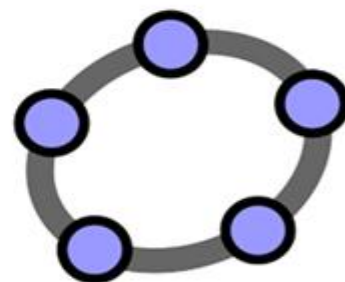




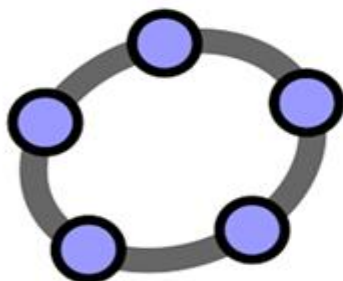
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino Médio

FERNANDO AUGUSTO CUNHA CORDEIRO JUNIOR

FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES



**O ENSINO DE CORPOS REDONDOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA:
Produto Educacional**



Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior
Fábio José da Costa Alves

O ENSINO DE CORPOS REDONDOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Produto Educacional

Produto educacional vinculado à dissertação “O ENSINO DE CORPOS REDONDOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA” do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Belém-PA
2025

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor da Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-reitor da Universidade do Estado do Pará

Jofre Jacob da Silva Freitas
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Pedro Franco de Sá
Coordenador do PPGEM

Ana Kely Martins Da Silva
Vice Coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa	Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva	Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. Antonio José Lopes	Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado	Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha	Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão	Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira	Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha	Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz	Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior	Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira	Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva	Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves	Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva	Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo	Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha	Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias	Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Fábio José da Costa Alves
Cinthia Cunha Maradei Pereira
Saul Rodrigo da Costa Barreto

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

C95e Cordeiro Junior, Fernando Augusto Cunha
O ensino de corpos redondos com o auxílio do software geogebra /
Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior, Fábio José da Costa Alves. -- Belém,
2025.
73f.

Produto educacional vinculado à Dissertação “o ensino de corpos redondos com o auxílio do software geogebra” do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática - Universidade do Estado do Pará. Campus I – Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2025.
ISBN:

1. Corpos Redondos-estudo e ensino (ensino médio) 2. Geogebra 3.
Sequência Didática. I. Alves, Fábio José da Costa. II. Título.
ISBN: 978-65-5291-012-7 <https://doi.org/10.5281/zenodo.18437138>
CDD. 22 ed. 510

Elaborada por Priscila Melo CRB2/1345



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: “O Ensino de Corpos Redondos com auxílio do software Geogebra”

Mestrando: **Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior**

Data da avaliação: **15/01/2025**

PÚBLICO-ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

() Estudantes do Ensino Fundamental (x) Estudantes do Ensino Médio

() Professores do Ensino Fundamental () Professores do Ensino Médio

() Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(x) Sequência Didática () Página na Internet () Vídeo

() Texto Didático (alunos/professores) () Jogo Didático () Aplicativo

() Software () Outro: _____

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: _____

() Não () Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim () Não () Não se aplica

b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim () Não () Não se aplica

c) *Possui orientações ao estudante:* () Sim () Não (X) Não se aplica

d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim () Não () Não se aplica

e) *Possui referências:* (X) Sim () Não () Não se aplica

f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim () Não () Não se aplica

g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim () Não () Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

(X) Sim, onde: _____

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

(X) Sim, onde: _____

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

() Sim, onde: _____

(X) Não, justifique: _____

() Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

() na escola, como atividade regular de sala de aula

() na escola, como um curso extra

(X) outro: laboratório de informática

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

() Alunos do Ensino Fundamental

(X) Alunos do Ensino Médio

() Professores do Ensino Fundamental

() Professores do Ensino Médio

() outros membros da comunidade escolar, tais como _____

() outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO () APROVADO COM MODIFICAÇÕES () REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Prof^o. FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES (Presidente)

Doutor em Geofísica

IES de Obtenção do Título: UFPA

Prof^a. CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA (Membro Interno)

Doutora em Bioinformática

IES de Obtenção do Título: UFPA

Prof. SAUL RODRIGO DA COSTA BARRETO (Membro Externo2)

Doutor em Educação, Ciências e Matemática

IES de Obtenção do Título: UFPA

Documento assinado digitalmente
gov.br **FABIO JOSE DA COSTA ALVES**
Data: 23/01/2025 14:44:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente
gov.br **CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA**
Data: 23/01/2025 10:16:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente
gov.br **SAUL RODRIGO DA COSTA BARRETO**
Data: 15/01/2025 19:33:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Sumário

1	APRESENTAÇÃO	6
2	ASPECTO CURRICULARES SOBRE A GEOMETRIA ESPACIAL: CORPOS REDONDOS	7
3	ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA: ESTUDO DE CORPOS REDONDOS	9
3.1	DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE UM CILINDRO	11
3.1.1	Área total da superfície do cilindro reto	14
3.1.2	Volume do cilindro	14
3.2	DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DO CONE	15
3.2.1	Área da superfície de um cone reto	17
3.2.2	Volume do Cone (V_c).....	18
3.3	TRONCO DE CONE	19
3.3.1	Área da superfície de um tronco de cone reto	20
3.3.2	Volume de um tronco de cone reto (V_t)	21
3.4	ESFERA	22
3.4.1	Área da superfície da esfera	24
4	ORIENTAÇÕES GERAIS AO PROFESSOR	27
4.1	ORIENTAÇÃO DE CADA ATIVIDADE	28
4.1.1	Atividade 1: introdução ao estudo de corpos redondos	29
4.1.2	Atividade 2: conhecendo o artefato geogebra	30
4.1.3	Atividade 3: conhecendo o objeto cilindro	30
4.1.4	Atividade 4: definir as áreas e o volume de um cilindro	31
4.1.5	Atividade 5: conhecendo o sólido cone	32
4.1.6	Atividade 6: determinar as áreas e o volume do cone	33
4.1.7	Atividade 7: conhecendo o sólido tronco de cone	33
4.1.8	Atividade 8: as áreas e o volume do tronco de cone	34
4.1.9	Atividade 9: conhecendo o sólido esfera	35
5	A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	36
6	PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DOS OBJETOS NO GEOGEBRA	63
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

1 APRESENTAÇÃO

Inicialmente, este produto educacional é o resultado de uma sequência didática para o ensino de corpos redondos com o auxílio do GeoGebra, desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), durante uma pesquisa de dissertação de mestrado. Este produto é destinado a professores e alunos do Ensino Médio, tendo como objetivo contribuir para o ensino e a aprendizagem de corpos redondos.

Nesse sentido, trata-se de um material didático validado tanto na qualificação quanto na experimentação com alunos do Ensino Médio de escola pública, apresentando potencialidades quantitativas e qualitativas para alcançar o objetivo proposto: construir e testar uma sequência didática voltada para o ensino de corpos redondos utilizando o software GeoGebra.

Por outro lado, diante do atual cenário educacional, em que diversas disciplinas presentes no currículo escolar desafiam os estudantes, a Matemática é vista por muitos como uma das matérias mais difíceis do Ensino Médio. Ao longo de nossa trajetória acadêmica, em pesquisas sobre o ensino de Matemática, participações em projetos de iniciação à docência e na experiência em sala de aula, observamos que alunos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio enfrentam dificuldades tanto para identificar objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais, quanto para realizar cálculos relacionados a esses objetos.

Assim, nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) ressalta que softwares e aplicativos são ferramentas importantes no ensino da geometria espacial, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades e competências exigidas. Além disso, observa-se também que a geometria tem ganhado destaque desde o Ensino Fundamental, com habilidades sendo desenvolvidas desde as primeiras etapas da educação básica. Por essa razão, este produto fundamenta-se teoricamente na teoria instrumental de Rabardel (1995).

Ademais, portanto, a BNCC destaca que, em Matemática, o uso de registros de representação e de diferentes linguagens é essencial para a compreensão, resolução e comunicação de resultados em atividades. Desse modo, a capacidade de transitar entre mais de dois registros de representação favorece a flexibilidade e a fluidez na área, promovendo, ao mesmo tempo, o desenvolvimento do raciocínio. Em vista disso, baseamo-nos na teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (1993).

2 ASPECTO CURRICULARES SOBRE A GEOMETRIA ESPACIAL: CORPOS REDONDOS

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, p. 523), uma das competências específicas estabelecidas para o estudo de geometria é:

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos em seus campos — Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, **Geometria**, Probabilidade e Estatística — para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir uma argumentação consistente.

Ou seja, basicamente o documento nos traz que o ensino de geometria tem que ter procedimentos que leve ao aluno desenvolver uma abordagem matemática para resolver problemas, analisar os resultados e comunicar as soluções de forma fundamentada e clara.

Além disso, uma das habilidades da BNCC (EM13MAT309) destaca:

Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e **corpos redondos (cilindro e cone)** em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

Isto é, a ideia é usar o cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos para resolver problemas práticos, especialmente aqueles ligados à construção, decoração ou outras atividades do dia a dia do aluno. É importante ressaltar que essa habilidade, segundo a BNCC, pode ser desenvolvida em qualquer etapa do ensino médio.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontam outras habilidades que precisam ser mobilizadas pelos alunos do ensino médio, tais como:

- Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como a esfera, o cone, o cilindro e outros;
- Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais;
- Percepção de elementos geométricos presentes nas formas da natureza e nas criações artísticas;
- Representação de figuras geométricas, com ênfase na identificação das características dessas figuras por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções.

Por sua vez, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD, 2021), na coleção **Conexões: Matemática e suas Tecnologias, Funções e Aplicações, da editora Moderna**, sugere que o estudo de corpos redondos seja ministrado no último bimestre do 2º ano do Ensino Médio, após ao estudo de figuras planas, introdução a

Geometria Espacial e poliedros.

Vale destacar que No Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida; por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho.

3 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA: ESTUDO DE CORPOS REDONDOS

Professor e aluno, antes de seguirmos para a sequência didática e aprofundarmos o estudo dos corpos redondos, é importante entendermos os conceitos fundamentais da Geometria Euclidiana. Caso o aluno e o professor já tenham contato com o instrumento GeoGebra (aplicativo, online ou software), será interessante para ambos utilizá-lo para iniciar o estudo desses axiomas, teoremas e conceitos.

Nesse sentido, ao estudarmos objetos que possuem mais de uma dimensão e que ocupam espaço, ou seja, aquilo que tem volume, estamos nos deparando com figuras geométricas espaciais ou sólidos geométricos. Através da geometria espacial, determinamos suas propriedades por meio de fórmulas, teoremas e axiomas matemáticos. No entanto, será necessário conhecer alguns conceitos básicos, como postulados e teoremas, para que possamos evoluir nos conceitos dos corpos redondos.

Ponto: o seu conceito é primitivo. É aceito como verdade absoluta e que não precisa de demonstração. Ponto no espaço representa localização, geralmente com uma representação de letras maiúsculas (A, B, C, D...). Os pontos são infinitos e não possui dimensões mensuráveis.

Reta: Retas têm infinitos pontos. É infinita nos dois lados de suas extremidades e é a distância mais curta entre dois pontos. Muitas das vezes representadas por letras minúsculas. (r, s, t, ...).

Plano é uma superfície infinita que se estende em todas as direções. Geralmente representadas por letras gregas. (α , β , γ , θ , ...).

Tendo em vista estes conceitos primitivos, veremos agora os primeiros postulados e alguns teoremas. Haja vista que, os postulados são axiomas, ou seja, não necessita de demonstrações, já os teoremas são conclusões sustentadas em postulados e precisam ser demonstrados.

Postulado 1: Retas e plano são formados por conjuntos de pontos.

Postulado 2: Existem infinitos pontos pertencente a uma reta, assim como infinitos pontos que não pertencem a ela.

Postulado 3: Existem infinitos pontos que pertencem a um plano, assim como infinitos pontos que não pertence a ele.

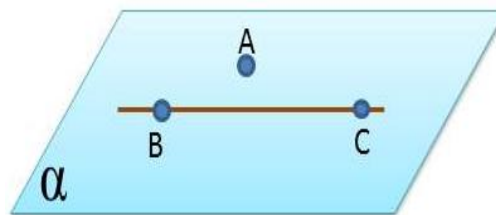
Postulado 4: uma única reta pode ser formada por dois pontos distintos.

Postulado 5: Três pontos não colineares determinam um único plano.

Considerando os postulados, determinaremos agora um primeiro teorema.

Teorema 1: uma reta e um ponto não pertencentes a ela determinam o que chamamos de plano (figura 1). Sejam os pontos distintos A, B, e C com B e C pertencentes a uma reta s e o ponto A não pertencente a esta reta. Pelos postulados 5, existe um único plano determinado por A, B, C. o postulado 6 faz com que cheguemos às seguintes conclusões que s está contida em α , pois B e C pertencem a s e a α . Podemos concluir que, α é o único plano que contém a reta s e o ponto A.

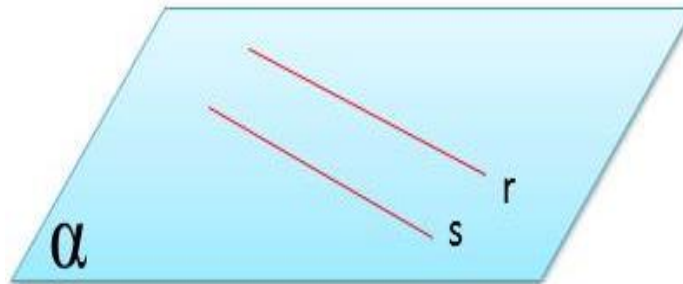
Figura 1 - Plano



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Retas paralelas (figura 2): duas retas qualquer r e s são paralelas se e somente se elas são coplanares e não possuem pontos em comum, representado por $r//s$.

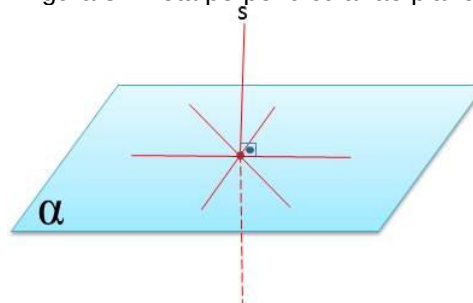
Figura 2 - Retas paralelas



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Reta perpendicular ao plano (figura 3): uma reta s é perpendicular se e somente se s é perpendicular a todas as retas concorrentes a ela contidas em α .

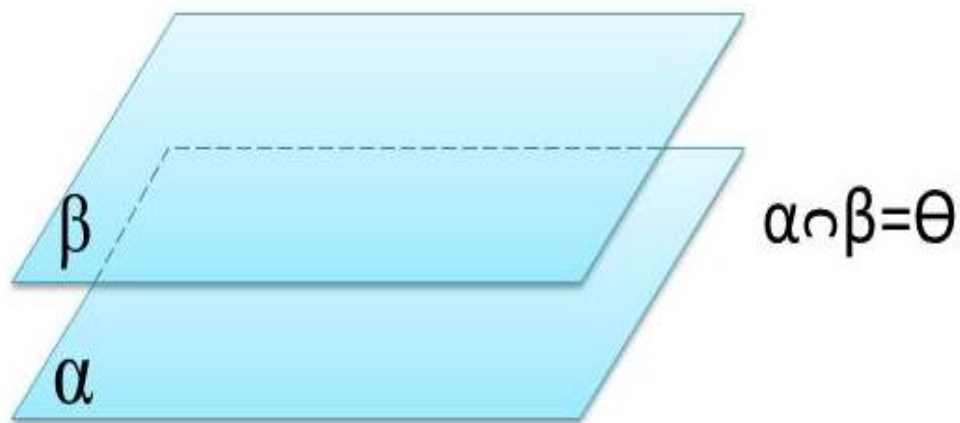
Figura 3 - Reta perpendicular ao plano



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Planos paralelos (figura 4): dois planos quaisquer α e β são paralelos se e somente se não possuem pontos em comum.

