Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matmática no Nível Médio

Euvaldo Soares da Silva
Pedro Franco de Sá

O ENSINO DA COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS INFINITOS POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

BELÉM-PA
2023

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Silva, Euvaldo Soares da
O ensino da comparação de conjuntos infinitos por meio de atividades experimentais /Euvaldo Soares da Silva, Pedro Franco de Sá - Belém, 2023.

ISBN:
Produto educacional vinculado à dissertação “ O ensino da comparação de conjuntos infinitos por meio de atividades experimentais” pertencente ao Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Funções-Estudo e ensino. 2.Sequência didática.3.Prática de ensino. I. Sá, Pedro Franco de. II. Título.

CDD 23 ed. 515

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: “**O ENSINO DA COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS INFINITOS POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS”**

Mestrando (a): **EUVALDO SOARES DA SILVA**

Data da avaliação**: 28/02/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Destinado à:

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (x) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental (x) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

b) Tipo de Produto Educacional

(x) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro:

c) Possui URL: ( ) Sim, qual o URL: _____________

(x) Não ( ) Não se aplica

d) É coerente com a questão-foco da pesquisa?

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ____

e) É adequado ao nível de ensino proposto?

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ____

f) Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ____

ESTRUTRA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Possui sumário:	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) Possui orientações ao professor:	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) Possui orientações ao estudante:	( ) Sim	(x) Não	( ) Não se aplica
d) Possui objetivos/finalidades:	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) Possui referências:	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) Tamanho da letra acessível:	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) Ilustrações são adequadas:	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

(x) Sim, onde: Turma de estudantes do Ensino Médio

( ) Não, justifique:____

( ) Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

( ) Sim, onde: Formação inicial e continuada de professores.

(x) Não, justifique: É uma sequência didática

( ) Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

(x) Sim, onde: Em uma escola Pública da Rede Estadual do Maranhão

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

(x) na escola, como um curso extra

( ) outro: ____

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(x) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como _______________________________

( ) outros membros da comunidade, tais como ______________________________________

O produto educacional foi considerado:
(x) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá (Presidente) Pedro Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
IES de obtenção do título: UFRN

Profª. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos (Examinador 01) Mª de Lourdes Silva Santos
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma (Examinador 02)
Doutor em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
IES de obtenção do título: UFRN

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Caro professor, este produto educaional aborda o conceito de Função com ênfase na Bijeção de Função e sua aplicação na comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos. Ele foi construido a partir da pesquisa de Silva (2023), uma dissertação de mestrado desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), que tinha por objetivo analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino de Bijeção de Função por meio de atividades experimentais sobre a participação nas aulas, à construção de conceito e o desempenho na resolução de questões que abordam o assunto e sua aplicação.

Função é um conteúdo de grande relevância, devido sua riqueza de linguagens e representações que possibilitam a compreensão, interpretação e construção de argumentos e modelos que fundamentam a resolução de situações-problema no contexto escolar ou da vida cotidiana, bem como o desevolvimento de competências e habilidades que auxiliam na aquisição de conhecimentos da Matemática e outras áreas do conhecimento. Por esse fato, esse é um dos conteúdos matemáticos mais estudado ao longo do Ensino Médio.

Um fato intrigante é que mesmo sendo um assunto tão trabalhado, pesquisas como as de Guimarães (2010), Magarinus (2011), Santos (2013) e Silva (2018) destacam uma acentuada deficiência dos estudantes em relação aos conceitos e linguagens das funções. Por que um assunto que é tão trabalhado é pouco compreendido pelos discentes?

A partir dessa inquietação realizamos um estudo sobre Função, por meio da nálise de documentos curriculares oficiais e livros didáticos, revisão de estudos e pesquisa de campo, o que evidenciou as lacunas e nos impulsionou a buscar uma forma eficaz de promover o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), no inciso II do artigo 36 estabelece que devem ser adotadas metodologias de ensino que estimulem a iniciativa dos estudantes. Os PCNs reforçam que o desenvolvimento da capacidade de raciocínio resulta em autoconfiança, responsabilidade, autonomia e capacidade de comunicação e argumentação (BRASIL, 1998, p. 52).

Dessa forma, elaboramos uma Sequência Didática pautada no Ensino por Atividades Experimentais e na Resolução de Problemas como Ponto de Partida, que são metodologias que propiciam o protagonismo e o desenvolvimento intelectual do aluno, que diante de um problema precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos, explorando muitos conceitos e constituindo novos saberes em uma atmosfera de investigação.

O objetivo desse produto educacional é propor uma Sequência Didática para o ensino de Função com ênfase na Bijeção de Função, com a pretensão de contribuir com a prática docente, tornando-se uma alternativa para melhoria da aprendizagem dos estudantes neste tema.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Em todos os campos da Matemática, bem como em outras ciências, é notória a necessidade de trabalhar com diversas representações para facilitar a compreensão e a construção do conhecimento a cerca do objeto de estudo, estabelecendo assim uma comunicação mais efetiva. O estudo das funções apresenta, de forma explícita, uma grande diversidade dessas características, uma vez que uma função pode ser representa na forma algébrica ou gráfica, e também por meio de tabelas e gráficos.

O PCN+ reforça que

> “O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática” (BRASIL, 2002, p.121).

O estudo do conteúdo Função é de fundamental importância para a Matemática, bem como para outros campos do conhecimento, uma vez qua ela apresenta uma riqueza de linguagens e representações possibilitando modelar, equacionar, representar e solucionar os mais diversos problemas. Mas como surgiu e como ocorreu o processo histórico evolutivo do conceito de Função?

Embora não exista um consenso entre vários autores em relação ao período em que surgiu o conceito de função, sabe-se que ele foi originado a partir da necessidade e busca do homem em compreender e descrever fenômenos naturais, bem como na tentativa de solucionar problemas do cotidiano.

Ao tratar sobre o desenvolvimento do conceito de função Sá, Souza e Silva (2003, p.1) destacam que "quando o homem levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional".

Para conhecer a quantidade de animais que havia no rebanho, os pastores utilizavam pedrinhas e um saco, colocando nesse uma pedrinha para representar cada ovelha que saía a pastar. Á noite, ele retirava uma pedrinha do saco, cada vez que uma ovelha entrava no cercado.

Conforme Ifrah (2005):

> Tudo começou com este artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata. (IFRAH, 2005, p.25).

Esse método de relacionar ou associar demonstra a intuição de unicidade, onde o processo de contagem é realizado por meio da correspondência entre objetos, que relaciona um conjunto de pedras com um conjunto de animais, o que evidencia a existência de uma noção de funcionalidade.

Esse provável método de contagem estava baseado em algum método simples que utilizava o princípio de correspondência biunívoca, dessa forma, nessa época, o conceito de função tem suas origens no surgimento do conceito do número. (VAZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, apud MACIEL, 2011, p. 10).

Zuffi (2016) afirma que:

> "Podemos encontrar este 'instinto de funcionalidade', que precede uma ideia mais geral de função, desde cerca de 2000 A.C., em cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como “funções tabuladas”, destinadas a um fim prático". (ZUFFI, 2016, p. 2)

Aos babilônios também é atribuída a construção de tabelas em argila, "onde para cada valor na primeira coluna havia um número na segunda, que era o resultado da multiplicação do número da primeira por uma constante". (SÁ, SOUZA e SILVA, 2003, p. 125)

Essa ideia de dependência, encontrada nessas tabelas demonstra a existência, mesmo de forma rudimentar, da ideia do conceito de função. Guimarães (2010) assegura que "não é prudente supor que o conceito de função já estava sendo formado [...] o que podemos afirmar é que o instinto de funcionalidade já se fazia útil, presente e necessário há muitos séculos". (GUIMARÃES, 2010, p. 21)

Segundo Boyer (1974, p. 193), durante o período da Idade Média, "Nicole Oresme (1323-1382), matemático francês, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes, para descrever diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo relacionados durante o movimento de um corpo que se desloca com aceleração constante" (BOYER, 1974, p. 193 apud MAGARINUS, 2013, p. 16), o autor afirma ainda que "os termos latitude e longitude, são equivalentes à nossa ordenada e abscissa". (BOYER, 1996, p. 181 apud BUENO; VIALI, 2009, p. 39)

De acordo com Sá, Souza e Silva (2003, p. 127), no século XVI, ocorreu intenso avanço na Álgebra, quando François Viéte (1540-1630) inicia os estudos baseados em parâmetros e variáveis, denominada **lógica speciosa**. Maciel (2011) corrobora com essa ideia ao asseverar que

> "Viéte (1540-1603) contribuiu fortemente para o avanço da Álgebra em seu trabalho *In artem*, no qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico foi fortemente influenciado. Nesse texto, o francês introduziu a prática de se utilizarem vogais para representar incógnitas e consoantes para a representação de valores constantes". (MACIEL, 2011, p. 12-13)

Conforme EVES (2004), antes da notação de Viéte, utilizava-se letras ou símbolos diferentes para representar as potências de uma mesma quantidade. Dessa forma, "o que se indica hoje por x, x^2 e x^3 era expresso por Viéte como A, A *quadratum* e A *cubum*". (EVES, 2004 apud MACIEL, 2011, p. 13)

Mendes (1994) destaca que Galileu Galilei (1564-1642) utilizou a matemática para modelar os fenômenos da natureza, modelando relações de variáveis interdependentes, para entender a como ocorriam os fenômenos, objetivando descrever mudanças da natureza e que o estudo de movimento originou os conceitos de relação entre variáveis e o de função ou, embora Galileu não tenha formalizado o conceito de função (MENDES, 1994, p. 21-22 apud SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p.127).

