Sociedade Brasileira de Matemática - **SBM**
Universidade Federal do Acre - **UFAC**
Mestrado Profissional em Matemática - **PROFMAT**

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: QUASE HOMOMORFISMO

UM EXEMPLO PARA DISCUTIR O CONCEITO DE QUASE HOMOMORFISMO

JOACEMI DA SILVA CAVALCANTE RODRIGUES

RIO BRANCO – AC
2025

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: QUASE HOMOMORFISMO

UM EXEMPLO PARA DISCUTIR O CONCEITO DE QUASE HOMOMORFISMO

Recurso Educacional orientado pelo prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos e apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Acre (UFAC), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre

Joacemi da Silva Cavalcante Rodrigues
José Ivan da Silva Ramos

Apresentação

Este trabalho visa facilitar a compreensão e dar destaque aos conceitos de homomorfismo e quase homomorfismo que aparecem no estudo dos temas da Matemática básica do Ensino Médio. Ele é vinculado a dissertação de mestrado intitulada "QUASE HOMOMORFISMO", apresentada como requisito para a conclusão do curso de mestrado em rede nacional (PROFMAT).

A proposta é tornar esses conceitos mais acessíveis e compreensíveis para estudantes do Ensino Médio, promovendo uma integração entre a prática e a teoria no currículo escolar. A introdução desses tópicos visa, não apenas aprimorar o conhecimento dos alunos, mas também, estimular o pensamento crítico e analítico, melhorando suas habilidades para estudos futuros em Matemática e áreas afins.

No contexto do Ensino Médio, a abordagem de temas como homomorfismo e quase homomorfismo pode ser feita por meio de uma sequência didática cuidadosamente planejada, para promover um aprendizado significativo e, portanto, uma ferramenta que o professor poderá utilizar na apresentação desses conceitos.

A sequência didática aqui desenvolvida se inicia com os conceitos mais básicos, depois avança para exemplos mais elaborados, associados com atividades práticas, buscando facilitar a compreensão, promover o desenvolvimento de habilidades e do raciocínio lógico e abstrato.

Além disso, a reflexão contínua, integrada a este recurso educacional, pode permitir que o professor adapte sua abordagem conforme o progresso individual do estudante, garantindo um melhor índice do aprendizado. Assim, a aplicação desses conceitos pode ser incentivada ao longo do processo.

Por fim, este recurso educacional, não apenas visa socializar os conceitos de homomorfismo e quase homomorfismo com os alunos do Ensino Médio, mas também, busca estimular o interesse dos estudantes por temas mais complexos, que, com certeza, fazem parte de sua formação, direta ou indiretamente.

Ao professor

Caro professor,

Para utilizar este recurso educacional de maneira eficaz é essencial realizar uma revisão minuciosa de todos os conceitos envolvidos nesta sequência, principalmente o conceito de homomorfismo. Além disso, é importante considerar o nível de conhecimento da turma, planejar estratégias e o momento certo para introduzir o novo conceito de QUASE HOMOMORFISMO, envolvendo os alunos com atividades práticas e exemplos que facilitem a compreensão dele.

Antes de iniciar esse processo, você pode realizar uma avaliação diagnóstica, o que pode ajudar a definir a melhor abordagem a ser feita.

Estabelecer expectativas claras, antecipar dificuldades potenciais e incentivar o engajamento dos alunos, desde o início, são ações fundamentais para uma implementação eficaz desta sequência didática.

Objetivos:

Compreender o conceito de homomorfismo de maneira significativa.

Compreender o conceito de quase homomorfismo.

Reconhecer funções que sejam quase homomorfismos.

Adquirir habilidades para ajustar funções para quase homomorfismos.

Introdução

Sejam todos muito bem-vindos!

Hoje, teremos uma aula especial e única, onde vamos explorar dois conceitos matemáticos que, apesar parecerem mais avançados, podem ser compreendidos neste nível de ensino: homomorfismo e quase homomorfismo, o segundo tipo de função, pode significar uma novidade.