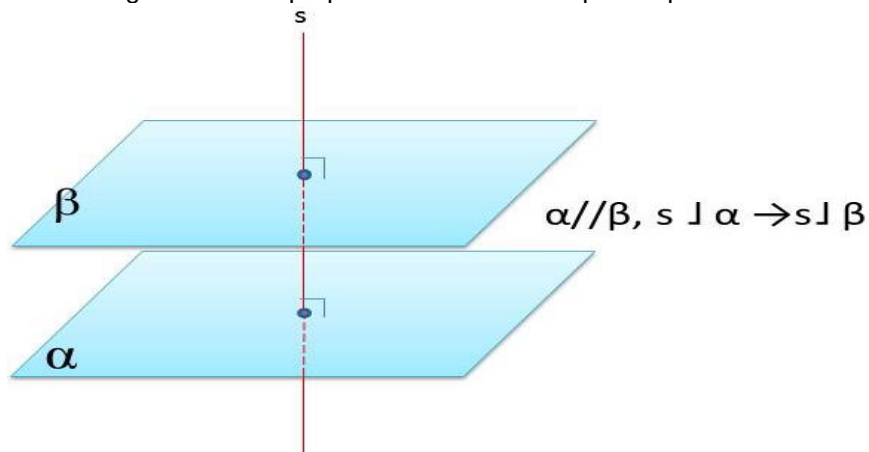
Figura 4 - Planos paralelos



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Uma das propriedades do paralelismo (figura 5) entre dois planos diz que: se α e β são planos paralelos, toda reta s perpendicular a um deles será perpendicular ao outro.

Figura 5 - Reta perpendicular entre dois planos paralelos

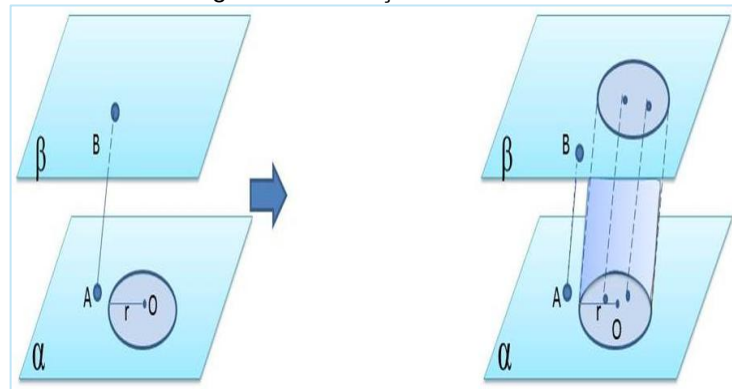


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

3.1 DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE UM CILINDRO

A definição mais simples que se pode dar ao cilindro ou cilindro circular, que ele é um sólido geométrico alongado e de forma arredondada que possui seus diâmetros ao longo de todo o comprimento. Ou, matematicamente falando, consideramos dois planos distintos e paralelos, α e β , um círculo de centro O e raio r , contido em α , e um segmento $\overline{AB}$, com A pertencente em α e B pertencente em β . Denomina-se cilindro circular (figura 6), ou simplesmente cilindro, o conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$ com uma extremidade o círculo de centro O em α , e outra extremidade em β .

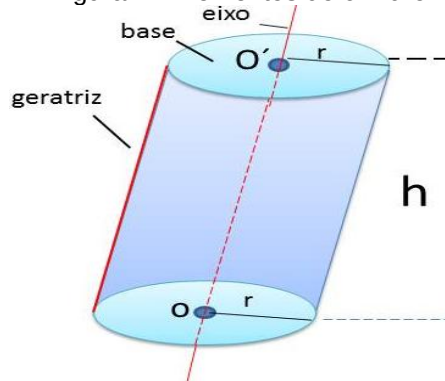
Figura 6 - Definição de Cilindro



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

O cilindro tem os seguintes elementos (figura 7):

Figura 7 - Elementos do cilindro

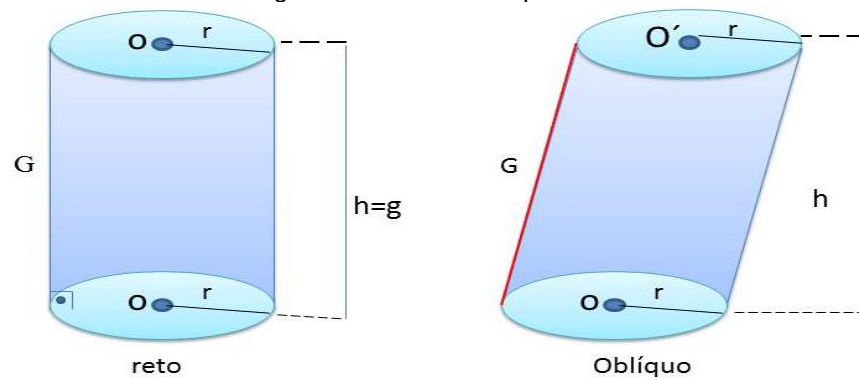


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

- **Bases:** como o cilindro é construído através de dois planos paralelos com círculos contidos em ambos, logo as bases do cilindro são círculos paralelos, um superior e outro inferior.
- **Geratrizes:** são segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ com extremidades nas circunferências das bases que corresponde com a altura.
- **Eixo:** é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- **Altura (h):** é a distância entre os planos das bases.
- **Superfície lateral:** é a reunião de todas as geratrizes. A área dessa superfície é chamada área lateral.
- **Raio:** é distância entre o centro da base do cilindro e a extremidade.

O cilindro pode ser classificado como reto ou oblíquo (figura 8). Isto vai depender da inclinação das geratrizes, pois se elas formarem um ângulo reto com as bases chamamos de reto, oblíquo quando a mesma estiver com as bases.

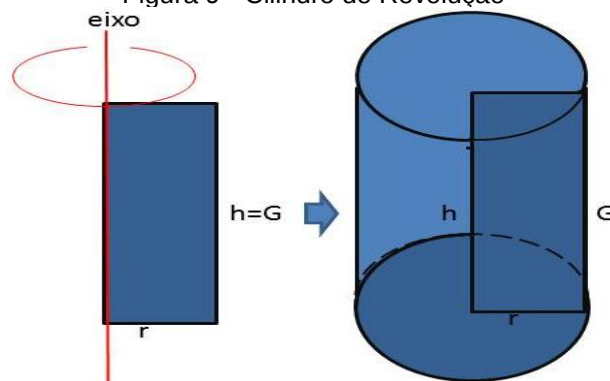
Figura 8 - Cilindro obluo



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Outra denominação que podemos dar para o cilindro reto é de cilindro de revolução (figura 9), do qual pode ser construído pela rotação de uma região retangular em torno de seu eixo, em um giro de 360° .

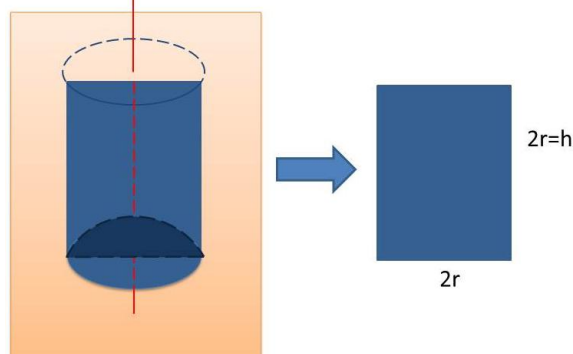
Figura 9 - Cilindro de Revolução



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Secção meridiana (figura 10)  a interseção do cilindro com um plano que contm a reta OO' determinada pelos centros das bases. Quando seccionamos um cilindro reto regular resulta em um quadrado, isto é, $2r=h$, então denominamos de cilindro equilátero.

Figura 10 - Cilindro Equilátero

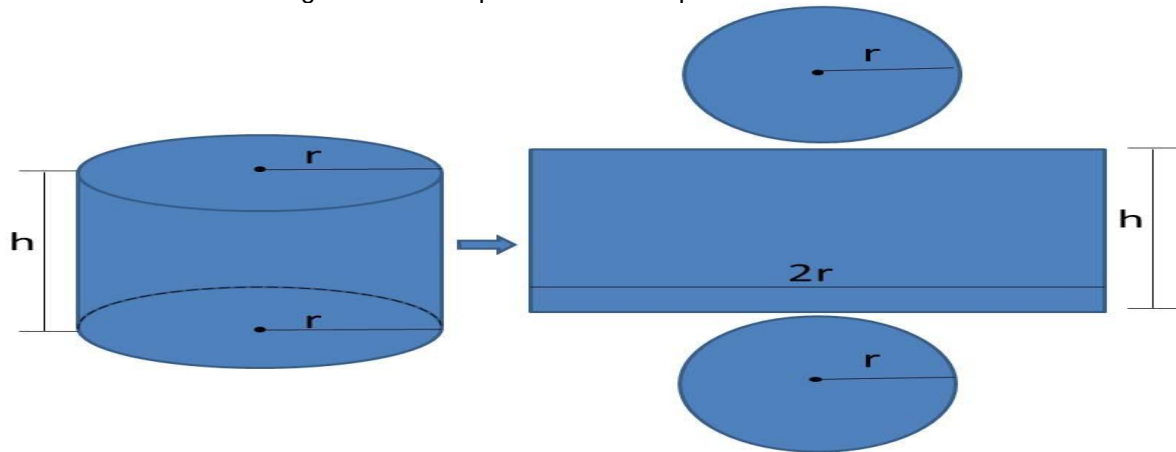


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

3.1.1 Área total da superfície do cilindro reto

Área da superfície do cilindro (figura 11) é a soma da área lateral mais as bases

Figura 11 - Área planificada da superfície do cilindro



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A superfície lateral de um cilindro reto ou cilindro de revolução é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e h (altura do cilindro). Isso significa que a superfície lateral de um cilindro de revolução desenvolvida num plano (planificada, figura 11) é um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h . Portanto área lateral é

$$A_l = 2\pi r h$$

Área total (A_t) de um cilindro é a soma da área lateral (A_l) com as áreas das duas bases ($B = \pi r^2$); logo:

$$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$A_t = 2\pi r(h + r)$$

3.1.2 Volume do cilindro

Para calculamos o volume do cilindro vamos usar o princípio de Cavalieri (figura 12). Consideramos algumas moedas empilhadas de duas formas. A primeira forma será pôr-as em ordem e outra em desordem, percebe-se que ambas têm a mesma altura e quantidade de moedas, logo o volume é o mesmo, não importando a maneira de como elas são organizadas.

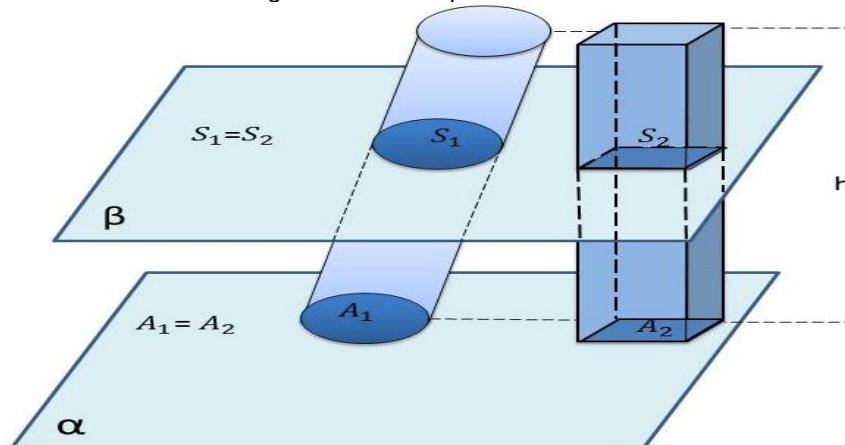
Figura 12 Princípio de Cavalieri



Fonte: Autor

Formalizando de acordo com figura 13, considerando os sólidos S_1 e S_2 , cuja altura h é a mesma, apoiados em um mesmo plano horizontal α , e um plano β , paralelos a α , que determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas A_1 e A_2 . Nesse caso, se $A_1 = A_2$ para qualquer plano β , temos que o volume de S_1 é igual a S_2 , ou seja, $V_{S_1} = V_{S_2}$.

Figura 13 - Princípio de Cavalieri



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

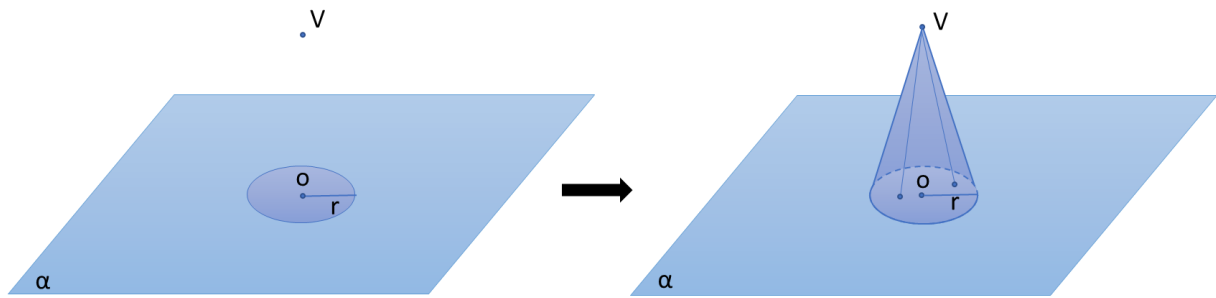
Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cilindro e o do prisma são iguais. Como o volume do prisma é dado por $V_p = A_b \cdot h$, temos que o volume do cilindro é dado por:

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 h$$

3.2 DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DO CONE

Definição (figura 14): Consideramos um círculo (região circular) de centro O e raio r situado em um plano α e um ponto V fora de α . Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

Figura 14 - Definição de cone

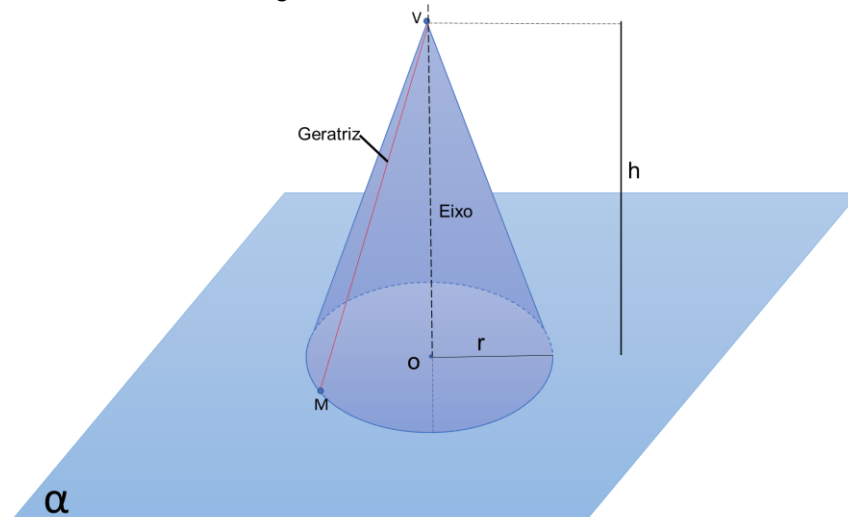


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Em um cone, podemos destacar os seguintes elementos (figura 15):

- A **base** é o círculo de raio r e centro O .
- O **vértice** é o ponto V .
- As **geratrizes** são os segmentos com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base. Nesse cone abaixo, $\overline{VM}$ é um exemplo de geratriz.
- O **eixo** é a reta $\overleftrightarrow{OV}$.
- A **altura** h é a distância entre os planos paralelos que contêm a base e o vértice V .
- A **superfície lateral** é a reunião de todas as geratrizes.

Figura 15 - Elementos do cone

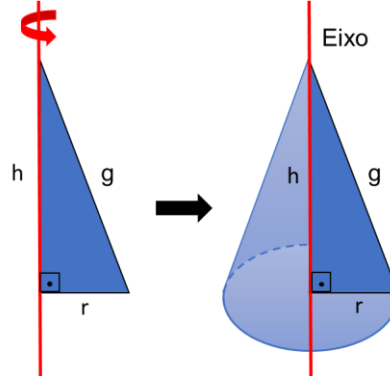


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Os cones podem ser classificados pela posição da reta $\overleftrightarrow{OV}$ em relação ao plano da base. Se a reta $\overleftrightarrow{OV}$ é oblíqua ao plano da base, ou seja, quando o eixo de um cone é oblíquo à base, classificamo-lo como cone oblíquo. Já se a reta $\overleftrightarrow{OV}$ é perpendicular ao plano da base, isto é, quando o eixo é perpendicular à base, classificamo-lo como cone reto.

Assim como o cilindro reto, o cone reto também é considerado um sólido de revolução, pois pode ser obtido ao rotacionarmos uma região triangular, cujo contorno é um triângulo retângulo, uma volta completa em torno do eixo (com um dos catetos contido no eixo). Dessa maneira, o cone reto também é denominado **cone de revolução (figura 16)**.

