

# Produto Educacional

## Oficina de Matemática Experimental: Caça ao Tesouro

Reinaldo Oliveira Reis Júnior

Nestor Felipe Castañeda Centurión

Germán Ignacio Gomero Ferrer

Ilhéus-BA  
2023

# Carta ao Leitor

Uma Oficina de Matemática Experimental (OME) propicia um ambiente inovador de ensino e aprendizagem de matemática cujos mecanismos se sustentam em dois princípios fundamentais; o de que as maneiras mais eficientes de aprender envolvem a participação ativa do aluno (aprender fazendo), e o de que o papel do professor é o de orientar o aluno no processo de aprendizagem (professor mediador). Nessas oficinas os alunos são confrontados com situações ou problemas matemáticos fáceis de compreender e de interesse suficiente para capturar sua atenção, mas muitas vezes difíceis de resolver. O aluno, sem ser ciente desta dificuldade, se sente impelido a procurar por uma solução; e é nessa busca que acontecem os processos de aprendizagem e de desenvolvimento das habilidades cognitivas.

A OME “Caça ao Tesouro” foi o produto educacional desenvolvido na dissertação de mestrado intitulada “Oficinas de Matemática Experimental: Caça ao Tesouro” desenvolvida pelo Me. Reinaldo Oliveira Reis Júnior, sob orientação do Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión e Coorientação do Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer, no Programa de Mestrado em Matemática em rede Nacional (Profmat) da Universidade Estadual de Santa Cruz (Uesc).

Na primeira parte, a oficina apresenta uma situação-problema que permite desenvolver uma maneira eficiente e lúdica de representar um conjunto de rotas de navegação entre as ilhas do “Arquipélago dos Piratas”. O pano de fundo matemático das atividades está relacionado com o conceito de “autômato finito”, pertencente à Área de Computação. Na segunda parte a oficina propõe o uso das chamadas “funções de transição”, inerentes a um autômato finito, para abordar de forma lúdica o conceito de função. Embora, na dissertação, tenha sido aplicada a turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, a oficina tem potencial para ser trabalhada em diversas faixas etárias que transitam do Ensino Básico ao Superior.

Aos interessados em conhecer diversos trabalhos sobre Oficinas de Matemática Experimental, a Matemática por trás da OME “Caça ao Tesouro” e um relato de experiência da aplicação da mesma, recomendamos fortemente a leitura da dissertação disponível no seguinte link:  
[https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=7289&id2=171056479](https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7289&id2=171056479).

**Palavras-chave:** Oficinas pedagógicas, Oficinas de matemática, Matemática Experimental, Autômatos Finitos, Funções

# Oficina Caça ao Tesouro - Parte 1

## 1 Objetivos

1. Objetivos matemáticos.
  - (a) Introduzir o conceito de autômato finito.
  - (b) Introduzir o uso de grafos para representar problemas de percursos.
  - (c) Apresentar a conveniência de representações algébricas.
2. Objetivos heurísticos.
  - (a) Expor o aluno a problemas que tem muitas soluções.
  - (b) Introduzir a ideia de representação algébrica como estratégia de resolução de problemas e comunicação de informação.
3. Objetivos cognitivos.
  - (a) Estimular o desenvolvimento de habilidades relacionadas aos processos de abstração e argumentação.

## 2 Lista de Equipamentos e Materiais

1. Um quadro negro ou um datashow.
2. Uma folha com o mapa do Archipélago dos Piratas por aluno (veja a Figura 1).
3. Uma folha com as tabelas das rotas de navegação por mesa (veja a Figura 1).
4. 10 fitas de papel por aluno.
5. Uma folha de rascunho por aluno (veja a Figura 2).

## 3 Descrição da oficina

A tarefa em “Caça ao Tesouro – Parte 1” é desenvolver uma maneira eficiente de representar um conjunto de rotas de navegação entre as ilhas do Archipélago dos Piratas. Existem duas companhias de navegação que oferecem serviços no arquipélago, a Navios Fantasma Cia e a Barba Negra e Filhos Ltda. Cada uma oferece um único percurso saindo de cada uma das ilhas e chegando em outra das ilhas do arquipélago. O problema que os alunos têm que resolver consiste em achar percursos de ida e volta do Porto dos Gananciosos à Ilha do Tesouro.

