Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias

Matheus Costa de Souza

Uma proposta de tarefas organizadas por meio de uma sequência didática para o estudo da Soma de Riemann no Ensino Médio

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em
<https://pergamum.ufob.edu.br/acervo/276129>.

Orientadora: Profa. Dra. Priscila Santos Ramos

Barreiras/BA

2024

Sumário

1 Uma proposta de tarefas organizadas por meio de uma sequência didática para o estudo da Soma de Riemann no Ensino Médio

No primeiro momento, é apresentada uma adaptação dos níveis de Van Hiele conforme o que acredita-se ser pertinente para o aprendizado das Somas de Riemann. Em seguida, utiliza-se de uma sequência didática para organizar as etapas de aplicabilidade das tarefas. Esta abordagem é justificada usando as fases de Van Hiele e, então, as tarefas são apresentadas com os respectivos comentários acerca de cada uma.

1.1 Adaptação dos níveis de Van Hiele para o estudo de áreas sob curvas

Com base nas leituras e pesquisa sobre os níveis de Van Hiele, apresentamos nesta seção uma adaptação destes níveis para o estudo de aproximações de áreas sob curvas. Alguns pesquisadores que fizeram adaptação para estudos de outros assuntos, para além da geometria, nos serviram de inspiração e merecem destaque.

O trabalho de Cardoso (2020), cujo objetivo principal de sua dissertação foi propor níveis de aprendizagem para o tópico de funções no ensino médio, baseando-se no modelo de Van Hiele. A pesquisa se inseriu no contexto de dificuldades que muitos alunos enfrentavam na compreensão do conceito de funções. A autora se baseia em estudos anteriores que investigaram as dificuldades no ensino e aprendizagem de funções e que destacam a necessidade de entender melhor o processo de aprendizagem e buscar soluções para minimizar as dificuldades dos alunos.

O trabalho de Duarte e Fuster (2003) discute aspectos comparativos no modelo de Van Hiele para o conceito de aproximação local, especificamente em relação à compreensão da tangente em situações "irregulares" em curvas. Ele explora os diferentes níveis de raciocínio dos alunos e como esses níveis estão relacionados à capacidade de compreender e prever as limitações na identificação da tangente em pontos específicos de uma curva. Além disso, o artigo aborda a importância da interação entre entrevistador e aluno para determinar o nível de raciocínio, destacando a evolução do pensamento do aluno ao passar de um nível para outro.

López e Carreras (2001) abordam a compreensão do conceito de convergência de séries de termos positivos, utilizando uma abordagem educacional baseada no modelo de Van Hiele. O objetivo principal é desenvolver uma componente visual dinâmica que ajude a facilitar a experiência de aprendizado sobre a convergência de séries, permitindo que os alunos explorem e compreendam os diferentes níveis de raciocínio envolvidos nesse conceito matemático.

A adaptação feita por Cardoso (2020) considera apenas o aprendizado de funções, assim como a de Duarte e Fuster (2003) que leva em conta apenas o aprendizado de funções e tangentes. Em nosso trabalho entendemos que, para compreensão total das ideias que antecedem o conceito de soma de Riemann, estuantes devem ter, além de funções, noções de áreas e de conceitos que envolvem somatórios, por isso fizemos uma classificação mais abrangente. Já López e Carreras (2001) aborda um pouco de geometria ao citar as relações que o aluno estabelece entre pontos pertencentes ou não a segmentos de reta.

De uma forma mais direta ou indireta, todos contribuíram como nossa abordagem. Assim, com o objetivo de nortear a construção das atividades que permitirão ao estudante o desenvolvimento do pensamento geométrico e a evolução gradual de um nível a outro no estudo das soma de Riemann, apresentamos os Níveis de Van Hiele no estudo das somas de Riemann.

Nível 1 - Os alunos reconhecem e distinguem os elementos do plano cartesiano: eixo vertical e horizontal, origem e quadrantes. São capazes de localizar pontos no plano dadas suas coordenadas. Identificam intervalos crescentes, decrescentes ou constantes a partir dos gráficos de funções. Compreendem a área como a medida de uma superfície.

Nível 2 – Conhecem e distinguem tipos de funções; Possuem noção sobre os diferentes gráficos e a quais funções representam; Entendem que áreas sob curvas podem ser estimadas por meio de aproximações.

Nível 3 – Neste nível o estudante já deve ter conhecimento de partição de intervalo, altura do retângulo da soma de Riemann está associada à imagem da função. As partições devem ter o mesmo comprimento. O estudante reconhece que a melhor aproximação é quando a partição tem um número maior de subintervalos.

Nível 4 – O estudante compreende a soma de Riemann como a aproximação da área sob curvas limitadas para funções crescentes e decrescentes, escreve a notação formal e compreende que a ideia pode ser estendida para funções quaisquer.

Nível 5 – Domina o conceito da soma de Riemann para qualquer função elementar, faz conjecturas da soma de Riemann para regiões delimitadas por curvas. Faz uso da linguagem matemática formal e compreende e acompanha provas formais.

1.2 A Sequência Didática para organização das tarefas

Para proposição de tarefas que garantam uma compreensão efetiva do nosso tema de estudo, faremos uso de uma Sequência Didática, doravante chamada SD, que permita a assimilação de conteúdos conceituais, usando como referência sobre o tema o trabalho de Antoni Zabala.

Conforme Zabala (1998), entende-se por conteúdos conceituais aos conhecimentos teóricos, conceitos e princípios que os alunos devem compreender e internalizar. São informações sobre fatos, ideias, teorias e princípios que formam a base do conhecimento em uma determinada área. Por exemplo, entender o conceito de área como a medida da superfície de uma figura geométrica.

Ainda segundo o autor, uma SD é um conjunto de atividades organizadas de forma planejada e sequencial, com o objetivo de promover a aprendizagem dos alunos em relação a determinados conteúdos ou habilidades. Ela pode incluir diferentes etapas, como a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos, a apresentação dos novos conteúdos, a realização de atividades práticas e a avaliação do aprendizado. A SD pode variar de acordo com os objetivos de ensino e as características dos alunos, mas seu papel deve ser sempre o de promover a aprendizagem.

O processo de aprendizagem é uma construção pessoal, no qual cada aluno desenvolve seu próprio conhecimento individualmente e/ou com a ajuda de outras pessoas. Tal construção depende do interesse, disponibilidade, bagagem de conhecimento e experiências do aluno, juntamente com a contribuição de um educador capaz de intervir de maneira apropriada nos avanços e nas dificuldades que o aluno apresenta, oferecendo suporte e, ao mesmo tempo, incentivando a autonomia do aluno. A aprendizagem é vista como a atribuição de significado a um objeto de ensino, envolvendo a resolução de conflitos entre o conhecimento preexistente e o conhecimento a ser adquirido, além do estímulo do aluno a enfrentar desafios.

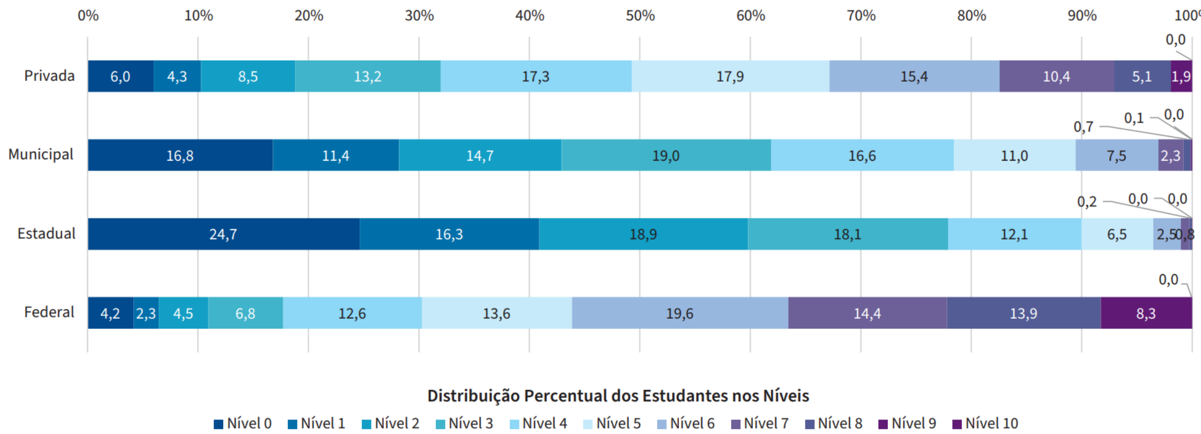
Para organizar as atividades em uma sequência didática de forma eficaz, é importante considerar alguns pontos, como: definição dos objetivos de aprendizagem, ou seja, antes de planejar as atividades, é essencial ter clareza sobre o que se espera que os alunos aprendam ao final da sequência; escolha os conteúdos que serão abordados, levando em consideração a relevância para os objetivos de aprendizagem e para a formação dos alunos; um sequenciamento lógico, onde as atividades são organizadas de forma sequencial; Inclusão de diferentes tipos de atividades para engajar os alunos e atender a diferentes estilos de aprendizagem; momentos de avaliação ao longo da sequência para verificar o progresso dos alunos e identificar possíveis ajustes no ensino; flexibilidade para ajustar as atividades conforme a necessidade dos alunos e os resultados obtidos durante a sequência didática.

1.3 Tarefas propostas

Nesta proposta, utilizaremos o modelo de Van Hiele com ênfase nas fases de aprendizagem, mas sem a intenção de propor tarefas específicas para cada nível de desenvolvimento. Optamos por essa estratégia considerando a realidade das escolas brasileiras, onde frequentemente encontramos turmas com grande heterogeneidade, ou seja, compostas por alunos com bagagens de conhecimento, experiencias pessoais e habilidades variadas. Essa constatação é corroborada pelos dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2021.

A avaliação que compõe a prova SAEB classifica os alunos em níveis de proficiência que vão de 0 a 10, de acordo com os conhecimentos esperados ao fim do ensino médio em cada um desses níveis. A figura 1 mostra a distribuição percentual média do Brasil, em 2021, evidenciando que os estudantes brasileiros que concluem o ensino básico não saem possuindo os mesmos conhecimentos.

Figura 1 – Gráfico da distribuição percentual dos estudantes da 3ª série, por níveis da escala de proficiência no SAEB, em matemática, no Brasil em 2021



Fonte: Relatório de resultados do SAEB (2021, p. 210)

Em vez de segmentar as tarefas, decidimos elaborar três tarefas integradas, que estimulam estudantes em diferentes níveis simultaneamente. A primeira tarefa propõe o desenvolvimento das habilidades dos níveis 1 e 2. A segunda tarefa propõe o desenvolvimento das habilidades dos níveis 3 e 4. Finalmente, a terceira tarefa propõe o desenvolvimento das habilidades do nível 5.

Apresentamos, a seguir, as tarefas, em cada questão tecemos comentários que acreditamos nortear o trabalho docente no momento da aplicação. Essas tarefas encontram-se prontas para impressão ao final deste material.

1.3.1 Tarefa 1: Explorando a ideia de aproximação de áreas sob curvas

No quadro 1, descrevemos os objetivos de aprendizagem referentes a esta tarefa, bem como os materiais que o professor necessitará para aplicação e o tempo estimado.

Quadro 1 – Descrição dos objetivos, tempo e materiais para aplicação da tarefa 1.