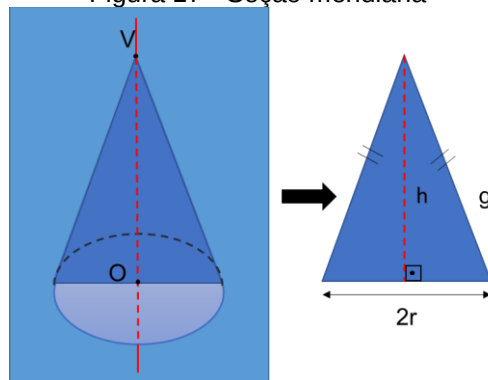
Figura 16 - Cone de revolução



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Assim como o cilindro, podemos obter no cone circular reto (ou cone de revolução) a secção meridiana (figura 17), onde a interseção do cone com um plano que contém seu eixo (reta $\overleftrightarrow{OV}$) é um triângulo isósceles.

Figura 17 - Secção meridiana



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

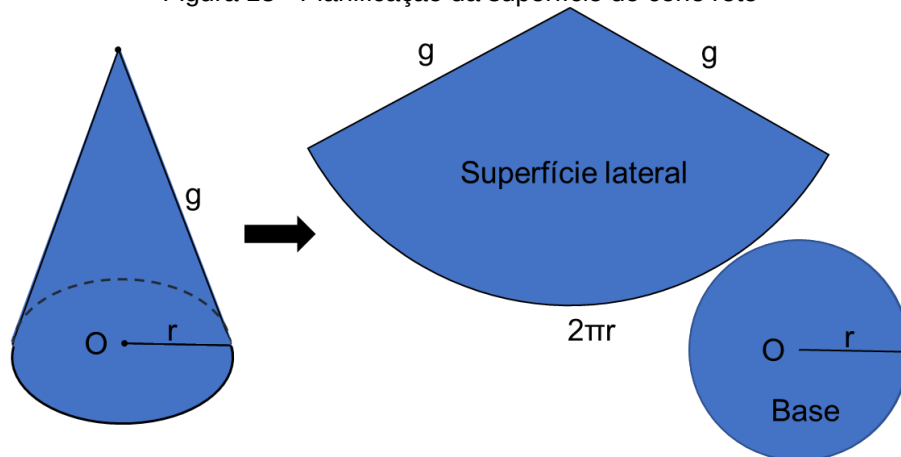
Quando a secção meridiana de um cone é um triângulo equilátero, ele é denominado cone equilátero. Nesse caso, $2r=g$.

3.2.1 Área da superfície de um cone reto

Uma das áreas de superfície do cone é a lateral. A superfície lateral (figura 18) de um cone circular reto ou cone de revolução de raio de base r e geratriz g é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento de arco $2\pi r$. Isso significa que

a superfície lateral de um cone de revolução desenvolvida num plano (planificada) é um setor circular cujo raio é g (geratriz) e comprimento do arco $2\pi r$

Figura 18 - Planificação da superfície do cone reto



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do respectivo arco, podemos determinar a **área lateral** (A_l) por meio de uma regra de três simples.

Comprimento	Área do
do Arco	setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_l

$$\frac{2\pi g}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{A_l} \Rightarrow A_l \cdot g = \pi g^2 \Rightarrow \boxed{A_l = \pi r g}$$

A **área total** (A_t) da superfície do cone podemos calcular com a soma da área lateral (A_l) com a área da base ($A_B = \pi r^2$), logo:

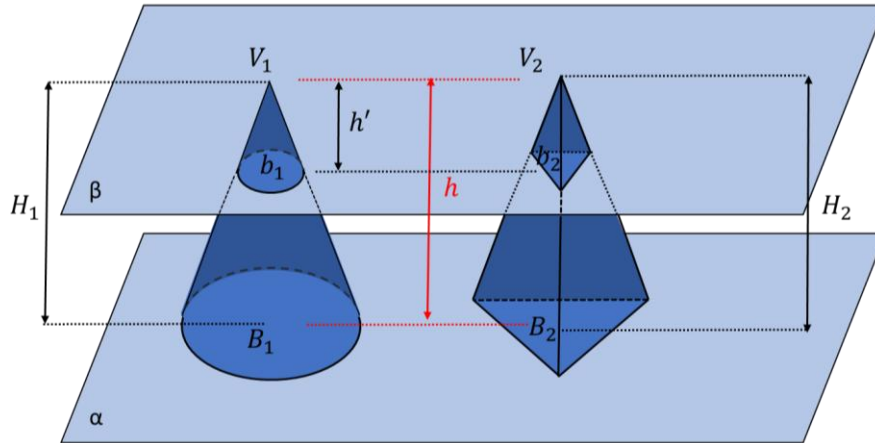
$$A_t = A_b + A_l = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_t = \pi r(r + g)}$$

3.2.2 Volume do Cone (V_c)

Assim como foi realizado no estudo do volume do cilindro, utilizaremos o Princípio de Cavalieri para calcular o volume do cone. Consideramos um cone de altura $H_1 = h$ e área da base $B_1 = B$ e um tetraedro de altura $H_1 = h$ e área de base $B_2 = B$ (o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos (figura 19) têm as bases num mesmo plano α e que os vértices estão num mesmo semiespaço dos determinados por α .

Figura 19 - Volume do Cone



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Qualquer plano secante β paralelo a α , distando h' dos vértices que seccionam o cone, também secciona o tetraedro, e sendo as áreas das secções b_1 e b_2 , respectivamente, temos:

$$\left(\frac{b_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h} \right)^2, \frac{b_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h} \right)^2 \right) \Rightarrow \frac{b_1}{B_1} = \frac{b_2}{B_2}.$$

Como $B_1 = B_2 = B$, vem que $b_1 = b_2 = B$.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}$$

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} B_2 h$, ou seja, $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} B \cdot h$, vem que $V_{cone} = \frac{1}{3} B h$; ou

resumidamente:

$$V = \frac{1}{3} B h.$$

Portanto, o volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

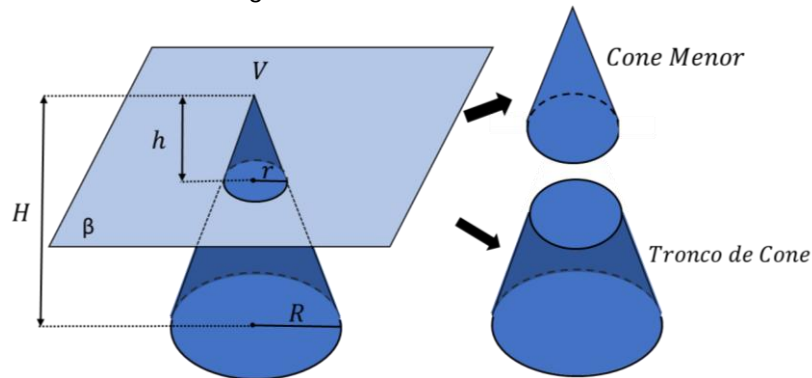
Se $B = \pi r^2$, temos:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

3.3 TRONCO DE CONE

Na figura 20 - tronco de cone reto, está representando um cone reto altura H e raio de base R , seccionado por um plano β paralelamente à sua base. Esse plano determina um cone menor de altura h e raio r , e um sólido denominado tronco de cone.

Figura 20 - Tronco de cone reto

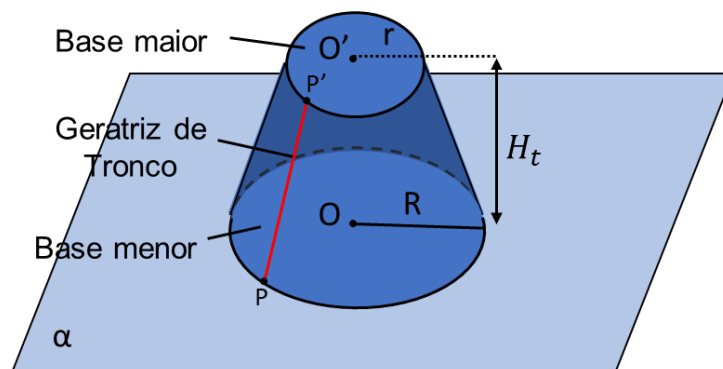


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Conforme a figura 21, em um tronco de cone, podemos destacar os seguintes elementos:

- A **base maior** é o círculo de centro O e raio R.
- A **base menor** é o círculo de centro O' e raio r.
- A distância H_t , entre a base maior e a base menor, corresponde à **altura do tronco de cone**.
- A **geratriz do tronco** corresponde a cada segmento contido na geratriz do cone cujas extremidades pertencem às bases do tronco. Nesse tronco, $\overline{PP'}$ é um exemplo de geratriz do tronco.
- A **superfície lateral** corresponde a reunião de todas as geratrizes do tronco.

Figura 21 - Elementos do tronco de cone



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

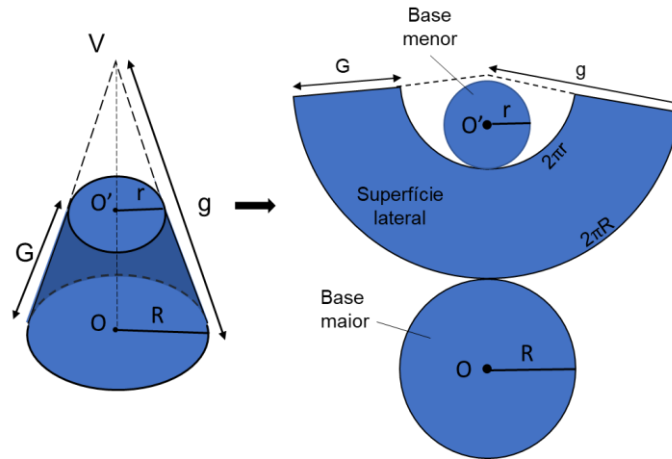
3.3.1 Área da superfície de um tronco de cone reto

Observe na figura 22 um tronco de cone reto e sua respectiva planificação, onde podemos ver três áreas: dois círculos e uma área lateral.

Como a **área da base maior** é um círculo, então aplica-se: $A_B = \pi R^2$.

Como a **área da base menor** é um círculo, então: $A_b = \pi r^2$.

Figura 22 - Planificação da superfície do tronco de cone reto



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Área lateral (A_l) de um tronco de cone pode ser calculada pela diferença entre as áreas laterais dos cones de vértices V e bases de centro O e O'.

$$A_l = A_O - A_{O'},$$

Onde a área lateral do cone menor é $A_{O'} = \pi r(g - G)$ e do cone maior $A_O = \pi Rg$.

$$A_l = \pi Rg - \pi r(g - G) \quad (1)$$

Escrevendo primeiro a expressão acima com g em função de G, R e r, para depois obtemos a área lateral do tronco de cone:

$$\begin{aligned} \frac{g}{(g - G)} &= \frac{R}{r} \Rightarrow g \cdot r = R \cdot (g - G) \Rightarrow g \cdot r = g \cdot R - G \cdot R \Rightarrow \\ G \cdot R &= g \cdot R - g \cdot r \Rightarrow G \cdot R = g \cdot (R - r) \Rightarrow g = \frac{GR}{(R - r)} \quad (2) \end{aligned}$$

Substituindo g de (2) em (1), temos:

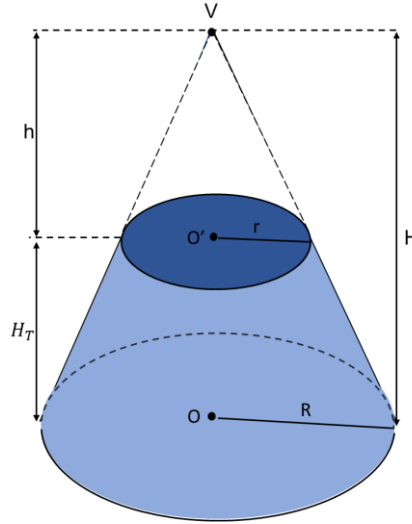
$$\begin{aligned} A_l &= \pi R \left(\frac{GR}{(R - r)} \right) - \pi r \left(\frac{GR}{(R - r)} - G \right) = \frac{\pi R \cdot GR}{(R - r)} - \pi r \left(\frac{GR - G(R - r)}{(R - r)} \right) \\ &= \frac{\pi R \cdot GR - \pi r \cdot (GR - G(R - r))}{(R - r)} = \frac{\pi R \cdot GR - \pi r \cdot GR + \pi r \cdot G(R - r)}{(R - r)} \\ &= \frac{(R - r) \cdot (\pi GR) + \pi r G(R - r)}{(R - r)} = \pi GR + \pi r G \Rightarrow \boxed{A_l = \pi G(R + r)} \end{aligned}$$

Por fim, área total da superfície: $A_t = A_B + A_b + A_l$

3.3.2 Volume de um tronco de cone reto (V_t)

Podemos determinar o volume de um tronco de cone reto, como o apresentamos a seguir, na figura 23, calculando a diferença entre os volumes dos cones de vértices V e bases de centro O e O'. Onde H é altura do cone reto, h altura do cone menor H_t altura do tronco de cone reto.

Figura 23 - Volume do tronco de cone reto



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

$$V = V_O - V_{O'} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h, \text{ onde } H = h + H_T, \Rightarrow$$

$$V = \frac{\pi}{3}[R^2(h + H_T) - r^2 h] \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}[R^2 H_T + (R^2 - r^2)h] \quad (1)$$

Agora vamos calcular h em função de R, r e H_T :

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{(h + H_T)}{R} \Rightarrow Rh = rh + rH_T \Rightarrow h(R - r) = rH_T \Rightarrow$$

$$h = \frac{rH_T}{(R - r)} \quad (2)$$

Obtemos o volume do tronco de cone reto, substituindo h de (2) em (1):

$$V = \frac{\pi}{3}\left[R^2 H_T + (R^2 - r^2) \frac{rH_T}{(R - r)}\right] \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}[R^2 H_T + (R + r)rH_T] \Rightarrow$$

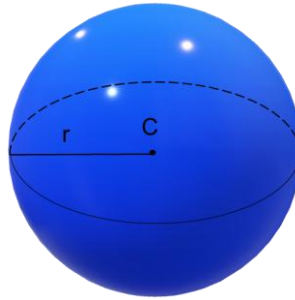
$$\boxed{V = \frac{\pi H_T}{3}(R^2 + Rr + r^2)}$$

3.4 ESFERA

Para definirmos a esfera, consideramos um número real positivo r e um ponto C. Denomina-se esfera o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma

distância menor ou igual a r a partir do ponto C . Nesse caso, temos uma esfera de centro C e raio r (figura 24 - esfera).

Figura 24 - Esfera

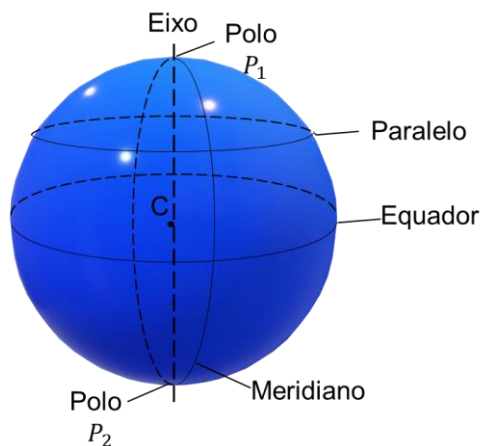


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

De acordo com a figura 25 – elementos da esfera, em uma esfera podemos destacar os seguintes elementos:

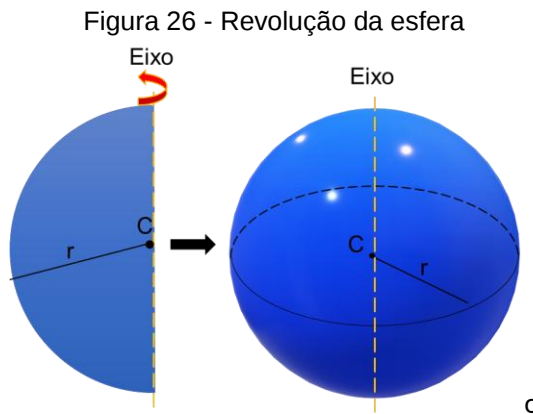
- O **centro** é o ponto C .
- O **eixo** é a reta que contém o centro da esfera.
- Os **polos** são os pontos de interseção da superfície da esfera com o eixo. Nessa esfera, os polos são P_1 e P_2 .
- O **equador** é a circunferência obtida ao se seccionar a esfera por um plano perpendicular ao eixo e que passe pelo centro C .
- Os **paralelos** são as circunferências obtidas ao se seccionar a esfera por planos paralelos ao equador.
- Os **meridianos** são as circunferências obtidas ao se seccionar a esfera por planos que contêm o eixo.