Zuffi (2016, p. 3), cita que "Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o quantitativo nas suas representações gráficas. Conforme Monna (1972, p. 58, apud BUENO; VIALI, 2009, p. 40) “Descartes, com sua aplicação de métodos algébricos à geometria, abriu o caminho para a introdução da noção de função que, gradualmente, se desenvolveu até sua forma moderna”.

Bueno e Viali (2009) asseguram que

> "A introdução de funções escritas através de equações iniciou uma verdadeira revolução no estudo de matemática. O uso de expressões analíticas, regidas por operações e relações específicas, introduzido, independentemente, por Pierre Fermat (1601–1665) e René Descartes, originou características específicas do estudo do tema. Proveniente da álgebra aplicada à geometria, essa nova forma de representar as funções logo se estendeu a outras áreas da Matemática e, especialmente, ao desenvolvimento do cálculo diferencial e integral". (BUENO; VIALI, 2009, p. 40)

No século XVIII o **Problema da Corda Vibrante**, mexeu com o raciocínio dos matemáticos da época e influenciou na reformulação do conceito de função, já que na época não era comum a representação de uma função por meio de uma expressão analítica. (CORREIA, 1999, MACIEL, 2011, p. 15).

Em Mendes (1994) encontramos a definição que Fourrier deu a função:

> "Acima de tudo deve ser destacado que a função f(x), para a qual esta prova se aplica, é inteiramente arbitrária, e não sujeita a uma lei de continuidade... Em geral, a função f(x) representa uma sucessão de valores que são dados à abscissa x, e existe um número igual de ordenadas f(x)... Nós não supomos estas **ordenadas** sujeitas a uma lei comum: elas se sucedem de qualquer maneira que seja e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade única". (MENDES, 1994, p. 40, apud, SÁ, SOUZA e SILVA, 2003, p. 132)

No final do século XVIII, surgiram muitos absurdos e contradições na Matemática, evidenciando que era essencial buscar uma fundamentação rigorosa da análise, para formalizar e fundamentar a Matemática. Dessa forma, a ideia de função precisou ser cuidadosa e claramente estabelecida, com as noções de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, provendo o surgimento da Análise Matemática que tinha como objeto de estudo as funções.

No século XIX Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859), contemporâneo de Cauchy, destacou-se, ao propor uma função que ficou conhecida como "função de Dirichlet":

$$f(x) = \begin{cases} a, \ se\ x\ racional; \\ b, se\ x\ irracional; \end{cases} \qquad \text{com } a \neq b, \ a \text{ e } b \text{ constantes.}$$

Segundo Kliner (1989) a função de Dirichlet foi o primeiro exemplo de função descontínua em todos os pontos da função; e a primeira função com restrição explícita do domínio num intervalo (KLEINER, 1989, p.292 apud MACIEL, 2011 p. 19).

O quadro, a seguir, elaborado por Sá, Souza e Silva (2003), apresenta de forma organizada e em ordem cronológica, a contribuição de cada estudioso para o processo de evolução do conceito de função.

Quadro 1 - Quadro Sinótico da Evolução do Conceito de Função. (continua)

Autor	Ano	Contribuição
René Descartes (1596-1650)	-	Chegou a definir função como qualquer potência de x, como $x^2, x^3, \ldots$.
Isaac Newton (1643-1727)	-	Introduziu o termo "variável independente".
James Gregory	1667	Na obra *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita: "Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b,... se x resulta de a, b,.... pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável".
Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716)	1694	Empregou a palavra *função* para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva. E na obra História usou a palavra "função" para representar quantidades que dependem de uma variável.
Jakob Bernoulli (1654-1705)	1694	Empregou a palavra função como sendo: quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.
Johann Bernoulli	1718	Definiu da seguinte maneira: "função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes.
Leonhard Euler (1707-1783)	-	Introduziu o símbolo f(x).
D'Alembert (1717-1783)	-	Equação da onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
Daniel Bernoulli (1700-1782)	1753	Tentativa de resposta para o problema da corda vibrante: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\frac{n\pi x}{l} \, cos\frac{n\pi at}{l}$
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1797	Na obra Théorie des Functions Analytiques, definiu: "Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas"
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1806	Lecons sur le calcul des functions: "Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo".
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)	1822	Afirmou em La théorie analytique de la chaleur que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \, cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \frac{n\pi x}{l}\right]$
Benhard Bolzano (1781-1848)	1817	Publicou Functionlehre onde conceituou continuidade muito próxima do conceito atual. Demonstrou o teorema do valor médio.
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)	1821	Em Cours d'analyse definiu função: "Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de função dessa variável". Definiu continuidade através de infinitésimos.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	-	Demonstrou que nem todas as funções podem ser descritas pelas serie de Fourier.

(conclusão)

Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	1837	Definiu função como: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x".
Nikolái Lobatchesvsky (1792-1856)	-	Definiu função: "A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x. o valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir mas permanece desconhecida"
Bernhard Riemann (1826-1866)	-	Esclareceu os critérios de integrabilidade, e deu origem ao conceito de "integral de Riemann".
Philipp Cantor (1845-1918)	-	Desenvolveu a teoria dos conjuntos.
Karl Weierstrass (1815-1897)	-	Definiu função como uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.
Giuseppe Peano (1858-1932)	-	Definiu três conceitos primitivos que o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.
Nicolas Bourbaki	1968	Em théorie des Ensembles conceituou função de duas maneiras: "Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x^aE, existe um e somente um elemento y^aF que estejam associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento x^aE o elemento y^aF que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função." E "um certo subconjunto do produto cartesiano AxB".

Fonte: Sá, Souza e Silva (2003, p. 136 a 139)

Conforme Guimarães (2010, p. 20) no século XIX notou-se que a definição de função apresentava diversas incoerências e limitações. A Teoria dos Conjuntos de George Cantor, do final do século XIX, e a associação da função às noções de continuidade e de desenvolvimento em séries, ampliaram enormemente sua natureza e seu significado**,** transformando o conceito de função em uma das pedras angulares da Matemática atual, sendo também utilizada para modelar fenômenos naturais e sociais.

3. ASPECTOS CURRICULARES

A importância do conceito de Função é evidenciada pela sua presença destacada em vários ramos da Matemática, bem como sua utilização em outras áreas do conhecimento tais como expresar e compreender fenômenos físicos, biológicos e sociais.

A Lei de Diretrizes e Bases (LDB) destaca, que o Ensino Médio, etapa final da educação básica, deve assegurar aos estudantes instrumentos que lhes permitam "continuar aprendendo", promovendo o desenvolvimento da compreensão dos "fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos", formando assim, um indivíduo ápto para o trabalho e o cumprimento da cidadania.

Com o intuito de assegurar uma educação com base científica e tecnológica, as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), organiza o Ensino Médio em áreas do conhecimento, onde o estudo da Função apresenta-se na área das Ciências da Natureza e da Matemática.

De acorodo com o os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) o ensino de Função deve

> [...] garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser inceintivado a buscar a solução, ajustando o seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 257)

O documento aponta para a necessidade da utilização de novas metodologias que tenham o aluno como protagonista na construção do seu conhecimento, bem como de modelos que lhe permita interpretar e investigar em Matemática e, dessa forma, continuar aprendendo.

Os PCNEM destacam a necessidade de o aluno perceber "a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação e ideias e permitam modelar a realidade e interpretá-la" (BRASIL, 1998, p. 39).

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+):

> "Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas de conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática

> garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre função para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (BRASIL, 2002, p. 43-44).

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM):

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como A linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006, p. 121).

Esse documento aponta para uma metodologia capaz de propiciar uma conexão do objeto Função com outros conteúdos matemáticos, visualização e aplicabilidade desse conteúdo.

Na BNCC o objeto Função está contemplado

> Na Competência Específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> Habilidade: (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 332)
>
> Competência específica 4:
> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 538-539).

Dessa forma, fica evidente a importância do estudo do objeto Função, uma vez que seu conceito, linguagem e representações auxiliam no desenvolvimento de competências e habilidades que promovem a construção do conhecimento de Matemática bem como em outras áreas do conhecimento.

4. REVISÃO DE ESTUDOS

Neste capítulo apresentamos os resultados de uma revisão de estudos que abordam o ensino e a aprendizagem de Função, dentre os quais procuramos destacar aqueles que tratavam da Bijeção de Função. Esse levantamento de estudos foi realizado com o objetivo de conhecer o que se tem discutido na literatura acadêmica e científica sobre o processo de ensino e aprensdizagem referente à Bijeção de Função, norteando o planejamento e a construção da nossa Sequência Didática.

Com o objetivo de organizar e sistematizar o nosso estudo, adotamos as categorias definidas por Silva (2014, apud SILVA, 2018, p. 32), que as dividiu em três categorias: estudos diagnósticos, que são aqueles que analisam e identificam algumas dificuldades dos alunos, durante o processo de ensino e aprendizagem; estudos experimentais, que se propõem a realizar atividades voltadas ao ensino de determinado assunto, com o objetivo de diminuir e/ou superar dificuldades e/ou aumentar a eficácia do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos; e estudos teóricos, que apresentam aspectos conceituais sobre o conteúdo estudado.