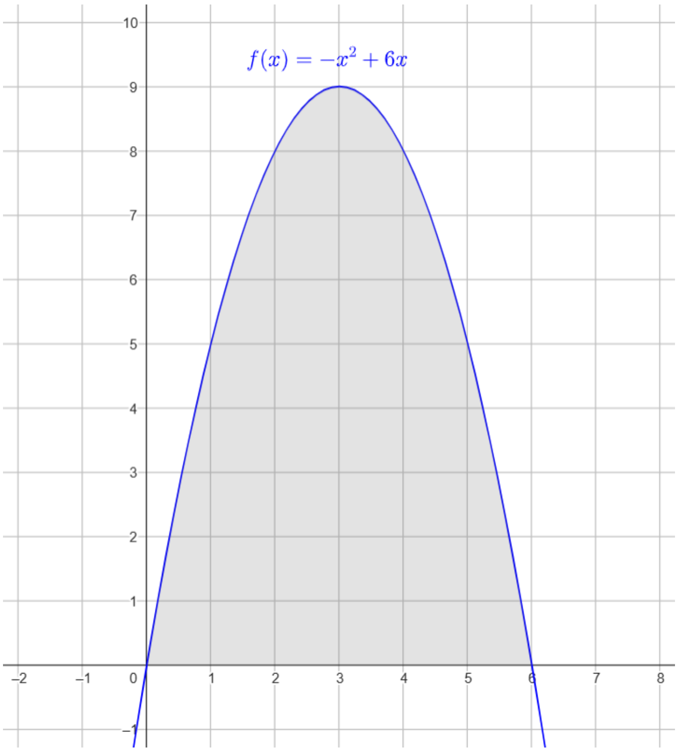
Objetivos:	• Compreender a soma de retângulos como uma possível aproximação de áreas sob curvas. • Comparar diferentes aproximações e entender como que o número de partições afeta a precisão da área aproximada. • Analisar o impacto de subestimação ou superestimação das áreas dependendo da posição dos retângulos (à esquerda ou à direita).
Materiais:	• Cópias impressas (ou versões digitais) das tarefas para distribuição aos estudantes. • Calculadoras (opcional na tarefa 1). • Quadro Branco e Marcadores • Material de Desenho (Lápis, Borracha, Compasso, etc).
Tempo:	• 2 aulas.

Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir estão as perguntas da tarefa 1. O que espera-se como possíveis respostas e os comentários que relacionam as fases e os níveis de Van Hiele estão logo após cada pergunta. Seguiremos esta disposição nas tarefas 2 e 3.

QUESTÃO 01 - Considere a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico que está esboçado abaixo. A área destacada está delimitada pelo gráfico da função, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 6$.

Figura 2 – Representação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Responda:

a) Em qual ou quais pontos esse gráfico toca o eixo das abscissas?

Com relação às fases do aprendizado, nossa orientação é que a Fase 1 seja trabalhada apenas na Tarefa 1. Justifica-se pelo fato de que é nessa fase que são identificados os conhecimentos prévios que os alunos trazem e é esclarecido o objeto de estudo. Especificamente nesta Questão 01, acreditamos que é possível abordar essas duas situações, tornando desnecessário a abordagem da fase 1 nas demais tarefas, uma vez que os conhecimentos prévios já terão sido identificados. Ressalta-se que em alguns momentos os estudantes devem responder à tarefa individualmente e em outros, em grupos, socializando as respostas conforme condução do professor. Na fase 1, recomenda-se que os estudantes respondam individualmente.

No item (a) dessa questão, espera-se perceber os conhecimentos sobre a localização de pontos no plano cartesiano e sobre os elementos que compõem uma função plotada nesse plano.

É possível que alguns alunos respondam que os pontos onde o gráfico intersecta o eixo das abscissas se encontram aproximadamente em “menos zero vírgula alguma coisa” e “seis vírgula alguma coisa”, mostrando que, mesmo sem realizar o cálculo formal, conseguem identificar visualmente que os pontos se aproximam de 0 e 6. Outros alunos, por sua vez, podem demonstrar um conhecimento mais aprofundado ao calcular as raízes da equação, evidenciando uma compreensão mais ampla da função. No entanto, também é esperado que alguns estudantes não consigam perceber ou identificar nem mesmo visualmente que a função de fato intersepta o eixo dos x.

b) Em qual ou quais pontos o gráfico toca o eixo das ordenadas?

Espera-se que o estudante perceba que a função também intercepta o eixo das ordenadas, embora, diferente do item (a), isso ocorra em apenas um ponto. Mais uma vez, buscamos avaliar se os alunos identificam esse ponto apenas de maneira visual ou se eles recorrem a meios algébricos para determinar esse ponto, utilizando, por exemplo, o $f(0)$

c) Essa função tem ponto de máximo ou de mínimo? Caso haja, determine suas coordenadas.

Neste item, espera-se que o aluno reconheça que a função quadrática admite apenas um ponto de máximo, uma vez que sua concavidade está voltada para baixo, não havendo ponto de mínimo. A partir da resposta, será possível avaliar se o aluno compreende o conceito de ponto de máximo e mínimo e se consegue diferenciar entre ambos, dependendo da função apresentada.

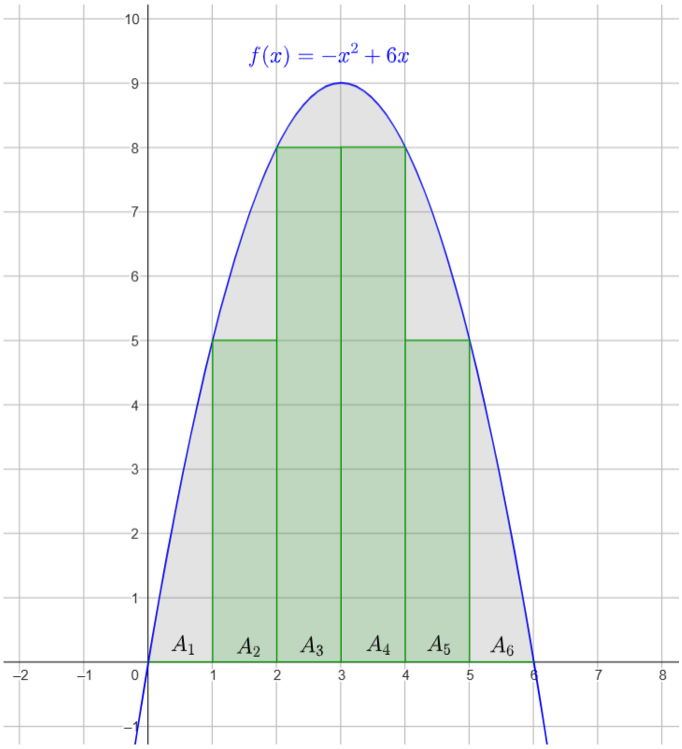
d) Considerando que nosso objetivo seja determinar a área da região em cinza, como podemos fazer isto?

Por fim, buscamos compreender se o estudante possui noção sobre o que é a área de uma figura e de quais ferramentas ele dispõe para determinar uma área como essa. Queremos observar como o aluno pensa em calcular essa área. É esperado que alguns estudantes tentem aproximar a área contando os quadrados da malha quadriculada sobre a qual a função foi plotada. É possível que alguns alunos apresentem abordagens que surpreendam.

Na fase 2, conhecida como orientação dirigida, trabalha-se com questões simples e que evoluem em grau de dificuldade aos poucos. Nosso objetivo é induzir o aluno a compreender, de forma autônoma, conceitos que serão consolidados aos poucos. Nesse primeiro momento, os alunos devem ter contato com a atividade e tentar resolvê-la com o mínimo de interação do professor, buscando chegar às soluções por si mesmos. Recomendamos que, nesta etapa, os alunos sejam incentivados a resolver as Questões de 02 a 04 a seguir, individualmente.

QUESTÃO 02 - Considerando-se a situação da questão anterior, suponha que umas das estratégias usadas para determinar uma aproximação da área citada foi inscrever retângulos abaixo da curva e determinar a soma das áreas desses retângulos. Na figura abaixo, foram usados retângulos de mesma base em partição regular.

Figura 3 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 6 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Quantas partições foram feitas?

Nessa questão, introduzimos a ideia de aproximar a área sob uma curva utilizando retângulos. Note que, propositalmente, deixamos nessa aproximação de forma que a altura de cada retângulo possa ser facilmente determinada apenas pela observação da figura, sem a necessidade de cálculos. Isso ocorre porque, nessa tarefa, estamos explorando principalmente as habilidades que os alunos que se encontram entre os níveis 1 e 2 da teoria de Van Hiele possuem. No nível 1, o estudante tem uma compreensão através observação. Ainda não possui uma compreensão das propriedades inerentes ao problema, que só começa a surgir a partir do nível 2.

Deve-se perceber que foram feitas 6 partições, ainda que sejam nulas as áreas nos intervalos $[0, 1]$ e $[5, 6]$,

b) Olhando para o gráfico, é possível saber qual é a medida da área de cada retângulo?

No item (b), espera-se que a resposta seja afirmativa. O objetivo da pergunta é estimular o conhecimento referente ao cálculo de área por meio do produto: comprimento da base vezes altura, mesmo que alguns optem por somar quadrados da malha quadriculada.

c) Complete a tabela abaixo e dê o valor de $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$.

Quadro 2 – Soma das áreas dos retângulos usados como aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 6 partições regulares

Retângulo	**Base**	**Altura**	**Área**
A_1			
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			

Fonte: Elaborado pelo autor

d) Qual a relação entre as áreas dos três primeiros retângulos e dos três últimos?

O uso da tabela nesse problema foi buscando uma forma para que o estudante mantenha uma organização dos dados, lhe permitindo enxergar com clareza o processo pelo qual está sendo guiado.

Neste item (e), o intuito é levar o estudante a perceber que, na parábola em questão, existe uma simetria entre os três primeiros retângulos e os três últimos, mostrando que reconhece uma propriedade da função. Esse conhecimento será útil em questões futuras, pois facilitará cálculos desnecessários ao lidar com uma quantidade maior de partições em parábolas cujas alturas dos polígonos não sejam pontos visualmente conhecido no gráfico.

e) Você considera o resultado obtido no item (d) um bom valor para expressar a área de toda a região? Por quê?

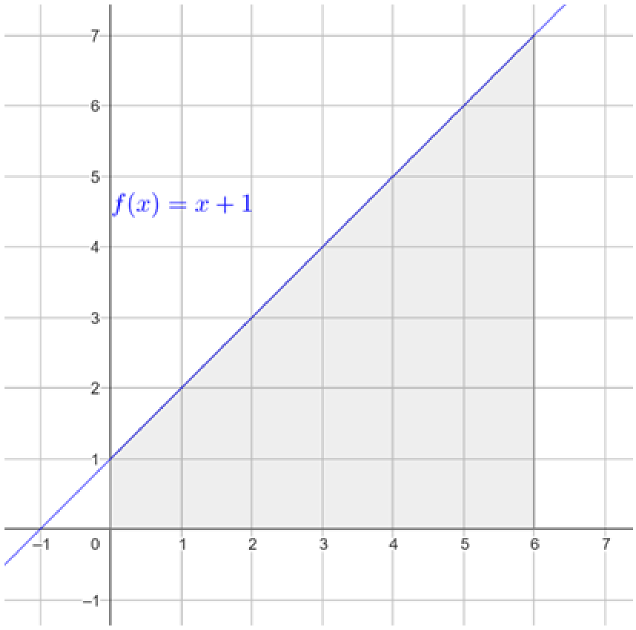
Espera-se que o aluno perceba que, apesar de ser uma aproximação, ela ainda não é a melhor aproximação, visto que há "espaços" na figura, representados em cinza, que não foram preenchidos pelos retângulos. Com essa pergunta, pretendemos estimular a curiosidade dos alunos, levando-os a refletir sobre a qualidade da aproximação: "talvez essa não seja uma aproximação tão boa, mas qual seria uma aproximação melhor?" Alguns alunos podem já perceber que, se utilizássemos mais retângulos ou partições menores, a soma das áreas se aproximaria melhor da área sob a curva, o que é uma resposta esperada para a pergunta seguinte, do item (f).

f) O que fazer para melhorar a aproximação da área?

Alguns estudantes podem sugerir processo diverso do aumento de partições, como talvez usar uma aproximação usando outras figuras que não só retângulos. Todas essas respostas ajudam o professor a perceber a forma de pensar do estudante.

QUESTÃO 03 - Seja a função $f(x) = x + 1$, cujo gráfico está representado a seguir. A área sob o gráfico no intervalo de $x = 0$ a $x = 6$ foi destacada.

Figura 4 – Representação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$.



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Determine a área exata da região hachurada.

No problema 3, propomos que os estudantes determinem a área sob o gráfico de uma função afim, cuja região abaixo dele seja delimitada por um polígono. A tarefa tem o objetivo de calcular o valor exato da área abaixo do gráfico, bem como as aproximações obtidas à medida em que os retângulos vão aumentando, permitindo-lhes avaliar se tais aproximações são ou não precisas.

A ideia é ter elementos para inferir que a aproximação não está relacionada ao fato de ela subestimar (fazer uma aproximação ou estimativa que é menor do que o valor real ou exato) ou superestimar (estimativa que é maior do que o valor real ou exato) a área, mas sim à quantidade de partições realizadas. Quanto maior o número de retângulos utilizados na aproximação, mais próxima a área aproximada estará da área real.