Figura 25 - Elementos da esfera



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Como podemos ver abaixo, na figura 26 – revolução da esfera, assim como o cilindro e o cone reto, a esfera também é um sólido de revolução, que pode ser obtida ao se rotacionar um semicírculo em torno da reta (eixo) que contém seu diâmetro.

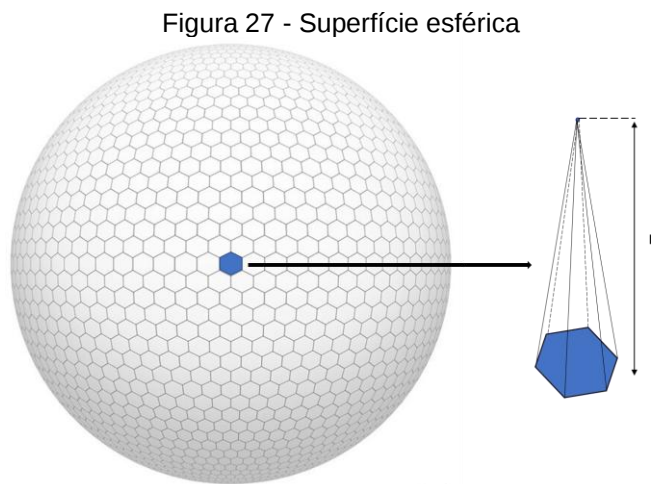


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

3.4.1 Área da superfície da esfera

Nesse momento iremos definir conceito de área da superfície esférica (figura 27), além disso, é de suma importância para o estudo de esfera também definirmos a calota esférica e a zona esférica:

Por experimentação. Admitimos que uma esfera de centro C seja dividida em n sólidos congruentes de maneira que, à medida que n aumenta, esses sólidos assemelham-se a pirâmides com vértices em C e altura igual ao raio da esfera. Assim, o volume de cada uma dessas pirâmides será dado por $V_i = \frac{1}{3}A_i r$, em que A_i corresponde a área da base da pirâmide.



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Temos que o volume da esfera, quando n não tende ao infinito, é igual à soma dos volumes dos sólidos obtidos:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}A_1r + \frac{1}{3}A_2r + \dots + \frac{1}{3}A_nr \Rightarrow$$

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

Quando n tende ao infinito, a soma das áreas das bases dos sólidos é igual à área A da superfície da esfera, então temos:

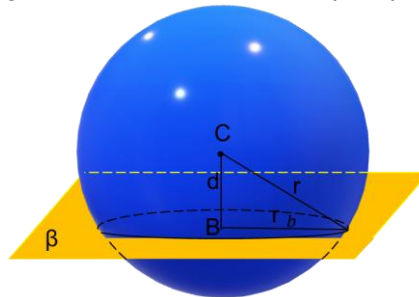
$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rA \Rightarrow \boxed{A = 4\pi r^2}$$

Portanto, a área da superfície da esfera é provada.

3.4.2 Volume da esfera

Considere uma esfera de centro C e raio r seccionada por um plano β (figura 28).

Figura 28 - Esfera seccionada pelo plano



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A partir do círculo de centro B e raio r_b , obtido na seção, podemos estabelecer a seguinte relação:

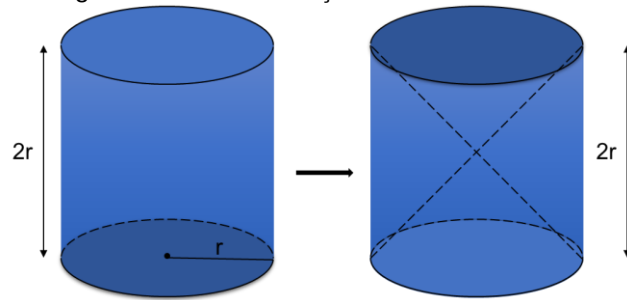
$$r^2 = r_b^2 + d^2 \Rightarrow r_b^2 = r^2 - d^2$$

Escrevendo a área do círculo de centro B em função de r e d , temos:

$$S_b = \pi r_b^2 \Rightarrow S_b = \pi(r^2 - d^2)$$

Considere agora um sólido X , obtido ao retirarmos de um cilindro reto de raio r e altura $2r$ (cilindro equilátero) dois cones retos de raio e altura r , conforme figuras (figura 29 e 30) a seguir:

Figura 29 - Demonstração com dois cilindros



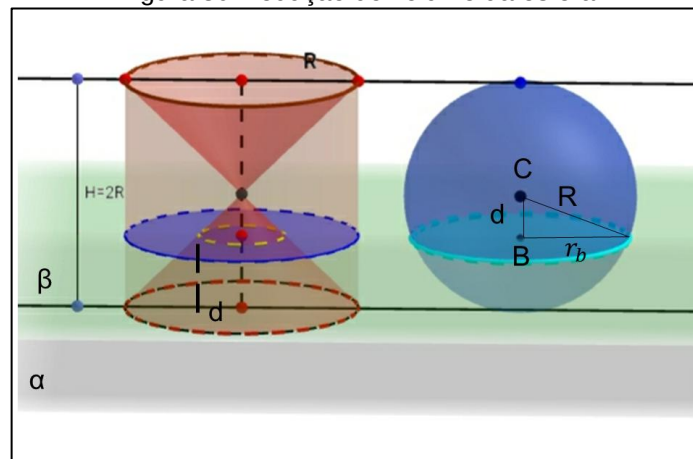
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

O volume V desse sólido é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o dos cones retiramos:

$$V = \pi r^2 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Para obtermos o volume da esfera, vamos utilizar novamente o Princípio de Cavalieri, considerando a esfera e o sólido X, obtidos anteriormente, apoiados em um plano α e seccionados por um plano β paralelo a α .

Figura 30-Dedução do volume da esfera



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A área S_c da seção obtida no sólido X é dada pela área da coroa definida pelos círculos de raio r e d :

$$S_c = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

Como a área da seção determinada na esfera é dada por: $S_b = \pi(r^2 - d^2)$, conforme visto anteriormente, temos que as áreas das duas seções obtidas são iguais ($S_b = S_c$). Dessa maneira, pelo Princípio de Cavalieri, temos que o volume da esfera e do sólido X são iguais.

Portanto, o volume da esfera de raio r é dado por:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

4 ORIENTAÇÕES GERAIS AO PROFESSOR

Professor, esta sequência didática o auxiliará na abordagem dos estudos sobre corpos redondos, que incluem o cilindro, o cone, o tronco de cone e a esfera. O objetivo principal desta sequência é proporcionar aos alunos do 2º ou do 3º ano do ensino médio uma compreensão aprofundada desses objetos geométricos, suas propriedades e suas aplicações práticas. - Você poderá baixar os arquivos do Geogebra pelo os *Qr Codes* disponíveis nas atividades .

Utilizando uma abordagem que integra uma ferramenta tecnológica, valorizaremos os registros de representação de cada aluno, incentivando-os a representar e interpretar os conceitos geométricos por meio de diferentes formas de expressão. Em relação a esses registros de representação, vale destacar que a BNCC os apresenta como uma das competências gerais importantes a serem mobilizadas:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes **registros de representação matemáticos** (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (2018, p. 523).

Ou seja, os registros são representações mentais e materiais que auxiliam o aluno na compreensão e comunicação de conceitos matemáticos. Eles incluem escrita ou linguagem natural, signos, desenhos, gráficos, fórmulas, descrições verbais e modelos físicos. Nesta sequência didática, os alunos serão estimulados a utilizar uma variedade desses registros para explorar e comunicar suas ideias sobre os corpos redondos.

Segundo Duval (2012), uma tarefa deve permitir três atividades cognitivas fundamentais relacionadas à semiose: **formação, tratamento e conversão**. Para o autor, todo enunciado ou comando corresponde a uma atividade de formação que deve se iniciar em algum tipo de registro de representação, sendo a linguagem natural a mais comum. Essa atividade deve proporcionar ao aluno "a identificação dos conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados, na chamada formulação matemática do problema" (BRASIL, 2018, p. 527).

Além disso, após a identificação, para Duval (1993) a tarefa deve possibilitar o tratamento, que ocorre dentro do mesmo registro, ou a mudança para outro tipo de registro, chamada de conversão. Segundo a BNCC, quando a tarefa apresentada no enunciado exige tratamento e conversão, os estudantes precisam realizar adaptações

antes de aplicar o conceito explicitado. Após isso, devem aplicar os conceitos e executar os procedimentos necessários.

Nesse mesmo contexto, segundo Duval e a BNCC (2018, p. 530), quando há coordenação de registros — ou seja, mais de uma conversão — ocorre a conceituação ou a construção do objeto matemático por parte do aluno.

Ademais, sobre a ferramenta tecnológica, a BNCC também a coloca como recurso central em uma das competências gerais:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando **recursos** e estratégias como observação de padrões, experimentações e **tecnologias** digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (2018, p. 523).

Isto é, professor, nesta sequência didática, para desenvolver e demonstrar conceitos, definições ou conjecturas, será utilizado o software GeoGebra como recurso e ferramenta tecnológica. Segundo Rabardel (1995), as ferramentas tecnológicas atuam como mediadoras entre o sujeito e o objeto matemático. Quando o aluno conhece o objeto por meio de um instrumento e de uma ação transformadora, utilizando-se de esquemas de ação, pode ocorrer a instrumentação dessa ferramenta.

Portanto, essa sequência didática segue o que foi exposto acima, cabendo a você professor utiliza de toda sua experiência para fazer, se a assim for necessário, as adaptações na 'propostas das atividades a seguir.

4.1 ORIENTAÇÃO DE CADA ATIVIDADE

De acordo com o quadro abaixo, a sequência didática está dividida em blocos, que por suas vezes estão compostas por atividade que tem um tempo sugerido de execução para serem concluídas em sala de aula, tendo objetivos e recursos.

Quadro 1 - Objetivos gerais de cada atividade

Bloco	Atividade	Objetivo	Recurso
1º	1	Introdução ao estudo dos corpos redondos.	Papeis com as atividades, caneta, lápis, borracha,
	2	Conhecer o artefato GeoGebra e suas funcionalidades. Criar pontos, retas e planos (polígonos) com auxílio do GeoGebra.	
2º	3	Representar os conceitos de espaço e forma do Cilindro e identificar os seus elementos.	Aplicativo GeoGebra e Smartphones.
	4	Definir as áreas e o volume de um Cilindro .	

3º	5	Representar os conceitos de espaço e forma do Cone e identificar os seus elementos.
	6	Determinar as áreas e o volume de um Cone .
4º	7	Representar os conceitos de espaço e forma do tronco de Cone e identificar os seus elementos.
	8	Determinar as áreas e o volume de um tronco de cone .
5º	9	Representar os conceitos de espaço e forma da Esfera e identificar os seus elementos. Determinar a área e o volume de uma Esfera .

Fonte: Elabora pelo autor (2024)

Além disso, em cada atividade, propomos ao professor, além dos objetivos, as expectativas de aprendizagem que podem ser observadas e avaliadas, bem como os recursos que podem ser utilizados durante as atividades.

4.1.1 Atividade 1: introdução ao estudo de corpos redondos

A proposta desta atividade é começar a introduzir a definição de corpos redondos bem como os diferentes tipos de sólidos de revolução, como cilindro, cone, tronco de cone e esfera. Onde será explicado suas características básicas (como os elementos), áreas de superfícies e volume.

Objetivo: apresentar uma ideia inicial de corpos redondos e suas características no cotidiano dos alunos.

Expectativa na aprendizagem: Espera-se que os alunos mobilizem registros verbal, visual e multifuncional por meio dos conceitos e imagens dos corpos redondos, discutindo suas aplicações no cotidiano e na natureza. Acreditamos que os alunos não terão muitas dificuldades na realização dessa atividade, pois se trata de conceitos intuitivos do objeto estudado.

Recursos utilizados: folhas com atividade impressas coloridas; lápis, borrachas, caneta, smartphones.

Quadro 2 - Objetivos da atividade 1

Momentos	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro Momento	5 minutos	Introduzir ideia de corpos redondos

Segundo Momento	5 minutos	Conceituar corpos redondos
-----------------	-----------	----------------------------

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

4.1.2 Atividade 2: conhecendo o artefato geogebra

Nesta atividade os alunos terão familiarização com o aplicativo Geogebra. Iremos fazer uma introdução de como usar as “Ferramentas” básicas do aplicativo tecnológico, mostrando como desenhar pontos, retas, segmentos de reta, polígonos e círculos. Também ensinar como manipular os objetos e mover a visualização em 3D do aplicativo.

Objetivo: Familiarizar os alunos com o uso do Geogebra para criar, observar e manipular ideias iniciais de objetos geométricos de posição.

Expectativa na aprendizagem: Espera-se que os alunos mobilizem esquemas de uso com auxílio do Geogebra e os registros verbal e tecnológico por meio dos conceitos introdutória de geometria de posição e de fazer tratamentos na construção dos objetos. Acreditamos, segundo Nadalon (2018) e Hellmann (2021), que nesta atividade os alunos tenham dificuldades para manusear o aplicativo caso seja a primeira vez do aluno. Assim como identificar no final da atividade o semicírculo que gera a esfera na revolução.

Recursos utilizados: Aplicativo Geogebra, Smartphones papeis com as atividades.

Quadro 3 - Objetivos da atividade 2

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Único	20 minutos	Como momento de ambientação, permitir que os alunos manuseiem livremente o aplicativo no Smartphone; Utilizar as “Ferramentas” básicas para a construção de polígonos, e as “Ferramentas” de medição.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

4.1.3 Atividade 3: conhecendo o objeto cilindro

Objetivo: Representar os conceitos de espaço e forma do Cilindro, e manipular na ferramenta Geogebra a altura e o raio, bem como identificar os elementos.

Expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade as representações que conceituam a ideia de um Cilindro por meio dos registros verbal, geométrico, simbólico e tecnológico, observando os Elementos identificáveis do objeto:

- **Bases:** Dois círculos paralelos e congruentes.
- **Altura (h):** Distância perpendicular entre as bases.
- **Geratriz (g):** Segmento que liga dois pontos correspondentes das circunferências das bases.

Acreditamos, de acordo com Sanchez (2018), que os alunos poderão enfrentar dificuldades em compreender os elementos geométricos, como confundir a altura com a geratriz ou não entender a relação entre essas medidas. Também, alunos poderão ter certas dificuldades ao desenharem o cilindro em várias perspectivas e seus elementos.

Recursos Utilizados: Material impresso, lápis, caneta, borracha, computador ou celular para acessar o Geogebra (on-line, off-line ou app).

Quadro 4 - Objetivos da atividade 3

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Único	20 minutos	Utilizar o Geogebra para manusear o cilindro, visualizar e identifica seus elementos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

4.1.4 Atividade 4: definir as áreas e o volume de um cilindro

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas da área lateral, área total e volume do cilindro

Expectativa de aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que conceituam as definições das áreas e do volume do cilindro por meio dos registros algébrico, gráfico e verbal.

De acordo com Sanchez (2018), acreditamos que os alunos poderão enfrentar dificuldades em aplicar as fórmulas e em compreender os elementos geométricos, como confundir a altura com a geratriz ou não entender a relação entre essas medidas. Além disso, podem esquecer ou aplicar de forma incorreta as fórmulas da área da base, da área lateral, da área total ou do volume, especialmente ao lidar com unidades de medida.

Recursos Utilizados: Aplicativo Geogebra, Smartphone, caneta e papeis com as atividades.

Quadro 5 - Objetivos atividade 4		
Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar as superfícies do cilindro. Deduzir e manipular as fórmulas de área do cilindro
Segundo	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar o volume do cilindro. Deduzir e manipular as fórmulas de área e volume do cilindro

Fonte: Autor (2024)

4.1.5 Atividade 5: conhecendo o sólido cone

Objetivo: Representar, visualizar e identificar os elementos do cone.

Expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que conceituam os elementos do cone por meio dos registros geométrico, pictórico e verbal.

Segundo Araújo (2015), acreditamos que os alunos podem enfrentar dificuldades ao trabalhar com os tratamentos no registro algébrico, já que isso exige conhecimento básico de geometria plana e cálculos matemáticos simples apreendidos no ensino fundamental. Por outro lado, é esperado que não encontrem muitas dificuldades em identificar os elementos do cone:

- **Base:** Um círculo.
- **Altura (h):** Distância perpendicular do vértice ao plano da base.
- **Geratriz (g):** Segmento de reta do vértice a qualquer ponto da circunferência da base.
- **Raio (r):** Distância do centro à borda da base.