Estudos diagnósticos

Em Santos (2013), temos uma dissertação com o título: O Ensino das Funções Afim e Quadráticas por Atividades, que apresenta como questão norteadora**:** “Quais os efeitos de um conjunto de atividades sobre função afim e quadrática no desempenho de alunos do 1º ano do ensino médio?” E tem como objetivo investigar as contribuições de atividades para o processo de compreensão do conteúdo de funções afim e quadrática.

Neste estudo, a autora observou como um conjunto de atividades pode ser utilizado como um recurso metodológico para o processo de ensino e aprendizagem. Nesse intuito, ela aplicou uma sequência de atividades que propiciaram os alunos: observar, inferir, testar e concluir, conceitos, propriedades, utilização e aplicação dos conteúdos de Função Afim e Função Quadrática.

A metodologia utilizada foi baseada na Engenharia Didática, de Michèle Artigue e para elaboração das atividades em análises de situações de ensino, ela utilizou a perspectiva da didática da matemática, proposta por Brousseau. A decisão de trabalhar com modelagem matemática e o ensino por atividades, foi tomada após o estudo e análise do levantamento bibliográfico. A pesquisa foi desenvolvida em uma Escola Estadual de Belém, tendo com amostra 30 alunos, de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio.

Os resultados da pesquisa mostraram que a intervenção proposta, melhorou a aprendizagem dos conteúdos matemáticos trabalhados, promovendo o desenvolvimento de habilidades de observação, de proposição, de diálogo, de elaboração de texto, de interpretação, de autonomia na busca de caminhos para a resolução das questões e na construção dos conceitos e noções em relação aos conteúdos matemáticos tratados.

A autora concluiu que houve melhora considerável na aprendizagem e que o ensino por atividades e modelagem matemática contribui para o envolvimento dos alunos acarretando um aumento significativo no nível de aprendizagem sobre os conteúdos abordados.

Estudos experimentais

Em Silva (2017), temos uma dissertação que trabalha o tema A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções, que tem como objetivos: investigar o impacto da abordagem geométrica no estudo das funções, e certificar-se de como ela pode contribuir para a aquisição de competências em outras áreas do conhecimento; Fazer uma abordagem que forneça um sentido no estudo de algumas funções estabelecendo algumas conexões entre as propriedades das funções e seus significados, em aplicações em outras áreas do conhecimento.

A metodologia adotada foi a Engenharia Didática. A pesquisa foi realizada no Centro de Ensino Médio 02 de Planaltina-CEM-02, localizado em uma cidade satélite do Distrito federal, no setor educacional, região central da cidade de Planaltina, no turno da noite. A amostra foi constituída por professores (de Física, Química, Biologia, Geografia e Sociologia) e os alunos de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio composta por 40 alunos. Os dados foram coletados por meio de uma entrevista composta de 10 perguntas pertinentes ao tema abordado, proposta aos professores, tendo em vista verificar o quanto o ensino de Matemática, e, sobretudo a abordagem geométrica, está presente em outras áreas do conhecimento, servindo como aporte a essas disciplinas; e a aplicação de atividades para os alunos, visando analisar o seu domínio na interpretação de gráficos para a resolução de questões de Matemática e de outras áreas do conhecimento, bem como a receptividade dos mesmos quanto a esse tipo de abordagem.

Os resultados obtidos apontaram que a Matemática está presente em todas as disciplinas pesquisadas e que trabalho interdisciplinar pode contribuir para desenvolver a habilidade de fazer a leitura de gráficos de funções por parte dos discentes, permitindo ao autor concluir que a abordagem geométrica das funções torna o conteúdo mais palpável, favorecendo tanto no estudo da Matemática quanto de outras disciplinas, permitindo visualizar e compreender fenômenos, que se representados por meio de um texto ou de forma algébrica, ele não compreenderia.

Em Guimarães (2010), temos uma dissertação que versa sobre Atividades para Aprendizagem do Conceito Matemático de Função, com o objetivo de facilitar o ensino e a aprendizagem do conceito matemático de função. Segundo a autora, a escolha do tema foi motivada pela constatação das dificuldades dos estudantes do 1° ano do Ensino Médio com o tema funções.

A metodologia aplicada foi a Engenharia Didática. A pesquisa foi realizada em uma escola Estadual de Campinas-SP e uma escola Cooperativa – Araraquara-SP. A amostra foi composta por 86 alunos de quatro turmas do 1º ano do Ensino Médio, sendo duas turmas de cada escola. A coleta de dados foi realizada por meio da aplicação de folhas de atividades, resolvidas em grupos pequenos de estudantes.

Os resultados obtidos possibilitaram a análise e comparação com as observações prévias, apontando para a necessidade de uma reformulação de alguns trechos das folhas de atividades, tornando ainda mais positivos, os resultados de sua aplicação. Tudo isso levou a pesquisadora a concluir que a dinâmica, em geral, estimulou e incentivou a participação dos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem. A autora destaca que o material elaborado pode auxiliar outros profissionais da área, mesmo que seja necessário fazer pequenas alterações para torná-lo compatível com cada realidade.

O trabalho de Silva (2018) é uma dissertação que tem por título O Ensino de Função Afim por Atividades: experiência em uma escola pública do Estado do Pará. Apresenta os resultados de um estudo, com o objetivo de avaliar os efeitos que uma sequência didática tem sobre os discentes quando da resolução de questões relacionadas à função afim, partindo da seguinte questão norteadora: quais os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente do modelo tradicional, têm para a resolução de questões envolvendo função afim?

A metodologia adotada foi Engenharia Didática, estando as suas etapas descritas ao longo do trabalho. A pesquisa foi desenvolvida a partir da análise bibliográfica de trabalhos que abordam a temática, seguida da aplicação de questionários, testes e uma sequência didática, aplicada a uma amostra de 25 alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola pública no município de Belém.

Os resultados evidenciaram uma melhora na compreensão do conceito de função afim, avanços progressivos dentro do processo de discussão dos conceitos e definições matemáticas trabalhadas, bem como um aumento efetivo da participação dos alunos nas aulas. O autor concluiu que houve melhoras significativas na compreensão dos conceitos relacionados à função afim e que a metodologia adotada na pesquisa favoreceu a investigação da aplicação da sequência didática elaborada.

O autor ressalta que para utilizar a sequência didática proposta neste trabalho, é necessário primeiro identificar as dificuldades dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos do ensino fundamental e, concomitantemente, utilizar os recursos tecnológicos disponíveis, para desenvolver as atividades que versam sobre a construção e leitura do gráfico da função no plano cartesiano, a exemplo do Geogebra.

Estudos teóricos

A pesquisa de Espírito Santo (2019) é uma dissertação que desenvolve o tema Conjuntos infinitos e funções bijetivas: uma abordagem no ensino básico, com o objetivo de formalizar a definição de conjunto infinito na educação básica através do conceito de função bijetiva, tornando o aluno capaz de diferenciar um conjunto infinito de um conjunto finito muito grande. A metodologia adotada foi a pesquisa bibliográfica. Para defender a ideia de que o estudo de conjuntos infinitos é importante como introdução a utilização de conceitos abstratos e ainda ajuda a amadurecer os conceitos fundamentais de conjuntos e funções, a autora utiliza como referências o trabalho do PROFMAT (BACCARIN, 2013), o livro (GRIFFITHS, 1975) e o livro (ARAGÓN et al., 2011). Em seguida, é trabalhada a definição de conjunto infinito, partindo da ideia de que bijeções só podem ser definidas entre conjuntos com mesma cardinalidade, pautando-se no trabalho do PROFMAT (BORGES, 2015) e os livros (LIMA, 2016) e (GRIFFITHS, 1975).

A autora realiza uma pesquisa descritiva em alguns livros didáticos nacionais, com o objetivo de se fazer uma sondagem para verificar de que forma os conceitos de conjunto finito e funções aparecem em tais livros, bem como se existe algum tipo de abordagem relacionada a conjunto infinito. Os resultados obtidos foram organizados e apresentados por meio de imagens e análise dos livros, avaliando a forma como são abordados os conceitos de conjuntos e função, bem como a definição de conjunto finito e conjunto infinito.

A autora concluiu que diante de toda a sondagem realizada em alguns livros didáticos nacionais, notou-se a ausência em quase todos de uma abordagem sobre conjunto infinito. A importância de se explorar o conceito de infinito através de atividades propostas que não estão nos livros permite aos estudantes formular hipóteses para a resolução das atividades, fazendo o aluno pensar matematicamente o que proporciona um maior entendimento em conceitos abstratos envolvendo bijetividade de funções.

Em Melo (2017), temos uma dissertação que trabalha o tema Modelagem matemática no estudo das funções afim e quadrática, que tem como objetivo principal apresentar a modelagem matemática atrelada à teoria de registro de representação semiótica como uma perspectiva de ensino que auxilia professores de Matemática em suas aulas, bem como o desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino básico, que possa auxiliar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem em Matemática. A metodologia aplicada na pesquisa foi a modelagem matemática de Bassanezi atrelada à teoria de registro de representação semiótica de Duval seguidas da aplicação e análise da avaliação diagnóstica.

