convergente e divergente de conceitos, pois a mudança do paradigma cognitivo envolve a capacidade de pensar em termos abstratos e simbolicamente.

A seguir, explanamos sobre a teoria da Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel (1968), e após, uma breve apresentação sobre os Mapas Conceituais.

2.2. BREVES CONCEITOS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

David Ausubel (1968), um psicólogo e educador norte-americano reconhecido pelas colaborações na área da psicologia da aprendizagem, publicou, no ano de 1968, o livro '*The psychology of meaningful verbal learning*', em que apresentou uma teoria da aprendizagem no campo da educação.

A teoria da Aprendizagem Significativa (AS) subjaz da vertente construtivista, visto que o aprendiz é capaz de construir significados, reelaborá-los e organizá-los em relação à sua realidade e, principalmente, no seu processo de aprendizagem.

Ao ingressarem nos ambientes escolares, os alunos dispõem de concepções consideráveis e organizadas na sua estrutura cognitiva, quer dizer, noções ricas em recursos derivados de suas vivências e experiências, ou até mesmo, resquícios de aprendizagens informais. Ao relacionar essas noções de forma *substantiva* e *não arbitrária* com o novo conhecimento, o aprendiz integra o processo para aquisição de uma aprendizagem dita como significativa (Moreira, 2011a). De maneira *substantiva* significando de modo não ao pé-da-letra, não literal, enquanto que *não arbitrária* querendo dizer que “a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende” (Moreira, 2012, p.2).

A estrutura cognitiva, para Ausubel (2003), refere-se a um coeficiente pertinente e essencial perante a aprendizagem, visto que remete a organização e composição do conhecimento de modo ordenado e acondicionado na mente do indivíduo.

De acordo Ausubel (1963, p. 58), “[...] a aprendizagem significativa é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento”. A estrutura cognitiva, por sua vez, é composta por subsunçores, caracterizados como conceitos prévios ou ideias-âncoras que os discentes dispõem, podendo ser conceitos, representações, paradigmas, entre outros. Esses subsunçores permitem o processo de ancoragem², assemelhando como um gancho cognitivo.

Entretanto, vale ressaltar que o processo de ‘interação’ implica diretamente nos

² Processo de ancoragem é uma metáfora, de acordo com a teoria da AS (Moreira, 2012). Isto é, os subsunçores não são caracterizados como permanente e imutáveis, pelo contrário, ele possui um papel ancoradouro, dinâmico e interativo.

subsunçores, isto é, à medida que eles ancoram novas informações, eles se ampliam e se modificam. Logo, diante desse processo, eles não se dissolvem ou limitam-se, mas transformam, tornando-se mais desenvolvidos, claros e estáveis.

Ademais, os conhecimentos se organizam na estrutura cognitiva de maneira hierárquica, isto é, dispostos em arranjos da maior para menor abrangência (de mais para menos inclusivos). Na base dessa hierarquia, encontram-se os conceitos específicos, o que resulta em uma hierarquia conceitual (Moreira, 2012).

A estrutura cognitiva, conhecida como a organização dos subsunçores correlacionados e hierarquicamente ordenados, é uma estrutura dinâmica qualificada por dois processos: a *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integradora* (Moreira, 2012).

A *diferenciação progressiva* consiste na atribuição de novos significados a um subsunçor, quer dizer, esse processo se desenrola a partir da interação de novos conceitos com os conhecimentos prévios, e mediante a isso, o subsunçor progressivamente se diferencia, transformando-se em refinado, acentuado e diferenciado (Moreira, 2012).

Em relação à *reconciliação integradora*, este processo dinâmico da estrutura cognitiva concerne em investigar as noções, indicar semelhanças e suprimir as disparidades de um conceito/tópico, integrando os significados (Ausubel, 1978).

Nesse processo, o aluno busca identificar os pontos de conexão entre as partes previamente diferenciadas e cria uma imagem global e coesa do assunto, isto é, uma síntese cognitiva. Salienta-se que ambos os processos não sucedem com intensidades distintas, ou seja, momentos separados, mas sincrônicos e primordiais tanto na composição da estrutura cognitiva quanto para o ensino (Moreira, 2012).

2.2.1. MAPAS CONCEITUAIS

Segundo Novak e Cañas (2010, p. 1), Mapas Conceituais (MC) são “[...] ferramentas gráficas para a organização e representação do conhecimento”. Eles são considerados recursos que coadjuvam ao processo de aprendizagem, bem como, no ensino (De Oliveira; Amaral, 2020).

A representação gráfica (ou desenho) de um MC manifesta a organização da estrutura cognitiva do indivíduo, descrevendo concepções, evidência compreensões,

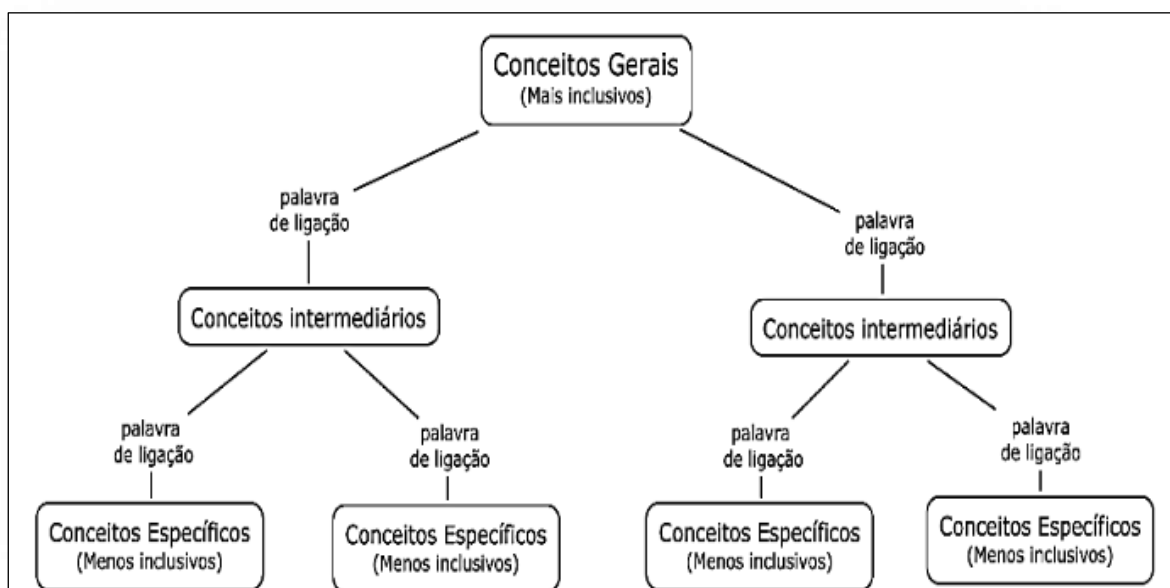
lacunas e equívocos, além de explorar a criatividade diante a construção gráfica (Ruiz-Moreno *et al.*, 2007).

Novak (1977) estabelece uma relação hierárquica entre os conceitos do MC se interliga com o princípio da diferenciação progressiva, em razão da disposição em arranjos de na parte superior possuir os conceitos de maior abrangência e na porção inferior aqueles menos inclusivos.

Os MC salientam a interligação de conceitos, estruturada de modo hierárquico, nas quais incluem conceitos, normalmente dentro de círculos ou quadrados, que são conectados por retas e setas que indicam suas relações, entretanto, diante essas linhas dispõe de palavras-chaves ou frases de ligação (Novak; Cañas, 2010).

A Figura 3 mostra um exemplar do desenho esquemático de um MC. Como mencionado, essa representação destaca a estruturação conceitual que um MC deve apresentar.

Figura 1: Representação esquemática do Mapa Conceitual



Fonte: elaborado por Ferrão e Manrique (2014, p. 199).

Sobretudo, um dos elementos que caracterizam os MC são as palavras de ligação. A ausência dessas palavras pode levar a equívocos com os mapas mentais ou organogramas, e até mesmo, com diagramas de fluxos, pois estes não detêm de hierarquia de organização ou de sequência e direcionamento. Penã (2005) identifica particularidades próprias dos MC, como a hierarquização, seleção de termos e o impacto visual.

Por isso, Novak e Canãs (2010) orientam alguns pontos que dinamizam a construção de um MC:

- Definir um tópico ou uma questão focal a ser desenvolvida neste mapa;
- Reconhecer os conceitos chaves que se refere ao tópico central;
- Arranjar de modo hierárquico os conceitos sistematizados do mais geral e inclusivo para o específico;
- Rascunhar um possível mapa conceitual;
- Delinear as palavras/frases de ligação que interligam os conceitos;
- Reavaliar e reformular os conceitos, e sentir-se livre, para proceder com a frequência que for necessária.

Moreira (2012, p. 14) destaca que um MC concerne em um instrumento dinâmico e traduz “[...] a compreensão de quem o faz no momento em que o faz [...]”. Desse modo, esse gráfico evidencia as sistematizações de um tópico e traduz algo particular, logo, não há representação única e correta, porém, existem MC adequados visto que um bom mapa deve conter em sua estrutura as relações hierárquicas entre conceitos, a validação das proposições e as ligações com palavras-chaves.

Nessa perspectiva, os MC são apontados como uma estratégia facilitadora da aprendizagem significativa e, até mesmo, da meta-aprendizagem, além de serem um instrumento efetivo de avaliação da aprendizagem.

Em relação ao MC empregado como recurso de ensino/aprendizagem, cabe ressaltar que, mediante os mapas, os discentes compreendem o significado da temática, associam com seus conhecimentos prévios e avaliam regularmente sua própria aprendizagem. Além disso, reconfiguram sua produção esquemática e engajam-se em reflexões críticas sobre seus percursos cognitivos, potencializando ao aluno uma meta-aprendizagem, que aprender a pensar sobre sua compreensão e suas realizações.

Ao que tange ao MC ser tratado como um instrumento avaliativo, sublinha-se que a representação viabiliza ao docente, e até mesmo ao aluno, a interpretação em relação à identificação, à compreensão dos conceitos (análise de asserções e possíveis erros), aos indícios da sua estruturação cognitiva sobre o conteúdo. Segundo Moreira (2006), a preocupação do professor, na produção esquemática do mapa, deve ser voltada para a análise das ideias do aluno, a fim de filtrar as evidências de aprendizagem significativa.

Em suma, os MC detêm de uma perspectiva qualitativa, em razão de investigar, de maneira não arbitrária, a compreensão do discente e derivar da essência do processo de AS (Moreira, 2011a).