Nosso objetivo é apresentar esses conceitos de maneira que estudantes do Ensino Médio possam entendê-los claramente e ver como eles podem aparecer em aplicações da Matemática.

Começaremos com uma breve revisão de conceitos fundamentais, como funções e operações básicas, para garantir que todos estejam prontos para entender o que vem a seguir. No segundo momento, abordaremos a definição de quase homomorfismo, utilizando exemplos simples e práticos, de como ajustar as funções de modo que tenhamos um homomorfismo.

Essa aula foi cuidadosamente planejada para que todos os estudantes pudessem adquirir e construir conhecimentos sólidos acerca desse novo conceito. Será um momento de aprendizado valioso e esperamos que todos aproveitem ao máximo.

Vamos iniciar nossa jornada no mundo dos homomorfismos!

Revisando conceitos básicos

Como já foi dito, antes de falar sobre homomorfismos, se faz necessário que todos os estudantes estejam confortáveis com os conceitos de funções e operações básicas definidas em um conjunto não vazio. Iniciaremos, então, com uma breve revisão sobre esses conteúdos para avaliar o nível de entendimento dos alunos e esclarecer algumas dúvidas que ainda possam existir. Isso será importante para que o aluno entenda que um homomorfismo é uma função que age de maneira especial entre dois conjuntos.

O conceito de função:

Uma função f é uma relação entre dois conjuntos não vazios, A e B, em que cada elemento do conjunto A, está associado a exatamente um elemento do conjunto B.

Representamos uma função pela expressão

$$\begin{array}{rcl} f: A & \rightarrow & B \\ x & \rightsquigarrow & f(x) = y \end{array}$$

e temos que:

i) o *domínio* de f, representado por $D(f) = A$, é o conjunto onde a função age, transformando cada $x \in A$ em um elemento $y \in B$.

ii) o *contradomínio* de f, representado por $CD(f) = B$, é o conjunto que contém todas as transformadas de f.

iii) O conjunto imagem de f, representado por $Im(f) = f(A)$, é o subconjunto do contradomínio que contém todos os valores transformados pela função. Em símbolos, temos $Im(f) = f(A) = \{f(x) \;/\; x \in A\}$

Exemplo 01: Tomaremos os conjuntos $A = B = \mathbb{N}$ e a função

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \leadsto & f(x) = 2x \end{array}$$

que relaciona cada número natural a um número natural par. Nesse caso, temos $D(f) = CD(f) = \mathbb{N}$ e $Im(f) = f(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$, respectivamente, o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função f.

Exemplo 02: Observemos a conhecida função

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \leadsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Para facilitar o entendimento de como essa função age, observemos a tabela abaixo:

x	$f(x) = x^2$	y
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	9
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	4
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	1
$-\frac{1}{2}$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	0
1	$f(1) = 1^2 = 1$	1
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$	
2	$f(2) = 2^2 = 4$	4
3	$f(3) = 3^2 = 9$	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$f(n) = n^2$	n^2

Podemos observar que para cada um dos elementos x, que escolhemos no domínio de f, há um único elemento correspondente em seu contradomínio. A função, em si. tem como imagem todo conjunto dos números reais não negativos, ou seja,

$$Im(f) = f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} = \mathbb{R}_+.$$

Operações definidas em um conjunto

Definição: Uma operação $*$ é bem definida em um conjunto $S \neq \emptyset$ se, e somente se, vale que $a * b \in S, \forall\, a, b \in S$.

Exemplos comuns de operações (bem) definidas em um conjunto incluem:

Adição em $\mathbb{Z}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$, vale que $a + \ b \in \mathbb{Z}$.

Multiplicação em $\mathbb{R}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, vale que $a\ b \in \mathbb{R}$.

Queremos destacar os conceitos de

União: a união do conjunto A com o conjunto B é o conjunto que contém todos os elementos de A e B. Isso é denotado por $A \cup B = \{x/x \in A$ ou $x \in B\}$.