O estudo iniciou a partir de um levantamento bibliográfico, complementado pela análise de textos didáticos, seguidos da análise de alguns trabalhos acadêmicos que abordam a mesma temática, nos quais se percebeu que as propostas de utilização dos temas no ensino básico eram bem amplas e vêm ganhando espaço, reforçando assim, a relevância de se discutir o tema, possibilitando a elaboração de sequências didáticas a serem utilizadas como ajuda no processo de ensino e aprendizagem, visando esse ser o produto final do trabalho dissertativo.

A amostra da pesquisa foi composta por 48 alunos de duas turmas do 1º Ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio Henrique Justino de Melo. Os resultados foram obtidos por meio da aplicação de uma avaliação diagnóstica com duração de 2 aulas, que possibilitou identificar a acentuada dificuldade dos estudantes em conceitos matemáticos básicos como operações com inteiros, além da dificuldade em interpretação textual, e os resultados da pesquisa bibliográfica, possibilitaram a construção uma sequência didática voltada para o trabalho docente baseado na Modelagem Matemática e a Teoria de Registro de Representações Semióticas. Diante do exposto, o autor concluiu que o uso da Modelagem Matemática associada à Teoria de Registro de Representações Semióticas traz ganho ao processo de ensino e aprendizagem, pois possibilita aos alunos a conexão entre a matemática da escola com a matemática do seu cotidiano e aos professores uma dinâmica melhor na sua prática pedagógica e consequentemente na sua forma de avaliar.

Em Magarinus (2011), encontramos uma dissertação que trabalha o tema: Uma proposta para o ensino de função através da utilização de objetos de aprendizagem. Neste trabalho a autora relata que ao constatar a existência de inúmeras dificuldades de compreensão e aprendizagem dos conceitos relacionados ao objeto Função, sentiu-se motivada a refletir em sua prática pedagógica e repensar seus métodos, o que resultou na realização de uma pesquisa investigativa no intuito de identificar a verdadeira compreensão dos alunos do conceito de Função. O objetivo desse estudo foi apresentar uma proposta para o ensino de função através da utilização de objetos de aprendizagem. Para tanto, a autora propõe atividades pautadas na contextualização e interdisciplinaridade, partindo de problemas reais que pudessem contribuir na aprendizagem significativa, com o auxílio dos softwares Tracker e Geogebra.

A metodologia adotada pela autora foi o desenvolvimento de uma sequência de atividades atraentes, interativas e específicas para cada conteúdo conforme o planejado para cada aula. A partir da apresentação da ideia intuitiva de função, ela utilizou o computador para apresentar de forma atraente e diferente do método tradicional, a análise de movimentos mecânicos simples, quando trabalhado a função afim, e a exibição de um vídeo de uma esfera em queda livre, quando abordado função quadrática.

A pesquisadora concluiu que existe a necessidade da aplicação de novas metodologias de ensino da matemática, que possibilitem uma participação efetiva do aluno com relação à construção do conhecimento, para torná-lo significativo. Por isso, ela propõe o uso de softwares e a resolução de problemas contextualizados, pois é uma proposta metodológica diferenciada e interativa, mas ela lembra que não se pode garantir sua plena eficácia, pois durante o processo de ensino-aprendizagem há diferentes variáveis.

5. ENSINO POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Neste capítulo discorremos sobre o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas como Objetivo que são as metodologias de ensino que fundamentaram a construção nossa Sequência Didática.

5.1 Ensino por Atividades Experimentais

O Ensino por Atividades "é uma prática metodológica que proporciona ao aluno construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios" (SÁ, 2009, p. 14). Essa abordagem metológica de ensino viabiliza o protagonismo do estudante na construção do saber, uma vez que ele é conduzido pelo professor por meio de um processo de colaboração até descobrir o conteúdo abordado.

Segundo Sá (2019) O ensino por atividades apresenta as seguintes características:

> 1) É diretivo
> 2) Tem compromisso com o conteúdo;
> 3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
> 4) É estruturado
> 5) É sequencial
> 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
> 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
> 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
> 9) Não dispensa a participação do professor
> 10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos.
> 11) É iterativo entre estudantes e professor. (SÁ, 2019, p. 16-17)

Dessa forma, o Ensino de Matemática por Atividade é uma metodologia capaz de promover um ensino dinâmico, envolvente e participativo, onde os conteúdos propostos são descobertos pelo próprio aluno durante o processo de aprendizagem tendo o professor apenas como orientador, possibilitando a construção da autonomia do aluno, que encontrar leis gerais e generalizações sem o auxílio direto do professor, construindo seu conhecimento por meio de observações e descobertas.

Sá (2009) corrobora com essa ideia ao afirmar que

> A proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado a partir da elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Cabe, porém, ao

> professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno (SÁ, 2009, p.18).

No método tradicional de ensino o professor apresenta conceitos e definição, seguidos de exemplos e exercícios sem aplicação ou relação com o cotidiano do aluno, que de forma passiva, copia e reproduz os conhecimentos escritos no quadro. Por outro lado, o Ensino por Atividades parte de uma atividade com perguntas que objetivam instigar e nortear o discente a encontrar regularidades e por meio de discussão chegar à sua resolução, construindo assim o seu conhecimento por meio da descoberta, ou mesmo da redescoberta, através de leis gerais ou generalizações.

Conforme Sá (2009), o Ensino por Atividades pode ser realizado por dois tipos básicos de atividade: **conceituação** ou **redescoberta**, onde a atividade de conceituação tem por objetivo conduzir o estudante, por meio da percepção da ocorrência de um determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático, promover a construção da definição desse objeto matemático.

A atividade de redescoberta objetiva "levar o estudante ao descobrimento de uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática", correspondendo ao momento de exploração do objeto, a qual antecede a demonstração do resultado, não se limitando simplesmente na demonstração de um resultado matemático recorrente do processo. Por meio dela, o aluno descobre uma relação/propriedade, percebendo regularidades nos resultados, sendo conduzido a uma demonstração do objeto matemático estudado.

Dessa forma o que diferencia esses dois tipos de atividades é que na Atividade de Conceituação a construção do conhecimento ocorre durante a definição do objeto matemático, enquanto que na Atividade por Redescoberta, essa construção é decorrente da descoberta das relações/propriedade observadas durante a exploração do objeto matemático.

Uma Atividade de Conceituação ou de Redescoberta pode ser organizada, didaticamente, em seis momentos: **organização**, **apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização**. O quadro a seguir apresenta cada momento dessa atividade com a descrição detalhada de como cada um deles deve ser desenvolvido.

Quadro 4 - Momentos de ensino por atividades experimentais

Momento	O que será feito?	Como será feito?
1º	**Organização**	Organizar a turma, preferencialmente, em equipes com no máximo 4 alunos e no mínimo 2. É importante que o professor dirija as ações e oriente, sem imposição, a formação das equipes, demonstrando segurança e evitando desperdício de tempo nessa etapa de organização
2º	**Apresentação da Atividade**	O professor distribuirá todo o material necessário para a realização da atividade incluindo o roteiro da mesma, impresso ou disponibilizado no quadro, conforme as condições estruturais da escola. A organização do material em kits facilita a distribuição e economiza tempo.
3º	**Execução da Atividade**	Cada equipe realizará os procedimentos estabelecidos para a atividade: manipulação dos materiais, realização de medidas e/ou cálculo, comparação e/ou observação. O professor deve "supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar nas dúvidas, quando solicitado ou perceber dificuldade de execução".
4º	**Registro**	sistematização das informações na pesquisa cientifica e o registro das informações obtidas durante a execução dos procedimentos. O professor deve supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar dirimindo as eventuais dúvidas que possam ocorrer durante o processo".
5º	**Análise**	cada equipe, por meio da análise das informações registradas, deve perceber as características do objeto matemático que a atividade objetiva conceituar ou definir. Caso alguma equipe não consiga perceber a relação válida, por meio das informações registradas, o professor deve auxiliar os membros dessa equipe direcionando a eles perguntas reflexivas que os faça perceber a relação desejada.
6º	**Institucionalização**	O professor solicitará que um representante de cada equipe, anote no quadro a(s) observação(ões) elaborada(s) pela equipe, e após a análise dessas, o professor apresentará o conceito ou definição na forma padrão.

Fonte: Adaptado de Sá (2019, p. 18-21)

Ao discorrer sobre o ensino por atividades, Sá (2019) destaca que no início é muito raro os estudantes apresentarem observações que se aproxime do conceito do objeto matemático apresentado, contudo o professor deve analisar as observação elaboradas por cada equipe, analisar e destacar as características desejadas do objeto e somente após esse processo, apresentar o conceito ou definição na forma padrão.

Corrêa (2019) ressalta que

> "O professor deverá ainda, chamar a atenção da turma para as características que compõem uma conclusão, e finalmente, elaborar juntamente com a turma uma que permita a alguém que não participou da atividade entender a relação/propriedade estabelecida, e ainda, se possível, representar esta conclusão também com representações visuais ou símbolos matemáticos. A essa conclusão elaborada pelo professor em conjunto com a turma será denominada conclusão da turma, que representa o término da institucionalização e consequentemente o final dos momentos do ensino por atividade". (CORRÊA, 2019, p. 142).