No próximo tópico, apresentamos a respeito das Múltiplas Representações dos conceitos científicos para a compreensão e a significação na aprendizagem do discente.

2.3. BREVES CONCEITOS DAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

A linha de pesquisa das Múltiplas Representações (MR) centraliza dedicações para a investigação e compreensão dos significados de conceitos científicos atribuídos pelos discentes. Tais conceitos podem ser representados de maneira monomodal (usando-se um único modo, como imagem, por exemplo), bem como multimodal (utilizando-se de diversos modos combinados, como por exemplo, imagem em conjunto com verbal textual).

O termo ‘Múltiplas Representações’ qualifica a capacidade de se representar um mesmo processo ou conceito científico de distintas maneiras (Prain; Waldrup, 2006; Tytler; Prain; Peterson, 2007; Zompero; Laburú, 2010) e as pesquisas realizadas na linha investigativa das MR concentram-se no modo como o emprego de mais de uma representação afeta a compreensão do estudante (Tang; Delgado; Moje, 2014).

À medida que as MR são incorporadas e avaliadas entre, há a capacidade de proporcionar meios substanciais ao fenômeno estudado (Won; Yoon; Treagust, 2014). Ademais, uma nova representação tem potencial de complementar, restringir uma interpretação e/ou aprofundar um conhecimento (Ainsworth, 1999; 2006).

Como tal característica, um ensino baseado nas MR é capaz de propiciar ao aprendiz uma aprendizagem significativa, pois ao se utilizar do referencial das MR, ele pode dar indícios de atribuição de significados mais elaborados acerca dos conceitos científicos abordados. Isso permite que o aluno ultrapasse, inclusive, “[...] significados que eram circunscritos ao contexto dos conhecimentos prévios, senso comum, aparente, intuitivo do aprendiz[...].” (Trevisan Sanzovo; Laburú, 2017, p. 766).

De acordo com Lemke (1998), os alunos têm a necessidade da manipulação entre os diferentes tipos de representação, mediante um conceito, com a finalidade de potencializar a aprendizagem.

Em adição, Ainsworth (1999; 2006; 2008) propôs uma sistematização composta

por três principais funções pedagógicas das representações no contexto de aprendizagem: a primeira diz respeito ao papel de *complementar*, em seguida ao de *restringir* as interpretações, e por fim, ao de *aprofundar* sua compreensão.

Não obstante, Ainsworth (1999; 2006; 2008) salienta que essas funções não são excludentes e nem ocorrem em momentos distintos, mas sim integrantes entre si, pois possibilita que uma determinada representação se situe nas duas (ou nas três) funções.

A função de *complementar* proporciona o uso de representações que se complementam, visto que cada forma de representação de um conceito detém uma especificidade, em que contribuem com informações ou procedimentos distintos, ou, alternativamente, através das MR possibilita ao discente optar a manipular a representação de sua preferência, isto é, aquela representação com a qual ele se sente familiarizado em trabalhar.

Como destacado por Ainsworth (2014, p.469): “[...] uma tabela é geralmente mais acessível e familiar aos alunos, podendo servir para os ajudar a interpretar um gráfico [...]” Nesse sentido, a pesquisadora também cita exemplos em que, nessa primeira função, o aprendiz utiliza os diversos modos representacionais (tabelas, equações, gráficos, simulador de animação) no sentido de complementar uma representação à outra, possibilitando a síntese do conceito ou tópico abordado. Assim, o uso coordenado de representações complementares proporciona diferentes inferências e benefícios no processo de aprendizagem.

A respeito do papel de *restringir*, acentua-se a finalidade de distanciar-se da ambiguidade, logo, por meio dela, o estudante tem a oportunidade de aprimorar sua compreensão diante de um determinado conceito, quer dizer, o emprego de uma representação de certa forma, restringe a interpretação, viabilizando um segundo modo de representar.

Entretanto, isto pode ser efetuado de duas formas: inicialmente usando uma representação familiar com a finalidade de apoiar uma interpretação de uma representação mais abstrata. Ou, como segunda forma, de explorar uma representação para restringir a interpretação de uma segunda, quer dizer, uma representação pode implicar a interpretação de outra, principalmente, quando se usa uma animação concreta para apoiar o entendimento de um gráfico dinâmico (Ainsworth, 2014).

Por fim, as MR são capazes de conceber uma compreensão aprofundada

(*aprofundar*) daqueles que as utilizam, conforme destacam Baptista, Conceição e Ponte (2020, p. 43), pode ocorrer por “[...] extensão, os alunos aplicam o que aprenderam, para ir mais longe com outra representação” ou “por abstração, os alunos generalizam um conceito a partir do que aprenderam num contexto particular e com valores com as MR [...]”.

Diante a isso, a uma compreensão aprofundada pode propiciar a abstração, que abrange um campo de interpretações de domínio, em que o aluno aprofundará a essas representações, a fim de generalizar (extensão) o conhecimento, visto que há uma relação entre as representações, mas sem apresentar essa associação entre elas. Para Ainsworth (2014), correlacionar gráficos de espaço e velocidade para entender mais sobre funções e derivadas exemplifica tal função.

A seguir, apresentamos uma seção referente à Unidade de Ensino Potencialmente Significativa e suas considerações ao ambiente escolar.

2.4. UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA

De acordo com Ausubel (1968), há algumas condições para a aprendizagem seja considerada como significativa, sendo uma delas a natureza do material de ensino, visto que ele precisa se relacionar de maneira substantiva e não arbitrária com a estrutura cognitiva do aluno. A esse material, que se caracteriza como potencialmente significativo, precisa ser elaborado logicamente e psicologicamente (Moreira, 2012).

Desse modo, em seus estudos Moreira (2011b) considera sobre o processo de ensino e os facilitadores da AS, salientando a produção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), em que se refere a uma sequência de atividades viabilizando, teoricamente, a AS.

Além do mais, Moreira (2011b) recorre a alguns marcos teóricos relevantes para sua fundamentação e sustentação da UEPS. Primeiramente, ele parte do princípio aludido a Ausubel (1968), em que o conhecimento prévio é o coeficiente fundamental que influencia a AS.

Um segundo princípio que ele considera são as contribuições da teoria educacional de Novak (1981), na qual os elementos de sentimentos, pensamentos e ações dispostos pelos alunos, integrando-se positiva e construtivamente em caso de sua aprendizagem é dita significativa. Além disso, complementou-se a sua

sistematização com a teoria interacionista social de Vygotsky (1987), em que ele sinaliza que a interação social e a linguagem são provenientes da aquisição de significados.

Ademais, relacionou os subsídios da teoria da AS e os apontamentos de Gowin (1981), visto que evidenciam a pré-disposição do aprendiz em aprender significativamente (de modo substantiva e não arbitrária). Aliado a isso, temos a visão de que, no processo de ensino, há uma relação triádica entre professor, aluno e materiais educativos, com a finalidade do aprendiz captar e compartilhar significados que estão conceituados no contexto da matéria de ensino.

Baseia-se também na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1989), em razão que as situações problemas fornecem sentido às novas informações e precisam ser concebidas a fim de despertar a intencionalidade do aluno para a aprendizagem significativa. Por isso, devem ser empregadas na implementação da UEPS e respeitar as sequências crescentes de complexidade para mediar a captação de significados.

Aliás, Moreira (2011b) abrange a teoria dos modelos mentais de Johnson-Laird (1983), na construção desses princípios para a sistematização, visto que a essa vertente associa a ideia de considerar a nova situação como ponto de partida, com o objetivo de resolvê-la e edificar, na memória de trabalho (região onde se constroem e manipulam os modelos mentais), um protótipo mental funcional (que serve para algo), que é um análogo estrutural dessa situação.

Assim, Moreira (2011b) designa oito etapas (passos) que uma UEPS deve conter, conforme demonstrado no Quadro 1 em que a primeira coluna apresenta a etapa, seguida das características de cada etapa na última coluna.

Quadro 1: Etapas associados de uma UEPS

1ª etapa	Definir o tópico específico a ser abordado – visão geral de como será a UEPS
2ª etapa	Criar/Propor situação(ções) e questionário para que o estudante externalize seu conhecimento prévio.
3ª etapa	Introdução ao tópico de estudo, de modo declarativo ou procedimental, com situações que relacionem o conhecimento prévio com o novo conhecimento.
4ª etapa	Apresentar o novo conteúdo ou conceito a ser ensinado/aprendido, partindo dos aspectos mais gerais para os mais específicos (diferenciação progressiva), exemplificando, abordar aspectos específicos e desenvolver estratégias de ensino
5ª etapa	Retomada dos aspectos mais gerais do conteúdo, avançando na complexidade. Promover a reconciliação integradora. Promover situações

	de interação com o grupo de estudantes, envolvendo negociação de significados.
6ª etapa	Dar seguimento ao processo de diferenciação progressiva e reconciliação integradora, concluindo a unidade.
7ª etapa	Avaliação formativa e somativa da aprendizagem.
8ª etapa	Avaliação da UEPS, segundo evidências da aprendizagem significativa.

Fonte: Adaptado de Moreira (2011b, p. 3-5).

No Quadro 1, expõe-se uma breve síntese das etapas proposta por Moreira (2011b), no entanto, ressalta-se que há a possibilidade de ser realizada uma alteração no desenvolvimento da sequência, o necessário é que o ajuste seja conforme os princípios da UEPS.

Além disso, a aprendizagem deve ser significativa, e não mecânica, como também, durante o planejamento da UEPS, deve-se recorrer a distintas estratégias instrucionais e à diversidade de materiais, pois o aluno precisa ser engajado no processo e instigado a questionamentos, visto que o ensino deve ser focado nele.

É nesse sentido que Moreira (2011b) sublinha, além das oito etapas elencadas anteriormente, três aspectos transversais. O primeiro deles diz respeito à diversidade dos materiais e, principalmente, aos estímulos de questionamento, diálogo e crítica.

Já o segundo aspecto trata da proposta de determinados momentos da sequência, os alunos tenham a possibilidade de sugerir situações problemas mediante ao tema abordado.

Por sua vez, o terceiro e último aspecto denota a flexibilidade das atividades. Na UEPS, privilegiam-se aquelas que são caracterizadas como colaborativas, porém, há instantes em que serão individuais.

Não obstante, chama-se a atenção dois procedimentos da UEPS: a situação problema e a relação com a avaliação. A situação problema é apontada por Moreira (2011b) como uma tarefa, quer dizer, uma elucidação de um fenômeno, de um conceito, ou uma estruturação de um diagrama esquemático. Assim, não se refere a um problema de final de capítulo, mas uma tarefa que o aluno perceba como problema.