Interseção: a interseção de A com B é o conjunto que contém todos os elementos que são comuns a A e B, ou seja, $A \cap B = \{x/x \in A$ e $x \in B\ \}$.

Agora, vamos incluir em nossos exemplos essas operações.

Seja $\emptyset \neq \Omega$ um conjunto. Em $P(\Omega) = \{X\ /\ X \subset \Omega\}$ estão bem definidas as operações $\cup$ (união) e $\cap$ (interseção).

União em $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{\Omega}\}$: $\forall\, A, B \in P(\Omega)$, vale que $A \cup B \in P(\Omega)$.

Interseção em $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{\Omega}\}$: $\forall\, A, B \in P(\Omega)$, vale que $A \cap B \in P(\Omega)$.

As operações de união e interseção definidas em $P(\Omega)$ gozam das propriedades listadas na Definição 02, em 1.2, sendo que $\emptyset$ é o elemento neutro da união e Ω é o elemento neutro da interseção.

Essas operações se ligam da seguinte forma: (**Distributividade da união em relação à interseção**): $\forall\, X, Y, Z \in P(\Omega)$, vale que $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Também vale que $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Também vale a **Distributividade da interseção em relação à união.**

O Conceito de homomorfismo

A palavra homomorfismo é de origem grega. É um combinado das palavras "homos" que significa "mesmo" e "morphe" que significa "formato". Os homomorfismos são funções especiais que nos permitem comparar dois conjuntos nos quais operações como a adição e a multiplicação estão definidas.

Definição: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y.

Dizemos que uma função

$$\begin{aligned} \varphi: X &\longrightarrow Y \\ x &\rightsquigarrow \varphi(x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo se, e somente se, $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b)$, $\forall\, a, b \in X$.

Se as operações $*$ e $\square$ forem operações de adição é comum dizer que φ é um homomorfismo aditivo e que φ é um homomorfismo multiplicativo, se $*$ e $\square$ forem operações de multiplicação. Contudo, existem homomorfismos que agem transformando somas em produtos e, vice-versa. Exemplos conhecidos são as funções elementares

$$\begin{aligned} exp:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+\backslash\{0\} \qquad \text{e} \qquad & log: \mathbb{R}_+\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\rightsquigarrow exp(r) & r &\rightsquigarrow log(r) \end{aligned}$$

Exemplo 01: A função conhecida

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow f(x) = 2x \end{aligned}$$

é um homomorfismo aditivo: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, vale que

$$f(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$$

Exemplo 02: Vamos definir por $\#X \coloneqq$ a cardinalidade do conjunto X. Assim, podemos definir a função

$$\begin{aligned} \#: P(\Omega) &\rightarrow \mathbb{N} \\ X &\rightsquigarrow \#(X) \end{aligned}$$

e considerar as operações de "união" e "adição" definidas, respectivamente, em $P(\Omega)$ e $\mathbb{N}$.

Agora, $\forall\, A, B \in P(\Omega)$, vale que $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$. E, se tivermos $\#(A \cap B) \neq 0$, a função # não será um homomorfismo.

Exemplo 03: Perceba que nas funções já mencionadas, **a função exponencial não é um homomorfismo aditivo**: se $a, b \in \mathbb{R}$, em geral, temos $exp(a + b) \neq exp(a) + exp(b)$.

Mas, será homomorfismo, se considerarmos a multiplicação em $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. Esse ajuste também nos convida a dizer que, aditivamente,

$$\begin{array}{rcl} exp\colon \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+\backslash\{0\} \\ r & \rightsquigarrow & \exp(r) \end{array}$$

é um ***quase homomorfismo***.

A **função logaritmo não é um homomorfismo** multiplicativo: para $a, b \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, em geral, $ln(ab) \neq ln(a)ln(b)$ Mas, será homomorfismo, se considerarmos a adição em $\mathbb{R}$. Então queremos dizer que, multiplicativamente,

$$\begin{array}{rcl} ln\colon \mathbb{R}_+\backslash\{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \rightsquigarrow & \ln(r) \end{array}$$

é um ***quase homomorfismo***.