A representação, que esperamos surja naturalmente dos alunos, é um grafo dirigido onde os vértices são as ilhas do arquipélago e as arestas são as rotas de navegação oferecidas pelas duas companhias. Os percursos entre o Porto dos Gananciosos e a Ilha do Tesouro são obtidos quando este grafo funciona como um autômato finito tomando o Porto dos Gananciosos como estado inicial e a Ilha do Tesouro como o estado final; cada um destes percursos é uma palavra aceita pelo autômato. Representando as rotas de navegação de uma das companhias com o símbolo  $a$  e as rotas da outra companhia com o símbolo  $b$ , o problema se reduz a encontrar as palavras de dois símbolos aceitas pelo autômato. Para obter os percursos de volta ao Porto dos Gananciosos basta inverter os estados inicial e final no autômato finito.

As atividades nesta oficina são realizadas em grupos de 4 ou 5 alunos. Cada aluno recebe um mapa do Archipélago dos Piratas, mas as tabelas com as rotas de navegação são entregues ao grupo. Como a informação nas tabelas não pode estar disponível permanentemente para cada aluno, eles se vêm forçados

a representar esta informação em seus respectivos mapas. A expectativa é que esta necessidade os leve a construir o grafo dirigido de modo natural, assim como a seu uso como autômato finito.



Figura 1: Mapa do Archipelago dos Piratas e tabelas com as rotas de navegação.

**Caça ao Tesouro**  
Oficinas de Matemática Experimental

Nome: \_\_\_\_\_  
Turma: \_\_\_\_\_  
Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

*Legendas*

<i>Código</i>	<i>Ilha</i>
<i>S</i>	<i>Porto dos Gananciosos</i>
<i>1</i>	
<i>2</i>	
<i>3</i>	
<i>4</i>	
<i>5</i>	
<i>6</i>	
<i>Ch</i>	<i>Ilha do Tesouro</i>

<i>Código</i>	<i>Companhia de Navegação</i>
<i>a</i>	
<i>b</i>	

*Desenhe aqui o mapa do Arquipélago dos Piratas de modo esquemático.*

Figura 2: Folha de rascunho para desenhar o autômato finito que representa o Arquipélago dos Piratas com as rotas de navegação.

## 4 Atividades

1. **Compreendendo o problema.** Esta atividade serve para familiarizar os alunos com o problema de traçado de percursos de uma ilha para outra.
  - (a) Forme grupos de 3 alunos. <sup>1</sup>
  - (b) Entregue uma folha com o mapa do Archipélago dos Piratas a cada aluno e uma folha com as tabelas das rotas de navegação a cada grupo.
  - (c) Peça para que cada aluno encontre três roteiros que levem do Porto dos Gananciosos para a Ilha do Tesouro. <sup>2</sup>
  - (d) Peça para que cada aluno encontre três roteiros que levem da Ilha do Tesouro para o Porto dos Gananciosos.
  - (e) Entregue as fitas de papel e peça para escrevam os percursos nelas, um percurso por fita. Não pode usar letra pequena porque isso dificulta a leitura.
2. **Construindo o autômato finito (deve acontecer em paralelo com a atividade anterior).** Nesta atividade os alunos devem transferir a informação do mapa do Arquipélago dos Piratas e as tabelas com as rotas de navegação para um autômato finito.

<sup>1</sup>No roteiro original os grupos eram de 4 ou 5 alunos, no entanto, após diversas aplicações esses números precisaram ser ajustados.

<sup>2</sup>O número de roteiros pedido pode ser menor a depender do rendimento da turma.