Situações-problema e conceitualização guardam entre si uma relação dialética: são as situações que dão sentido aos conceitos, mas à medida que o sujeito vai construindo conceitos mais capaz ele fica de dar conta de novas situações, cada vez mais complexas (Moreira, 2011b, p. 11).

Com respeito à avaliação, na sétima etapa da UEPS, Moreira (2011b) afirma que ela deve ser formativa durante a implementação e também somativa. No que

tange à avaliação formativa, é essencial que se registre tudo que possa ser considerado como indícios de aprendizagem significativa, em razão dela avaliar o desenvolvimento do aluno no decorrer do processo da aprendizagem. Assim, a avaliação formativa se caracteriza como contínua e apropriada, com significados concebidos e em processo de captação pelo aprendiz.

Já com relação à avaliação somativa, verifica-se o alcance de certos objetivos de aprendizagem ao final de uma fase de aprendizagem, logo, ao término da sexta etapa, deve haver uma avaliação somativa que indique questões ou situações que salientam a compreensão e evidenciam, principalmente, a atribuição de significados.

A fim de explicitar melhor o desenvolvimento do produto, expomos a seguir a seção do produto educacional desta pesquisa.

3. PRODUTO EDUCACIONAL

Primeiramente, segue abaixo o Quadro 2 que sintetiza a sequência de atividades, conforme a UEPS, e sua estrutura geral.

Quadro 2: Estrutura geral das etapas da UEPS

N.º da etapa	Síntese da Etapa da UEPS	Ações a ser desenvolvida	Encontro correspondente
1ª etapa	Definir o tópico específico a ser abordado – visão geral de como será a UEPS	Cálculo Diferencial Integral - Limite	-
2ª etapa	Criar/Propor situação(ões) e questionário para que o estudante externalize seu conhecimento prévio.	Elaboração de um Mapa Conceitual - Função ³ ;	1º Encontro
3ª etapa	Introdução ao tópico de estudo, de modo declarativo ou procedimental, com situações que relacionem o conhecimento prévio com o novo conhecimento.	Abordagem do problema da Reta Tangente e da Taxa de variação da Velocidade; Definir o conceito de Limite de uma função;	2º Encontro
4ª etapa	Apresentar o novo conteúdo ou conceito a ser ensinado/aprendido, partindo dos aspectos mais gerais para os mais específicos (diferenciação progressiva), exemplificando, abordar aspectos específicos e desenvolver estratégias de ensino	Explanação do conceito Limite; Definição precisa do seu conceito;	3º Encontro
5ª etapa	Retomada dos aspectos mais gerais do conteúdo, avançando na complexidade. Promover a reconciliação integradora. Promover situações de interação com o grupo de estudantes, envolvendo negociação de significados.	Cálculo do Limite mediante as suas propriedades;	4º Encontro
6ª etapa	Dar seguimento ao processo de diferenciação progressiva e reconciliação integradora, concluindo a unidade.	Cálculo do Limite mediante o conceito da taxa de variação da velocidade média;	5º Encontro

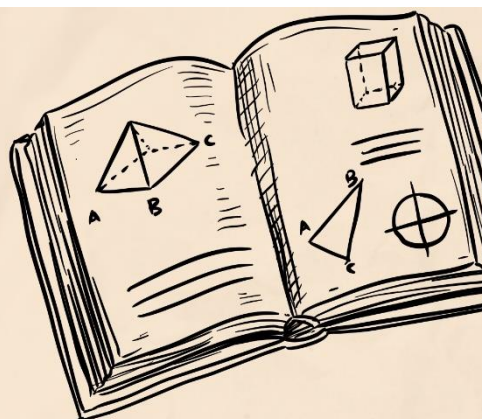
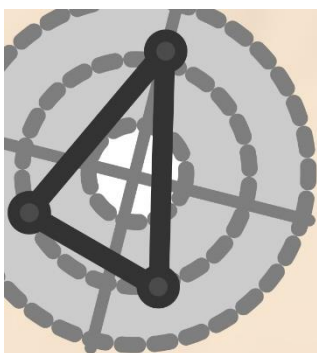
³ A elaboração desse MC tem como finalidade a familiarização dos estudantes com sua construção, logo, nessa etapa solicitamos a eles que estruturassem uma representação esquemática sobre o conceito de Função (outra temática), visto que o eixo temático Limite recorre a esse conceito.

7ª etapa	Avaliação formativa e somativa da aprendizagem.	Elaboração de um Mapa Conceitual - Limite ⁴ ;	6º Encontro
8ª etapa	Avaliação da UEPS, segundo evidências da aprendizagem significativa.	Verificar as evidências de aprendizagem dos estudantes.	-

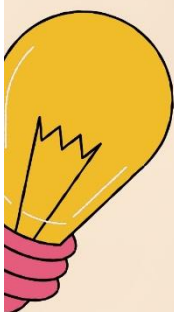
Fonte: Criado pelo autor.

O material desenvolvido como produto educacional encontra-se nas páginas seguintes.

⁴ A elaboração desse MC, na sétima etapa, trata-se da representação esquemática sobre o eixo temático de Limite, o qual refere-se a um instrumento avaliativo adotado na UEPS, com a finalidade de investigar o desempenho dos alunos.



PRODUTO EDUCACIONAL

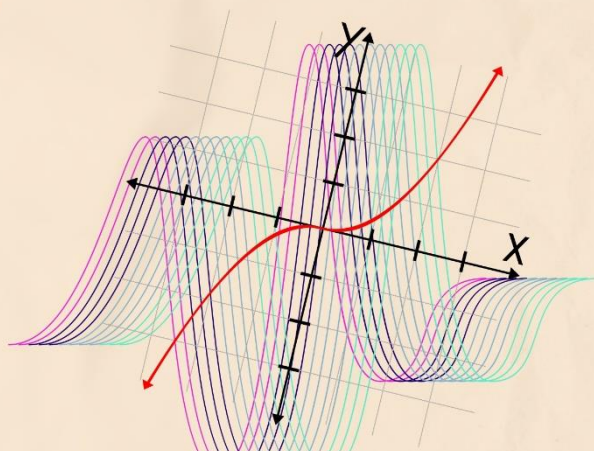


LIMITE



SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

NA PERSPECTIVA DAS MÚLTIPLAS
REPRESENTAÇÕES E UEPS



$$B \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{ctg} x - 2}{2\sqrt{1-x^3}}$$

$$+y^2 = Z$$

$$e = \cos$$

$$P = r^2 \pi \ln(x)$$

$$\Delta t = T - \frac{3a}{x}$$

$$(x-y^2)$$

$$y = 2x^2 + 3x$$



Primeiro Encontro

Resumo

Atividade	Elaboração de um Mapa Conceitual
Tema	Mapa Conceitual
Tempo estimulado	2 horas
Conceitos chave	Definição; Representação; Exemplificação

Materiais Necessários

- ☐ Computador; Projetor; Powerpoint; CmapTolls;
- ☐ Folha de sulfite A4 em branco; Lápis; Borracha;

Objetivos de Aprendizagem

Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes;

Procedimentos metodológicos

Roteiro	Observações
Inicialmente, expor aos estudantes uma apresentação no projetor elucidando a Teoria da Aprendizagem Significativa;	Ideia no encarte 1, a seguir;
Logo após, dar um enfoque a respeito do instrumento de aprendizagem - Mapa Conceitual	Encarte 2;
Após essa primeira etapa, realizar a leitura do tutorial de como construir um Mapa Conceitual, bem como, exemplificá-lo através do software CmapTools;	Encarte 2; A elaboração de um MC sobre as expressões algébricas (uma temática simples), organizando o conceito, sublinhando as ligações e as inter-relações, evidenciando o processo de diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.
Solicita-se que os discentes familiarizam por meio da elaboração de um Mapa Conceitual, , seguido aos passos elucidados anteriormente, mas com a temática a respeito de “Função”; Essa atividade será individual, porém, poderá ter mediação do professor, principalmente com relação aos conectivos entre os conceitos.	Os estudantes podem sentir-se livres para construir na Folha sulfite ou no software aludido. Além do mais, pede-se a eles explicar, mediante um texto escrito, o seu Mapa, como foi seu raciocínio e as ideias hierárquicas. Entretanto, deve-se estipular um período de tempo para o desenvolvimento desta atividade.
Entretanto, como essa atividade demanda tempo, permitira-se aos alunos que elaborem como uma atividade assíncrona e encaminhem via e-mail os documentos em formato pdf, com um prazo estipulado pelo pesquisador.	Disponibilizar o e-mail para ser anexados os documentos. Além do mais, pede-se a eles explicarem, mediante um áudio gravado e encaminhado via aplicativo WhatsApp, o seu respectivo Mapa Conceitual, como foi seu raciocínio e as ideias hierárquicas estabelecidas por ele.
Posteriormente, o professor deve proporcionar um feedback aos alunos deste primeiro momento, sintetizando algumas ideias, e salientando sobre ao próximo momento.	Solicita-se a eles para que traga os materiais necessários para o desenvolvimento da atividade.

Avaliação da Aprendizagem

Avaliação formativa (critério: identificar indícios na construção e interação dos conceitos nos Mapas Conceituais). Instrumento avaliativo: registro no caderno de bordo.

Encarte 1!

Aprendizagem Significativa

Proposta por David Ausubel
(1980, 2002)



1

Segundo Ausubel (1968), a educação é violenta e a escola, uma prisão. Desse modo, dedicou-se a encontrar uma educação embasada na estrutura cognitiva

2

a aprendizagem no processo de ensino necessita fazer algum sentido para o aprendiz

Definição

Aprendizagem significativa resulta da interação não arbitrária e substantiva entre o conhecimento novo e aqueles estáveis, disponíveis e organizados de forma hierárquica na estrutura cognitiva do estudante.

Por esse motivo, o repertório de conhecimentos que o estudante possui constitui-se no elemento fundamental ou no fator que mais influencia em sua aprendizagem (Ausubel, Novak e Hanesian, 1980).

Subsunçores

[...] um conceito, uma ideia, uma proposição já existente na estrutura cognitiva capaz de servir de “ancoradouro” a nova informação de modo que esta adquira, assim, significado para o indivíduo (i.e. que ele tenha condições de atribuir significados a essa informação) (Moreira, 2006, p. 15).