Nesse item (a), espera-se que sejam utilizadas as estratégias que os estudantes preferirem para determinar a área sob o gráfico. Por exemplo, podem calcular a área do triângulo utilizando o fato de que essa área é metade da área de um quadrado de mesmo lado e que deve-se subtrair 1/2 de unidade de área correspondente ao intervalo [-1, 0]. Alternativamente, podem determinar a área do trapézio de base igual a 7 (eixo das ordenadas) e altura igual a 6 (eixo das abscissas). Podem contar os quadrados da malha quadriculada que compõem o gráfico ou outra estratégia qualquer que evidencie que a área citada é de 24 unidades de área.

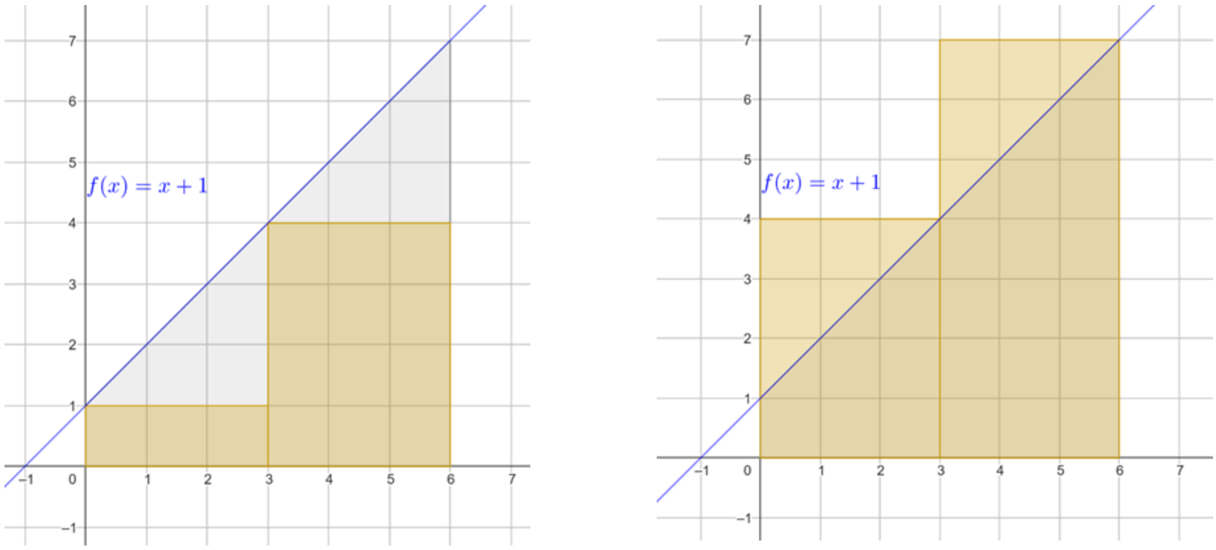
Nos itens (b), (c) e (d) a seguir fizemos aproximações da área real usando retângulos desenhados abaixo do gráfico tomadas as extremidades à esquerda, e retângulos acima do gráfico tomadas as extremidades à direita. Determine a soma dos retângulos em cada situação:

b) Usando 2 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.

Figura 5 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 2 partições regulares

(i) Subestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 2 partições

(ii) Superestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 2 partições



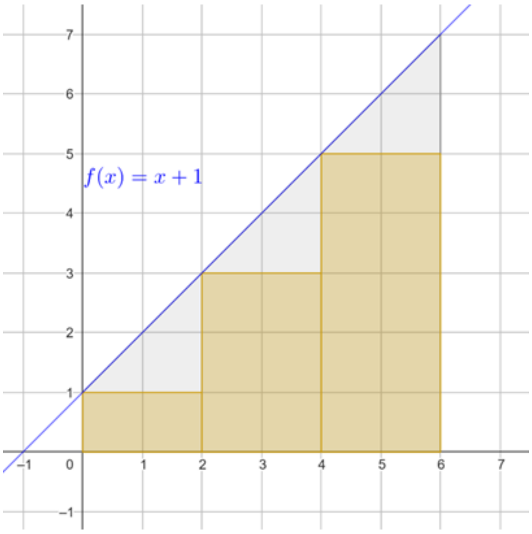
Fonte: Elaborado pelo autor

O objetivo da tarefa é trabalhar com aproximações que intuem ao cálculo da área real. Por exemplo, em estágios iniciais, onde a quantidade de retângulos é menor, como neste item (b), deverão observar que a aproximação ainda está significativamente distante da área real. Nos itens (c) e (d), perceber que a área se aproxima melhor da área real.

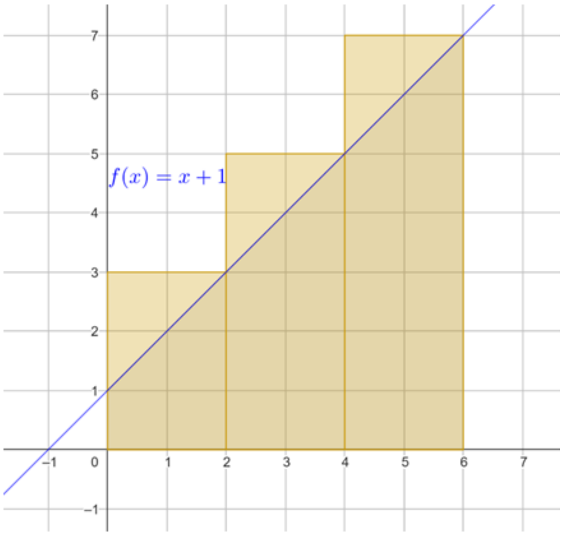
c) Usando 3 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.

Figura 6 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 3 partições regulares

(i) Subestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 3 partições



(ii) Superestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 3 partições

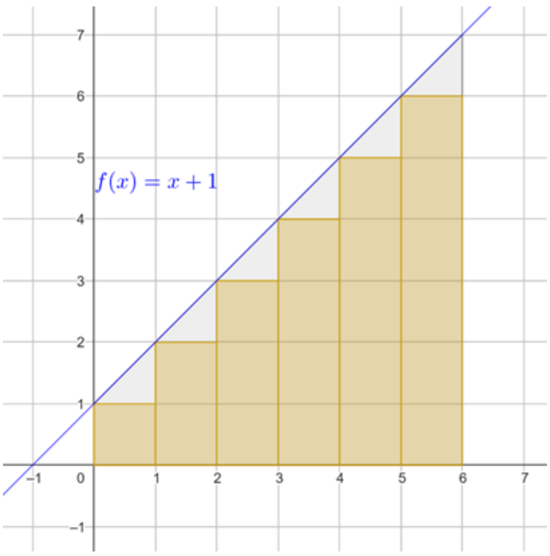


Fonte: Elaborado pelo autor

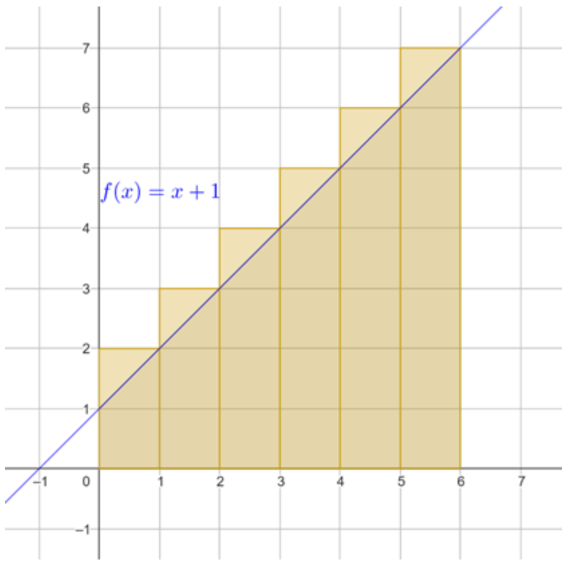
d) Usando 6 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.

Figura 7 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 6 partições regulares

(i) Subestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 6 partições



(ii) Superestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 6 partições



Fonte: Elaborado pelo autor

e) O que se pode afirmar à medida em que se aumenta a quantidade de partições?

Essa pergunta tem o objetivo de analisar o quanto a aproximação da área está relacionada com a partição de retângulos que foi proposta. à medida em que a partição se torna mais refinada, a distância para a área real diminui, ressaltando a importância de uma maior quantidade de retângulos para uma aproximação mais precisa.

f) Compare as aproximações encontradas nos itens (b), (c) e (d). Pode-se afirmar que uma delas é melhor do que as outras? Por quê?

Espera-se que fique claro que ambas as aproximações são igualmente válidas, uma vez que ambas convergem para a área real. Que não se pode afirmar que uma seja melhor que a outra, pois a precisão da aproximação está mais relacionada ao número de partições utilizadas do que à escolha entre subestimar ou superestimar a área.

Já o intuito da Questão 04, a seguir, é consolidar as diferenças entre subestimar e superestimar áreas a depender da função. Espera-se observar que, ao tomar a altura de cada retângulo pelo vértice superior esquerdo, em funções crescentes, tende-se a subestimar a área. Já em funções decrescentes, essas mesmas aproximações superestimam a área. E que ocorre o inverso caso sejam tomadas aproximações pela direita.

QUESTÃO 04 – Considere as figuras apresentadas nas letras a), b), c) e d). Para cada uma, responda de acordo com os itens abaixo:

I – A aproximação é pela esquerda ou pela direita;

II – A função é crescente ou decrescente no intervalo considerado;

III – Ocorre uma subestimação ou superestimação da área;

IV – A quantidade de partições.

a) Com relação ao gráfico da função representada na figura 8, abaixo, responda:

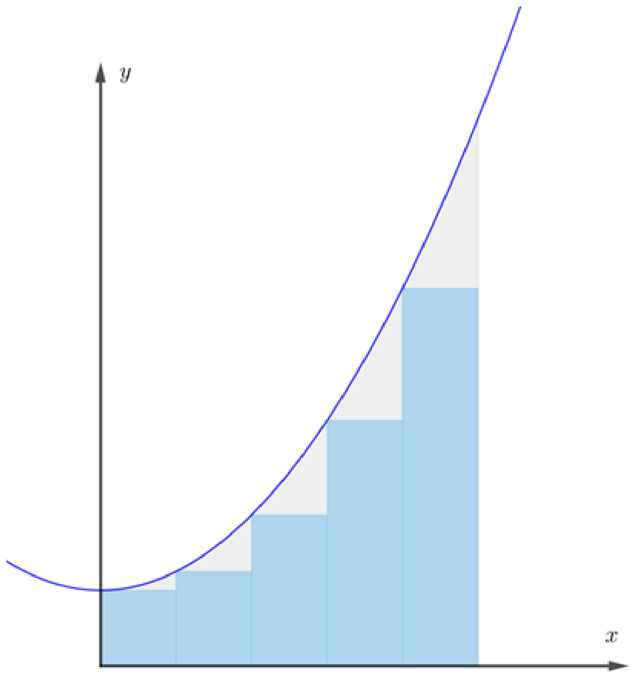
I: ________________________

II: ________________________

III: ________________________

IV: ________________________

Figura 8 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (a)



Fonte: Elaborado pelo autor

b) Com relação ao gráfico da função representada na figura 9, abaixo, responda:

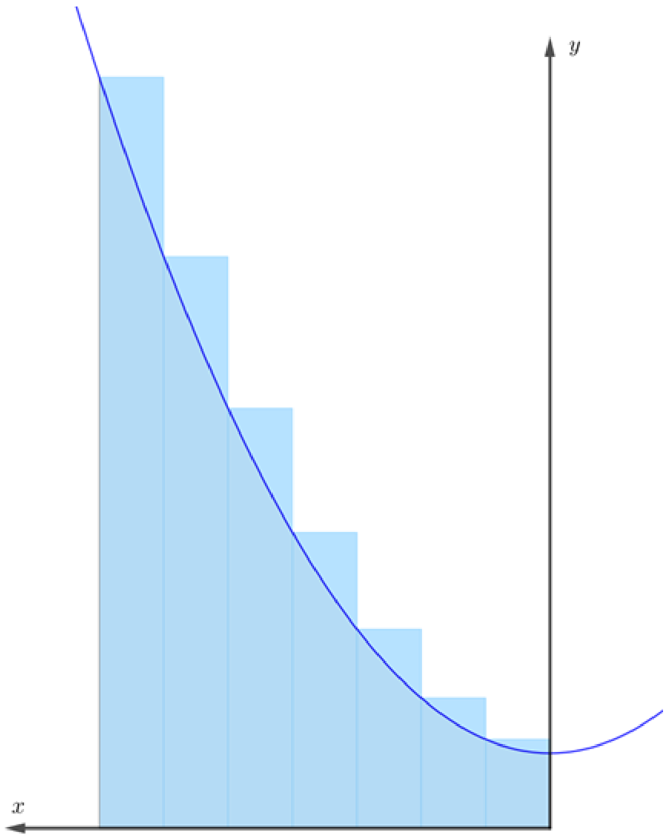
I: ____________________________

II: ____________________________

III: ____________________________

IV: ____________________________

Figura 9 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (b)