Recursos utilizados: Smartphone com o aplicativo do Geogebra instalado, Canetas e folhas de atividades.

Quadro 6 - Objetivos da atividade 5		
Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos

Único	20 minutos	Utilizar o Geogebra para manusear o cone, visualizar e identifica seus elementos.
-------	------------	---

Fonte: Autor (2024)

4.1.6 Atividade 6: determinar as áreas e o volume do cone

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas das áreas e volumes do cone.

Expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que definem as fórmulas das áreas e do volume do cone por meio dos registros algébrico, gráfico e verbal.

Segundo Pinheiro (2022), os alunos podem enfrentar dificuldades para identificar os objetos na planificação da superfície do cone, especialmente ao visualizar a superfície lateral como um setor circular. Também é comum que tenham dificuldade em identificar ou calcular corretamente a geratriz utilizando o Teorema de Pitágoras. Além disso, de acordo com Araújo (2017), os alunos podem encontrar obstáculos ao trabalhar com tratamentos no registro algébrico.

Recursos utilizados: Aplicativo Geogebra, Smartphones, papéis com as atividades e caneta.

Quadro 7 - Objetivos da atividade 6

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar as superfícies planas do cone . Deduzir e manipular as fórmulas da área do cone .
Segundo	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar o volume do cone . Deduzir e manipular as fórmulas de volume do cone .

Fonte: Autor

4.1.7 Atividade 7: conhecendo o sólido tronco de cone

Objetivo: Representar, visualizar e identificar os elementos do **tronco de cone**.

Expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que conceituam os elementos do tronco de cone por meio dos registros Geométrico,

Símbolo e Verbal. Mas, de acordo com Santos (2021) acreditamos que os alunos terão um pouco de dificuldade em identificar **Elementos dos objetos, cone menor e maior**:

- **Bases**: Círculos de raios r_1 e r_2 .
- **Altura (h)**: Distância perpendicular entre as bases.
- **Geratriz (g)**: Segmento que une os pontos correspondentes das bordas das bases.

Recursos utilizados: Smartphone com o aplicativo do Geogebra instalado, canetas e folhas de atividades.

Quadro 8 - Objetivos da atividade 7

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Único	15 minutos	Utilizar o Geogebra para construir o tronco de cone por revolução, visualizar e identificar seus elementos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

4.1.8 Atividade 8: as áreas e o volume do tronco de cone

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas das áreas e volume do tronco **de cone**.

Expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que definem as fórmulas das áreas e do volume do tronco de cone por meio dos registros algébricos, gráficos e verbais.

Confiamos que, segundo Santos (2021, p. 113), o aluno apresentará “dificuldade na visualização de figuras espaciais em sua representação no plano”, bem como dificuldade em visualizar o tronco de cone como parte de um cone maior e em compreender a relação entre as bases e a altura. Neitzel (2023) corrobora essa ideia ao destacar que cálculos envolvendo a geratriz podem ser desafiadores, especialmente para alunos sem uma boa base em geometria plana e espacial. Além disso, a fórmula que envolve a soma dos raios pode ser complexa para aqueles que não compreendem as relações geométricas entre as bases.

Quanto ao volume, a fórmula exige domínio de álgebra e uma boa compreensão geométrica, habilidades que, sem prática, são raras de serem encontradas entre os alunos.

Recursos utilizados: Smartphone com o aplicativo do Geogebra instalado, Canetas e folhas de atividades.

Quadro 9 - Objetivos atividade 8		
Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar as superfícies planas do cone . Deduzir e manipular as fórmulas da área do tronco de cone .
Segundo	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar o volume do tronco de cone . Deduzir e manipular as fórmulas de volume do tronco de cone .

Fonte: Autor (2024)

4.1.9 Atividade 9: conhecendo o sólido esfera

Objetivo: Representar os conceitos de espaço e forma da **Esfera** e identificar os seus elementos.

Expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que conceituam os elementos, bem como definem as fórmulas da área e do volume da esfera, por meio dos registros algébrico, geométrico, simbólico e verbal.

Segundo Silva Filho (2015, p. 117), “percebe-se que os alunos têm certas dificuldades em conceitos e propriedades dos corpos redondos, em particular relacionados à esfera”. Muitos alunos encontram dificuldade em compreender o significado das fórmulas, especialmente ao associar os elementos geométricos às representações algébricas e simbólicas.

Recursos Utilizados: Smartphone, Caneta e papéis com as atividades.

Quadro 10 - Objetivos da atividade 9		
Momento	Tempo	Objetivo Específico
Primeiro	5 minutos	Identificar elementos como raio, diâmetro e superfície.
Segundo	45 minutos	Determinar a área e o volume de uma Esfera pelo Geogebra

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

5 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Assunto: Ensino de Corpos Redondos do Ensino Médio

Escola: _____

Professor: _____

Aluno (a): _____

Data ____/____/____

2º ano () ou 3º ano ()

Local: _____, _____ - _____

ATIVIDADE 1: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE CORPOS REDONDOS

Objetivo: apresentar uma ideia inicial de corpos redondos e suas características no cotidiano.

Primeira Momento.

A seguir, observaremos imagens representativas de corpos redondos, que são objetos de nossos cotidianos que possuem essas formas. Essas representações visuais nos auxiliarão a compreender melhor as características e aplicações dessas formas geométricas no nosso dia a dia e na natureza. A análise desses exemplos práticos nos permitirá explorar como essas formas influenciam desde utensílios domésticos até fenômenos naturais, destacando sua relevância e aplicabilidade em diferentes contextos.

Figura 31 – Objetos do dia que são Esfera



Fonte: Autor

Figura 32 – Objetos do dia que são Cone



Fonte: Autor

Figura 33 – Objetos do dia que são Tronco de Cone



Fonte: Autor

Figura 34 – Objetos do dia que são Cilindros



Fonte: Autor

1. Observe os objetos nas imagens acima e responda as perguntas a seguir.
 - a) Para você, quais são as características geométricas de cada um desses objetos?

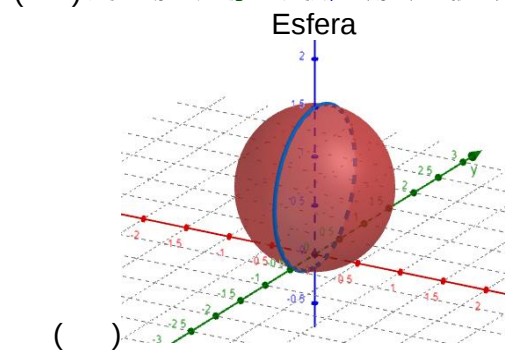
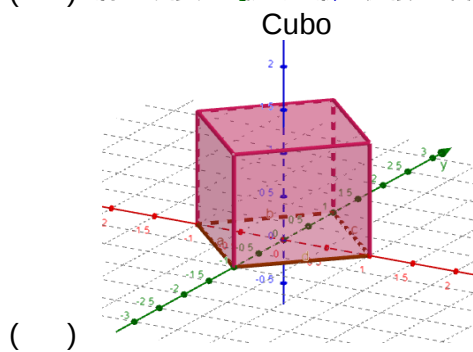
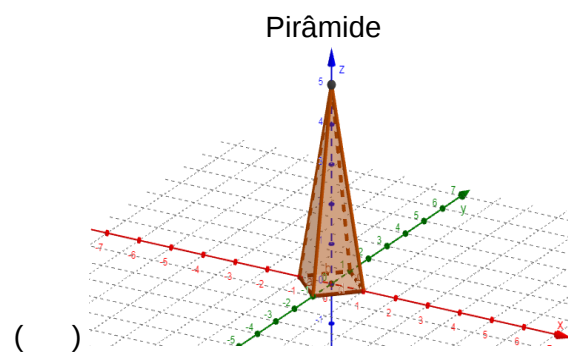
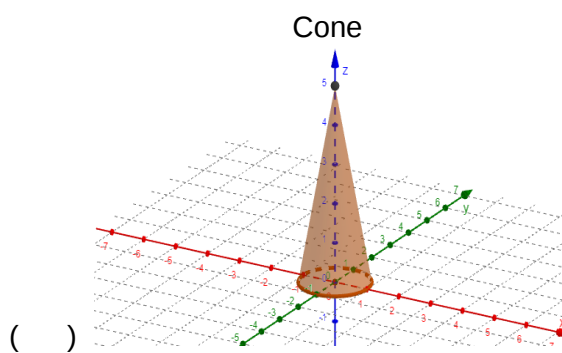
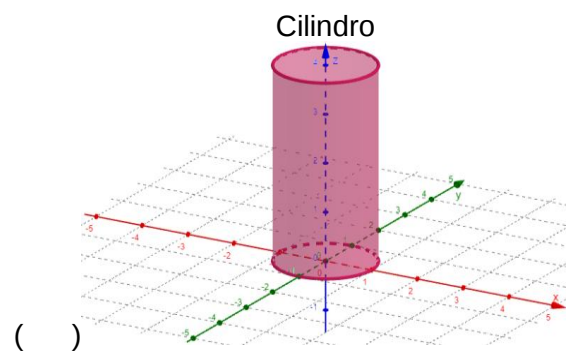
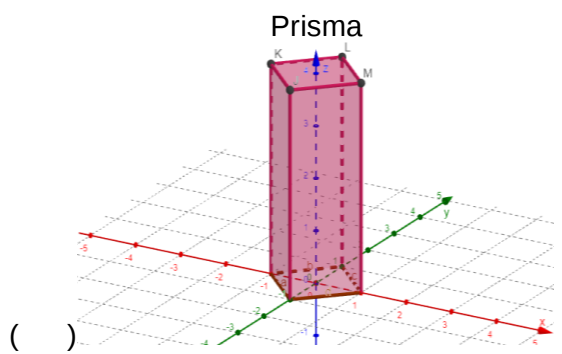
- b) Quais as diferenças geométricas entre esses objetos acima?

Segundo Momento.

Como podemos observar nas imagens dos exemplos da atividade anterior, podemos definir que os corpos redondos são figuras geométricas tridimensionais que

têm como característica especial superfícies curvas. Também são caracterizados por terem uma superfície que não pode ser representada completamente em um plano, como ocorre com figuras planas, como triângulos ou quadrados.

2. De acordo com a definição de corpos redondos, marque abaixo as figuras que têm superfície curva.



c) Escreva os nomes de objetos que você encontra no seu dia a dia que se encaixa nos grupos de um dos Corpos Redondos abaixo.

Corpos Redondos	Objetos do dia a dia
-----------------	----------------------

Cilindro	
Cone	
Tronco de cone	
Esfera	

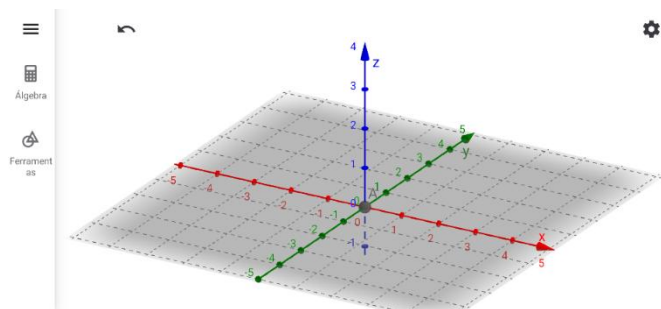
ATIVIDADE 2: CONHECENDO O ARTEFATO GEOGEBRA

Objetivo: Familiarizar os alunos com o uso do GeoGebra para criar, observar e manipular ideias iniciais de objetos geométricos de posição.

1. Construa um triângulo retângulo.

Para fazermos esse objeto geométrico, antes, com seu app  aberto, vamos clicar em configurações  e ative o modo “**exibir malha**”. Em seguida, clique em “Ferramentas” , selecione ponto A  e posicione na origem (Eixos x,y,z).

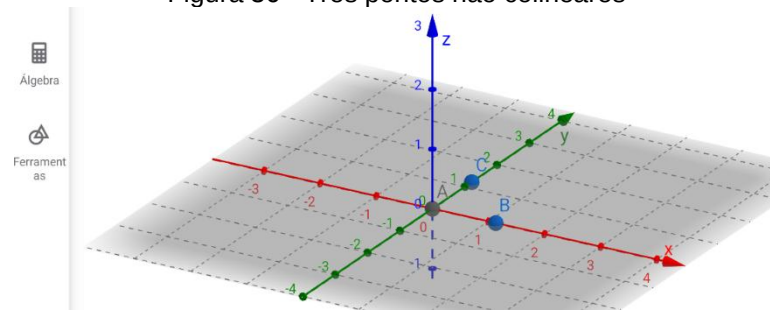
Figura 35 - Exibir malha



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Clique em “Ferramentas” , selecione um ponto B, posicionando sobre o Eixo x, e em seguida selecione um outro ponto C sobre o Eixo y.

Figura 36 - Três pontos não colineares

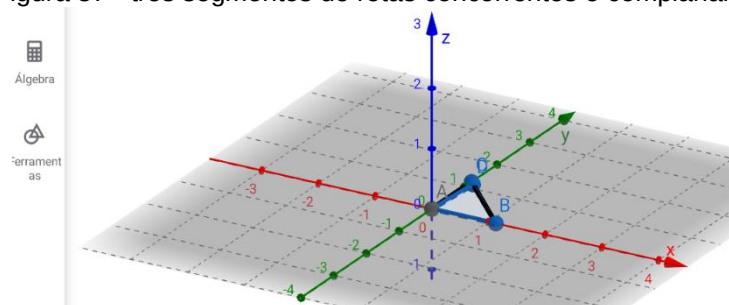


Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Você sabia que acaba de criar três pontos não colineares? Assim, “três pontos não colineares” é um conceito fundamental na geometria que descreve a posição relativa de pontos que não estão alinhados em uma única linha reta.

Agora vamos criar três segmentos de retas concorrentes e coplanares. Clique em “Ferramentas” , depois em “Mais” e em seguida no “Segmento”  selecione os pontos A e B, em seguida os pontos A e C, e depois os pontos C e B. Neste instante, clique novamente em “Ferramentas”  e selecione “Polígono”  depois os vértices (pontos A, B, C e A) para criarmos, enfim, o triângulo retângulo.

Figura 37 - três segmentos de retas concorrentes e coplanares



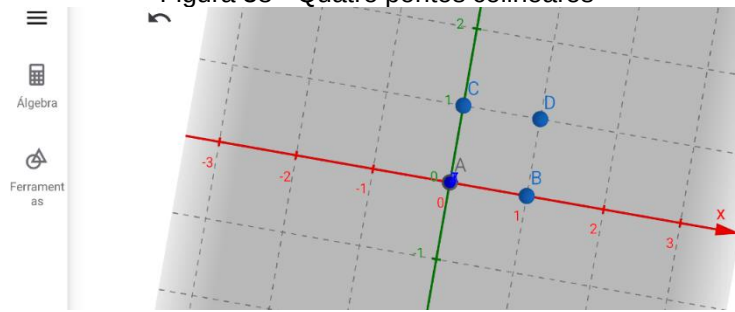
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

a) Após a construção, vá em “Ferramentas”, ative o modo “Superfície de Revolução”  e clique sobre a superfície do triângulo. Qual objeto geométrico foi formado?

2. Construa um retângulo.

Clique em “Ferramentas” , selecione ponto A  e posicione na origem (Eixos x,y,z). Clique em “Ferramentas” , selecione um ponto B, posicionando sobre o Eixo x, e em seguida selecione um outro ponto C sobre o Eixo y. Agora, vamos posicionar um outro ponto D que esteja colinear com o ponto B e C.

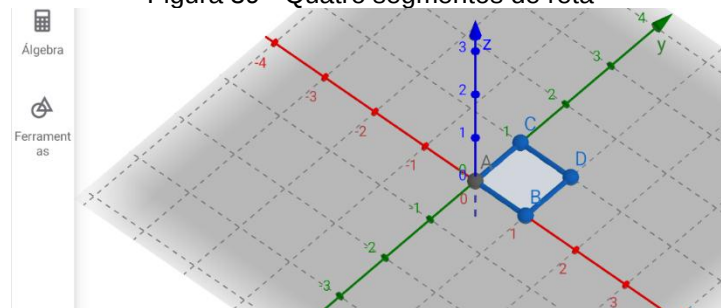
Figura 38 - Quatro pontos colineares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Agora vamos criar quatro segmentos de retas. Clique em “Segmento”  selecione os pontos A e B, em seguida os pontos B e C, e depois os pontos C e D, por fim, D e A. Neste instante, clique novamente em “Ferramentas”  e selecione “Polígono”  depois os vértices (pontos A, B, C, D e A) para criarmos, enfim, o retângulo.