Esses exemplos justificam o "ou" colocado no item ii) da definição acima. Você já é capaz de relacionar outros exemplos?

Considere Ω um conjunto finito e pense nas funções

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}\colon P(\Omega),\cup & \rightarrow & P(\Omega),\cup \\ X & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_\Omega(X) \coloneqq \text{complementar de } X \text{ em } \Omega. \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{C}\colon P(\Omega),\cap & \rightarrow & P(\Omega),\cap \\ X & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_\Omega(X) \end{array}$$

Esses são dois ***quase homomorfismos***. Faça os ajustes e obtenha dois homomorfismos para comprovar isso.

As abordagens que fizemos serão comentadas mais uma vez nas discussões feitas na próxima seção deste trabalho. Muitas coisas podem ser sugeridas a posteriori. Mas, acreditamos que a ideia de se estabelecer a definição de um ***quase homomorfismo*** já tem a nossa contribuição.

Quase homomorfismo

Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y.

Dizemos que uma função

$$\begin{aligned} \eta : M &\longrightarrow Y \\ m &\rightsquigarrow \eta(m) \end{aligned}$$

é um ***quase homomorfismo*** se, e somente se, uma das condições são satisfeitas $\eta = \varphi_{/_M}$ é um homomorfismo, quando fazemos a restrição de uma função

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow Y \\ x &\rightsquigarrow \varphi(x), \end{aligned}$$

que não é um homomorfismo, ao subconjunto M, conveniente escolhido em $D(\varphi) = X$, no qual a operação $*$ também está (bem) definida.

$\eta = \varphi$ passa a ser um homomorfismo, quando substituímos as operações $*$ ou $\square$, respectivamente, definidas em X ou em Y.

O apêndice, anexado neste recurso educacional, contém uma atividade aplicada como forma de validação do conceito a ser estabelecido.

Atividade prática: Reconhecendo um quase homomorfismo

A validação desta sequência didática será feita através de uma atividade que foi desenvolvida em sala de aula, pensada segundo o roteiro abaixo e que trata de contagem de elementos de um conjunto.

Roteiro:

1. Apresentar uma caixa principal contendo um “conjunto” de várias bolinhas coloridas com as cores amarelo e branco. Algumas somente com uma cor e outras com 2 cores, amarelo e branco.

2. Relembrar os conceitos de união e interseção de conjuntos, apelando para o fato de que a “união” dos conjuntos das bolinhas amarelas com o das bolinhas brancas e o das bolinhas que possuem 2 cores, dão a totalidade do que tem na caixa. A “interseção”, explicar, mencionando as bolinhas com as cores amarelo e branco.

3. Disponibilizar, sobre uma mesa, no centro das atenções dos alunos, 2 caixas, cada uma capaz de abrigar um "subconjunto" de bolinhas que será retirado da caixa principal.

4. Fazer 2 retiradas aleatórias, uma por vez, colocando as bolinhas obtidas em cada uma das caixas disponibilizadas, de modo a formar dois "subconjuntos" não vazios (de bolinhas). Digamos, $A = \{\text{Bolinhas que têm a cor amarela}\}$ e um subconjunto $B = \{\text{Bolinhas que têm a cor branca}\}$.

5. Realizar a seguinte contagem: o número de bolinhas que estão em A ou B, que possuem a cor amarela ou a cor branca, ou seja, determinar $\#(A \cup B)$.

6. Voltar as bolinhas para a caixa principal e fazer 2 retiradas, uma por vez, numa escolher somente bolinhas amarelas e na outra escolher somente bolinhas brancas, colocando as bolinhas obtidas em cada uma das caixas disponibilizadas, de modo a formar $M = \{\text{Bolinhas somente na cor amarela}\}$ e $N = \{\text{Bolinhas somente na cor branca}\}$, dois "subconjuntos".