Condições

- Subsunçores adequados;
- Dispostos a ancorar com a nova informação (motivação);
- Material Potencialmente Significativo;

Encarte 2!

Mapa Conceitual

Proposta de Joseph
Novak (1981)

O QUE É?

Para Novak e Canãs (2006, p. 1), mapas conceituais são "ferramentas gráficas" para a organização e representação do conhecimento.

São diagramas de significados, de relações significativas, de hierarquias conceituais (Moreira, 2009b, p. 4)

ESTRUTURA

Seu objetivo trata-se de representar relações entre conceitos na forma de proposições;

Sua estrutura hierárquica esta de acordo com o princípio da diferenciação progressiva, pois apresentam na parte superior os conceitos mais gerais e inclusivos e, na parte inferior aqueles conceitos mais específicos e menos inclusivos.

PASSOS

1. Indique os conceitos-chave;
2. Ordene os conceitos (comece pelos mais gerais/inclusivos);
3. Conecte-se os conceitos com linhas;
4. Inclua nessas linhas palavras-chave;
5. Setas podem ser usadas para ênfase;
6. Busque relações horizontais cruzadas;
7. Cite exemplos (parte inferior);
8. Sinta-se livre, reconstrua seu gráfico o quanto for necessário.

Característica:

Hierarqui
zação

Seleção

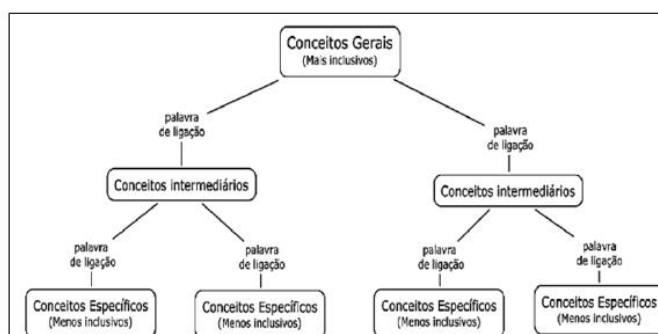
Impacto
Visual

Palavras
de
ligação

Segue exemplo a seguir:



Exemplificação



Fonte: elaborado por Ferrão e Manrique(2014, p. 199).

Dica



(AUTORIA PRÓPRIA)

Segundo Encontro

Resumo

Tema	A construção do conceito limite: o problema da reta tangente e da variação da velocidade.
Pré-requisitos	Domínio do conceito de funções; Representação geométrica das funções; Noção da equação da reta; Domínio do software Geogebra; Intervalos.
Tempo estimulado	2 horas
Conceitos chave	Reta tangente; inclinação; velocidade média; intervalos.
Feedback	Realizar um Mapa Conceitual do último encontro, com as palavras-chaves ditas pelos estudantes.

Materiais Necessários

- ☐ Computador; Projetor; Geogebra; Simulador PhET;
- ☐ Quadro; Giz; Lápis; Borracha; Régua; Papel;

Objetivos de Aprendizagem

Identificar o conceito de Limite através do problema da reta tangente e da taxa de variação da velocidade média;

Esboçar a representação geométrica das funções;

Interpretar o comportamento da função em relação as variáveis x e y próximo de um ponto adotado;

Analisar a relação entre as velocidades mínimas e máximas, afim de determinar a velocidade instantânea;

Propor situações problemas que envolva o problema da reta tangente e da velocidade instantânea.

Procedimentos metodológicos

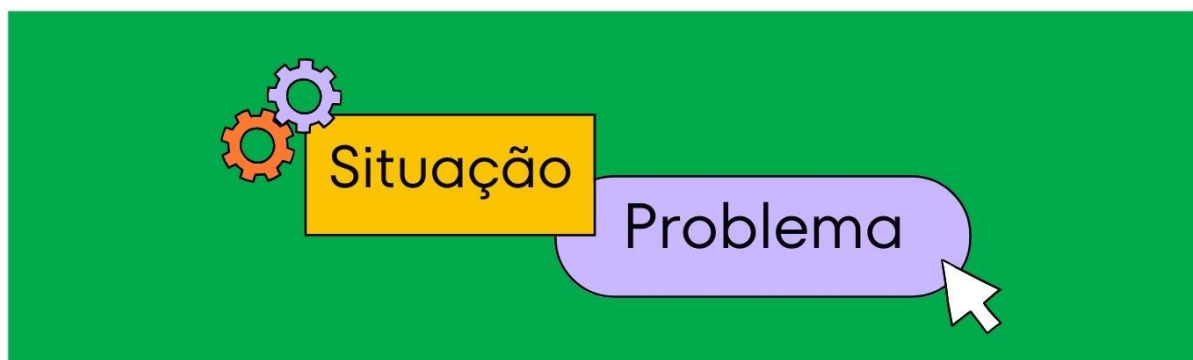
Roteiro	Observações
Inicialmente, realiza-se um feedback do primeiro encontro, elaborando um Mapa Conceitual no quadro com as palavras-chaves ditas pelos alunos, e o pesquisador esboçará.	Procura-se reforçar a familiarização com o Mapa Conceitual e sua construção
Em seguida, apresenta-se uma situação problema da Reta Tangente, a fim de fundamentar e assimilar o conceito de Limite. Entretanto, para o desenvolvimento desta atividade recorre-se ao software <i>Geogebra</i> , para além do esboço da representação geométrica das funções, mas também a visualização do comportamento da reta em relação a função.	Encarte 3; (Essa situação problema trata-se de uma questão procedimental para a dedução e possível síntese do conceito de Limite).
Após o desenvolvimento desta atividade, enuncia-se a relação do conceito de Limite com a representação geométrica de uma função e a reta tangente.	Encarte 4;
Além do mais, aborda-se o problema da Taxa de variação da Velocidade, para tanto, utiliza-se o simulador <i>PhET</i> , para realçar a apropriação do conceito de Limite.	Encarte 5;
Ao final, definir o conceito de Limite de uma função.	

Avaliação da Aprendizagem

Avaliação formativa (critério 1: perceber indícios da ideia intuitiva de Limite; critério 2: identificar indícios de múltiplas representações);

Instrumento avaliativo: registro no caderno de bordo.

Encarte 3!



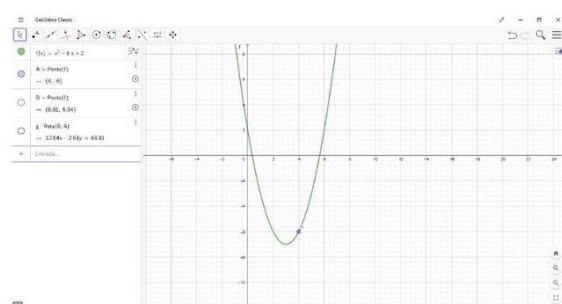
Proponha aos estudantes o seguinte enunciado:	Tempo estipulado: 30 - 45 min.
Considere a função: $f(x) = x^2 - 6x + 2$ com o ponto A (4, -6). Com auxílio do software Geogebra desenvolva: 1. Esboce a representação geométrica da função; 2. Construa retas secantes correspondentes em torno do ponto A; 3. Qual a interpretação da representação geométrica do item anterior? 4. Através do item b, esboce a reta tangente ao gráfico desta função e sua equação da reta.	

• Sugestão de resolução •

Alternativa 1:

Figura 1: Exemplo de construção da função e ponto.

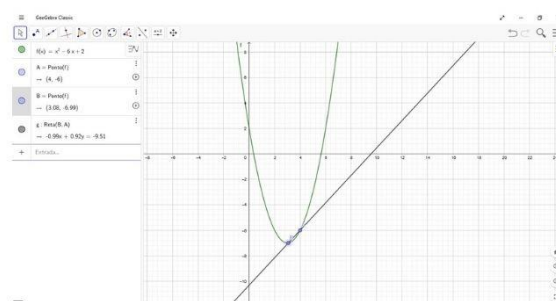
[Código Geogebra: Função ($f(x) = x^2 - 6x + 2$). Ponto (A = (4,-6))]



(Autoria própria)

Figura 6: Exemplo de construção das retas secantes.

[Código Geogebra: Ponto (A = (4,-6); B = (3.08,-6.99)). Selecionar a opção reta e escolher os dois pontos]

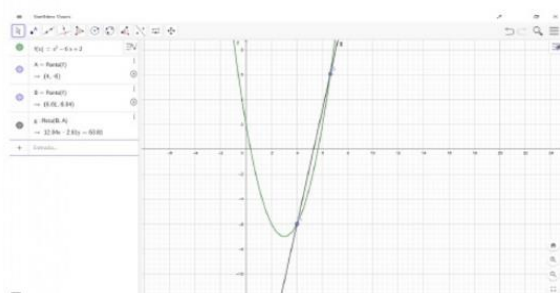


(Autoria própria)

Alternativa 2:

Figura 2: Exemplo de construção das retas secantes.

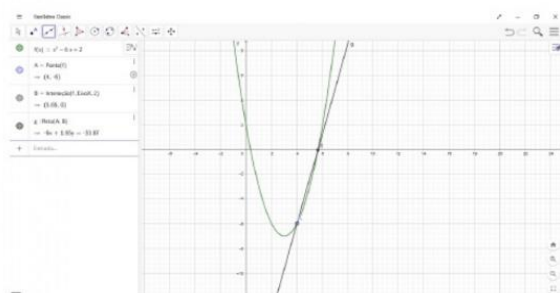
[Código Geogebra: Ponto (A = (4,-6); B = (6.61,6.04)). Seleccionar a opção reta e escolher os dois pontos]



(Autoria própria)

Figura 3: Exemplo de construção das retas secantes.

[Código Geogebra: Ponto (A = (4,-6); B = (5.65,0)). Seleccionar a opção reta e escolher os dois pontos]



(Autoria própria)

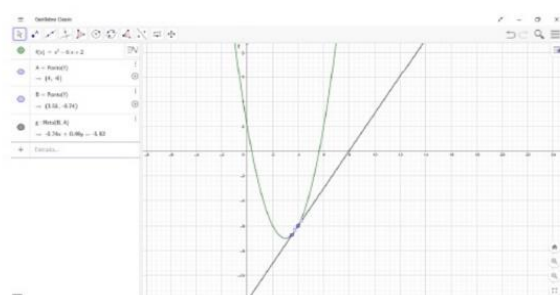
Figura 4: Exemplo de construção das retas secantes.

[Código Geogebra: Ponto (A = (4,-6); B = (4.75,-3.93)). Seleccionar a opção reta e escolher os dois pontos]

Geogebra

Figura 7: Exemplo de construção das retas secantes.