- (a) Devem surgir reclamações porque há apenas uma folha com as rotas de navegação por grupo. Discuta a necessidade de transferir a informação da folha com as tabelas para o mapa do arquipélago.
  - (b) Devem surgir reclamações porque as fitas são muito pequenas para escrever um percurso completo. Discuta a necessidade de comprimir a informação usando algum tipo de código.
  - (c) Entregue a cada aluno uma folha de rascunho (veja a Figura 2), e sugira que desenhem o mapa do arquipélago com as rotas de navegação de forma esquemática; uma pequena bola com o respectivo código para cada ilha e setas com seu respectivo código para cada rota de navegação.
3. **Usando o autômato finito.** Nesta atividade os alunos devem usar o autômato finito para resolver o problema dos percursos (encontrar os percursos e comunicar as respostas por escrito), gerar novos problemas e resolvê-los usando o autômato finito que construíram.
- (a) Peça para que descrevam os percursos encontrados usando os códigos das rotas da folha de rascunho. Os alunos devem perceber que os percursos agora podem ser descritos fielmente usando apenas palavras de dois símbolos, os símbolos que representam as companhias de navegação.
  - (b) Peça aos alunos para que gerem novos problemas. Seguem algumas sugestões que podem ser apontadas se os alunos tiverem dificuldades para gerar novos problemas.
    - i. Qual é a maneira mais rápida de chegar à Ilha do Tesouro? E a maneira mais rápida de voltar ao Porto dos Gananciosos?
    - ii. Podemos chegar à Ilha do Tesouro passando apenas uma vez por cada ilha? Podemos voltar ao Porto dos Gananciosos desta maneira?
    - iii. Existe algum percurso (palavra de dois símbolos) que sirva tanto para ir à Ilha do Tesouro, como para voltar ao Porto dos Gananciosos?
    - iv. É possível chegar à Ilha do Tesouro viajando apenas com uma das companhias de navegação? Podemos voltar ao Porto dos Gananciosos desta maneira?
    - v. Podem ser gerados problemas impondo que alguma rota de navegação está interdita por problemas técnicos. Por exemplo, é possível chegar à Ilha do Tesouro se o navio da Barba Negra e Filhos Ltda que sai da Ilha dos Náufragos está em manutenção?
    - vi. Quais são as rotas de navegação *críticas* para ir à Ilha do Tesouro? Ou seja, quais são as rotas que não podem parar para que seja sempre possível chegar à Ilha do Tesouro? E para voltar ao Porto dos Gananciosos?
  - (c) Cada problema novo deve ser resolvido, e as respostas devem ser comunicadas por escrito nas fitas de papel.
4. **Discussão.** Esta atividade é reservada para conversar com os alunos sobre a oficina. Seguem algumas perguntas que podem guiar a discussão.
- (a) O autômato finito resolveu os problemas práticos de encontrar os percursos e comunicar as respostas de modo eficiente?
  - (b) Resulta mais prático usar o mapa do Arquipélago dos Piratas e as tabelas com as rotas de navegação? Ou é mais prático representar toda essa informação com um autômata finito e usá-lo para resolver os problemas e comunicar as soluções?
  - (c) Alguém que não conheça a codificação usada poderá compreender as soluções obtidas e comunicadas usando o autômato finito?

# Oficina Caça ao Tesouro - Parte 2

## 1 Objetivos

1. Objetivos matemáticos.
  - (a) Introduzir algumas noções elementares associadas ao conceito de função.
  - (b) Apresentar ao aluno o processo de abstração e argumentação.
2. Objetivos heurísticos.
  - (a) Expor o aluno ao desafio de enfrentar problemas.
  - (b) Apresentar ao aluno o método experimental em matemática, estimulando-o a formular e testar hipóteses.
  - (c) Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas.
  - (d) Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação.
  - (e) Incentivar o aluno a utilizar diferentes formas de representação para solucionar problemas.
3. Objetivos não-matemáticos.
  - (a) Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

## 2 Lista de Equipamentos e Materiais

1. Um quadro negro ou um datashow.
2. Uma folha, por aluno, com o Autômato Finito formalizado da oficina Caça ao Tesouro - Parte 1 (veja a Figura 3).
3. Uma folha, por aluno, com a situação-problema da oficina Caça ao Tesouro - Parte 2. (veja a Figura 4).
4. Um bilhete de passagem com a rota “baba” e uma folha de rascunho por aluno.(veja a Figura 6).