Dessa forma evidencia-se a importância da valorização das respostas dos estudantes que colaboram de forma direta e positiva na construção da conclusão da turma, que será orientada pelo professor.

O Ensino Por Atividades cobra a construção de textos conclusivos, e por terem pouca experiência com esse tipo de atividade, os estudantes demonstraram dificuldades, registrando a relação obtida no momento da análise no lugar do texto conclusivo, além de gastar muito tempo na realização da mesma. Esse fato não deve ser motivo de preocupação, pois o professor pode direcionar algumas perguntas à turma, promovendo reflexão e discussão que possibilite a elaboração de uma conclusão mais adequada para a atividade, além disso as pesquisas de Corrêa (2019) e Conceição (2019) confirmam o que havia sido afirmado por Sá (1999), que e o tempo gasto nestas atividades tende a diminuir a medida que vão sendo desenvolvidas atividades de mesma natureza.

5.2 Resolução de Problemas como Ponto de Partida

A resolução de problemas é uma das tendências mais importantes no ensino de Matemática, pois ela apresenta uma especificidade dessa área, uma vez que a história e a evolução da Matemática sempre tiveram como ponto de partida a busca de soluções para problemas.

Conforme Sá (2004, p. 11) em 1980 o "National Council of Teachers of Mathematics" (Conselho Nacional de Professores de Matemática/Estados Unidos) - NCTM - recomendou que a resolução de problemas fosse a grande ênfase do ensino de Matemática. O autor enfatiza ainda que "nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS) a resolução de problemas é destacada nos objetivos da Matemática no ensino fundamental e como recurso de ensino". (SÁ, 2004, p. 11).

Para Toledo (2010), um problema matemático é qualquer situação que requer uma descoberta de informações matemáticas, antes desconhecidas para aquela pessoa que está tentando resolvê-la, sendo também, o desenvolvimento de um determinado resultado matemático. (TOLEDO, 2010 apud MIRANDA, 2015, p. 19).

"A resolução de problemas é uma atividade inerente à vida, pois cada dia temos que enfrentar situações novas e que as soluções não estão imeidatamente à mão". (SÁ, 2004, p. 17)

Ernest (1996, p.30) corrobora com essa ideia ao afirmar que:

> "resolver um problema é encontrar, por meios apropriados um caminho onde nenhum é conhecido à partida, encontrar o caminho para sair de uma dificuldade, encontrar o caminho para contornar um obstáculo, atingir um fim desejado que não é imediatamente atingível"

A utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino objetiva o desenvolvimento intelectual do aluno. Pozzo (1998) corrobora com essa ideia ao afirmar que "[...] quando um aluno ou qualquer pessoa enfrenta uma tarefa do tipo que denominamos *problema*, precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos" (POZZO, 1998, p. 19)

A resolução de problemas é apresentado como uma metodologia capaz de promover um aprendizado ativo e interativo, de modo que o estudante, ao enfrentar situações-problema, torne-se capaz de desenvolver estratégias, planejar etapas, obter e verificar a solução para o problema proposto.

De acordo com Miranda (2015, p. 14) a utilização da Resolução de Problemas é o caminho para superar o desafio de estabelecer relações da Matemática com o cotidiano dos estudantes, despertando nesses o interesse em aprendê-la de forma significativa, por meio de atividades motivadoras e criativas.

> "Quando os professores de matemática ensinam através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente". (ONUCHIC, 1999, p. 208)

Neste sentido a autora apresenta a ideia do construtivismo, apresentando uma relação de dependência entre a compreensão matemática e a capacidade de resolver problemas.

A autora defende ainda que "[...] o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema; [...] que a Resolução de Problema não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para aprendizagem" (ONUCHIC, 1999, p. 215)

Magarinus (2013, p. 29) ressalta que

> "A metodologia de resolver problemas prevê muito mais que apenas levar o aluno a encontrar soluções. O importante, nesse processo, é o caminho percorrido até chegar a solução de um problema, pois é neste momento que muitos conceitos matemáticos poderão ser explorados e novos saberes constituídos".

De acordo com Mendonça (1999, p. 16-17, apud, SÁ, 2009, p. 10) a abordagem da Resolução de Problemas é realizada a partir de três concepções:

- Como Objetivo, onde o problema é utilizado para ensinar a resolver problemas.
- Como Processo, onde analiza-se as estratégias dos alunos.
- Como Ponto de Partida, "os problemas são usados como recurso pedagógico para iniciar o processo de construção de um dado conhecimento específico"

Na última concepção o problema é o ponto de partida do processo de construção do conhecimento matemático, sendo o elemento formador desse processo, a metodologia utilizada para formar conceitos.

Na Resolução de Problemas como Ponto de Partida "o desenvolvimento do ensino é iniciado pela apresentação de um problema que permitirá desencadear o processo de aprendizagem, culminando na sistematização de conhecimentos matemáticos previamente determinados pelo professor". (MENDONÇA, 1999 apud SÁ, 2004, p. 15).

Conforme Polya (1977, apud SÁ, 2009, p. 11) a resolução de um problema perpassa pelas seguintes fases: **(a) compreensão do problema**, onde o resolvedor procura entender o enunciado e as condições apresentadas nos problema, identificando claramente a pergunta a ser respondida; **(b) estabelecimento de um plano**, fase em que o resolvedor identifica uma conexão entre os dados do problema e a pergunta a ser respondida, construíndo assim, um caminho que le à solução; **(c) execução do plano**, nessa fase o plano é colocado em prática, analisando cada passo dado em busca da resolução; e (**d) retrospecto**, faze em que o resolvedor deve verificar se a solução obtida satisfaz as condições e a pergunta do problema.

Sá (2009, p. 15) enfatiza que

> a construção natural do conhecimento matemático quase sempre é consequência da tentativa de resolver um problema, onde normalmente são identificados invariantes que posteriormente são estudadas suas propriedades e finalmente dão origem à definição de uma operação ou estrutura matemática.

A História da Matemática evidencia que a construção do conhecimento matemático é resultante dessa tentativa de resolver um problema, sendo esta o fundamento da "concepção de resolução de problemas como ponto de partida, cujo objetivo é partindo de um problema culminar numa sistematização de conceitos e operações da matemática". (SÁ, 2009, p. 15)

Sá (2009) apresenta algumas recomendações para a elaboração de aulas na perspectiva da Resolução de Problemas como Ponto de Partida:

1. Não tente fazer uma aula desse modo de maneira improvisada, pois sua operacionalização não é corriqueira e, dessa forma, a chance de facassar é muito grande.

2. Determine qual é o problema mais simples e interessante para turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução. O problema selecionado deve ter um enunciado simples e ser significativo para os alunos, uma vez que o objetivo é sistematizar um assunto a partir de um problema e não testar o domínio do assunto.

3. Descubra um processo de resolver o problema sem o uso da operação.

Obtenha soluções manipulativas ou com o uso de outros conceitos já conhecidos. Uma boa fonte de informação sobre essas soluções é a História da Matemática.

4. Proponha a situação-problema em sala e disponibilize um pouco de tempo para turma pensar numa solução.

O problema deve ser disponibilizado de forma escrita, e todos os alunos devem acessá-lo simultaneamente, assim todos terão o mesmo tempo para pensar numa solução.

5. Solicite que a turma apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem.

É comum que os alunos não consigam chegar à solução do problema em pouco tempo, haja visto que a solução criativa que o professor conhece é fruto de muito trabalho de outras pessoas em outras épocas. O mais importante é que ele tenha tempo suficiente para ler, compreender e tentar resolver o problema.

6. Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma.

Um aluno ou o professor apresentará a solução do problema para toda a turma, por meio de um registro escrito e detalhado, o permitirá a evidencia dos invariantes que emergem do processo de resolução do problema.

7. Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema.

Após a resolução do problema proposto, analise e identifique junto com a turma o resultado que será sempre presente na resolução de um problema similar ao que acabou de ser resolvido.

8. Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado.

Como resolver esse problema sem realizar todos esses cálculos ou procedimentos?

9. Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo trabalhar.

O prefessor apresentará formalmente e por escrito a definição da operação, conceito, propriedade ou estrutura matemática que planejou trabalhar. É importante destacar que como o nome padronizado é fruto de um longo processo histórico, é quase impossível o aluno enunciá-lo.

10. Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Apresente a solução do problema utilizando o conceito que foi sistematizado para destacar a importância e as vantagens de se conhecer tal conteúdo. Se possível, fale sobre o desenvolvimento histórico do assunto, isso ajudará os alunos a compreenderem o processo de construção do conhecimento matemático sem ter que refazer todos os passos dados pelos estudiosos que contribuíram para formalização do conceito.

11. Proponha outras questões envolvendo o assunto sistematizado.

Para que os alunos interiorize o conteúdo trabalhado utilizando-o de maneira operacional na resolução de outras situações-problema que envolvam tal conteúdo em condições diferentes da questão inicial, é intereswante que o professor proponha na forma de questões as propriedades mais relevantes do assunto.

A utilização da Resolução de Problemas como Ponto de Partida no processo de ensino e aprendizagem remonta, de forma simplificada, todo o processo de criação e construção do conhecimento matemático, propicia o protagonismo de estudante na construção do seu conhecimento, fazendo que que a aula seja mais dinâmica, atrativa e produtiva.