[Código Geogebra: Ponto (A = (4,-6); B = (3.51,-6.74)). Seleccionar a opção reta e escolher os dois pontos]



(Autoria própria)

Observação: Após a construção, no Geogebra, do ponto B e da reta secante que toca os dois pontos (A e B), é possível na opção "mover" o ponto B pela curva da função, desse modo, é perceptível que se aproximar o ponto B de A, a reta tende à reta tangente.

Alternativa 3:

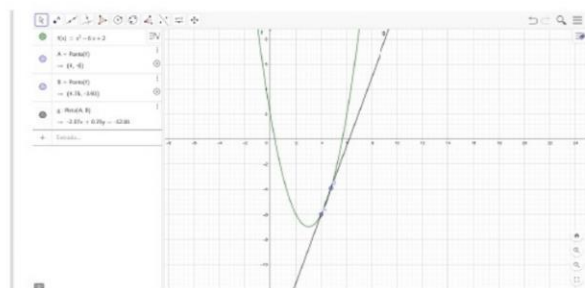
Resposta pessoal. Mas espera-se que os alunos interpreta o comportamento da função em relação às variáveis x e y próximo de um ponto adotado, quer dizer, à medida que B tende a A ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de A e tendem à reta tangente t.

Alternativa 4:

Figura 8: Exemplo de construção da função e ponto.

[Código Geogebra: Função (f(x) = x²-6x+2);

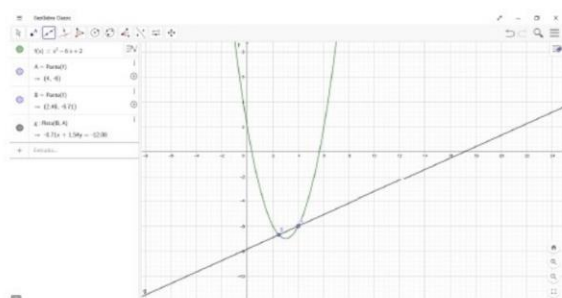
Ponto (A = (4,-6); Seleccionar a opção reta tangente, assim, escolher o ponto e a função]



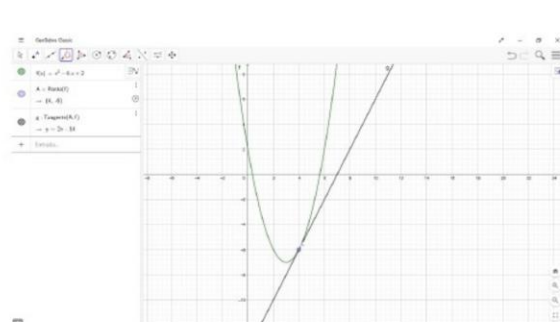
(Autoria própria)

Figura 5: Exemplo de construção das retas secantes.

[Código Geogebra: Ponto (A = (4,-6); B = (2.46,-6.71).. Seleccionar a opção reta e escolher os dois pontos]



(Autoria própria)



(Autoria própria)

Com auxílio do software Geogebra e a representação de uma tabela de valores, espera-se que os estudantes estimem a inclinação da reta tangente é $m = 2$. E também, deduzem que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes, ou seja:

$$m_{PA} = m$$

Assim, a equação da reta tangente é:

$$y = 2x - 14$$

Encarte 4!

Reta Tangente



Tópicos:

Conceito

Representação
GeométricaRepresentação
Tabular

Síntese

Conceito

A respeito do conceito de Limite, de acordo com Stewart (2013, p.76-77), ele está relacionado com o problema da reta tangente de uma curva.

A tangente é uma reta que toca uma determinada curva e admite uma inclinação em relação ao ponto dessa curva.

Para calcular a inclinação (m) é necessário o valor de dois pontos, portanto, a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes, ou seja:

$$\text{Pin} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Representação Tabular

Tabela 1: valores próximos a 1.

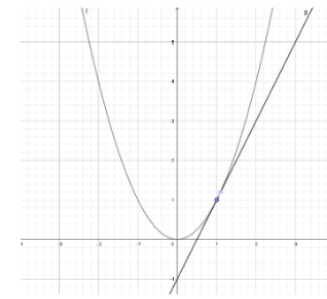
x	m
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

(Autoria própria)

Tabela 2: valores próximos a 1.

x	m
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

(Autoria própria)

Figura 1: Representação Geométrica da função $f(x) = x^2$ Representação
Geométrica

(Geogebra – Autoria própria)

Síntese

De acordo com as tabelas 1 e 2, pode-se observar que quanto mais próximo o ponto A estiver de P, mais próximo x tenderá a 1, consequentemente, a inclinação estará mais próxima de 2.

Portanto, a inclinação da reta tangente pode ser escrita pela seguinte equação:

$$y = 2x + b \quad \checkmark$$

Logo, o limite de uma função é usado para estudar o comportamento da função próximo de um ponto que, muitas vezes, não pertence ao domínio da função.

Encarte 5!

Velocidade Média

Referência

LEITHOLD (1994)

Tempo estipulado

30 min.

PhET - O homem em movimento

1 Considere uma pessoa que se move numa trajetória obedecendo uma função $s(t)$.

2 Sabemos que a velocidade média do homem corresponde ao espaço percorrido pelo tempo gasto percorrido por ele, isto é:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

3 Qual a velocidade instantânea no instante $t_i = 2s$, no ponto $s(2)$



Dicas:

Como queremos a $V(2)$, logo, é necessário observar a V_m num pequeno intervalo na vizinhança de $t_i = 2s$

Logo as velocidades, mínima e máxima, vão se aproximando, e assim, determinaremos a velocidade instantânea

$$\lim_{t \rightarrow t_i} = \frac{s(t) - s(t_i)}{t - t_i}$$



Diz-se que:

isto é,

Definição!

"O Limite de $f(x)$, quando x tende a b , é igual a L "

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$$

(STEWART, 2013 p. 81)

Terceiro Encontro

Resumo

Tema	O limite de uma função
Pré-requisitos	Domínio do conceito de funções; Representação geométrica das funções; Domínio do software Geogebra;
Tempo estimulado	2 horas
Conceitos chave	Funções; inclinação; intervalos.
Feedback	Recapitular as duas situações problemas para enunciar o conceito de Limite; Explicar e exemplificar a definição evidenciado ao final do último encontro;

Materiais Necessários

- ☐ Computador; Projetor; Software Geogebra; Calculadora;
- ☐ Quadro; Giz; Lápis; Borracha; Régua; Papel;

Objetivos de Aprendizagem

Interioriza a definição de Limite;

Esboçar a representação geométrica de uma função;

Analisar as representações geométricas e tabulares de funções;

Desenvolver a linguagem matemática;

Propor situações problemas sobre o comportamento do valor de uma função nas proximidades de um ponto.

Procedimentos metodológicos

Roteiro	Observações
A princípio, realiza-se um processo de <i>Feedback</i> , expondo as situações problemas desenvolvidas, porém, focar na enunciação do conceito Limite.	Pode-se realizar uma breve apresentação no PowerPoint, e exemplificar o conceito mediante os softwares <i>Geogebra</i> e <i>Simulador PhET</i> , utilizados no encontro anterior.
Em seguida, expande-se a definição de Limite mediante uma linguagem matemática	Faça uma breve exposição oral, exemplificando, conforme o item "Definição!" a seguir.
Após essa anunciar, exemplifica-se com situações problemas (início a diferenciação progressiva)	Encarte 6;
Realizar uma atividade colaborativa com pequenos grupos, e após, guia-se para uma apresentação e/ou discussão com os pares.	Distribuição de um enunciado a cada grupo (ideia no encarte 7);
Elaboração de um Mapa Conceitual sobre Limite	Essa atividade por ocorrer ao final do encontro, ou pode ser considerada uma atividade assíncrona.

Avaliação da Aprendizagem

Avaliação formativa (critério: identificar os indícios da diferenciação progressiva do conceito de Limite);

Instrumento avaliativo: relatório da condução da atividade colaborativa.



Definição!

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número b , exceto possivelmente no próprio b . Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a b é L , e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que:

$$\text{se } 0 < |x - b| < \delta, \text{ então, } |f(x) - L| < \varepsilon$$

(STEWART, 2013 p. 101)

Encarte 6!



Situações Problemas

Conforme a ideia intuitiva de limite, analise:



$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1)$$

1 | DEFINIÇÃO →

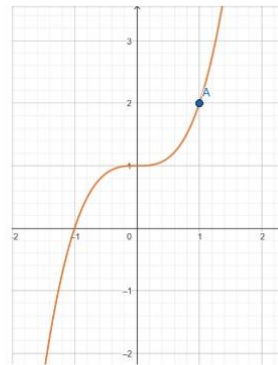
$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1^3 + 1) \quad (3)$$

$$= 2 \quad (4)$$

2 | GRÁFICO →



3 | TABELA →

x	$f(x)$
0,8	1,512
0,9	1,729
0,99	1,9702
0,999	1,9970
0,9999	1,9997
0,99999	1,9999

x	$f(x)$
1,03	2,0927
1,02	2,0612
1,01	2,0303
1,001	2,0030
1,0001	2,0003

4 | SOLUÇÃO ✓

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1) = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x + 3}$$

1 | DEFINIÇÃO →

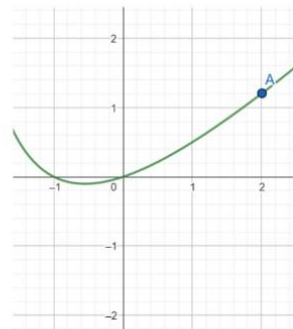
$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x + 3} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 + 2}{2 + 3} \quad (3)$$

$$= 1,2 \quad (4)$$

2 | GRÁFICO →



3 | TABELA →

x	$f(x)$
1,8	1,05
1,9	1,1244
1,99	1,1924
1,999	1,1992
1,9999	1,1999

x	$f(x)$
2,2	1,3538
2,1	1,2764
2,01	1,2076
2,001	1,2007
2,0001	1,20007

4 | SOLUÇÃO ✓

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x + 3} = 1,2$$

Encarte 7!

Atividade

Baseado em LEITHOLD (1990, p. 63)

Objetivos

Perceber o comportamento do valor de uma função nas proximidades de um ponto.