Fonte: Elaborado pelo autor

c) Com relação ao gráfico da função representada na figura 10, abaixo, responda:

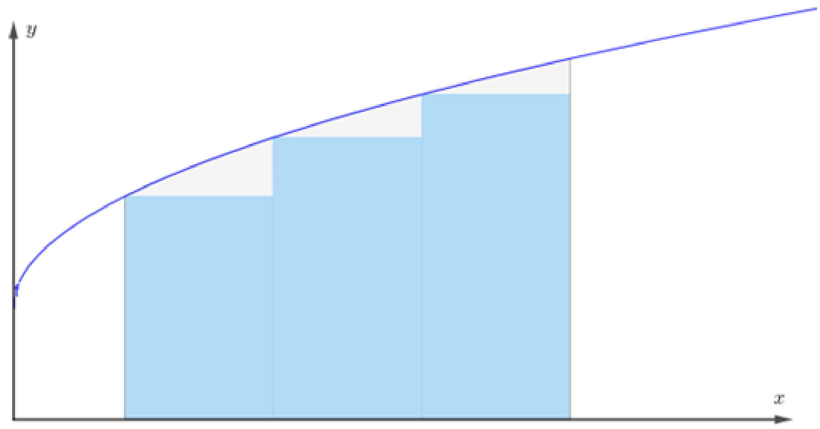
I: ____________________________

II: ____________________________

III: ____________________________

IV: ____________________________

Figura 10 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (c)



Fonte: Elaborado pelo autor

d) Com relação ao gráfico da função representada na figura 11, abaixo, responda:

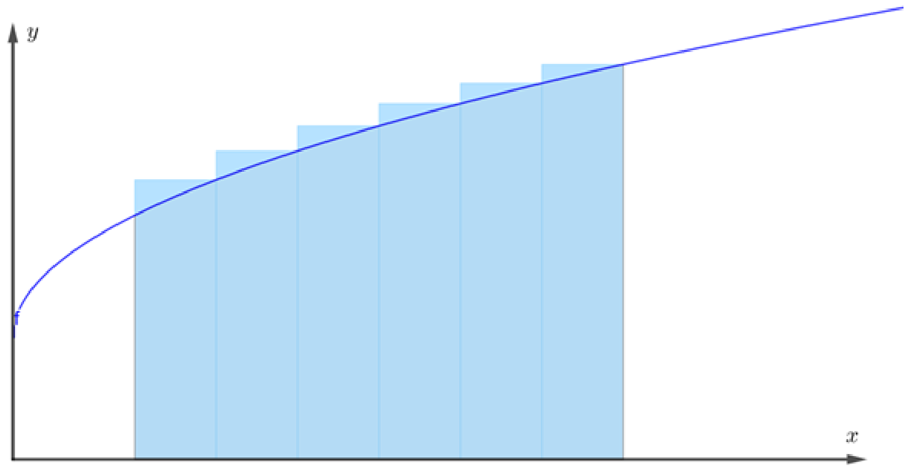
I: __________________________

II: __________________________

III: __________________________

IV: __________________________

Figura 11 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (d)



Fonte: Elaborado pelo autor

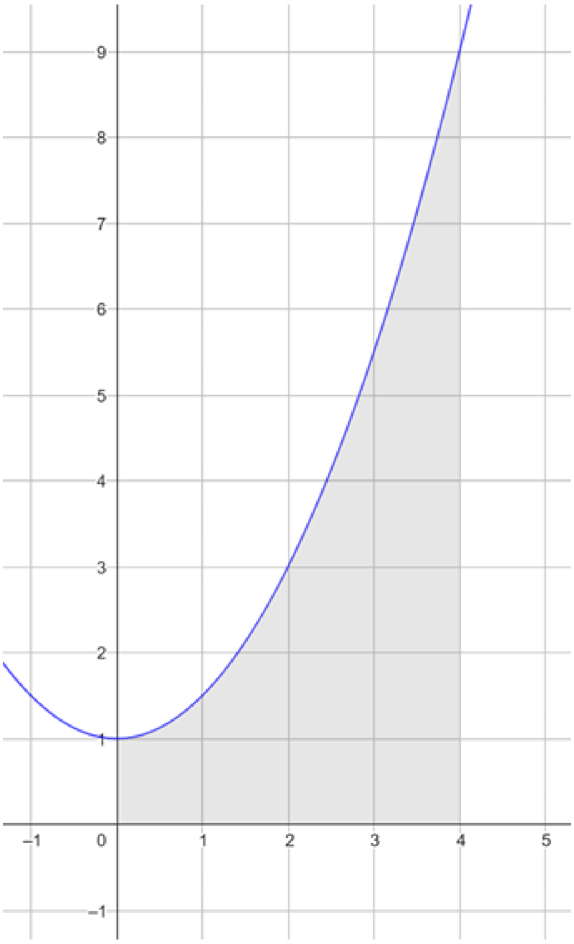
Após o tempo suficiente para resposta dessas questões, o professor pode iniciar a Fase 3 do modelo de Van Hiele, conhecida como explicação ou explicitação, conduzindo a uma discussão, em grupo, sobre os resultados obtidos pelos alunos, criando um espaço para a troca de ideias e informações entre os estudantes e o professor. Durante essa fase, o professor pode ajustar o vocabulário utilizado pelos alunos e esclarecer questões que não foram compreendidas corretamente por alguns, como diferenciar o ponto de máximo e o ponto de mínimo, algumas propriedade da função quadrática, como a direção de sua concavidade a depender do coeficiente a em $f(x) = ax^2 + bx + c$, as raízes, localização de pontos, as diferenças entre as aproximações pela esquerda ou direita em intervalos crescentes ou decrescentes, etc. É o momento de esclarecer as dúvidas que surgiram durante a resolução das questões e garantir que todos os alunos compreendam os conceitos fundamentais discutidos.

A fase 4 pode ser suprimida, pois não há necessidade de buscar formas de resolução das atividades além das que foram fornecidas, e passa-se para a última fase, a integração, quando os estudantes concluem a tarefa respondendo à Questão 05. Essa questão foi projetada para que os estudantes consolidem todo o conhecimento adquirido nas etapas anteriores, sem a introdução de novos conceitos, mas reafirmando e demonstrando o que aprenderam ao longo das perguntas e discussões precedentes.

A Questão 05 ainda se destina aos níveis 1 e 2, pois todo o trabalho aqui ainda é por meio da visualização. Esta difere-se dos problemas da tarefa 2, como veremos na próxima subseção, onde será necessário calcular o valor de $f(x)$ em cada intervalo para determinar a altura exata de cada retângulo. Trata-se de uma questão de transição e consolidação, preparando o aluno para operar no próximo nível.

QUESTÃO 05 - Considere a área abaixo do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ *delimitada no intervalo de* $x = 0$ *a* $x = 4$

Figura 12 – Área delimitada pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 4$



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando partições de mesma largura, calcule as aproximações para esta área usando:

a) 4 partições à esquerda.

Espera-se que, nesse caso, a aproximação obtida seja uma subestimação da área. Ao tomar as alturas dos retângulos, acredita-se que estudantes que operam entre os níveis 1 e 2, percebam que as alturas são, em unidades de comprimento, 1, $\frac{3}{2}$, 3 e $\frac{11}{2}$, tornando a área facilmente determinada, visto que as partições são regulares com cada retângulo tendo como base 1 unidade.

b) 4 partições à direita.

E aqui seja encontrada uma superestimação da área, usando processo análogo ao realizado no item (a) e considerando as alturas tomadas pela direita. Em ambos os itens, a função foi escolhida cuidadosamente para permitir que as medidas das larguras e comprimentos dos retângulos fossem determinados apenas fazendo uma análise visual do gráfico da questão.

1.3.2 Tarefa 2: Estimando áreas usando a notação de somatório

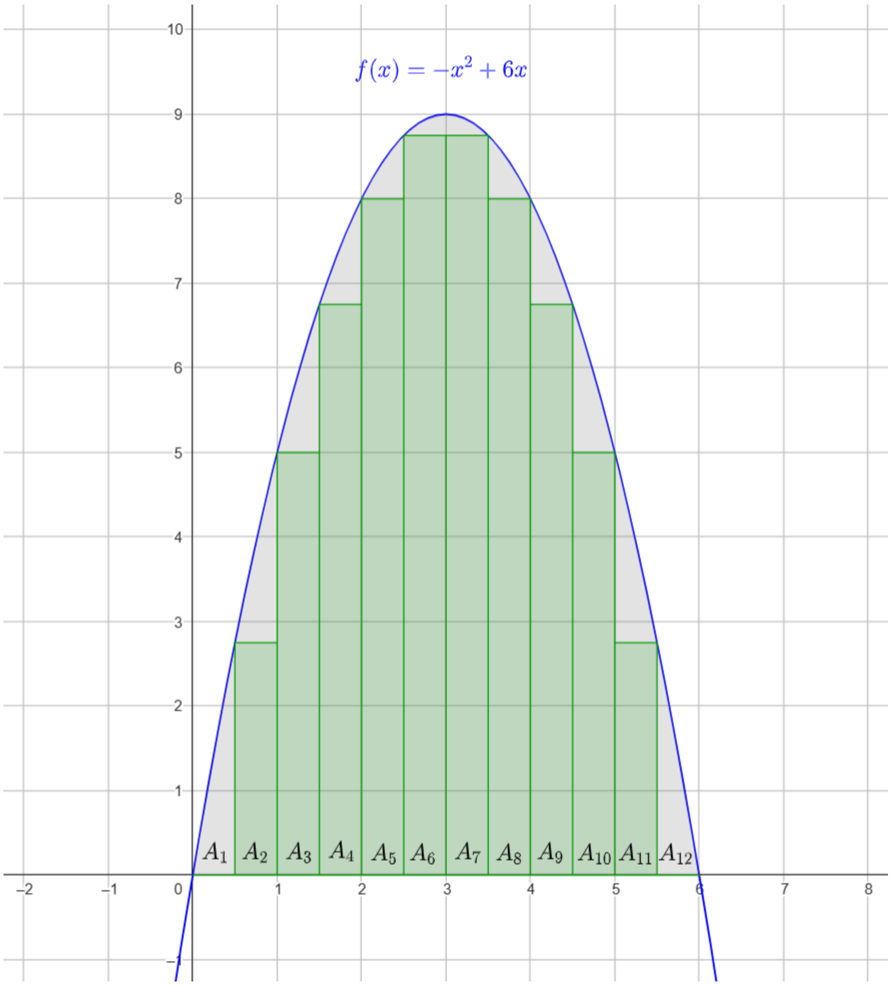
Quadro 3 – Descrição dos objetivos, tempo e materiais para aplicação da tarefa 2.

Objetivos:	• Compreender notações próprias referentes à soma de Riemann. • Usar a notação de somatório para calcular áreas aproximadas sob curvas. • Aplicar a soma de Riemann para estimar áreas.
Materiais:	• Cópias impressas (ou versões digitais) das tarefas para distribuição aos estudantes. • Calculadoras. • Projetor (opcional). • Quadro Branco e Marcadores. • Material de Desenho (Lápis, Borracha, Compasso, etc).
Tempo:	• 2 aulas.

Fonte: Elaborado pelo autor

QUESTÃO 01 - Na função $f(x) = -x^2 + 6x$, considere que a área entre o gráfico da função e o eixo x foi estimada usando doze retângulos, conforme ilustração 13 abaixo.

Figura 13 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 12 partições regulares.



Fonte: Elaborado pelo autor

Sabendo que o comprimento da base de cada retângulo é chamado Δx*, complete a tabela abaixo conforme exemplo da primeira linha.*

Quadro 4 – Soma das áreas dos retângulos usados como aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 12 partições regulares

Retângulo	Base	Altura	Área
A_1	___	$f(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 = 0$	$\Delta x \cdot f(0) = \_\_\_ \cdot 0 = 0$
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			
A_7			
...	...	...	...
A_{12}			

Fonte: Elaborado pelo autor

a) Qual o valor de Δx?