6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de Sequência Didática como metodologia de ensino para Função com ênfase na Bijeção de Função, composta por atividades que foram elaboradas com base nos pressupostos do Ensino por Atividades Experimentais, da Resolução de Problemas como Ponto de Partida e nas conclusões e entendimentos obtidos por meio da revisão des estudos, bem como as análises dos aspectos históricos e curriculares do objeto Função.

A seguir apresentamos as atividades que compõem a Sequência Didática, com suas respectivas atividades de aprofundamento e orientações didáticas, para que o professor possa aplicá-las de modo a desenvolver ao máximo a aprendizagem dos estudantes.

Atividade 01

ATIVIDADE 01

Título: Função

Objetivo: Definir função

Material: Roteiro da atividade, quadro de relações, caneta, lápis e papel.

Procedimento:

Observe o Quadro de Relações e:

- Identifique por **F** as relações em que para cada elemento do conjunto A (conjunto de partida), existe um único elemento correspondente em B (conjunto de chegada);
- Identifique por **NF** as relações em que exista pelo menos um elemento do conjunto A que não possui elemento correspondente em B ou que possua mais de um elemento correspondente em B.

A partir das informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Relação	**Todo elemento do conjunto A possui um único elemento correspondente no conjunto B?**	
	Sim	**Não**
1		
2		
3		
4		
5		

6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação

Conslusão

Orientações Didáticas

A atividade 01 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no quadro de relações que ele receberá junto com a atividade. Inicialmente o professor deve organizar a turma em equipes com no máximo 4 alunos e no mínimo 2. Em seguida, o professor apresenta a atividade e distribui a Atividade 01 e o Quadro de Relações.

No teceiro momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá escrever no Quadro de Relações, **F** para as relações em que para cada elemento do conjunto A (conjunto de partida), existe um único elemento correspondente em B (conjunto de chegada) ou **NF** nas relações onde esse fato não ocorre, e de posse dessas informações, efetuar o preenchimento do quadro que compõe esta atividade.

Sugerimos ao professor que, neste momento, esteja atento para auxiliar as equipes, sanando dúvidas, dificuldades e, a seguir, orientá-los na efetivação do registro, por meio do preenchimento dos quadros de observação e conclusão.

No quadro de observação a equipe deve registrar as características apresentadas pelas relações, deduzindo que aquelas assinaladas por **F** representam uma Função, e através da observação dessas observações seja capaz de preencher o quadro de conclusão com a definição de função. Neste momento o professor pode auxiliar as equipes por meio de perguntas reflexivas que possibilite perceber a relação desejada. A seguir, o docente realiza a socialização das conclusões dos estudantes, e com base nessas informações, formaliza a definição de Função, por meio de uma conclusão geral da atividade junto com os estudantes, podendo em em seguida dire ioná-los para a resolução da atividade a seguir.

Atividade 02

ATIVIDADE 02

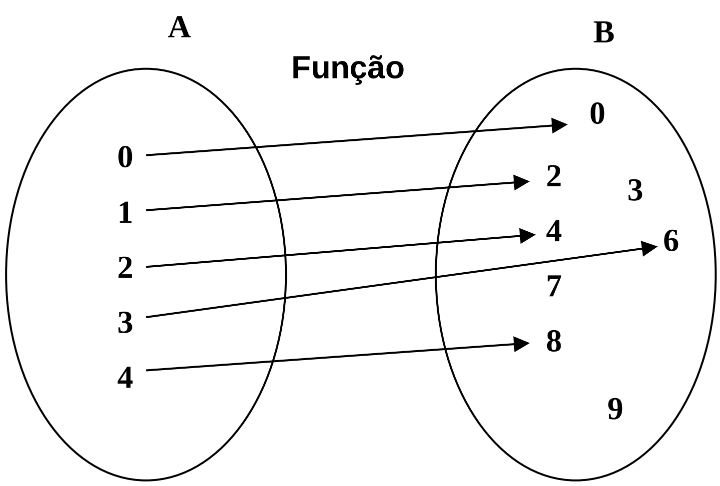
Título: Imagem de uma função

Objetivo: Identificar a imagem de uma função.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e papel.

Procedimento:

A relação seguinte, representa a função f, que relaciona os elementos do conjunto A com os elementos do conjunto B. Com base nessas informações responda as perguntas a seguir:



QUESTÕES

1) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 1 do conjunto A?

2) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 2 do conjunto A?

3) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 3 do conjunto A?

4) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 4 do conjunto A?

5) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 0 do conjunto A?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 1? Equivale a parguntar: Na função f qual é a imagem de 1?

6) Na função f qual é a imagem de 2?

7) Na função f qual é a imagem de 3?

8) Na função f qual é a imagem de 4?

9) Na função f qual é a imagem de 0?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é a imagem de 1? É representada por $f(1)$

10) Determine:

a) $f(2) =$

b) $f(3) =$

c) $f(4) =$

d) $f(0) =$

e) $f(4) + f(3) =$

f) $f(5) - f(4) =$

g) $[f(3)]^2 + [f(4)]^2 =$

h) $f(2) + f(3) + f(0) =$

Observação:

Orientações Didáticas

A atividade 02 é composta por 10 questões que devem ser respondidas com base em uma função de A em B, representada por meio do diagrama de setas (ou diagrama de Venn) e nas informações de dois quadros explicativos, que se encontram, respectivamente, após as questões 5 e 9.

Ápós recolher a atividade 01, o professor apresenta e entrega uma cópia da atividade 02 para cada equipe, orientado-as a observar a função de A em B, representada pelo diagrama de setas e efetivar a leitura atenciosa dos quadros explicativos, e com base nessas observações, realizar a resolução da atividade. Nesta etapa, o professor deve estimular a reflexão e discussão em grupo e, quando necessário, sanar dúvidas e dificuldades, de modo que os estudantes percebam que os elementos que recebem setas são denominados imagem dos elementos de onde saem essas setas e, dessa forma, seja direcionados a efetuar o registro no quadro de observação, desenvolvendo assim a habilidade de identificar a imagem de um elemento de uma função.

Após o registro das observações, o docente orietará os estudantes a socializar suas observações e a partir daí o professor formalizará o modo prático de identificar a imagem de um elemento de uma função, tomando como base as próprias observações que os discentes encontraram.

Atividade 03

ATIVIDADE 03

Título: Imagem e Contradomínio de uma função

Objetivo: Conceituar conjunto imagem e contradomínio de uma função.

Material: Roteiro de atividade, Quadro de Funções 1, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Observe o quadro de Funções 1
- Com as informações obtidas responda as questões a seguir:

QUESTÕES

1. Na função 1 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A?

2. Na função 3 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A?

3. Na função 4 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A?

4. Na função 5 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A?

5. Na função 12 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A?

Em Matemática a pergunta: Na função $\boldsymbol{f}$ qual é o conjunto dos elementos do conjunto $\boldsymbol{B}$ que são imagem de algum elemento do conjunto $\boldsymbol{A}$? Equivale a pergunta: Qual é o conjunto imagem da função $\boldsymbol{f}$? O conjunto imagem da função $\boldsymbol{f}$ é representado por $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})$.

6. Qual é o conjunto imagem da função 1 ?

7. Qual é o conjunto imagem da função 3 ?

8. Qual é o conjunto imagem da função 4 ?

9. Qual é o conjunto imagem da função 5 ?

10 Qual é o conjunto imagem da função 12 ?

11 O que é conjunto imagem de uma função?

12. Na função 1 qual é o conjunto de chegada das flechas?

13. Na função 3 qual é o conjunto de chegada das flechas?

14. Na função 4 qual é o conjunto de chegada das flechas?

15 Na função 5 qual é o conjunto que contém a imagem dessa função?

16. Qual é o conjunto que contém a imagem da função 12?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é o conjunto de chegada das flechas? Ou qual é o conjunto que contém a imagem da função f? Equivale a pergunta: Qual é o contradomínio da função f? O contradomíno da função f é representado por $CD(f)$.

17. Qual é o contradomínio da função 1?

18. Qual é o contradomínio da função 3?

19. Qual é o contradomínio da função 4?

20. Qual é o contradomínio da função 12?

21. O que é o contradomínio de uma função?

Orientações Didáticas

A atividade 03 é composta por 21 questões que devem ser resopondidas com base no Quadro de Funções 1 e em dois quadros informativos que sucedem, respectivamente, as questões 5 e 16.

Logo após a conclusão da atividade 02, o professor deve apresentar a atividade 03 e entregar junto como ela o Quadro de Funções 1, orientado os estudantes a seguirem com atenção o procedimento da atividade e o comando de cada questão. A resolução das questões de 1 a 11 e a leitura do quadro informativo que sucede a questão 5 devem auxiliar o estudante na construção do conceito de conjunto imagem, a resolução das demais questões e a leitura do outro quadro informativo devem promover uma reflexão que resultará na construção do conceito de contradomínio de uma função.

Sugerimos ao professor que estimule os alunos a discutirem em grupo e refletirem nas ideias apresentadas nos quadros informativos. Caso julgue necessário, o docente pode direcionar perguntas aos grupos, promvendo reflexões e aguçando o espírito investigativo dos estudantes de modo que a resolução das questões seja visto como algo prazeroso e desafiador.