Atividade

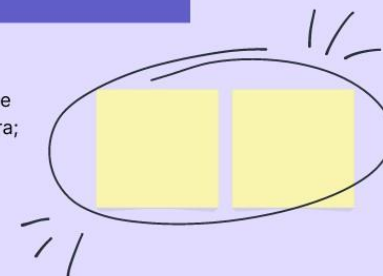
Coletiva (pequenos grupos)

Tempo estipulado

30 - 40 minutos

Materiais

Computador; Software Geogebra; Calculadora;



Observação

Deve ser distribuída cada enunciado a um grupo

Enunciado

Conforme as representações tabulares e gráficas, demonstre que a igualdade sob Limite é verdade:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 6$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} (5 - x - x^2) = -1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} \right) = -2$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x - x^2) = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1} \right) = 5$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x - x^2) = 0$$



Após a resolução, faça uma breve discussão com os demais.



Quarto Encontro

Resumo

Tema	Cálculo de Limites
Pré-requisitos	Domínio do conceito de funções; Representação geométrica das funções; Manipulação das operações básicas; Domínio do software Geogebra;
Tempo estimulado	2 horas
Conceitos chave	Funções; Limite
Feedback	Recapitular das representações geométricas e tabulares de funções; Salientar as apresentações das situações problemas, evidenciando o comportamento do valor de uma função nas proximidades de um ponto;

Materiais Necessários

- ☐ Computador; Projetor; aplicativo Symbolab; Calculadora;
- ☐ Quadro; Giz; Lápis; Borracha; Régua; Papel

Objetivos de Aprendizagem

Desenvolver o cálculo usando as propriedades dos Limites;

Integrar o cálculo do Limite com outras representações;

Procedimentos metodológicos

Roteiro	Observações
---------	-------------

Inicialmente, realiza-se um Feedback com os estudantes a respeito do encontro anterior, a fim de frisar as representações geométricas e tabulares, e principalmente, o comportamento do valor de uma função nas proximidades de um ponto, desenvolvido na atividade colaborativa	Indaga-se os estudantes quais foram as opiniões com relação a atividade colaborativa
Logo após, focar a respeito das propriedades do cálculo de Limites envolvendo as operações básicas, e propor situações problemas em níveis crescentes.	Encarte 8;
Solicita-se que os discentes realizem uma atividade colaborativa e compare o cálculo realizado das situações problemas e confrontem as resposta com o aplicativo Symbolab.	Pode-se utilizar de uma pequena discussão com os alunos a respeito dessa comparação;
Ao final dessa atividade, pede-se que eles interage com seu grupo, articulando os significados. Após, ele deve propor alguma situação problema que articula o cálculo do Limite, mediante essas propriedades, com alguma representação exposta no encontro anterior.	Essa atividade deve ocorrer ao final do encontro.
Para finalização do encontro, entregar o Mapa Conceitual produzido no encontro anterior, e solicitar para que ampliam seus MC, como também, considerem os <i>feedbacks</i> realizados	Essa atividade pode ser considerada uma atividade assíncrona.

Avaliação da Aprendizagem

Avaliação formativa (critério 1: perceber indícios do desenvolvimento em calcular as situações problemas, através das propriedades de Limite; critério 2: identificar a atribuição de significados na articulação das múltiplas representações; critério 3: verificar indícios de diferenciação progressiva);

Instrumento avaliativo: prova discursiva.

Encarte 8!

Limite



STEWART (2013, p. 91)

PRIMEIRA AÇÃO

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

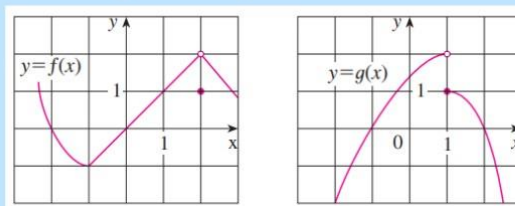
existam, então

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$



SEGUNDA AÇÃO

Segundo os gráficos, calcule:



$$\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) + g(x)]$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow -1} [g(x)]$$

$$(-1) + 0 = -1$$



TERCEIRA AÇÃO

De acordo com o gráfico anterior, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x^3 f(x)]$$

Realize o cálculo dos Limites, recorrendo as propriedades, e justifique seus passos:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$$



Quinto Encontro

Resumo

Tema	Cálculo de Limites
Pré-requisitos	Domínio do conceito de funções; Representação geométrica das funções; Manipulação das operações básicas; Domínio do software Geogebra;
Tempo estimulado	2 horas
Conceitos chave	Funções; Limite
Feedback	Recapitular as situações problemas envolvendo o cálculo de Limite

Materiais Necessários

- ☐ Computador; Projetor; aplicativo Symbolab; Calculadora; Software Geogebra; Simulador PhET;
- ☐ Quadro; Giz; Lápis; Borracha; Régua; Papel

Objetivos de Aprendizagem

Integrar os conceitos sobre Limite e do seu cálculo com o uso das representações;

Restringir e aprofundar o entendimento com o uso das MR;

Procedimentos metodológicos

Roteiro	Observações
A princípio, realizar um Feedback, expondo as situações problemas desenvolvidas.	

Nesse encontro, pretende-se integrar o cálculo de Limite através o conceito da taxa de variação da velocidade média. Assim, inicialmente expõem-se situações problemas, e após, uma síntese da implicação desse conceito para o cálculo.	Encarte 9;
Finalmente, propõem-se uma situação problema que envolva o que foi abordado, e solicita-se aos alunos que relacionam o cálculo com o uso de representações.	
Ao final do encontro, entregar o Mapa Conceitual produzido no encontro anterior, e solicitar para que ampliam seus MC, como também, considerem os <i>feedbacks</i> realizados	Essa atividade por ocorrer ao final do encontro, ou pode ser considerada uma atividade assíncrona.

Avaliação da Aprendizagem

Avaliação formativa (critério 1: identificar indícios na interação com o uso das representações; critério 2: verificar indícios de diferenciação progressiva e reconciliação integradora).

Instrumento avaliativo: registro no caderno de bordo.

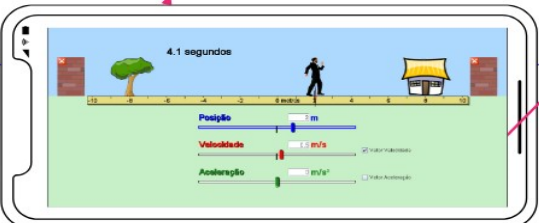
Encarte 9!

Cálculo de Limites

Como sabemos, a velocidade instantânea da pessoa (ou da partícula) em um instante $t(i)$. Recorre os olhares a um determinado intervalo de tempo.

A medida que a variação tende a 0, o deslocamento também tende a 0. Logo as velocidades mínima e máxima, vão se aproximando, e assim, caminharemos para a velocidade instantânea.

Tal expressão pode ser escrita das seguintes formas:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t_i)}{t - t_i}$$


Considere uma função horária que considere esse movimento $s(t)$, espaço em função do tempo. Encontre a velocidade instantânea para esse casos:

$$s(t) = t^2 + t - 2, \text{ com } t = 2$$

$$s(t) = \frac{1}{t}, \text{ com } t = 3$$

$$s(t) = 2 + 3t + 5t^2, \text{ com } t = 2$$

$$s(t) = 5t + 2, \text{ com } t = 5 \text{ e } t = 1$$

Observações:
 Relacione esses dados entre as representações.
 Há alguma relação com o problema da tangente?
 Qual sua síntese?



Sexto Encontro

Resumo

Tema

Limites

Materiais Necessários

- ☐ Computador; aplicativo CmapTools; Lápis; Borracha; Régua; Papel

Procedimentos metodológicos

Roteiro	Observações
Nesse encontro solicita-se a construção de um Mapa Conceitual final a respeito do conceito de Limite	Essa atividade poderá ser assíncrona; Os estudantes podem sentir-se livres para usar o aplicativo CmapTools ou realizá-lo no papel;

Avaliação da Aprendizagem

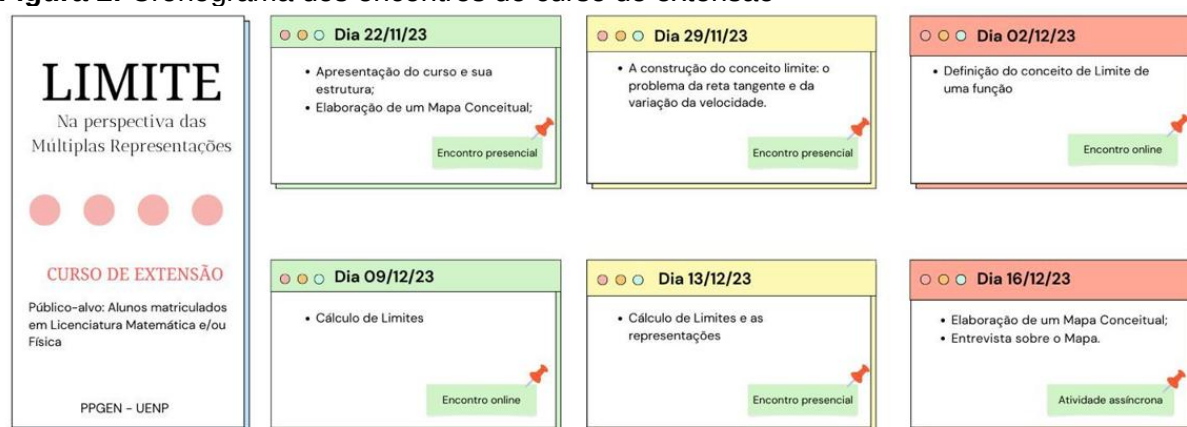
Avaliação somativa

4. RELATO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Aplicamos este PE a estudantes do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática que ainda não haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Conforme salientamos na dissertação, inscreveram-se dezoito participantes para o curso de extensão, mas apenas sete concluíram todas as atividades e estiveram presentes durante toda a implementação.

Implementamos essa sequência de atividades mediante um curso de extensão, o qual foi dividido em seis encontros com aulas síncronas e assíncronas, conforme a Figura 2.

Figura 2: Cronograma dos encontros do curso de extensão



Fonte: Criado pelo autor.