## 3 Descrição da oficina

A tarefa em “Caça ao Tesouro – Parte 2” é verificar, a partir do acréscimo de novas rotas de navegação, que há um problema no que se refere à chegada em determinada ilha com trajeto pré-definido. Além disso, a partir do autômato finito formalizado na primeira parte da oficina, os alunos são apresentados a novas possibilidades de problemas que permitem a validação da proposta da Parte 1, bem como são convidados a um novo cenário em que há necessidade do aumento da quantidade de rotas utilizadas pelas duas companhias de navegação que oferecem serviços no arquipélago, a Navios Fantasma Cia e a Barba Negra e Filhos Ltda.

Nesse sentido, o contexto apresentado pode estimular os alunos a refletirem sobre a imprevisibilidade, a partir do código ofertado, da ilha de destino de dada embarcação. O problema que se deve resolver consiste em achar percursos que são representados por um mesmo código “problemático” que conduz a destinos diferentes. Assim, espera-se que os alunos compreendam que não há possibilidade de operacionalização do Autômato Finito a partir do acréscimo das rotas sugeridas.

As atividades nesta oficina são realizadas em grupos de 3 ou 4 alunos. Cada aluno recebe o problema com o novo cenário proposto com o acréscimo de rotas, o Autômato Finito formalizado referente a Parte 1 da oficina e o bilhete de passagem adquirido pelo “Capitão Pirata”.

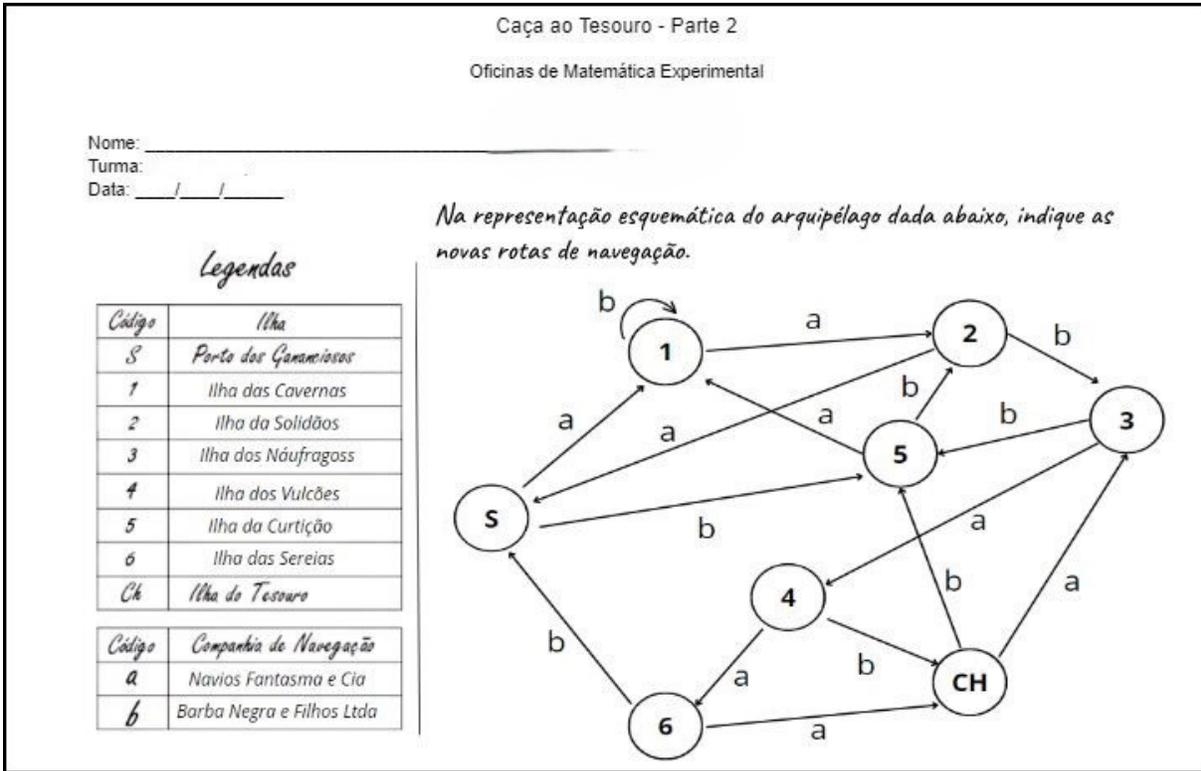


Figura 3: Autômato Finito Parte I - Caça ao Tesouro .