Nesta etapa, iniciamos pela fase 2 do modelo de Van Hiele, uma vez que os conhecimentos prévios já são conhecidos e o objeto de estudo já familiarizado. Permanecemos nessa fase enquanto forem respondidas as Questões 01 e 02 dessa tarefa.

Nessa Questão 01, o objetivo de utilizar uma tabela nesse problema é o de permitir que os dados necessários para solução do mesmo estejam organizados. Além do mais, iniciando pela fase II, cuja recomendação é que os estudantes manipulem o material de forma autônoma, buscando compreender as respostas por si mesmos, ao fornecer um exemplo na primeira linha, espera-se que sirva como base para conclusão do que foi solicitado.

Neste item (a), espera-se que $0,5$ seja dado como resposta.

b) Caso não fosse possível determinar o valor de Δx apenas olhando para o gráfico, que cálculo poderia ser feito a fim de determiná-lo?

Espera-se perceber e afirmar que uma forma de determinar Δx é usando a diferença entre o valor final e o valor inicial do intervalo, dividindo esse resultado pela quantidade de subintervalos. Ou seja, estamos induzindo o estudante a pensar na forma geral, que é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

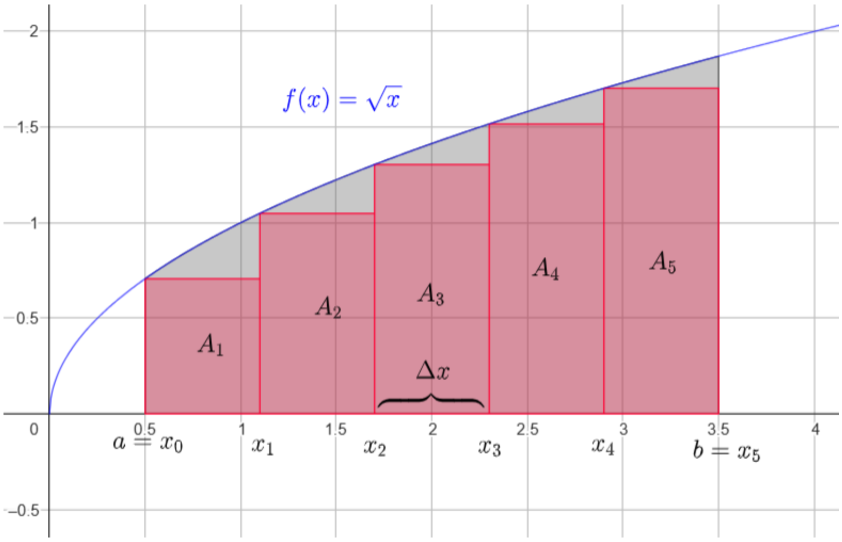
onde b é o valor final, a o valor inicial, e n o número de subintervalos.

c) Qual é o valor da soma das áreas $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + ... + A_{12}$?

Espera-se que sejam capazes de determinar a altura de cada retângulo, substituindo os valores em $f(x)$ nos intervalos correspondentes. É necessário calcular a imagem da função em cada partição para determinar a altura dos retângulos.

QUESTÃO 02 – A área sob o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e o eixo x foi particionada em 5 retângulos, no intervalo de $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$, conforme figura.

Figura 14 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{7}{2}$, com 5 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Como determinar o valor de Δx nessa situação? Escreva a expressão.

Aqui, as partições são regulares, mas nem a largura e nem a altura dos retângulos podem ser determinados com apenas a observação do gráfico da figura.

Espera-se que seja usada a expressão provavelmente percebida no item (b) da Questão 01 e, dessa forma, que se faça

$$\Delta x = \frac{3,5 - 0,5}{5} = 0,6$$

b) Como determinar x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 considerando o valor inicial $a = 0,5$ e as cinco partições regulares, ou seja, $n = 5$?

Espera-se perceber que, como as partições são regulares, as abscissas x_i podem ser determinadas fazendo-se

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,5 + 0,6 = 1,1 \\
x_2 &= 0,5 + 2 \cdot 0,6 = 1,7 \\
x_3 &= 0,5 + 3 \cdot 0,6 = 2,3 \\
x_4 &= 0,5 + 4 \cdot 0,6 = 2,9 \\
x_5 &= 0,5 + 5 \cdot 0,6 = 3,5
\end{aligned}
$$

O objetivo é adquirir bagagem de conhecimentos procedendo dessa maneira na organização dos dados para que, ao chegarem na tarefa 3 referente ao nível 5, sejam capazes de generalizar e fazer uso da expressão abaixo

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

c) Determine o valor aproximado dessa área.

Espera-se que determinem a área aproximada preferencialmente usando a notação de somatório ou procedendo de maneira similar à que se segue a fim de resolver o problema:

$$
\begin{aligned}
A &\approx 0,6 \cdot \left(\sqrt{1,1} + \sqrt{1,7} + \sqrt{2,3} + \sqrt{2,9} + \sqrt{3,5}\right) \\
A &\approx 0,6 \cdot (1,0488 + 1,3038 + 1,5166 + 1,7029 + 1,8708) \\
A &\approx 0,6 \cdot 7,4429 \\
A &\approx 4,4658
\end{aligned}
$$

Portanto, o valor aproximado da área é $A \approx 4,47$.

d) Qual é a expressão para $A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ *usando a notação de somatório*

Espera-se que a expressão dada seja

$$A_i = \sum_{n=1}^{5} A_n$$

Ou seja, indica que estamos somando os valores de A_n para n variando de 1 a 5.

Esse processo visa permitir o progresso para o uso de uma notação matemática mais formal e com uso das propriedades do somatório, como

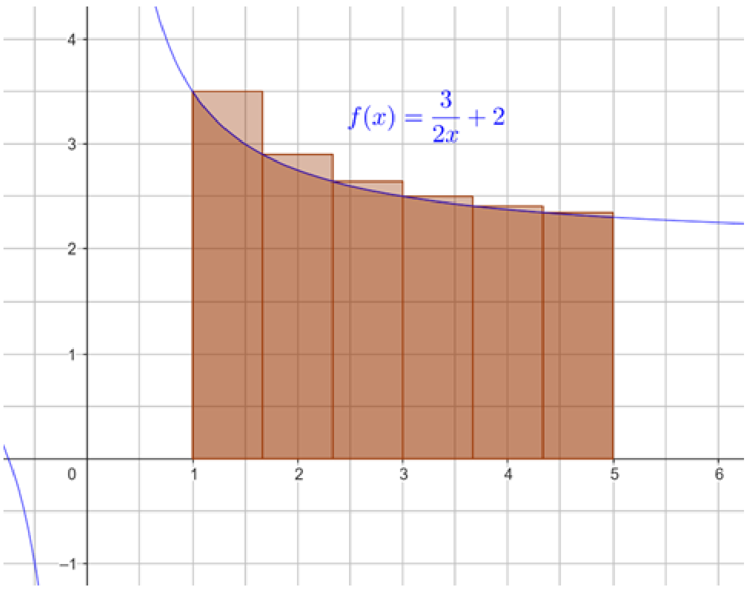
$$A \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Após a conclusão da Questão 02 pelos estudantes, o docente deve reservar um momento, conforme a fase 3 do modelo de Van Hiele, para explicação de alguns tópicos. Esse é o momento de verificar as respostas fornecidas pelos alunos estão coerentes e consolidá-las com orientações formais, mostrando como a notação do somatório é utilizada e qual seria a forma usual para responder a cada um dos itens dessa questão. Mostrar algumas propriedades e problemas envolvendo somatório fazem-se necessários nesse momento, antes de prosseguir para resolução das questões a seguir.

Finalizada essa sistematização, os estudantes devem prosseguir com a resolução da da Questões 04. Nessa questão, espera-se que empreguem corretamente o somatório em sua notação usual, aplicando os conceitos aprendidos na Questão 03 para resolver este problema de forma adequada.

QUESTÃO 03 – Faça uso da notação de somatório para aproximar a área entre $g\,(x) = \dfrac{3}{2x} + 2$ e o eixo x no intervalo $[1, 5]$ usando uma soma de Riemann à direita com 6 partições iguais.

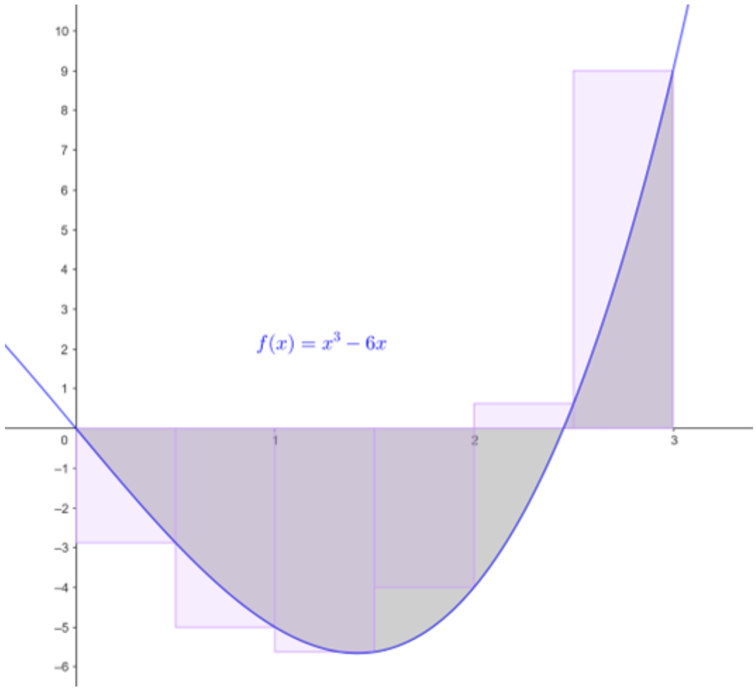
Figura 15 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $g(x) = \dfrac{3}{2x} + 2$ e pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = 5$, com 6 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

QUESTÃO 04 - Determine a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando as extremidades esquerdas no intervalo $[0, 3]$ e $n = 6$, conforme figura 16 abaixo.

Figura 16 – Soma de Riemann em $f(x) = x^3 - 6x$ no intervalo $[0, 3]$ com 6 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Por que o valor encontrado não representa a área hachurada?

Ao responderem a esta questão, fazemos uso da orientação relacionada à fase 4 de Van Hiele, pois os estudantes se deparam com uma situação que traz um pequeno aumento no nível de dificuldade, obrigando-os a buscar mais de uma forma de resolver o problema. Percebe-se que o fato de trabalhar com intervalos negativos não está presente em problemas anteriores. Os estudantes, pós explicações na fase 3, têm base para fazer uso da notação de somatório, mas necessitam aplicar tal conhecimento em um outro contexto.

Espera-se perceber que a soma de Riemann encontrada aqui, no intervalo em que a função está abaixo do eixo x, tem valor negativo, o que não corresponde à área hachurada, já que a área, geometricamente, é sempre positiva.

b) O que o valor encontrado representa?

Espera-se observar que o valor obtido pela soma de Riemann reflete a diferença entre a área da região acima do eixo x e a área da região abaixo do eixo x, no intervalo $[0, 3]$ para a função $f(x) = x^3 - 6x$. No contexto dessa soma, a região onde $f(x) > 0$, isto é, acima do eixo x, terá valor positivo, enquanto a região onde $f(x) < 0$, ou seja, abaixo do eixo x, terá valor negativo. Assim, Este valor não reflete a "área tota" em termos geométricos (que seria sempre positiva), mas sim a soma algébrica das áreas.

Por fim, na integração, fase 5, os estudantes devem sintetizar as respostas e conclusões encontradas ao resolver esse problema e o professor deve concluir o tópico, fornecendo as respostas esperadas e fazendo as ponderações necessária em relação às respostas dadas pelos alunos.