Figura 39 - Quatro segmentos de reta

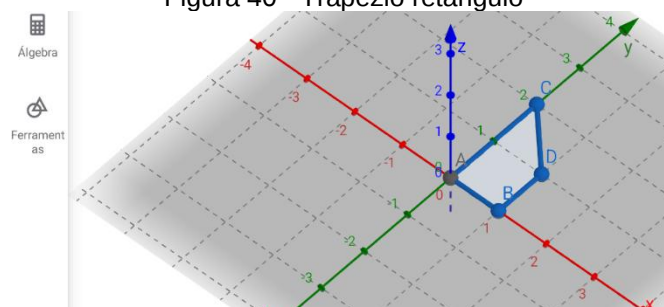


Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

a) Após a construção retângulo, vá em “Ferramentas”, ative o modo “Superfície de Revolução”  e clique sobre a superfície do retângulo. Qual objeto geométrico foi formado?

3. A partir da construção do retângulo, crie um trapézio retângulo no aplicativo.

Figura 40 - Trapézio retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

a) Após a construção, vá em “Ferramentas”, ative o modo “Superfície de Revolução”  e clique sobre a superfície do trapézio. Qual objeto geométrico foi formado?

Portanto, podemos ver que os corpos redondos são formados por meio da revolução de figuras planas, como o retângulo, o triângulo e o trapézio. Esse processo consiste na rotação dessas figuras em torno de um eixo, resultando em sólidos geométricos. Por essa razão, esses objetos são conhecidos como “sólidos de revolução”. Essa classificação é importante para entender as propriedades e aplicações desses corpos na geometria.

b) Qual figura plana formará uma esfera?

ATIVIDADE 3: CONHECENDO O OBJETO CILINDRO

Objetivo: Representar os conceitos de espaço e forma do Cilindro, e manipular na ferramenta GeoGebra a altura e o raio, bem como identificar os elementos.

1. Manipule o Cilindro no app, acessando o QR_CODE (figura 41) ou site www.geogebra.org/m/nsdjwkyd.

Figura 41 - Cilindro concluído



Fonte: aplicativo GeoGebra (2024)

2. Manuseie os controles deslizantes (**r e h**) e observe como o **cilindro** se comporta. Ao fazer essa série de ações o que você pode dizer sobre o comportamento dos elementos do cilindro?

3. Preencha a tabela abaixo dando uma descrição para o cilindro, dados o raio R e a altura (h), em comparação com o cilindro equilátero e depois desenhe cada cilindro visto em duas perspectivas (frontal e acima).

RAIO (r)	Altura (h)	Descrição
1	2	Cilindro 1: É um cilindro equilátero reto normal
1	5	Cilindro 2:
5	2	Cilindro 2:

Desenho do Cilindro 1	Desenho do Cilindro 2	Desenho do Cilindro 3
Frontal:	Frontal:	Frontal:
Acima:	Acima:	Acima:

4. **Atividade Contextualizada:** Um engenheiro de uma fábrica de peças está projetando um novo eixo para sua máquina, formado por três cilindros (A, B e C) sobrepostos. O eixo precisa ter um total de 70 cm de comprimento e diâmetro máximo de 14 cm. Sabe-se que cilindro A tem o dobro do cilindro B em comprimento e em diâmetro. E o cilindro B tem o dobro do cilindro C em comprimento e em diâmetro. Com essas informações, desenhe a peça mostrando seus elementos.

Desenhe o modelo da peça


ATIVIDADE 4: DEFINIR AS ÁREAS E O VOLUME DE UM CILINDRO

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas das áreas da base, lateral, total e volume do cilindro.

Primeiro momento.

Nesta etapa, vamos iniciar como é feito a planificação da superfície do cilindro, destacando as bases e a área lateral, conforme o arquivo do GeoGebra. Acesse o site <https://www.geogebra.org/m/nch6m4hm> ou QR-CODE (figura 42) ou pesquise no app Cilindro-Elemento-app. Lembre-se de configura o celular no modo “Computador” e deixo-o na vertical.

Figura 42 - Planificação do cilindro



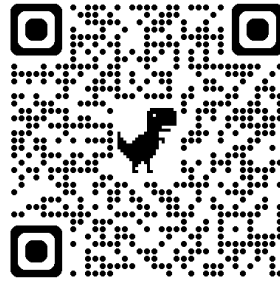
Fonte: Geogebra (2024)

1. Observando e manipulando no GeoGebra a planificação do cilindro, quais conclusões podemos tirar dessa experiência? Comente.

2. Observando esses três objetos da planificação, como podemos definir essas áreas das figuras planificadas e a fórmula da área total?

Neste momento vamos abordar sobre o volume do cilindro. Primeiramente, vamos novamente dispor de um outro arquivo do GeoGebra que será demonstrado o princípio de Cavalieri. Acesse o <https://www.geogebra.org/m/xc9q9jxf> ou QR-CODE ou pesquise no app “Volume-Cilindro-Cavalieri”.

Figura 43 – Volume-Cilindro-Cavalieri



Fonte: Autor

3. Observando a demonstração dinâmica, **sabendo que no primas o volume é a área da base vezes altura**, como podemos definir a fórmula do volume do cilindro?

4. **Atividade contextualizado:** Uma empresa de produção de embalagens está desenvolvendo uma nova lata de refrigerante cilíndrica, de alumínio, com altura de 15 cm e raio de 2,5 cm. Qual é o volume interno da lata de refrigerante em cm^3 ? Para produzir uma lata lacrada, a empresa precisará de quantos cm^2 de área de alumínio? Expresse o cálculo abaixo.



Agora, abra seu app GeoGebra e cria um cilíndrico, inserindo os valores de r e h do problema contextualizado. Depois, ativem as fórmulas das áreas e do volume do cilindro para responderam a seguinte pergunta.

5. Comparando os resultados obtidos no papel e no GeoGebra, quais conclusões você chegou?

ATIVIDADE 5: CONHECENDO O SÓLIDO CONE

Objetivo: Representar, visualizar e identificar os elementos do cone

Neste momento vamos abordar sobre o Cone e seus elementos. Primeiramente, vamos novamente dispor de um arquivo do GeoGebra disponível em:

<https://www.geogebra.org/classic/xxekjxch>, ou pelo QR_CODE ou pesquise no app “Cone-Elemento-app.

1. Manuseia Cone e identifique seus elementos.

Figura 44 – Cone-Elemento-app



Fonte: Geogebra (2024)

2. Ao manusear os controles, o que você pode dizer sobre o comportamento dos elementos do cone?

3. Preencha a tabela abaixo dando uma descrição para cada **cone**, dados o raio (r) e a altura (h), em comparação com o cone reto e depois desenhe cada cone visto em duas perspectivas (frontal e acima).

Raio (r)	Altura (h)	Descrição
1	2	Cone 1: Um cone reto normal
1	6	Cone 2:
5	2	Cone 3:

Desenho do Cone 1	Desenho do Cone 2	Desenho do Cone 3
Perspectiva frontal	Perspectiva frontal	Perspectiva frontal
Vista de cima	Vista de cima	Vista de cima

4. **Atividade contextualizado:** Um artista plástico decide fazer uma estrutura em formato de ampulheta, que é uma figura tridimensional composta por dois cones (idênticos) conectados por suas bases e que têm em comum o mesmo vértice. A altura total da ampulheta é de 400 centímetros, sendo que sua base tem uma circunferência de 31,4 centímetros. Qual é a altura de um dos cones? Qual é o valor da geratriz do cone? **Expresse abaixo cálculo.**

Faça no GeoGebra e Desenhe a ampulheta aqui

ATIVIDADE 6: DETERMINAR AS ÁREAS E O VOLUME DO CONE.

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas das áreas e volumes do cone

Primeiro momento

Neste próximo exercício vamos estudar e determinar as áreas e o volume do cone. Com o auxílio do GeoGebra, vamos novamente dispor de um arquivo do GeoGebra disponível em: <https://www.geogebra.org/m/pcebdwd7>, ou pelo QR_CODE ou pesquise no app “Planificação-Cone-app”.

Manipule o Cone e observe sua planificação.

Figura 45 – Planificação-Cone-app



Fonte: GeoGebra (2024)

1. Após manipular a dinâmica da planificação do cone, quais figuras planas são formadas?

2. Demostre a fórmula da área lateral do cone, com auxílio do Geoegbra (<https://www.geogebra.org/m/ntkhaza8> ou pesquise no app “Área Lateral do Cone-app)

Figura 46 – Área Lateral do Cone-app



Fonte: Geogebra (2024)

3. Como podemos chegar ao valor da área total do cone? Expresse a fórmula.

4. **Atividade Contextualizada:** Júlia está criando um modelo de um cone para um projeto escolar e precisa calcular a **área total da superfície do cone**. O cone terá uma altura de 12 cm e um raio da base de 5 cm. Para completar seu projeto, Júlia deseja saber a quantidade de papel necessária para cobrir a superfície externa do cone, incluindo a base. Expresse o cálculo.

Segundo momento

Neste ponto, abordaremos o volume do cone. Será disponibilizado um novo arquivo GeoGebra disponível em <https://www.geogebra.org/m/jyeqqgtb> ou no QR-CODE, no qual será demonstrada de forma dinâmica a dedução da fórmula do volume do cone por comparação de volumes.

Figura 47 – Dedução do Volume do Cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

5. Observando os volumes do cone e do cilindro, o que podemos concluir sobre a fórmula do volume do cone? Demonstre o cálculo.

6. **Atividade contextualizada:** Maria decidiu organizar uma festa de aniversário para sua filha e quer preparar uma grande quantidade de suco. Ela comprou um recipiente em formato de cone para servir o suco. O recipiente tem uma Geratriz de $10\sqrt{10}$ cm e um raio da base de 10 cm. Maria precisa saber quantos litros de suco o recipiente pode comportar para garantir que haja o suficiente para todos os convidados. Para isso, ela decide calcular o volume do cone em cm^3 .

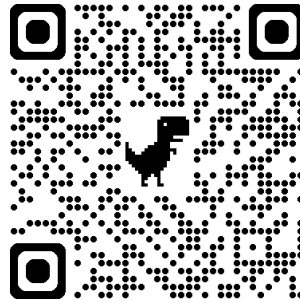


ATIVIDADE 7: CONHECENDO O SÓLIDO TRONCO DE CONE

Objetivo: Representar, visualizar e identificar os elementos do **tronco de cone**.

1. Manipule e identifique os elementos do Tronco de Cone (<https://www.geogebra.org/m/dzj7mcbc>).

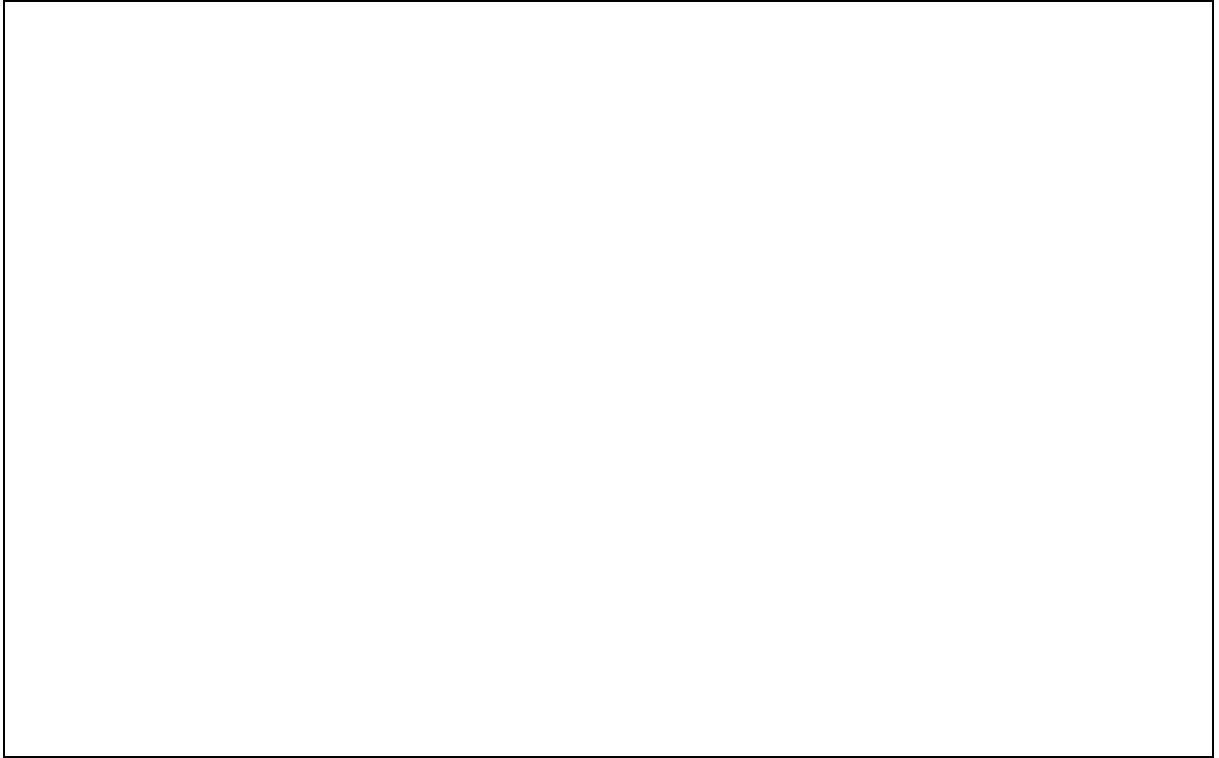
Figura 48 - Elementos do Tronco de Cone



Fonte: Geogebra (2024)

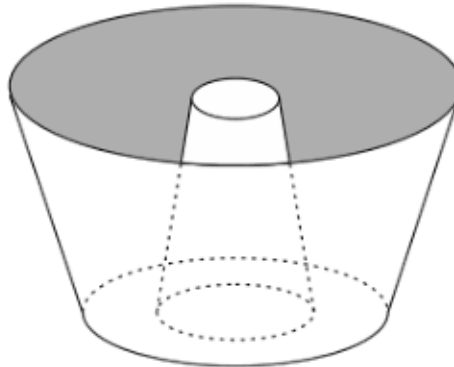
2. Observando e manipulando o tronco de cone, quais os elementos são do tronco de cone?

3. Agora, desenhe o tronco de cone visto de frente e identifique seus elementos.



4. Identifique, na imagem abaixo, o(s) raio(s) e a(s) geratriz(es) da figura geométrica.

Figura 49 - Forma de bolo



Fonte: autor (2024)

5. **ATIVIDADE CONTEXTUALIZADA:** Maria é uma confeitadeira e está planejando fazer um bolo, para um aluno de ciências, parecido com um vulcão de formato de **tronco de cone** mais um bolo “fake” de formato de cone sobre o bolo. A confeitadeira tem as seguintes medidas: Altura do tronco de cone é igual a 30cm, raio da base maior é de 20 cm, raio da base menor é de 10 cm.

Desenhe o modelo do bolo especificando as informações acima de seus elementos.

2. Sabendo que a figura plana geradora do tronco de cone é um trapézio, onde o comprimento de suas bases equivale aos diâmetros das bases do tronco de cone, como podemos deduzir a fórmula das áreas da superfície do tronco de cone? Use o QR_CODE ou <https://www.geogebra.org/m/svrukxdc>.

Figura 51 – Dedução da Área Lateral do Tronco de Cone-app



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)



Segundo momento

Neste momento vamos abordar o estudo do volume do tronco de cone. Como observamos na **construção do Tronco de Cone**, que o tronco de cone é uma figura tridimensional resultante do corte de um cone por um plano paralelo à sua base. Em outras palavras, é a parte do cone que está entre duas bases circulares paralelas, uma maior e outra menor.