Caça ao Tesouro - Parte 2  
Oficinas de Matemática Experimental

Nome: \_\_\_\_\_  
Turma: \_\_\_\_\_  
Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

*O tesouro foi encontrado! E agora!?*

Uma vez que o tesouro foi encontrado, uma outra ilha virou destino principal do arquipélago dos piratas: estamos falando da ilha dos vulcões. Houve relatos de que, nessa ilha, um dos vulcões está em processo de erupção, o que, apesar do perigo, atrai muitos curiosos.

No entanto, para chegar até a ilha dos Vulcões, um novo e moderno sistema de venda de bilhetes de passagem foi criado pelas companhias de navegação, *Barba Negra e Filhos Ltda* e *Navios Fantasma e Cia*, para facilitar o deslocamento de pessoas no arquipélago.

Nesse novo sistema, os bilhetes de passagem são emitidos com o código que representa o trajeto a ser percorrido. Porém, devido a grande procura, as empresas decidiram criar novas rotas.

*Novas Rotas*

<i>Navios Fantasma e Cia</i>	
<i>Saída</i>	<i>Chegada</i>
Porto dos Gananciosos	Ilha das Sereias
Ilha da Curtição	Ilha da Solidão

<i>Barba Negra e Filhos</i>	
<i>Saída</i>	<i>Chegada</i>
Ilha das Cavernas	Ilha da Solidão

Figura 4: Situação-problema da Oficina Caça ao Tesouro - Parte 2 e novas rotas de navegação.

## 4 Atividades

1. **Refletindo possibilidades.** Esta atividade objetiva retomar a proposta da primeira parte da oficina, bem como apresentar aos alunos a formalização do autômato finito.
  - (a) Apresente o seguinte problema: uma fita de papel, com determinado código, foi encontrada à beira da praia por uma pessoa que caminhava em uma das ilhas do arquipélago. No entanto uma parte do código encontra-se borrada.
  - (b) Na lousa, escreva as informações da fita conforme sugestão abaixo e, em seguida, solicite que os alunos verifiquem se, conforme o código descrito, é possível chegar à Ilha do Tesouro.



Figura 5: Bilhete com código parcialmente borrado.

2. **Analisando o novo cenário.** Esta atividade serve para familiarizar os alunos com o problema de inserção de novas rotas de traslado entre as ilhas do arquipélago.
  - (a) Forme grupos de 3 alunos ou, se possível, permaneça com os grupos constituídos durante a aplicação da Parte I da Oficina Caça ao Tesouro.<sup>3</sup>
  - (b) Entregue uma folha com a situação problema a cada aluno. Na folha já há a indicação das novas rotas (Figura 4). Solicite que os alunos acompanhem atentamente a leitura.
3. **Adaptando o Autômato Finito da Parte 1 (deve acontecer em paralelo com a atividade anterior).** Nesta atividade os alunos devem acrescentar as novas rotas de navegação ao autômato formalizado da Parte 1 da oficina.
  - (a) Entregue a folha com o Autômato Finito da Parte 1 a cada aluno (veja a Figura 3). Solicite que acrescentem, conforme a legenda fornecida, as novas rotas de navegação.
  - (b) Devem surgir reclamações sobre a quantidade de setas e elementos utilizados. Relembre que, na Parte 1 da oficina, uma das tarefas consistia na elaboração de um esquema para o deslocamento entre as ilhas do arquipélago. Tentar chegar ao consenso de que o esquema proposto consiste em mais uma possibilidade de representação.
4. **Usando o Autômato Finito com as novas rotas de navegação.** Nesta atividade os alunos devem usar o autômato finito que construíram para responder questionamentos, assim como, criar e resolver novos problemas.
  - (a) Forneça para cada aluno uma folha com o bilhete de passagem adquirido pelo “Capitão Pirata” e o rascunho (veja a Figura 6). Questione aos alunos qual é a ilha em que o Capitão Pirata desembarcou usando o bilhete apresentado. É importante que os alunos tentem constatar que de fato existe um problema.
  - (b) Peça aos alunos para que discutam e reflitam sobre o que ocasionou o problema vivenciado pelo “Capitão Pirata”. Espera-se que os alunos encontrem um conflito entre a ilha de chegada prevista na compra do bilhete e outras possibilidades que surgem após o acréscimo de novas rotas.