1.3.3 Tarefa 3: Generalização da Soma de Riemann

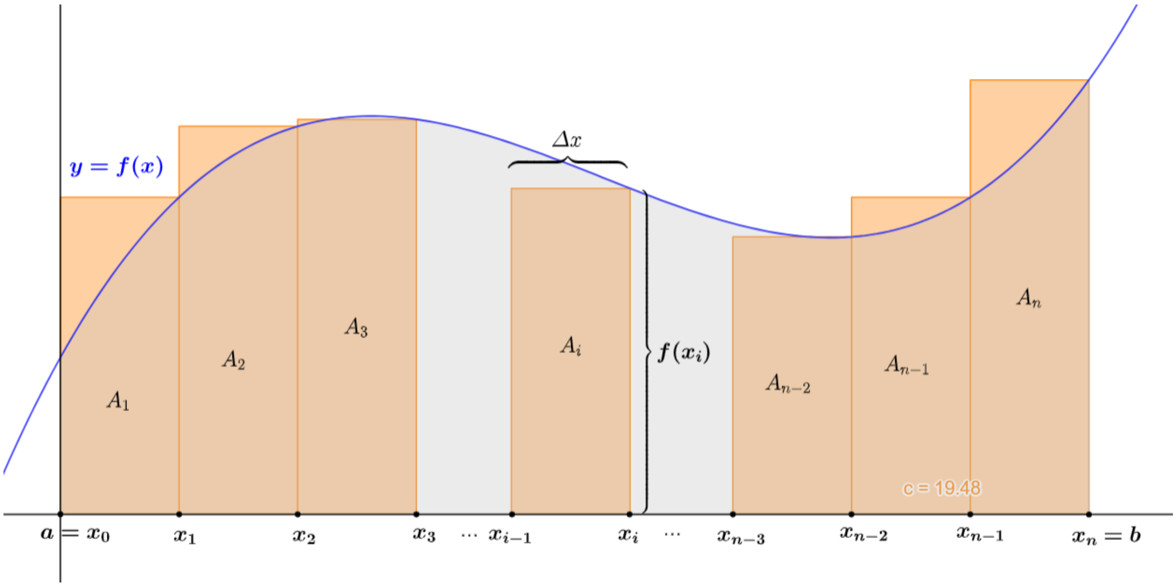
Quadro 5 – Descrição dos objetivos, tempo e materiais para aplicação da tarefa 2.

Objetivos:	• Generalizar a soma de Riemann para n subintervalos. • Demonstrar que a soma de Riemann se aproxima de um valor constante conforme o número de subintervalos aumenta. • Provar que a área sob uma curva converge para um valor específico utilizando a definição de soma de Riemann.
Materiais:	• Cópias impressas (ou versões digitais) das tarefas para distribuição aos estudantes. • Calculadoras. • Quadro Branco e Marcadores • Material de Desenho (Lápis, Borracha, Compasso, etc).
Tempo:	• 2 aulas.

Fonte: Elaborado pelo autor

QUESTÃO 01 – Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$*. Considere uma partição* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *do intervalo* $[a, b]$*, onde* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*. Cada subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *é uma partição do intervalo original.*

Figura 17 – Generalização da soma de Riemann pela direita



Fonte: Elaborado pelo autor

Escreva a expressão que corresponde ao comprimento de cada subintervalo e expresse a soma de Riemann associada à partição P.

Espera-se que os estudantes que operam nesse nível sejam capazes de generalizar a soma de Riemann para uma função qualquer. Assim, fazem-se necessárias respostas mais abrangentes, onde os estudantes sejam incentivados a fazer uso da linguagem matemática usual.

A princípio, devem buscar resolver as todas as questões individualmente. Posteriormente, deve haver o momento para a partilha das respostas encontradas, a discussão sobre essas repostas com mediação do professor, correção da linguagem inadequada caso ocorra, busca por outras formas de resolução dos problemas e um último momento de sistematização de toda a atividade, passando-se assim por todas as fazes do modelo, exceto a primeira, nessa tarefa.

Espera-se encontrar que, caso a partição seja uniforme, a expressão que corresponde ao comprimento de cada partição seja dada por:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

onde a e b são os limites do intervalo e n é o número de subintervalos.

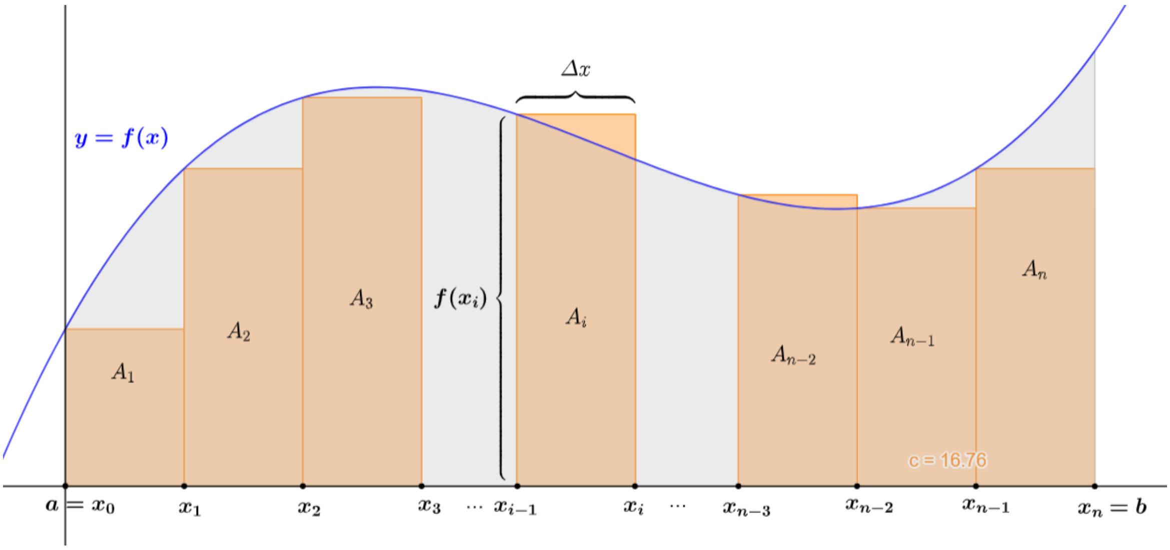
Já a soma de Riemann associada à partição P é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

QUESTÃO 02 – Esboce um gráfico representando a generalização para a soma de Riemann à esquerda. Defina a expressão para essa soma.

Espera-se que o gráfico esboçado seja similar ao gráfico da questão anterior, mas com os intervalos convenientemente ajustados conforme as aproximações tomadas pela esquerda, como na imagem abaixo:

Figura 18 – Generalização da soma de Riemann pela esquerda



Fonte: Elaborado pelo autor

O intuito é perceber que o intervalo tomado muda a depender da escolha da aproximação pela esquerda ou pela direita. Enquanto que, pela direita, temos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Pela esquerda, temos

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

QUESTÃO 03 – Verifique que a área sob $y = x^2$ definida no intervalo $[0, 3]$, é igual a 9 utilizando a definição de soma de Riemann e uma partição regular de n subintervalos.

Espera-se perceber noções relativas à ideia de infinito ou de crescimento indefinido, ainda que o ensino básico não contemple o estudo de limites, pois será imprescindível para efetuar a verificação.

Uma possível maneira de organizar a solução desse problema seria procedendo da seguinte maneira:

Primeiro, descreve-se a a soma de Riemann para a função descrita, que é

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

onde:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

é a largura de cada subintervalo e $x_i = \dfrac{3i}{n}$ é o i-ésimo subintervalo. Subistituindo, vem:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$S_n = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{9i^2}{n^2}$$

$$S_n = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Sabendo que a soma dos quadrados dos primeiros n inteiros é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Substituindo essa expressão na soma de Riemann, temos

$$S_n = \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}$$

Desenvolvendo e simplificando, vem

$$S_n = \frac{18n^2 + 27n + 9}{2n^2}$$

Separando as parcelas

$$S_n = 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}$$

À medida que $n \to \infty$, a soma $\dfrac{27}{2n} + \dfrac{9}{2n^2}$ tende a zero e conclui-se que $S_n = 9$, conforme pretendia-se verificar.

QUESTÃO 04 – Dada a função $f(x) = 2x + 3$ definida no intervalo $[1, 4]$, calcule a área sob a curva utilizando a definição da soma de Riemann à direita. Considere uma partição uniforme do intervalo em n subintervalos de igual comprimento. Demonstre que a soma de Riemann para essa função se aproxima de um valor constante à medida que n aumenta e determine essa constante.

Esse problema da Questão 04 resolve-se de forma análoga à Questão 03, entretanto, aqui o número para o qual a soma converge não foi dado.

Uma possível maneira de organizar a solução desse problema, seria fazendo-se:

O comprimento de cada subintervalo Δx é

$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

Os pontos x_i são dados por

$$x_i = 1 + i \cdot \Delta x = 1 + i \cdot \frac{3}{n},$$

Tomando em $f(x_i)$

$$f(x_i) = 2\left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right) + 3$$

$$f(x_i) = 5 + \frac{6i}{n}$$

A soma de Riemann à direita é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(5 + \frac{6i}{n}\right) \cdot \frac{3}{n}$$

$$S_n = \frac{3}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 5 + \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{n}\right)$$

Sabendo que a soma dos primeiros n inteiros é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Substituindo na soma de Riemann, temos

$$S_n = \frac{3}{n}\left(5n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Simplificando, vem

$$S_n = \frac{3}{n}\,(5n + 3n + 3)$$

$$S_n = \frac{3}{n} \cdot 8n + \frac{3}{n} \cdot 3$$

$$S_n = 24 + \frac{9}{n}$$

À medida que $n \to \infty$, o termo $\dfrac{9}{n}$ tende a zero. Portanto, a soma de Riemann se aproxima de 24, como queria-se demonstrar.

Referências

CARDOSO, E. de J. Níveis de aprendizagem para o tópico de funções no ensino médio. *Pesquisa e Ensino*, v. 1, p. e202008–e202008, 2020.

DUARTE, P. V. E.; FUSTER, J. L. L. Aspectos comparativos en la extensión del modelo de van hiele al concepto de aproximación local. *Suma*, v. 44, p. 44–52, 2003.

LÓPEZ, C. M. J.; CARRERAS, P. P. La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van hiele. *Educación Matemática*, Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, v. 13, p. 68–80, 2001.

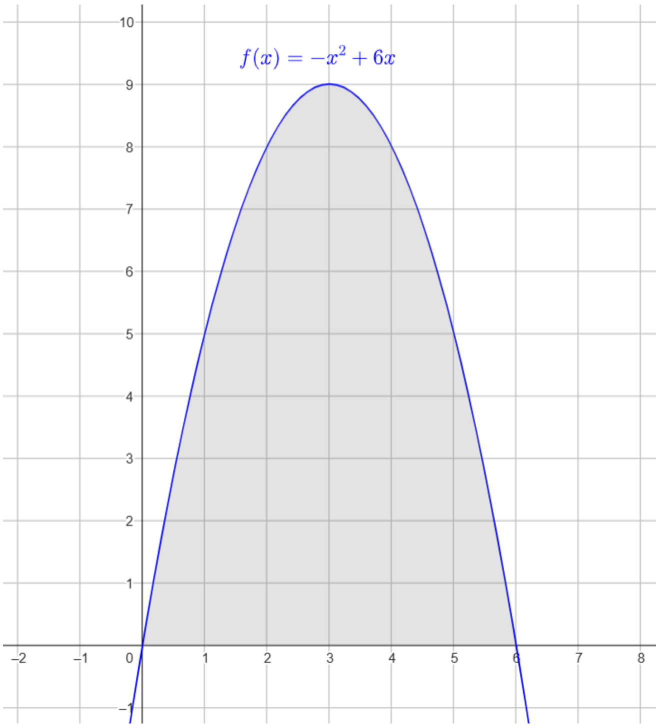
ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Escola: ____

Turma: ______________________ Série: __________________ Turno: ________________

Tarefa 1: Explorando a ideia de aproximação de áreas sob curvas

QUESTÃO 01 – QUESTÃO 01 - Considere a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico que está esboçado abaixo. A área destacada está delimitada pelo gráfico da função, pelo eixo x e pelas retas x = 0 e x = 6.