Neste instante, vamos usar o app GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/hzpymfjm>) que demonstrará, de forma dinâmica e intuitiva, o volume do tronco de cone. Acesse o QR_CODE

Figura 52 – Demonstração do volume do tronco de cone



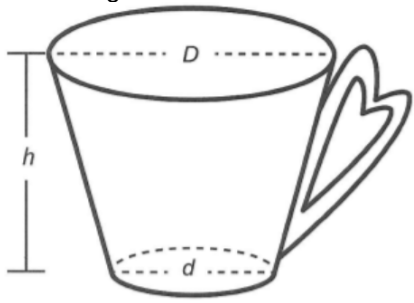
Fonte: GeoGebra 3 D (2024)

3. Preencha a tabela abaixo usando o App GeoGebra e o arquivo da demonstração do **volume do tronco de cone**.

Raio Maior	Raio menor	Altura do Tronco	Volume Cone Maior	Volume Cone Menor	Volume do Tronco de Cone
2	1	3			
3	2		56,55		
	3	2		28,27	
4		3			87,96

4. **Atividade contextualizada:** Uma pessoa comprou uma caneca para tomar chá, conforme a ilustração. A abertura superior da caneca é uma circunferência com diâmetro (D) medindo 14 cm, e a base inferior é uma circunferência com diâmetro (d) medindo 10 cm. A altura (h) da caneca, que é a distância entre os centros das duas bases, é de 20 cm.

Figura 53 – Caneca



Fonte: Internet (2024)

Sabendo que $1\text{ cm}^3 = 1\text{ mL}$ e utilizando 3 como aproximação para π , qual é a capacidade volumétrica, em mililitros, dessa lata? E sua área lateral? Expresse o cálculo.



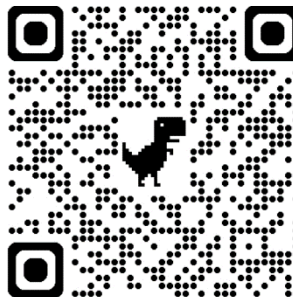
ATIVIDADE 9: CONHECENDO O SÓLIDO ESFERA

Objetivo: Representar os conceitos de espaço e forma da **Esfera** e identificar os seus elementos.

Primeiro momento

1. Manuseia a Esfera no Geogebra, disponível em <https://www.geogebra.org/m/mttgjuh5> ou no QR_CODE ou pesquise no app Elementos da esfera.

Figura 54 - Elementos da esfera



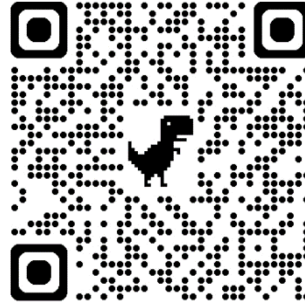
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quais são as principais características que você observa na esfera ao movimentá-lo no app?

Segundo momento.

Nesta etapa, veremos no GeoGebra a demonstração, de forma dedutiva, da superfície da esfera que está contida dentro de um cilindro equilátero, mencionando o método de “Projeção Cilíndrica”.

Figura 55 - Demonstração da fórmula da superfície da esfera



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

2. De acordo com a demonstração no aplicativo GeoGebra, qual é a conclusão que você pode tirar ao comparar a superfície lateral do cilindro equilátero com a superfície da esfera?

3. Conforme sua resposta anterior, expresse a fórmula que calcula a superfície da esfera:

4. **Atividade Contextualizada:** Eratóstenes, um matemático e geógrafo grego do século III a.C., foi o primeiro a calcular a circunferência da Terra com notável precisão. Ele fez isso ao observar a diferença na posição do Sol em duas cidades egípcias, Alexandria e Siena (atual Assuã), no solstício de verão.

Imagine que você é um estudante de cartografia e está aprendendo sobre como a superfície esférica da Terra pode ser representada em diferentes tipos de mapas. Você aprende que, devido à curvatura da Terra, é necessário usar projeções para representar sua superfície em mapas planos, mas essas projeções sempre

introduzem alguma forma de distorção. Eratóstenes estimou a circunferência da Terra como aproximadamente 40.000 km. Com base nisso, calcule o raio da Terra. (Use $\pi \approx 3,14$).



Neste momento, veremos no GeoGebra de forma dinâmica a demonstração da fórmula do volume da esfera. Na demonstração, temos dois cilindros equiláteros: em um deles, há dois cones com a mesma base do cilindro, e no outro, há uma esfera com a mesma circunferência da base do cilindro. Acesse ao QR_CODE ou <https://www.geogebra.org/m/wfebgrwn>.

Figura 56 - Dedução do Volume da esfera



Fonte: Geogebra (2024)

5. Ao manusear de forma dinâmica e observar a demonstração do volume da esfera, o que lhe chamou atenção?

6. Sabendo que o volume do cilindro, menos os volumes dos cones, é igual ao volume da esfera. Expresse aqui a fórmula do volume da esfera de acordo com a demonstração.

7. **Atividade contextualizada:** No ano de 2024, acontecem os Jogos Olímpicos de Paris, sediados na França. Na abertura do evento, os franceses foram criativos ao criarem um balão esférico para sustentar a pira olímpica, que sobrevoa a Cidade Luz. O balão suporta $392,5 \text{ m}^3$ de gás hélio. Qual é o raio do balão?

Figura 57 -Pira Olímpica da França



Fonte: Imagem da Internet (2024)

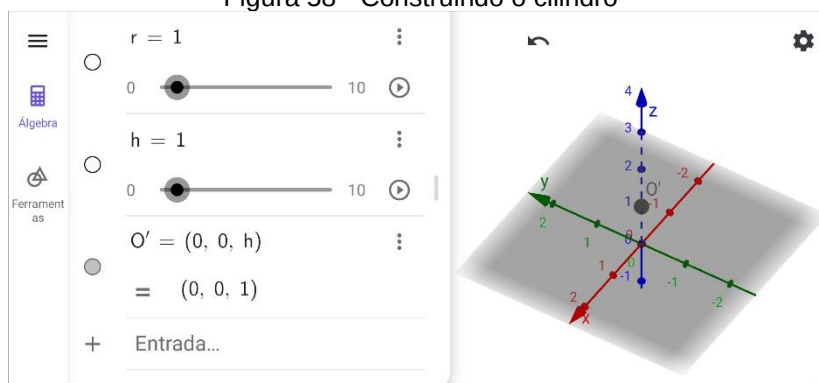
6 PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DOS OBJETOS NO GEOGEBRA

Esta é uma sugestão interessante que o professor pode abordar com seus alunos, que é a construção de cada objeto. Cada objeto feito tem seu foco nos conceitos de Geometria de posição e os elementos de cada objeto. Também, estes desenvolvimentos com o Geogebra vão requerer um pouco mais de tempo e dedicação do aluno e do professor. Sugerimos que este momento possa ser feito antes de cada Bloco de seus respectivos corpos redondos.

Construindo o Cilindro.

Clica na janela de visualização  em “Entrada”, insira os controles deslizantes digitando a letra **r** depois toque em  e a seguir a letra **h** dando enter . Configure os controles em  com os seguintes intervalos, min=0 e máx=50,m incremento normal. Depois, coloque na “Entrada” o ponto $O' = (0, 0, h)$, onde deslizará pelo “Eixo Z”, em seguida, fixar outro ponto $O = (0, 0, 0)$ no centro (Interseção “Eixo X” e “Eixo Y”).

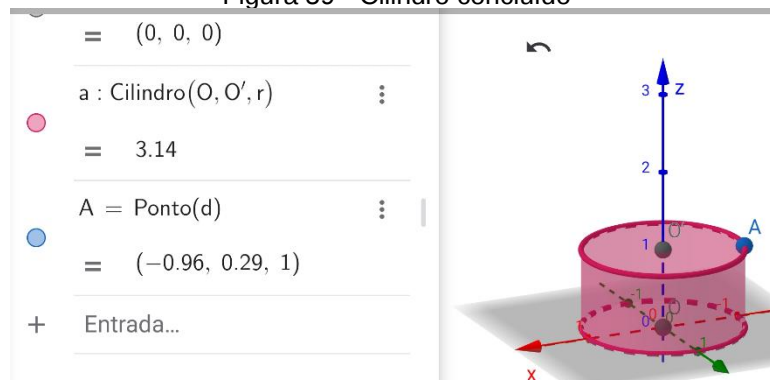
Figura 58 - Construindo o cilindro



Fonte: aplicativo GeoGebra (2024)

Agora desenvolveremos o “Cilindro”, em “Ferramentas”  clica na ferramenta Cilindro , depois seleciona os dois pontos: O e O', especificando o raio com a letra do controle deslizante **r**. Ainda em “Ferramentas” , vamos adicionar um ponto A  sobre a circunferência da área superior do Cilindro.

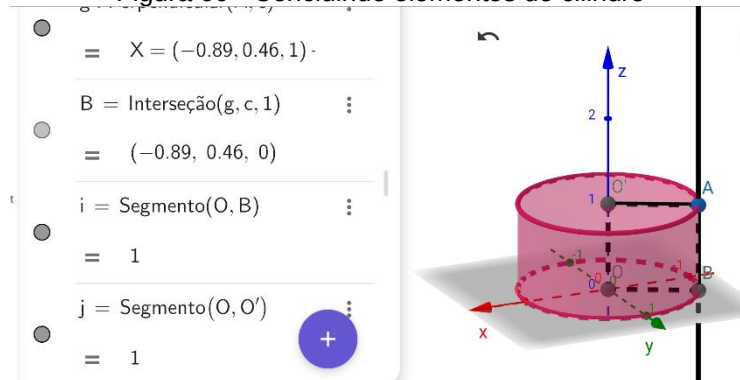
Figura 59 - Cilindro concluído



Fonte: aplicativo GeoGebra (2024)

Neste instante iremos traçar o segmento de reta (Raio da base superior), selecionando os pontos O' e A . Depois vamos traçar uma Reta (perpendicular) G (Geratriz), selecionando o ponto A e a circunferência base do Cilindro. Neste momento, vamos criar o raio da base, inserindo um ponto B de interseção com a circunferência da base e com a Reta G , em seguida, criaremos um segmento de reta OC para representar o raio.

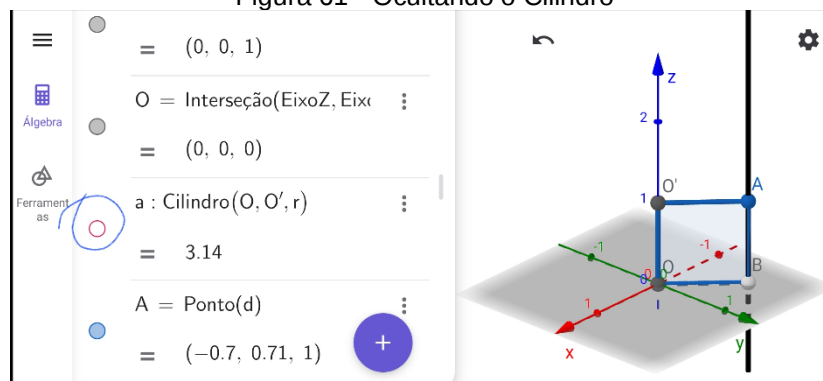
Figura 60 - Concluindo elementos do cilindro



Fonte: aplicativo GeoGebra (2024)

Agora, criaremos um segmento de reta $O'O$ que será o eixo do cilindro. Em “Ferramentas”, selecionando a ferramenta , vamos traçar um segmento de reta clicando nos pontos O' e O . Feitos esses passos anteriores, vamos fazer um Polígono $O'OBC$, para isso, basta clicar na ferramenta “Polígono” e depois selecionamos os pontos O' , O , B , C e O' . Agora oculte o “Cilindro” na janela “Álgebra” e depois ative novamente.

Figura 61 - Ocultando o Cilindro



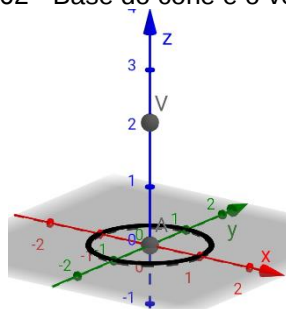
Fonte: aplicativo GeoGebra (2024)

Construindo o Cone e seus elementos.

Para realizar essa atividade de construção do objeto geométrico, inicie o app GeoGebra. Clique na janela de visualização  , em entrada, insira os controles deslizantes **r (raio)** e um outro **h (altura)**, configurando-os  com os seguintes intervalos, min=0 e máx=50, com incremento normal. Depois, coloque na entrada um ponto $O = (0,0,0)$.

Agora em “Ferramentas”  , escolha a ferramenta **círculo: Centro & Raio**  para criarmos a base do cone, selecionando com a seta o centro no ponto O e qualquer outra posição no plano dos Eixos X e Y com o raio igual a **r**. Já na entrada, faça um outro ponto $V = (0, 0, h)$ do vértice.

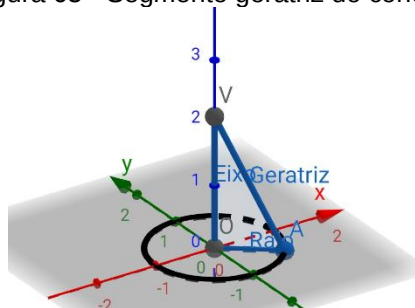
Figura 62 - Base do cone e o vértice



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Novamente em “Ferramentas”  , selecione um ponto A  e coloque sobre a circunferência da base. Neste instante iremos criar um triângulo retângulo. Em “Ferramentas”  , selecione a ferramenta polígono  , selecionando os pontos V e A (**segmento G geratriz**), depois os pontos B e O (**segmento raio r**), e por fim, os pontos O e V (**segmento Eixo**).

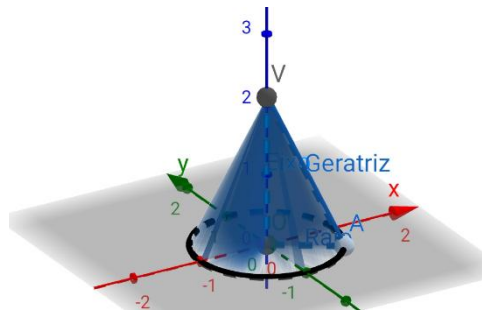
Figura 63 - Segmento geratriz do cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Por último, clique no polígono e ative a função “Exibir Rastro” na configuração  , feito isso, faça a revolução do polígono movendo com a seta sobre o ponto A.

Figura 64 - Cone por revolução



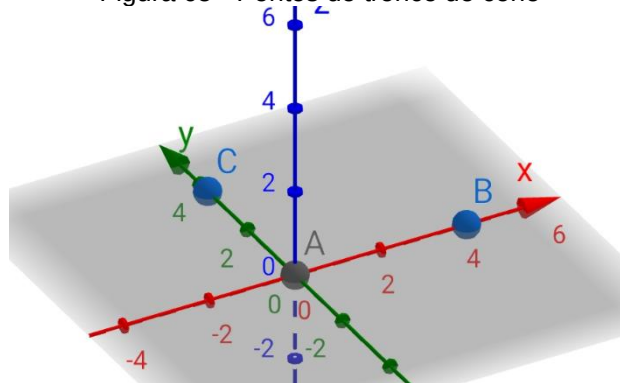
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Ao terminar a construção do Cone por revolução, manuseie os controles deslizantes **r** e **h** e observe como o sólido se comporta em cada revolução feita

Construindo o Tronco de Cone.

Para iniciarmos a construção do tronco de cone, vamos primeiro determinar os elementos do cone, pois sabemos que o **tronco de cone** é uma parte de um **cone maior** seccionado por um plano β paralelamente à sua base. Com o app GeoGebra aberto, clique em "Ferramentas"  e depois escolha a ferramenta ponto . Onde posicionaremos o ponto A sobre a intersecção de "Eixo X" e "Eixo Y" na origem (0,0,0) e o ponto B sobre o Eixo X, já o ponto C fica sobre o Eixo Y.