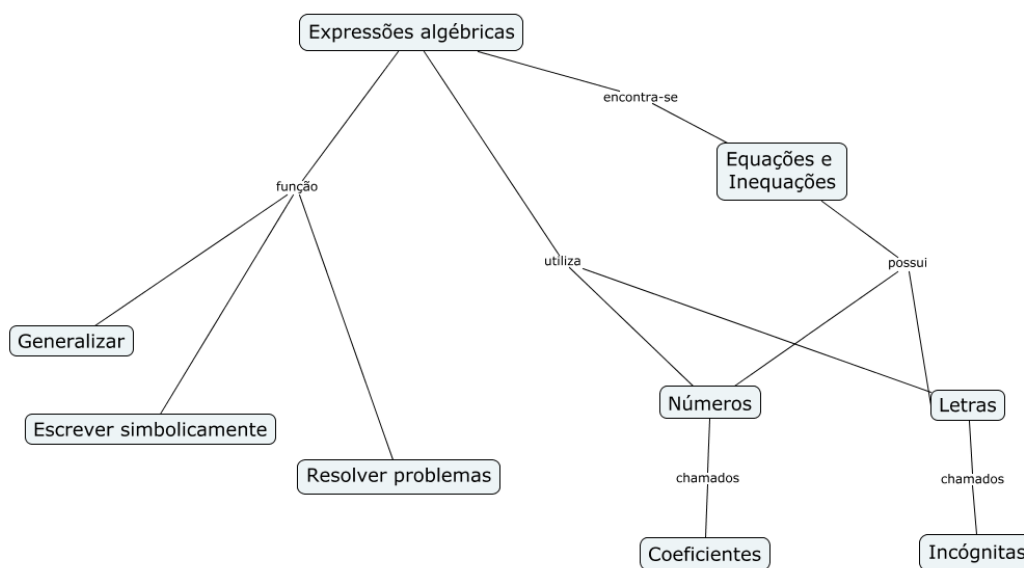
Conforme ilustrado na Figura 2, aplicamos o curso entre as datas do dia 22 de novembro de 2023 até 16 de dezembro de 2023. Ademais, salientamos que cada encontro correspondia a uma etapa da UEPS, no Quadro 2 apresentamos essa relação de etapas e encontros.

Nesse sentido, consideramos relevante descrever e comentar os encontros, assim, explanaremos essas ideias a seguir, identificando as etapas e seu desenvolvimento.

A segunda etapa correspondeu ao primeiro contato com os participantes. Desse modo, houve uma apresentação do pesquisador, e também, da pesquisa e seus objetivos que espera ser alcançados por ela. Em seguida, elucidamos aos estudantes a teoria da Aprendizagem Significativa (AS), sobre a UEPS e os Mapas Conceituais (MC).

Após essa exposição, salientamos os passos para a construção de um MC, evidenciando sua estrutura, a hierarquização e, principalmente, as palavras de ligação. Para tanto, exemplificamos a construção de um MC, por meio do software *CmapTools*⁵, sobre expressões algébricas, uma outra temática, conforme a Figura 3.

Figura 3: MC construído com os estudantes sobre Expressões Algébricas

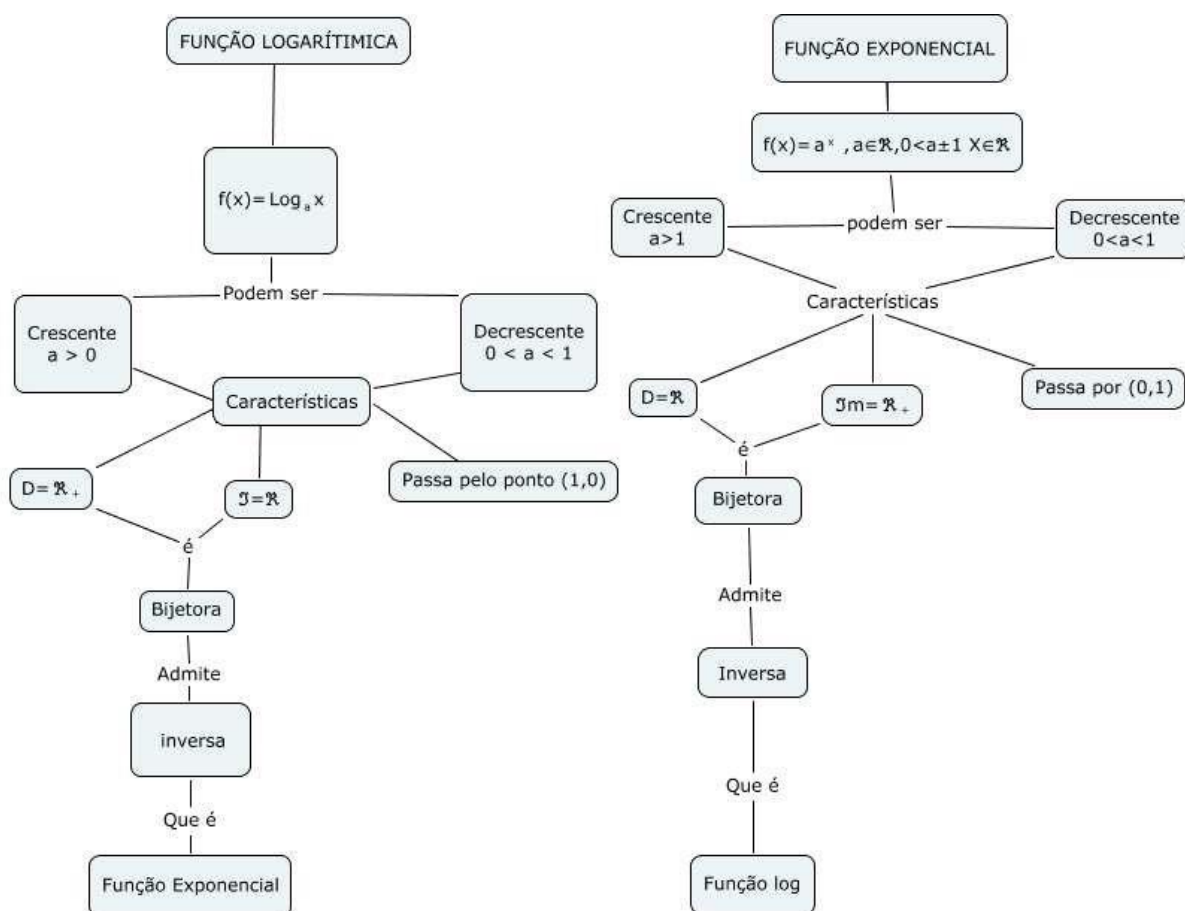


Fonte: Criado pelo autor.

Com a finalidade da familiarização do MC, solicitamos a eles que elaborassem uma representação esquemática, mediante o software, sobre o conceito de Função, visto que o eixo temático Limite recorre a esse conceito. A seguir, na Figura 4, apresentamos um exemplo de MC construído por um participante.

Figura 4: Mapa Conceitual construído pelo participante no primeiro encontro

⁵ O *CmapTools* é um software de mapeamento de conceito, o qual proporciona a usuários a elaborar, manusear, compartilhar suas representações através de Mapas Conceituais, de modo simples e ágil. Disponível em: <<https://cmap.ihmc.us/cmaptools/>>, acesso em: 22 de nov. 2023.



Fonte: elaborado pelo participante

Na terceira etapa (segundo encontro) elaboramos atividades com baixo nível de complexidade. Desse modo, construímos o conceito de Limite, de modo declarativo⁶ e procedimental, por meio do problema da reta tangente e da taxa de variação da velocidade média, com auxílio do software *Geogebra*⁷ e do simulador *PhET*⁸, respectivamente. A Figura 5, a seguir, apresenta algumas fotos desse encontro.

⁶ Conforme Moreira (2011, p. 4), modo declarativo: “é o conhecimento que pode ser verbalizado, declarado de alguma maneira, refere-se ao conhecimento sobre objetos e eventos; é representado mentalmente por proposições e imagens mentais”.

⁷ Geogebra trata-se de um software dinâmico de matemática que relaciona representações de conceitos como Álgebra e Geometria. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>, acesso em: 29 de nov. 2023.

⁸ Simulador *PhET* refere-se a um recurso didático com simulações interativas de ciência e matemática afim da exploração e descoberta desse ambiente intuitivo. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/>, acesso em 29 de nov. 2023.

Figura 5: Fotos da implementação das situações problemas



Fonte: Criado pelo autor.

Essas situações problemas tinham objetivo de funcionar como organizadores prévios, as quais os estudantes deveriam compreendê-las e ter a capacidade de modelá-las mentalmente⁹.

Na quarta etapa (terceiro encontro) continuamos com a explanação do conceito Limite, integrando-o à diferenciação progressiva. Introduzimos o conceito geral de Limite, apresentando uma visão inicial ampla e, em seguida, explanamos os aspectos mais específicos desse conceito recorrendo às MR como estratégia de ensino, com intuito de que os estudantes diferenciasssem as representações umas das outras.

Além da Diferenciação progressiva que desenvolvemos, as MR, por meio das funções pedagógicas propostas por Ainsworth (2006), têm o papel de *complementar, restringir e aprofundar* o conceito de Limite.

Nesse passo, complementamos o encontro com uma atividade colaborativa, mediante situações problemas apresentadas aos estudantes e, após, guiamos a atividade para uma apresentação e/ou discussão dos alunos com seus pares, com a finalidade de evidenciar alguns indícios de aprendizagem.

A quinta etapa (quarto encontro) teve como finalidade aprofundar o conceito de Limite. Iniciamos com uma apresentação geral do tema e seus aspectos mais abrangentes, entretanto, desenvolvendo essa abordagem em um nível alto de complexidade.

Também propomos situações problemas em níveis crescentes de

⁹ De acordo com Moreira (2011, p. 4), modelar mentalmente refere-se a “modelos mentais são funcionais para o aprendiz e resultam da percepção e de conhecimentos prévios (invariantes operatórios)”.

complexidades, bem como, uma atividade para que os alunos comparem os cálculos realizados nas situações problemas e confrontem às respostas com o aplicativo *Symbolab*¹⁰. Sugerimos, ainda, a articulação do cálculo de Limite com as respectivas representações, com o propósito dos estudantes atribuírem significados, e o pesquisador como mediador dessa construção. Nesta etapa, desenvolveram tanto a diferenciação progressiva quanto às MR, com as funções de *complementar e restringir*.

Ao final do encontro, foi proposto o esboço inicial do MC sobre o eixo temático Limite. Acreditamos que, além da familiarização com a construção, os estudantes poderiam, por meio deste mapa, elaborar seu MC final.

Na sexta etapa (quinto encontro) seguimos o processo de diferenciação progressiva com o desenvolvimento do cálculo de Limite, apresentando a articulação do conceito de variação da taxa de velocidade com o cálculo.