Responda:

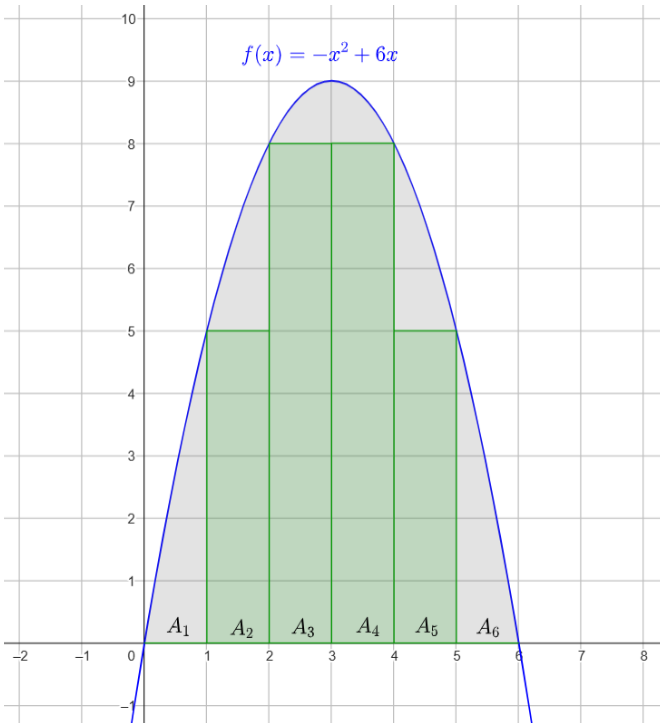
a) Em qual ou quais pontos esse gráfico toca o eixo das abscissas?

b) Em qual ou quais pontos o gráfico toca o eixo das ordenadas?

c) Essa função tem ponto de máximo ou de mínimo? Caso haja, determine suas coordenadas.

d) Considerando que nosso objetivo seja determinar a área da região em cinza, como podemos fazer isto?

QUESTÃO 02 – Considerando-se a situação da questão anterior, suponha que umas das estratégias usadas para determinar uma aproximação da área citada foi inscrever retângulos abaixo da curva e determinar a soma das áreas desses retângulos. Na figura abaixo, foram usados retângulos de mesma base em partição regular.



a) Quantas partições foram feitas?

b) Olhando para o gráfico, é possível saber qual é a medida da área de cada retângulo?

c) Complete a tabela abaixo e dê o valor de $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$.

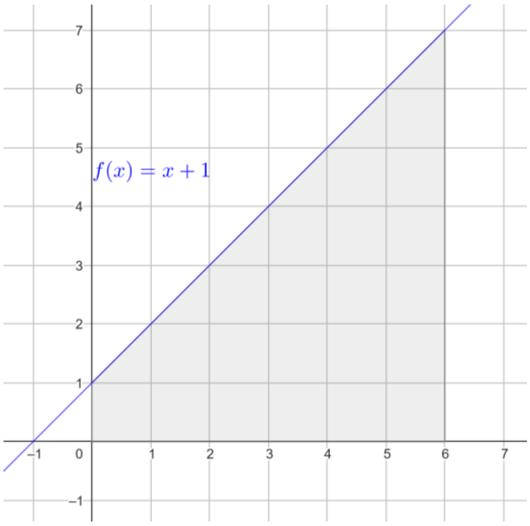
Retângulo	Base	Altura	Área
A_1			
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			

d) Qual a relação entre as áreas dos três primeiros retângulos e dos três últimos?

e) Você considera o resultado obtido no item (d) um bom valor para expressar a área de toda a região? Por quê?

f) O que fazer para melhorar a aproximação da área?

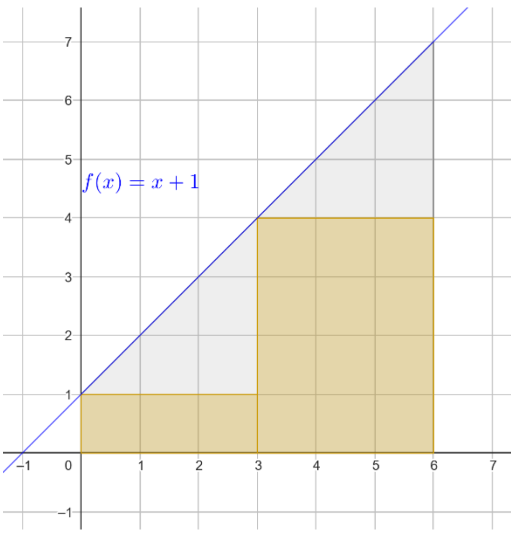
QUESTÃO 03 – Seja a função $f(x) = x + 1$, cujo gráfico está representado a seguir. A área sob o gráfico no intervalo de $x = 0$ a $x = 6$ foi destacada.

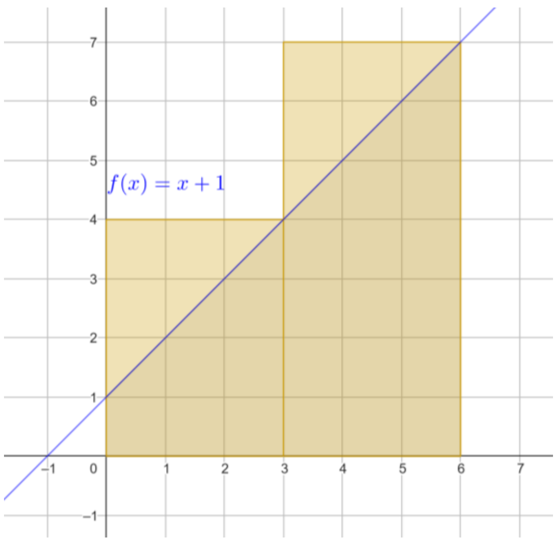


a) Determine a área exata da região hachurada.

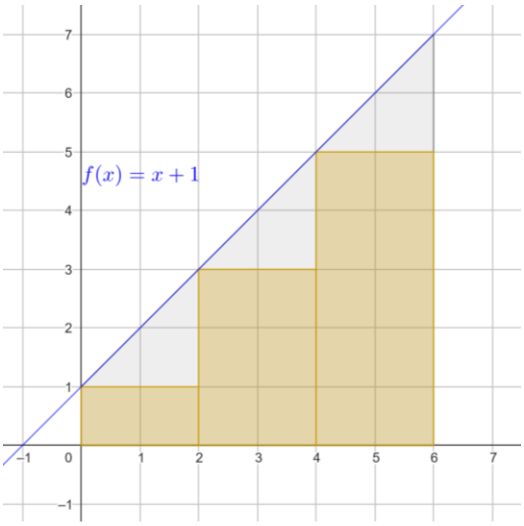
Nos itens (b), (c) e (d) a seguir fizemos aproximações da área real usando retângulos desenhados abaixo do gráfico tomadas as extremidades à esquerda, e retângulos acima do gráfico tomadas as extremidades à direita. Determine a soma dos retângulos em cada situação:

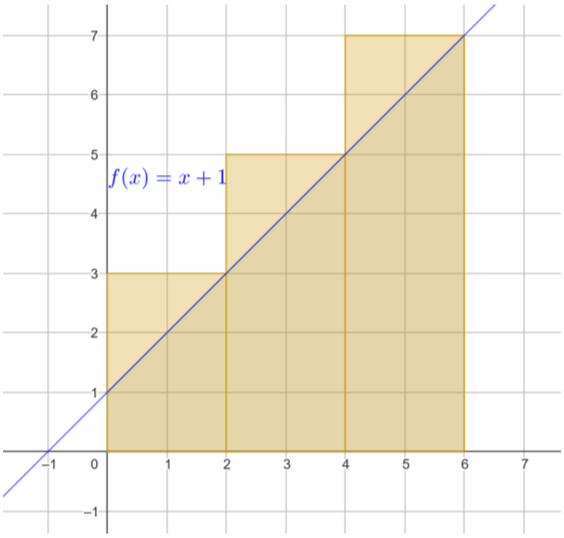
b) Usando 2 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento



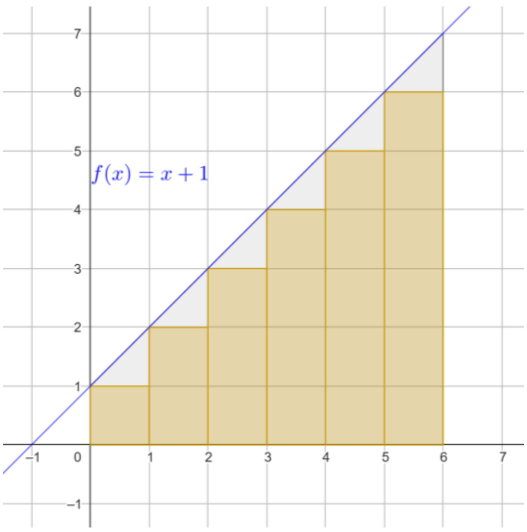


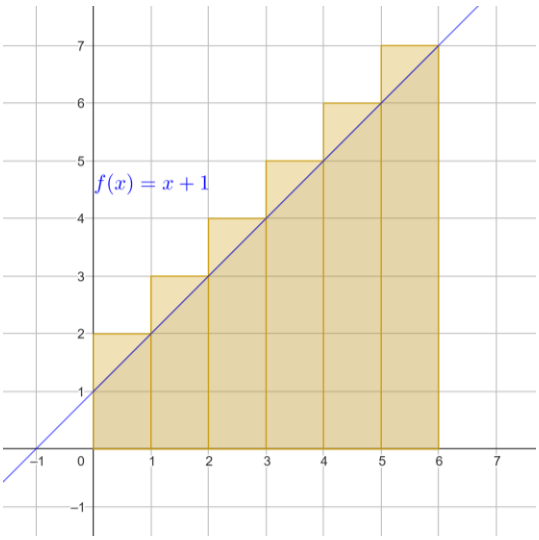
c) Usando 3 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.





d) Usando 6 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento





e) O que se pode afirmar à medida em que se aumenta a quantidade de partições?

f) Compare as aproximações encontradas nos itens (b), (c) e (d). Pode-se afirmar que uma delas é melhor do que as outras? Por quê?

QUESTÃO 04 – Considere as figuras apresentadas nas letras a), b), c) e d). Para cada uma, responda de acordo com os itens abaixo:

I – A aproximação é pela esquerda ou pela direita;

II – A função é crescente ou decrescente no intervalo considerado;

III – Ocorre uma subestimação ou superestimação da área;

IV – A quantidade de partições.

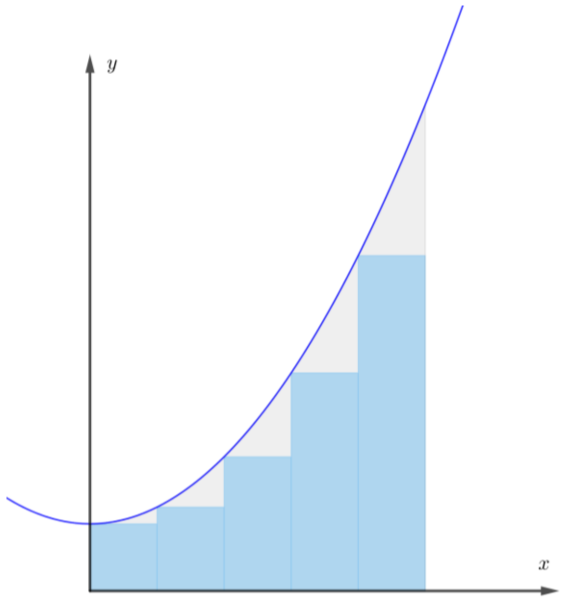
a) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



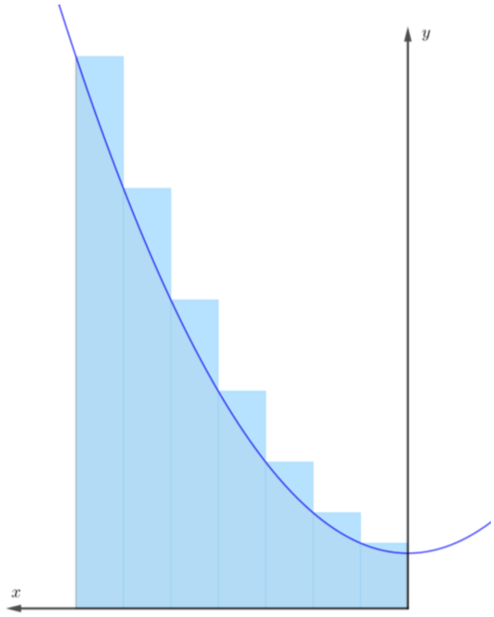
b) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