7. Realizar a seguinte contagem: o número de bolinhas que está em M ou N, que possuem somente a cor amarela ou somente a cor branca, ou seja, $\#(M \cup N)$.

8. Retirar da caixa principal todas as bolinhas que possuem duas cores, amarela e branco. Em seguida, nomear a caixa pela letra C e considerar o conjunto $\mathcal{L}$ de todos os possíveis subconjuntos de C, formados por bolinhas de uma cor só. Então, concluir que a função

$$\begin{array}{rcl} \#: L & \to & \mathbb{N} \\ X & \rightsquigarrow & \#X \coloneqq \text{cardilalidade de } X \end{array}$$

que conta o número de bolinhas de cada conjunto X, é tal que $\forall\, A, B \in L$, temos $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) - \#(\emptyset) = \#(A) + \#(B) - 0$.

Noutro sentido, dados $A, B \in L$, se $\#(A \cup B) = 4 = 1 + 3 = 2 + 2$, por exemplo, concluir que $\#(A) = 1$ e $\#(B) = 3$ ou $\#(A) = \#(B) = 2$.

9. Reconhecer que

$$\begin{array}{rcl} \#: P(C) & \to & \mathbb{N} \\ X & \rightsquigarrow & \#X \coloneqq \text{cardilalidade de } X \end{array}$$

é um exemplo que mostra que a função # parece se comportar como um homomorfismo, mas restringimos a contagem somente aos conjuntos disjuntos que formamos com as bolinhas.

Outro problema que aponta que # também não é um quase homomorfismo é que o conjunto $L = \{M \in P(\Omega) / \forall\, Y \in P(\Omega), M \cap Y = \emptyset\}$ não é fechado para a operação $\cup$: se X e $Y \in L$, claro que $(X \cup Y) \cap M = (X \cap M) \cup (Y \cap M) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. Porém, relacionando X ou Y com $X \cup Y$, temos $(X \cup Y) \cap X = X$ ou $(X \cup Y) \cap Y = Y$.

Dessa forma, não podemos considerar $\#_{/_L}$ para definir um quase homomorfismo conforme o item ii) 2.3.

Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo apresentar os conceitos de homomorfismo e quase homomorfismo de maneira clara e objetiva, destacando algumas funções que comumente aparecem na Matemática do ensino básico, A proposta pedagógica foi materializada em uma sequência didática estruturada, visando a divulgação e o estabelecimento de um novo conceito que foi pensado a partir de algumas de nossas observações.

A atividade de validação juntamente com o roteiro desta sequência didática, a nosso ver, permitiu que os estudantes compreendessem, de forma significativa, o conceito de um quase homomorfismo, conectando os novos conhecimentos à sua base de aprendizagem.

A atividade prática e os debates em sala de aula possibilitaram o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como a abstração e a capacidade de modelar um objeto matemático. Isso nos faz crer que o trabalho contribui de forma significativa para a compreensão do conceito de quase homomorfismo e demonstra a importância do uso de metodologias no ensino de Matemática, que termina fazendo com que os alunos se tornem mais críticos e mais capazes, o que é essencial para seu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Referências Bibliográficas

[1] Bezerra, Marcos V. A.; Funções Pares e Ímpares (Generalização de Conceitos); TCC - PROFMAT (Mestrado em Mestrado em Rede Nacional em Matemática); SBM; 2016;

[2] Courant, R.; Cálculo Diferencial e Integral; Editora Globo; RS; 1970.

[3] Domingues, Hygino H. e Iezzi, G. Álgebra Moderna; Ed. Atual; 2003.

[4] Gonçalves, A.; Introdução à Álgebra; Projeto Euclides; IMPA; RJ; 2001.

[5] Silva, Carlos A. Dantas da; Homomorfismos e Elementos Idempotentes de um Conjunto; TCC - PROFMAT (Mestrado em Mestrado em Rede Nacional em Matemática); SBM; 2023;