Nesse sentido, buscamos a reconciliação integradora, mediante as situações problemas, propondo a integração juntamente com as MR. As funções pedagógicas de *restringir e aprofundar* foram cruciais para efetivar o processo da Reconciliação Integradora nesta etapa.

Na sétima etapa (sexto encontro), recolhemos todas as atividades avaliativas e reunimos os dados do desenvolvimento da pesquisa. No último encontro, os estudantes construíram um MC Final sobre o eixo temático Limite.

Vale salientar que nesta pesquisa não utilizamos o MC construído no primeiro encontro (segunda etapa), pois essa representação esquemática teve como finalidade de familiarização dos estudantes com a construção do MC, assim, nessa elaboração solicitamos a eles que estruturassem um MC sobre o conceito de Função (outra temática), visto que o eixo temático Limite recorre a esse conceito. Diante isso, adotamos apenas o MC produzidos pelos estudantes no sexto encontro (sétima etapa) para nossa análise, em razão dele referir ao eixo temático de Limite, para isso, foi considerado como instrumento de avaliação da aprendizagem.

Como salientado, os MC consistem em representações esquemáticas que refletem os subsunçores dos discentes sobre determinado conceito ou tópico, presentes em sua estrutura cognitiva. O MC apresenta as principais ideias (conceitos chaves) que relacionam pontos de conexão entre elas, proporcionando uma visão

¹⁰ O *Symbolab* é uma ferramenta que propicia soluções de problemas matemáticos. Disponível em: <<https://pt.symbolab.com/>>, acesso em 09 de dez. 2023.

global e coesa do assunto, isto é, uma síntese cognitiva.

Na Figura 6, apresentamos um MC construído por um participante, e diante nossa análise realizada na dissertação, inferimos que o mesmo é classificado com um bom MC (ressaltamos que todos os dados e análises realizadas durante a execução da pesquisa encontram-se detalhados na dissertação que, por sua vez, encontra-se disponível na página do PPGEN, conforme dito anteriormente na seção de apresentação deste PE).

Figura 6: Mapa Conceitual Final apresentado pelo participante



Fonte: elaborado pelo participante seis

Esse MC é um instrumento avaliativo adotado na UEPS, com a finalidade de investigar o desempenho dos alunos mediante suas representações esquemáticas.

Após a entrega dos MC, solicitamos aos alunos que explicassem seus mapas, por meio de um áudio gravado no aplicativo *WhatsApp*. Nesta explicação, os discentes deveriam detalhar as ideias hierárquicas estabelecidas por ele, as ligações entre os conceitos e as palavras-chaves adotadas. O prazo para envio do áudio foi pré-estabelecido pelo pesquisador e deveria ser cumprido pelos alunos.

Sendo assim, na próxima seção vamos explicar nossas considerações finais para este produto, tendo em vista sua implementação.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Produto Educacional (PE), em formato de uma sequência de ensino com base nas UEPS e MR, foi publicado no ano de 2024 e implementado como um curso de extensão com sete estudantes do primeiro ano da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), Campus de Jacarezinho.

Este curso de formação inicial foi composto por seis encontros. Por meio da integração das MR na UEPS, evidenciamos o diferencial do PE gerado em relação a outros já desenvolvidos na área de Ensino, visto que essa abordagem sobressai no aspecto de incorporar o conceito de Limite com as representações que ele admite e aplicá-lo em situações problemas, constituindo um vínculo claro entre a teoria e sua perspectiva no mundo real, potencializando a atribuição de significado pelo estudante.

O objetivo primordial desta implementação foi interpretar as possíveis contribuições advindas da aplicação de uma UEPS Significativa desenvolvida a partir de MR, no ensino de Limites, para estudantes de Licenciatura em Matemática.

Para a coleta de dados, reunimos os registros escritos produzidos pelos estudantes ao longo da participação das atividades de ensino, as anotações em diário de bordo do pesquisador e os Mapas Conceituais (MC), bem como, os áudios gravados dos alunos a respeito da explicação de seus mapas.

Com base na análise dos dados coletados, concluímos que a UEPS estruturada proporcionou indícios de AS, quer dizer, os estudantes interagiram os seus conhecimentos prévios com as novas informações, atribuindo significado ao seu processo de aprendizado. Diante disso, sublinhamos a pertinência do emprego dessa UEPS como um material potencialmente significativo para o ensino de conceitos de Limite. Para verificar os dados e atividades dessa aplicação, recomendamos a leitura da dissertação que acompanha do produto educacional, disponível na página do PPGEN¹¹.

No que se refere aos MC, como instrumento avaliativo, observamos que eles refletiram a organização da estrutura cognitiva dos participantes a respeito do eixo temático Limite. Por meio dos áudios gravados, dos diálogos e das transcrições realizadas, foi possível identificar as concepções, indícios de compreensão sobre o

¹¹ Disponível em: <https://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>.

conceito, lacunas e equívocos ainda não superados, além de evidências do uso de várias representações do conceito.

Assim, a sequência de atividades proporcionou aos futuros professores de Matemática uma aprendizagem com significados, ultrapassando a mera memorização do conceito de Limite e suas características, isso é visível no processo avaliativo da implementação.

Esperamos que este PE, por seu caráter potencialmente significativo, potencialize ao docente como uma estratégia de ensino, o qual pode realizar adaptações conforme as necessidades, personalizando-o de acordo com sua realidade em sala de aula, desde que considere os princípios da UEPS e das MR.

REFERÊNCIAS

- AINSWORTH, S. **The Multiple Representation Principle in Multimedia Learning**. The Cambridge handbook of multimedia learning, 464, 2014.
- AINSWORTH, S. The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In J. K. Gilbert, M. Reiner, & M. Nakhleh (Eds.), **Visualization: Theory and practice in science education**. NewYork: Springer, p.191–208, 2008.
- AINSWORTH, S. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and Instruction**, 16, p. 183-198, 2006.
- AINSWORTH, S. The functions of multiple representations. **Computers & Education**, Pergamon Press, n. 33, p. 131-152, 1999.
- AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Portugal: Paralelo Editora, 2003.
- AUSUBEL, D. P. **Psicologia educacional: uma visão cognitiva**. 1978.
- AUSUBEL, D. P. **Educational Psychology: A cognitive view**. Nova Iorque: Holt, Rinehart & Winston, 1968.
- BAPTISTA, M; CONCEIÇÃO, T; PONTE, J. P. Estudo de aula como facilitador de aprendizagens de futuros professores de física e química sobre o uso de múltiplas. **APeDuC Revista-Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia**, v.1, n.1, p.41-54, 2020.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parecer Conselho Nacional de Educação Câmara de Educação Superior N.º: 1.302/2001**. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Diário Oficial da União de 05 março 2002. Seção 1, p. 15.
- D'AMBROSIO, B. S. Formação de Professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-Posições**. Campinas, v. 4, n. 1, p. 35 a 41, 1993.
- D'AMBRÓSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e pesquisa**, v. 31, p. 99-120, 2005.

DE OLIVEIRA, T. M. R.; AMARAL, C. L. C. Mapas conceituais como recurso didático para o ensino da Educação Ambiental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 2, p. 158-172, 2020.

FERRÃO, N. S.; MANRIQUE, A. L. O uso de mapas conceituais como elemento sinalizador da aprendizagem significativa em cálculo (The use of concept maps as an indicator of significant learning in Calculus). **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 19, n. 1, p. 193-216, 2014.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A.; PINTO, R. Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. **Quadrante**, Lisboa: APM, n. 8, 1999.

GOWIN, D. B. **Educating**. Ithaca, NY, Cornell University Press, 1981.

JOHNSON-LAIRD, P.N. **Mental models**. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1983.

LEMKE, J. L. Teaching all the languages of science: Words, symbols, images, and actions. In: **Conference on science education in Barcelona**, p. 483-492, 1998.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: imagem conceitual e definição conceitual**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal, aprendizagem significativa?** 2012. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/~moreira/oqueeafinal.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2023.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. 2. ed. ampl. São Paulo: EPU, 2011(a).

MOREIRA, M. A. Unidades de enseñanza potencialmente significativas – UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, p. 43-63, ago. 2011(b). Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/asc/?go=artigos&idEdicao=2>>. Acesso em: 13 mar. 2019.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006(a).

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)**, v.9, p. 1-14, 2007.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de

gráficos. FROTA, MCR; NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisa e debates**. Recife: SBEM, p. 11-25, 2009.

NOVAK, J. D.; CAÑAS, A. J. A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los. **Práxis Educativa**. Ponta Grossa, v.5, n.1, p. 9-29, 2010.

PEÑA, A. **O Mapas Conceituais – uma técnica para aprender**. São Paulo: Loyola, 2005.

PRAIN, V.; WALDRIP, B. An exploratory study of teachers' and students' use of multi-modal representations of concepts in primary science. **International Journal of Science Education**, v. 28, n. 15, p. 1843-1866, 2006.

RUIZ-MORENO, L.; SONZOGNO, M.C.; BATISTA, S. H. S.; BATISTA, N. A. Mapa conceitual: ensaiando critérios de análise. **Revista Ciência e Educação**. Bauru, v. 13, n.3, p. 453-463, 2007.

SCHÖN, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, v. 2, p. 77-91, 1992.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, n. 15, v.2, p. 4-14, 1986.

TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Springer Science & Business Media, 1991.

TANG, K. S; DELGADO, C; MOJE, E. B. An integrative framework for the analysis of multiple and multimodal representations for meaning-making in science education. **Science education**, v.98, n.2, p.305-326, 2014.

TREVISAN SANZOVO, D. T.; LABURÚ, C. E. Níveis significantes do significado das estações do ano com o uso de diversidade representacional na formação inicial de professores de Ciências. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v.17, n.3, p. 745-772, 2017.

TYTLER, R.; PRAIN, V.; PETERSON, S. Representational issues in students learning about evaporation. **Research in Science Education**, v. 37, n. 3, p. 313-331, 2007.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Publications mathématiques et informatique de Rennes**, n. S6, p. 47-50, 1989.

VINNER, S. The avoidance of visual consideration in Calculus students. **Focus on**

Learning Problems in Mathematics, v.2, n. 11, p.149-156, 1989.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

WON, M.; YOON, H.; TREAGUST, D. F. Students' learning strategies with multiple representations: Explanations of the human breathing mechanism. **Science Education**, v. 98, n. 5, p. 840-866, 2014.

ZOMPERO, A. F.; LABURÚ, C. E. As relações entre aprendizagem significativa e representações multimodais. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 12, p. 31-40, 2010.