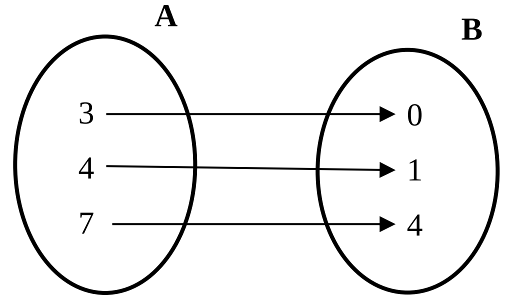
Destacamos que durante a execução da atividade, o professor deve estar atento para auxiliar os discentes, principalmente, a efetuar o registro das respostas das questões 11 e 21, onde eles devem escrever, respectivamente, o conceito de imagem e contradomínio de uma função. No momento seguinte, o professor solicitará que um representante de cada equipe apresente o conceito de imagem e contradomínio de uma função e, logo em seguida, com base nas respostas apresentadas, ele apresentará aos estudantes a formalização dos conceitos da imagem e contradomínio de uma função.

Após a conclusão da Atividade 03, o professor entregará para cada equipe uma cópia da Atividade de Aprofundamento das Atividades 01, 02 e 03, para consolidar os conceitos de Função, imagem e contradomíno de uma função.

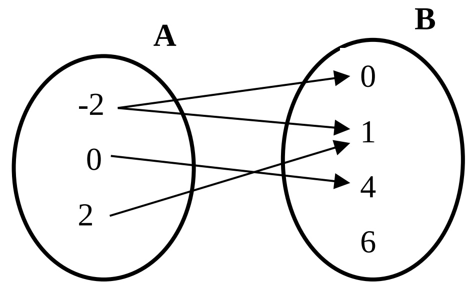
Atividade de Aprofundamento das Atividades 01, 02 e 03

1. Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo, define ou não uma função de A em B. Justifique a sua resposta.

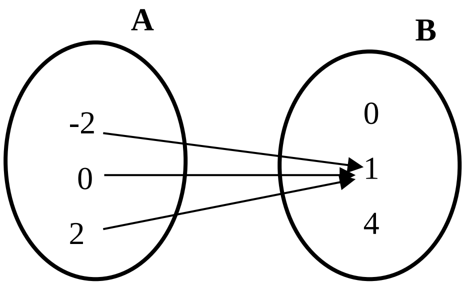
a)



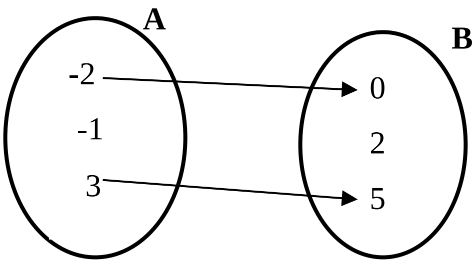
c)



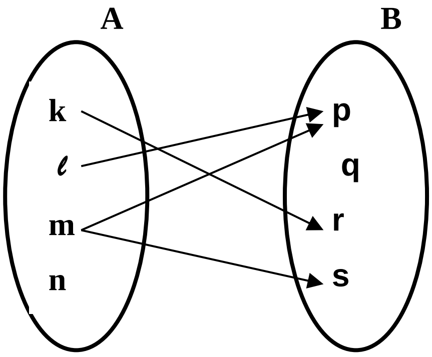
b)



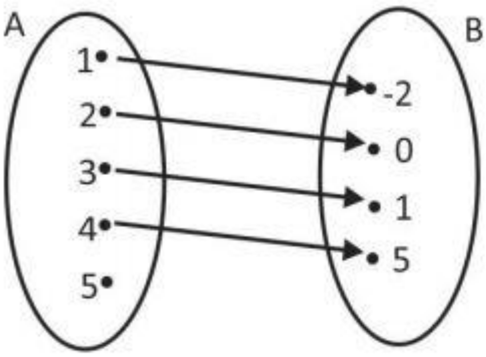
d)



2. O que é necessário fazer para que o diagrama abaixo represente uma função de A em B?



3. (FBR-CEPEL-2014) No figura a seguir está evidenciada, através de setas, uma relação entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B.



A respeito desta relação é correto afirmar que:

A) não é uma função.

B) é uma função que não é injetora nem sobrejetora.

C) é uma função injetora, mas não sobrejetora.

D) é uma função sobrejetora, mas não injetora.

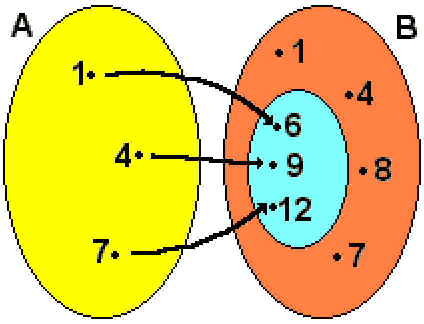
E) é uma função bijetora.

4. (IEZZI-2016) Sejam $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}$. responda:

a) A lei que associa cada elemento de A ao seu sucessor em B define uma função? Por que?

b) A lei que associa cada elemento de A ao seu quadrado em B define uma função? Por que ?

5. O esquema a seguir, representa uma função de "A" em "B".



a) Qual é a imagem do elemento 1?

b) Qual é a imagem do elemento 4?

c) qual é o elemento do conjunto A que tem como imagem o elemento 12 do conjunto B?

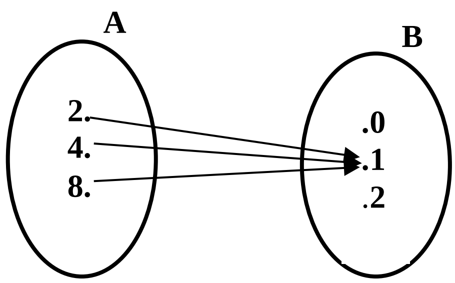
d) Determine o valor de $f(7) - f(4)$.

e) Quanto vale $f(1) + f(7)$?

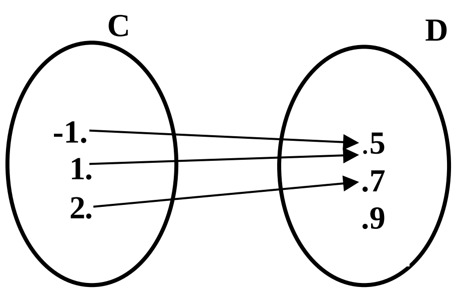
f) Qual é o valor de $\frac{f(1)+f(4)}{3}$?

6. Determine o conjunto imagem de cada função a seguir:

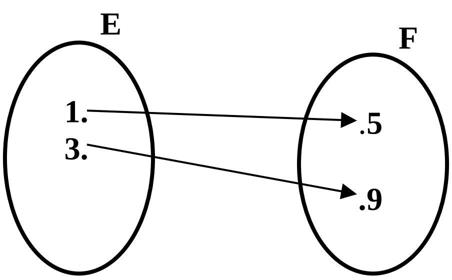
a)



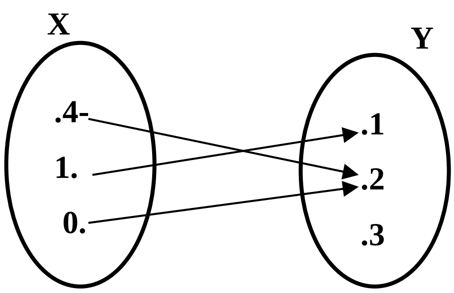
c)



b)



d)



7. Uma função $f: A \to B$ é uma regra que relaiciona cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B. Com base nas definições de domínio, contradomínio e imagem de uma função julgue em verdadeira (V) ou falsa (F) cada proposição a seguir, reescrevendo as proposições falsas de modo que elas passem a ser verdadeiras:

(   ) Na função $f: A \to B$, a imagem da função f é um subconjunto do conjunto B.

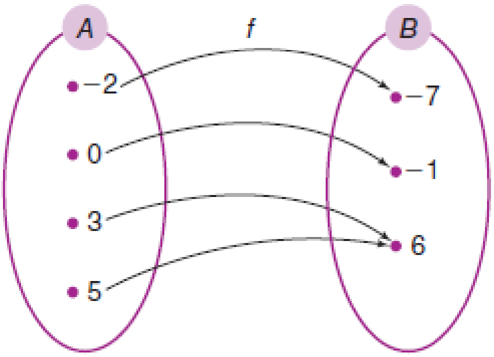
(   ) O contradomínio de uma função é o conjunto de todos os resultados que se relacionam a algum elemento do domínio.

( ) A imagem de uma função é o conjunto numérico com todos os valores que podem ser relacionados a algum elemento do domínio.

(   ) Uma função pode ter o conjunto imagem igual ao contradomínio.

8. Seja a função $f(x) = 2x - 1$, com domínio $Dm = \{1, 2, 3\}$ e o contradomínio composto pelos numeros naturais ímpares compreendidos entre 0 e 10. Represente o conjunto imagem da função f.

9. (PAIVA-2010) O diagrama abaixo representa uma função$f: A \to B$.