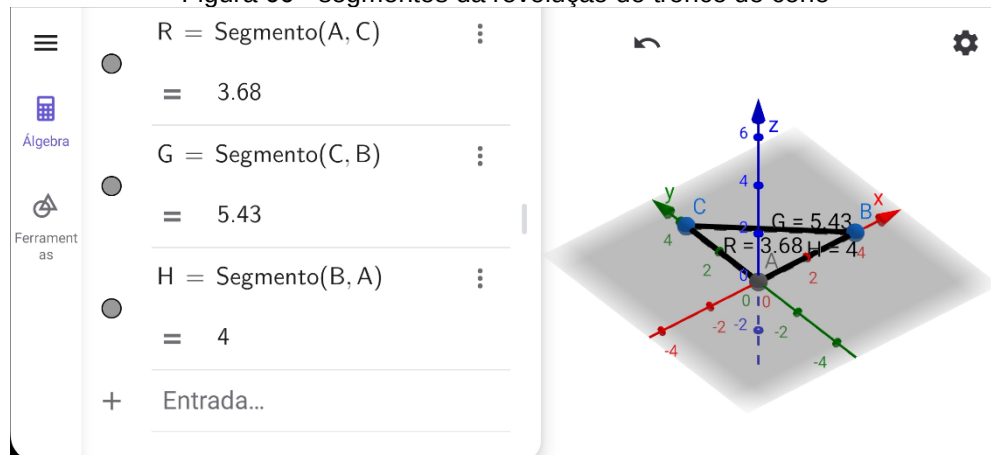
Figura 65 - Pontos do tronco de cone



Fonte: App GeoGebra (2024)

Em seguida, clique em "segmento de reta"  para criar os segmentos R, G e H, respectivamente. Para isso, selecione os pontos A e C para R (**raio da base maior**), os pontos C e B para G (**geratriz maior**) e os pontos B e A para H (**eixo ortogonal maior**). Agora, na tela do "Álgebra" , configure  os nomes de cada segmento nas configurações e ative o "Estilo de Legendas" para "Nome & Valor".

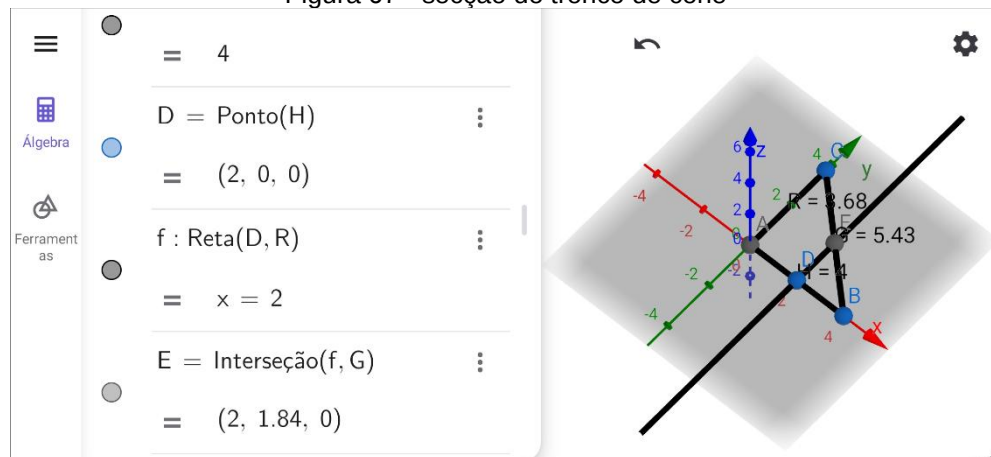
Figura 66 - segmentos da revolução do tronco de cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Agora, clique em “Ferramentas”  para criar um ponto D  sobre o segmento H. Depois crie uma “reta paralela”  ao segmento R, selecionando o ponto D e o segmento R. Em seguida, clique em “Interseção de dois Objetos”  para criarmos um ponto E, escolhendo o ponto D e o segmento G.

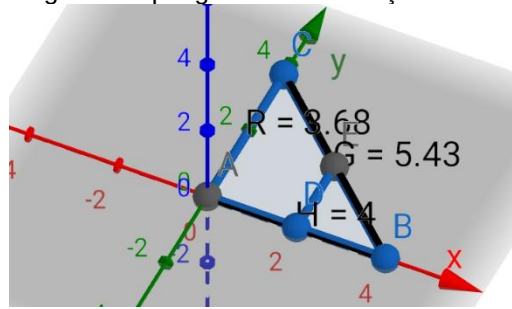
Figura 67 - secção do tronco de cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Neste instante vamos determinar, respectivamente, as regiões poligonais do tronco de cone e do cone menor. Em “Ferramentas” , clique na ferramenta polígono  e selecione os pontos A, C, E, D e A, para criar a região do trapézio reto. Depois, selecione os pontos D, E, B e D, para criar a região do triângulo retângulo menor.

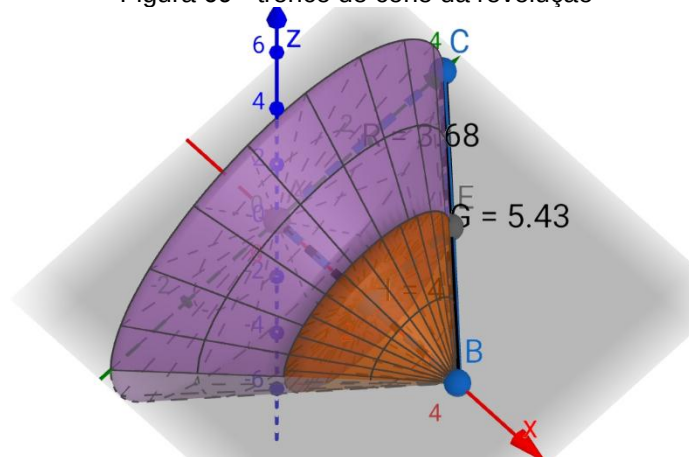
Figura 68 - região dos polígonos da revolução do tronco de cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

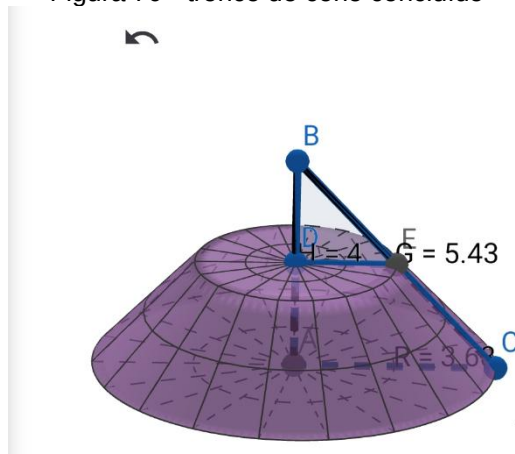
Agora, em “Ferramentas” , clique na ferramenta “Superfície de Revolução”  e depois aperte sobre os polígonos trapézio reto e triângulo menor, nesta ordem. Como resultado, obtemos um tronco de cone (objeto roxo) e um cone menor (objeto laranja), ambos formam um cone maior. Em “Álgebra”  oculte a superfície do cone menor (objeto laranja). Já em configuração  desative  o plano e os eixos.

Figura 69 - tronco de cone da revolução



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

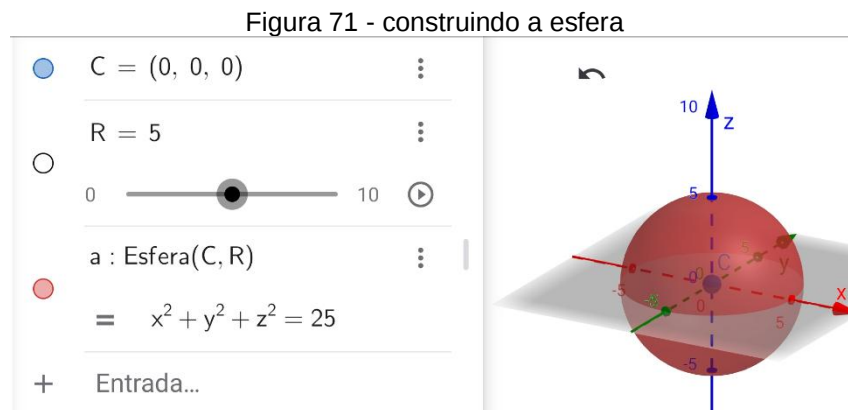
Figura 70 - tronco de cone concluído



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

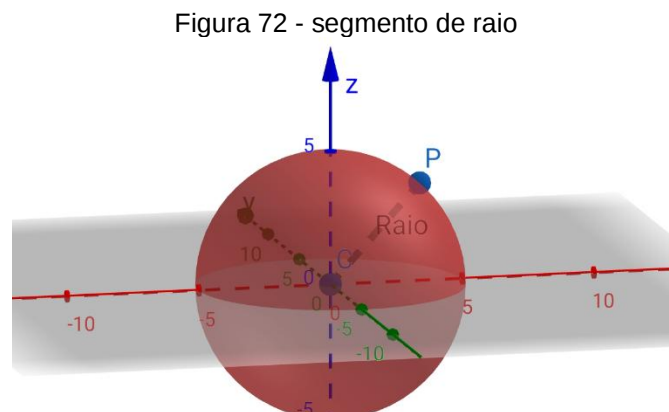
Construindo a Esfera

Para começar essa construção da esfera, figura 71, em “Álgebra” , na “Entrada” determine o centro da esfera no ponto $C = (0,0,0)$. Depois em “Ferramentas”  clique na ferramenta “Esfera: Centra & Raio” , em seguida selecione o ponto C e digite R para determinar o raio da esfera. Configure o controle de deslizante em “Configurações” o “Min” 0 e o “Max” 10.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Agora, em “Ferramentas”  clique em “Ponto”  e depois toque sobre a superfície para criar o ponto P. Em seguida, crie um segmento de reta  (Figura 72 – segmento de raio), selecionando os pontos C e P.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

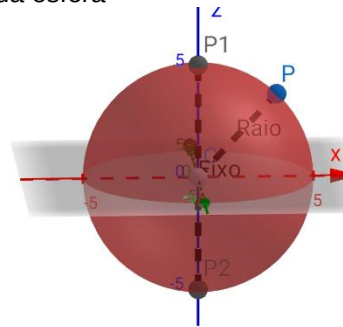
Neste instante vamos criar os Polos e o Eixo da esfera, figura 73. Em “Álgebra” crie os pontos no campo de “Entrada” digitando $P1=(0,0,R)$ e depois $P2=(0,0,-R)$. Em seguida, nas “Ferramentas”  clique em “Segmento de Reta”  (Eixo) e depois toque nos pontos P1 (polo Norte) e P2 (polo Sul).

Figura 73 - Polos da esfera

```

P1 = (0, 0, R)      ⋮
=   (0, 0, 5)
-----
P2 = (0, 0, -R)     ⋮
=   (0, 0, -5)
-----
Eixo = Segmento(P1, P2) ⋮
=   10

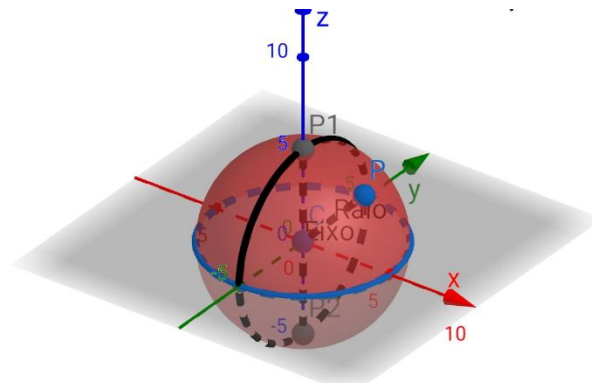
```



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Crie a linha do “Equador” da esfera, para isso, clique em “Ferramentas”  e escolha a ferramenta “Interseção de Duas Superfícies”  e depois selecione tocando as superfícies da esfera e do plano em XY. Agora, de acordo com a figura 74, faça a linha do “Meridiano” selecionando em “Ferramentas”  a ferramenta **círculo: Centro – Raio + Direção** , clique na tela sobre “Eixo X” (Direção) depois digite R para definir o raio.

Figura 74 - meridiano da esfera



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação da sequência didática mediada pelo GeoGebra apresenta um grande potencial para o ensino de corpos redondos, especialmente pela sua capacidade de integrar tecnologia ao processo de aprendizagem. Este material foi elaborado com base em uma abordagem que transforma o GeoGebra de um simples recurso tecnológico em um verdadeiro instrumento pedagógico, conforme a teoria de Rabardel (1995). Para isso, é fundamental que os professores utilizem o software como uma ferramenta dinâmica e interativa, incentivando os alunos a manipularem modelos tridimensionais e observar em tempo real as alterações nas variáveis geométricas.

A sequência foi estruturada para promover a articulação de registros de representação semiótica, conforme apontado por Duval (1993, 2012), permitindo que os conceitos sejam explorados e compreendidos em diferentes perspectivas: visual, geométrica, algébrica e gráfica. Essa abordagem facilita a visualização espacial, estimula o raciocínio matemático e amplia o engajamento dos alunos.

Para garantir o sucesso da sequência didática, os professores podem considerar as seguintes orientações:

1. **Familiarização com o GeoGebra:** Antes de iniciar a sequência, assegure-se de que os alunos estejam familiarizados com as funcionalidades básicas do GeoGebra. Isso pode ser feito com atividades introdutórias que explorem os comandos essenciais do software.
2. **Criação Colaborativa:** Incentive os alunos a trabalharem em pares ou grupos durante as atividades, promovendo discussões sobre as propriedades geométricas e as alterações observadas nos modelos. Essa abordagem colaborativa tende a facilitar a construção de significados mais sólidos.
3. **Exploração de Conceitos:** Oriente os alunos a explorarem livremente os objetos geométricos construídos no GeoGebra, observando como mudanças nas variáveis (como raio, altura ou geratriz) impactam as fórmulas de área e volume. Faça perguntas direcionadoras para estimular o pensamento crítico, como: *"O que acontece com o volume do cilindro se o raio for duplicado?"* ou *"Como a geratriz do cone influencia sua altura?"*
4. **Resolução de Dificuldades:** Esteja atento às dificuldades que os alunos podem enfrentar, como confundir altura com geratriz ou associar os registros

algébrico e visual. Utilize exemplos práticos e revise conceitos sempre que necessário, reforçando o uso integrado dos registros semióticos.

5. **Contextualização e Aplicação:** Relacione os conceitos geométricos a situações do cotidiano, como calcular o volume de reservatórios ou o material necessário para construir superfícies curvas. Essa conexão torna a aprendizagem mais significativa e motivadora.
6. **Reflexão e Síntese:** Finalize cada etapa com discussões reflexivas, pedindo que os alunos expliquem o que aprenderam e como chegaram às suas conclusões. Isso reforça a autonomia e a consolidação do aprendizado.

Esta sequência didática foi projetada para facilitar a superação de obstáculos no aprendizado da geometria e tornar o ensino mais dinâmico e significativo. A experiência também oferece uma base para futuras intervenções pedagógicas e pesquisas, destacando o potencial do GeoGebra no ensino da matemática.

Por fim, aproveite o material como uma oportunidade de experimentar uma abordagem inovadora e compartilhar os resultados obtidos com outros educadores. Ao integrar tecnologia e práticas colaborativas, é possível transformar o ensino da geometria em uma experiência enriquecedora e relevante para os alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. **Guia dos livros didáticos**: PNLD 2021. Brasília: Secretaria da Básica. 2021.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**: matemática- ensino médio-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEM, 1998.

DUVAL, R. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, 1993. Disponível em: https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf. Acesso em: 23 ago. 2023.

_____. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução: Moretti, M. T. Revista Eletrônica de Educação Matemática. UFSC, Florianópolis (SC), v.7, n.2, p.266-297, dezembro, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso: 15 de agosto de 2023.

LEONARDO, Fábio Martins de (org.). **Conexões, Matemática e suas tecnologias**: geometria plana e espacial. São Paulo: Moderna, 2020. 6 v. Disponível em: <https://pnld.moderna.com.br/ensino-medio/obras-didaticas/area-de-conhecimento/matematica/conexoes>. Acesso em: 01 dez. 2024.

RABARDEL, Pierre. **Les hommes et les technologies**; approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, pp.239, 1995.

Aurores

Fábio José da Costa Alves - Possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores



do Pará - UNESPa (1990), Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará-UNESPa (1989), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (1994), Mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999), Doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (2003) e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Atualmente é Professor Adjunto IV da

Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA e Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA. Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/UEPA de 2019 a 2023. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice-Líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPA. Está atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e matemática aplicada. Tem experiência na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: deconvolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.

Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior – Possui licenciatura em Matemática pelo Instituto



Federal de educação, Ciência e Tecnologia do Pará – IFPA (2018), Especialização em Docência para o Ensino Superior pela Faculdade IMES (2024), Especialização em Tecnologias para Aprendizagem Ativa pela Faculdade IMES (2024), Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2025). Tem experiência em na área de Educação Matemática: Didática da Matemática, Teoria Antropológica do Didático (TAD), Transposição Didática, Modelagem Matemática, Teoria da

Instrumentação, Desenvolvimento de Aplicativos para o Ensino de Matemática, Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Engenharia Didática e Sequências Didáticas; e Ensino de Matemática.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
<https://propesp.uepa.br/ppgem/>