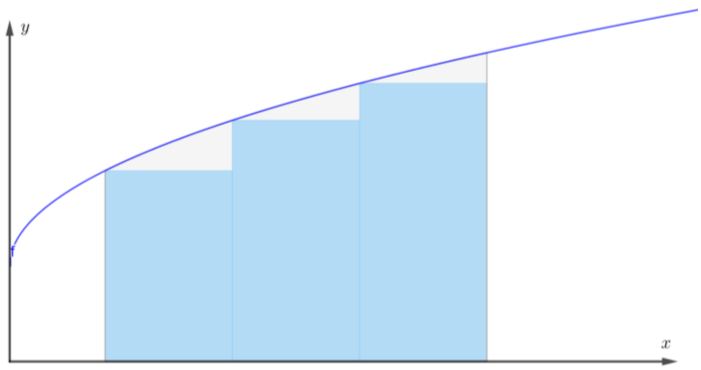
c) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



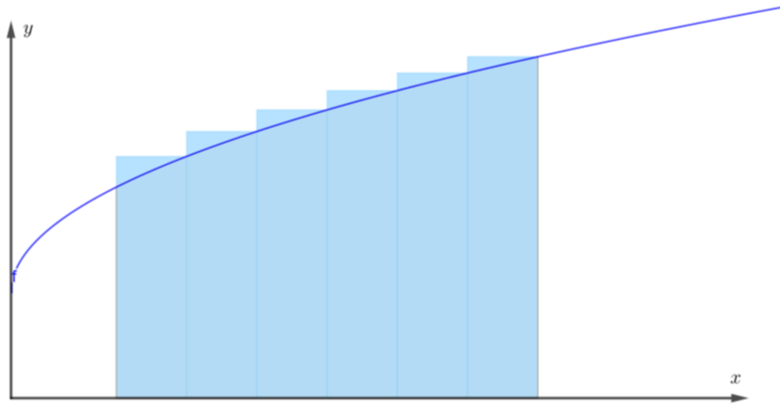
d) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



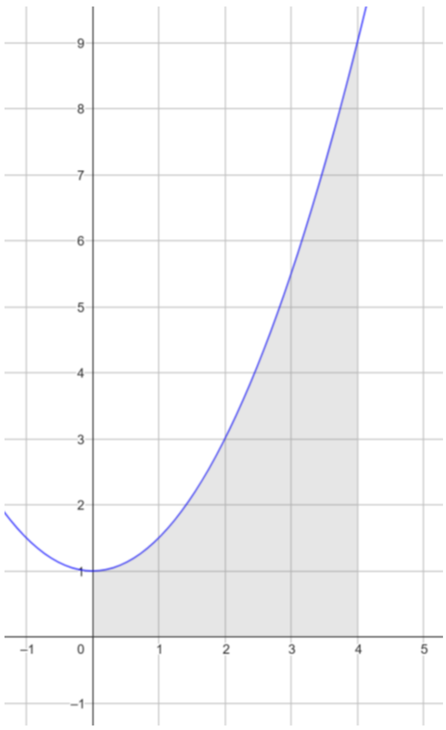
I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________

QUESTÃO 05 – Considere a área abaixo do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, delimitada no intervalo de x = 0 a x = 4.



Considerando partições de mesma largura, calcule as aproximações para esta área usando:

a) 4 partições à esquerda.

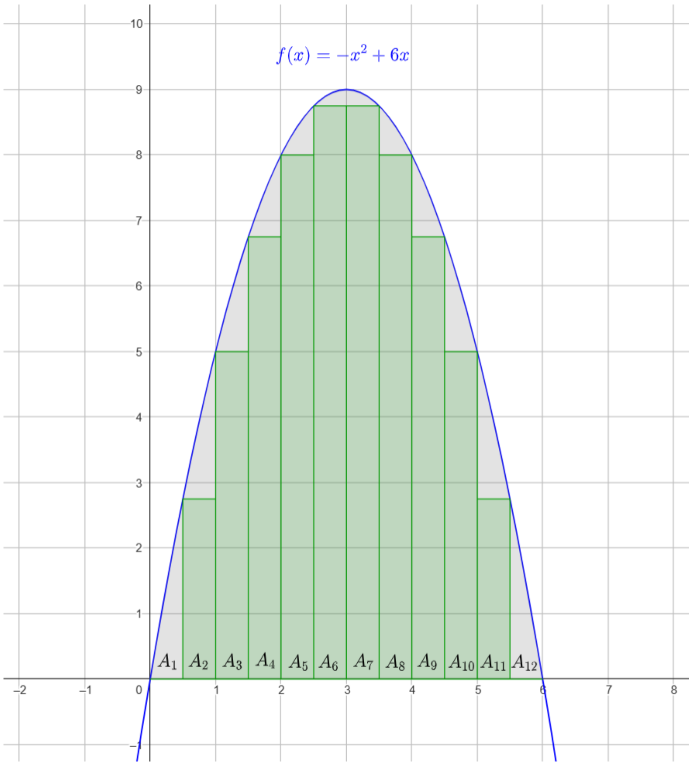
b) 4 partições à direita.

Escola: ____

Turma: ______________________ Série: ___________________ Turno: _________________

Tarefa 2: Estimando áreas usando a notação de somatório

QUESTÃO 01 – Na função $f(x) = -x^2 + 6x$, considere que a área entre o gráfico da função e o eixo x foi estimada usando doze retângulos, conforme ilustração abaixo.



Sabendo que o comprimento da base de cada retângulo é chamado Δx, complete a tabela abaixo conforme exemplo da primeira linha.

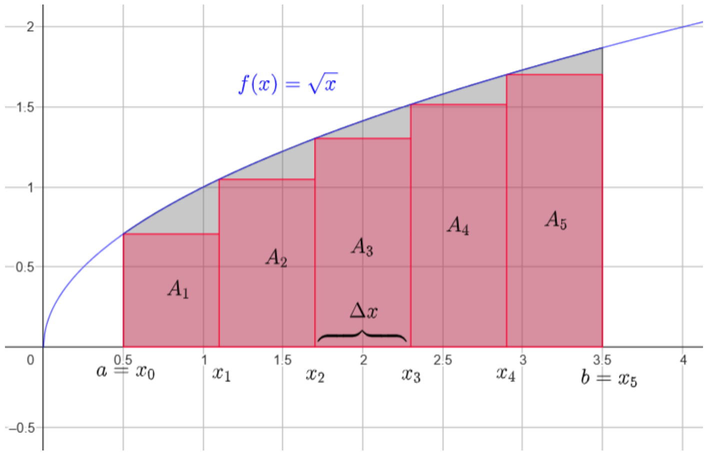
Retângulo	Base	Altura	Área
A_1	___	$f(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 = 0$	$\Delta x \cdot f(0) =$ ___ $\cdot 0 = 0$
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			
A_7			
...	...	...	...
A_{12}			

a) Qual o valor de Δx?

b) Caso não fosse possível determinar o valor de Δx apenas olhando para o gráfico, que cálculo poderia ser feito a fim de determiná-lo

c) Qual é o valor da soma das áreas $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + \cdots + A_{12}$?

QUESTÃO 02 – A área entre a função $f(x) = \sqrt{x}$ e o eixo x foi particionada em 5 retângulos no intervalo de $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$, conforme figura.



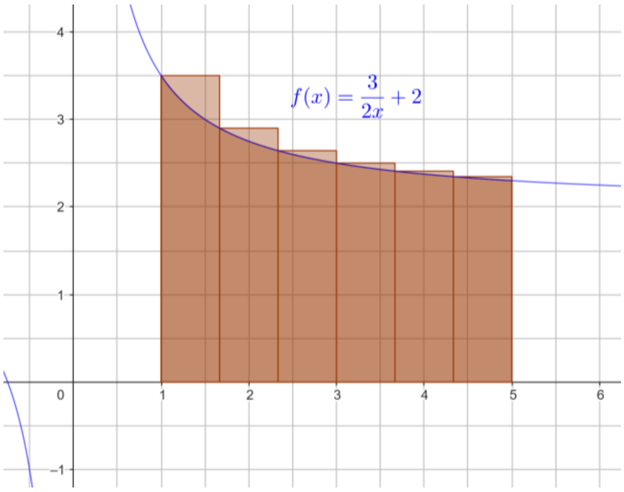
a) Como determinar o valor de Δx nessa situação? Escreva a expressão.

b) Como determinar x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 considerando o valor inicial $a = 0{,}5$ e as cinco partições regulares, ou seja, n = 5?

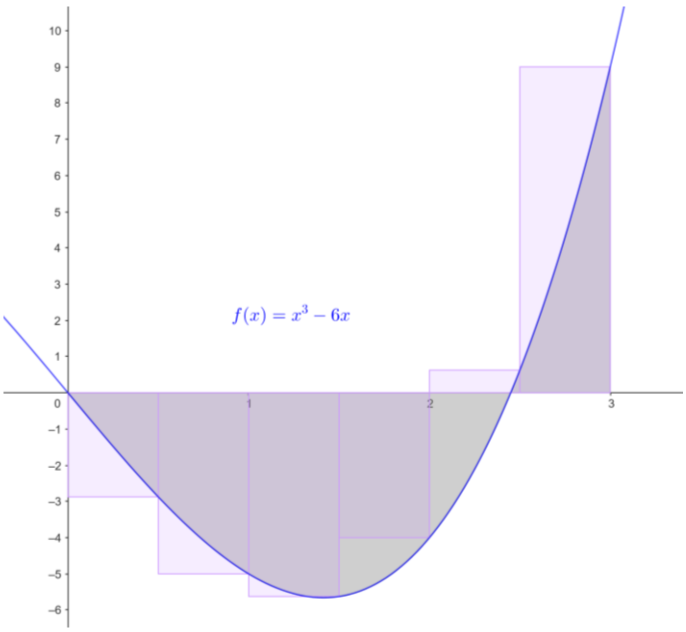
c) Determine o valor aproximado dessa área.

d) Determine uma expressão para $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ usando a notação de somatório.

QUESTÃO 03 – Faça uso da notação de somatório para aproximar a área entre $g(x) = \frac{3}{2x} + 2$ e o eixo x no intervalo $[1, 5]$ usando uma soma de Riemann à direita com 6 partições iguais.



QUESTÃO 04 – Determine a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando as extremidades esquerdas no intervalo $[0, 3]$ e $n = 6$, conforme figura abaixo.



a) Por que o valor encontrado não representa a área hachurada?

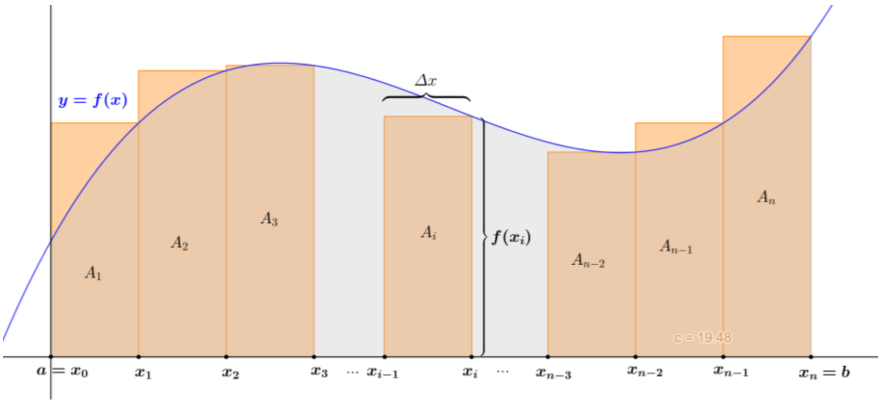
b) O que o valor encontrado representa?

Escola: ____

Turma: ____________________ Série: _________________ Turno: _______________

Tarefa 3: Generalização da Soma de Riemann

QUESTÃO 01 – Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo [a, b]. Considere uma partição P $= \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$, onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ é uma subdivisão do intervalo original.



Escreva a expressão que corresponde ao comprimento de cada subintervalo e expresse a soma de Riemann associada à partição P.

QUESTÃO 02 – Esboce um gráfico representando a generalização para a soma de Riemann à esquerda. Defina a expressão para essa soma.

QUESTÃO 03 – Verifique que a área sob $y = x^2$ definida no intervalo $[0, 3]$, é igual 9 utilizando a definição de soma de Riemann e uma partição regular de n subintervalos.

QUESTÃO 04 – Dada a função $f(x) = 2x + 3$ definida no intervalo $[1, 4]$, calcule a área sob a curva utilizando a definição da soma de Riemann à direita. Considere uma partição uniforme do intervalo em n subintervalos de igual comprimento. Demonstre que a soma de Riemann para essa função se aproxima de um valor constante à medida que n aumenta e determine essa constante.