<sup>3</sup>Verificar a quantidade de alunos por grupo a depender do perfil da turma.

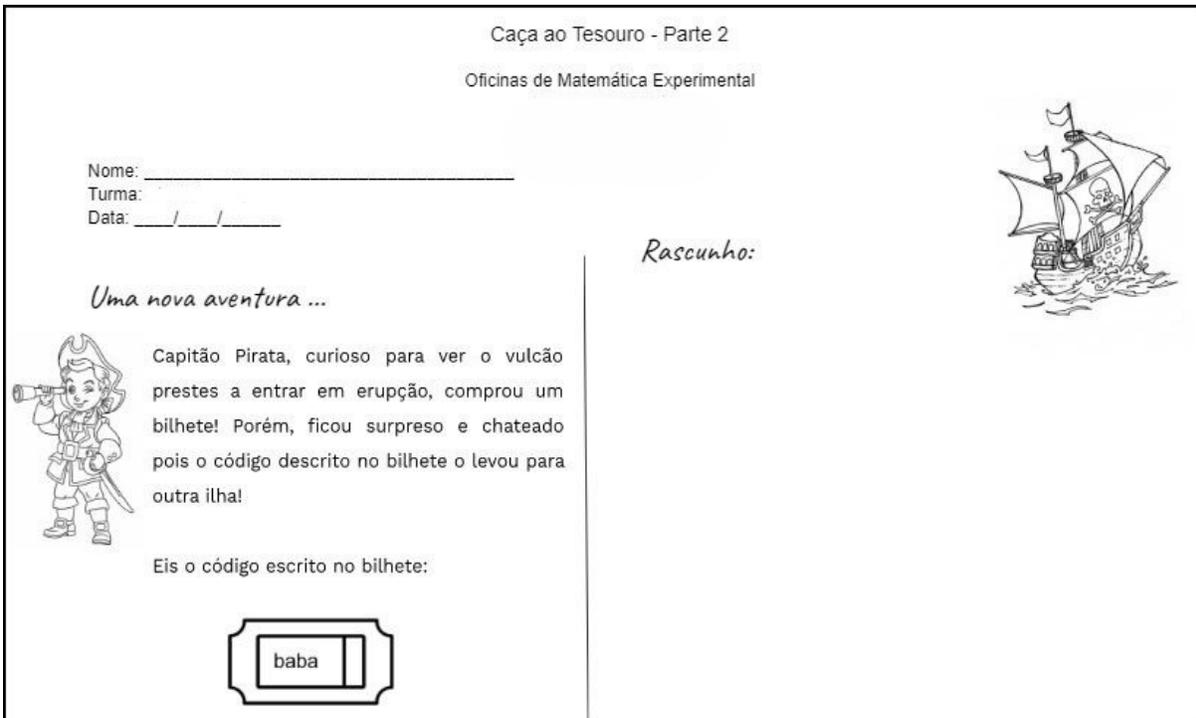


Figura 6: Bilhete de passagem e rascunho.

5. **Explorando o problema.** Uma vez identificado o que ocasionou o equívoco no destino do “Capitão Pirata”, solicite aos alunos que reflitam e respondam os questionamentos seguintes:
- (a) Outros bilhetes poderão ocasionar problemas semelhantes para usuários do sistema de navegação?
  - (b) Se sim, quais códigos devem ser evitados?
  - (c) Existiam bilhetes “problemáticos” sem o acréscimo de rotas?
6. **Discussão.** Esta atividade é reservada para conversar com os alunos sobre a oficina. Seguem algumas perguntas que podem guiar a discussão.
- (a) O que deve ser feito para evitar esse tipo de problema?
  - (b) Qual o maior número de rotas que podem ser retiradas de modo que, mesmo assim, se possa chegar em qualquer ilha?