Calcule:

a) $f(-2)$

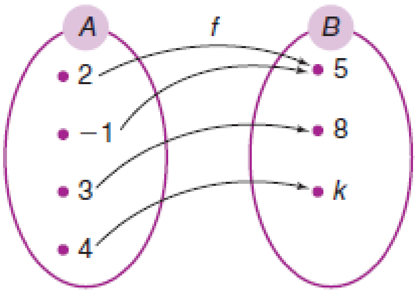
b) $f(0)$

c) $f(3) + f(5)$

10. (PAIVA-2010) O diagrama ao lado representa uma função $f: A \to B$, sendo k uma constante real.

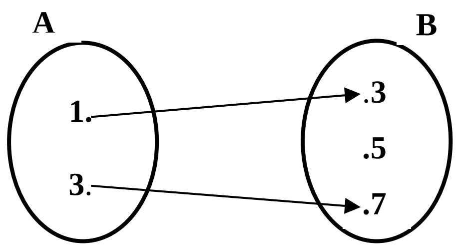
Determine o número k, sabendo que

$\frac{f(2)}{f(4)-f(3)} = f(-1)$.

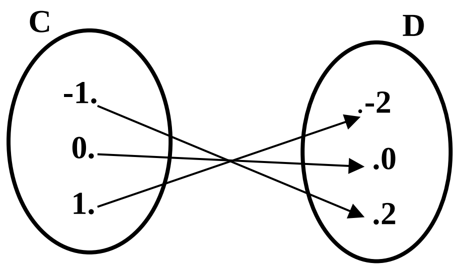


11. Indique o contradomínio $\boldsymbol{CD(f)}$ e o conjunto imagem $\boldsymbol{Im(f)}$ de cada função a seguir:

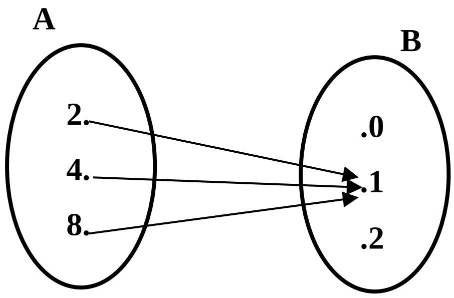
a)



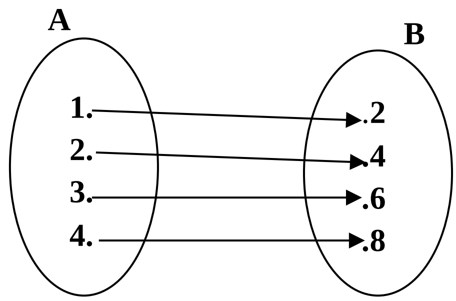
c)



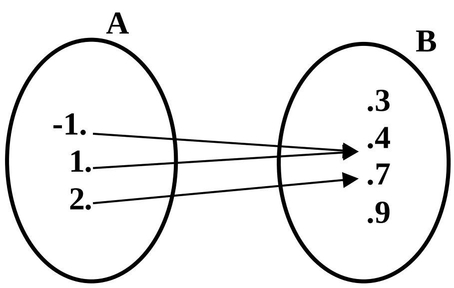
c)



d)



12. Com abase no diagrama a seguir, que representa a função $f: A \to B$, julgue em CERTA (C) ou ERRADA (E) cada uma das seguintes afirmações, fazendo as devidas correções nas afirmações erradas:



( ) 2 é a imagem de 7.

( ) 4 é a imagem de -1 e 1.

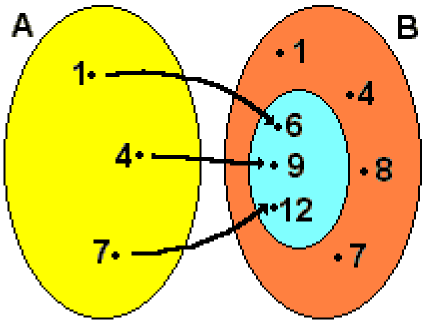
( ) O contradomínio da função $f: A \to B$ é o conjunto A.

( ) A imagem da função $f: A \to B$ é o conjunto $Im(f) = \{4, 7\}$.

( ) A imagem de uma função $f: A \to B$ é representada por todos os elementos do contradomínio.

( ) A imagem é um subconjunto do contradomínio.

13. O esquema ao lado representa a função de A em B.



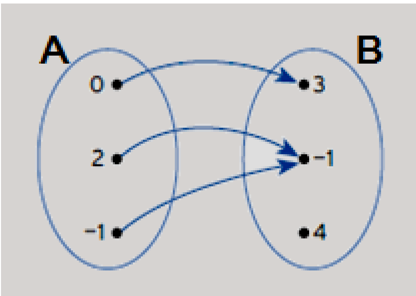
Com base nesse esquema, responda:

a) O que representa o conjunto destacado de azul?

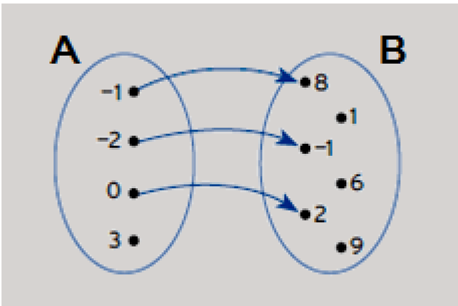
b) A parte laranja junto com a parte azul do esquema representa o domínio ou o contradomínio da função? Justifique a sua resposta.

14. Identifique o conjunto contradomínio e o conjunto imagem de cada função representada a seguir:

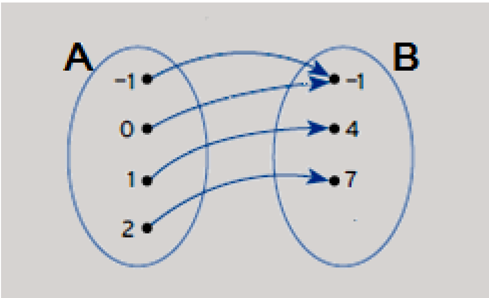
a)



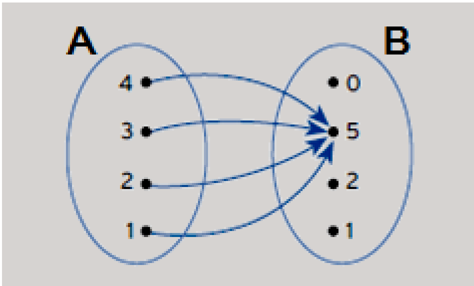
d)



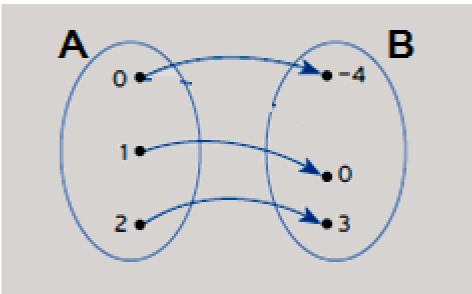
b)



e)



c)



15. (IEZZI-2016) Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \backslash -2 \leq x \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \backslash -5 \leq x \leq 5\}$ e $f: A \to B$ é definida pela lei $y = 2x + 1$, quantos são os elementos de B que não pertencem ao conjunto imagem?

16. (IEZZI-2016) Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = -x$. Qual é o conjunto imagem de f?

17. Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Em cada caso a seguir determine o contradomínio e o conjunto imagem de f:

a) $f: A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$

b) $f: A \to B$ definida por $f(x) = 2x - 1$

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade de aprofundamento, mostre e relembre as conclusões que tiveram, ajudando-os a recordarem as regularidades percebidas por eles. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros mais formais que podem ser apresentados por eles e/ou pelo professor. Em seguida, os alunos devem ser direcionados à resolução da atividade 04, que apresnta um processo de resolução semelhante ao utilizado nas atividades anteriores, como veremos a seguir.

Atividade 04

ATIVIDADE 04

Título: Domínio de uma função

Objetivo: Conceituar conjunto domínio de uma função.

Material: Quadro de Funções 1, roteiro de atividade, lápis ou caneta e papel.

Procedimento

- Observe o Quadro de Funções 1;
- Com as informações obtidas responda as questões a seguir:

QUESTÕES

1. Na função 1 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B?

2. Na função 5 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B?

3. Na função 8 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B?

4. Na função 10 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B?

5. Na função 11 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente em B? Equivale a pergunta: Qual é o domínio da função f ? O domínio da função f é representado por $D(f)$.

6. Qual é o domínio da função 1?

7. Qual é o domínio da função 5?

8. Qual é o domínio da função 8?

9. Qual é o domínio da função 10?

10. Qual é o domínio da função 11?

11. O que é domínio de uma função de A em B?

Orientações Didáticas

A atividade 04 é composta por 11 questões que devem ser resolvidas com base nas informações obtidas por meio da observação do Quadro de Funções 1 e do quadro informativo que sucede a questão 5.

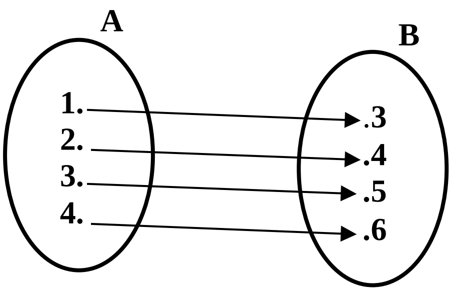
Após recolher todas as atividades de aprofundamento, o professor apresentará a Atividade 04, distribuindo uma cópia dessa e do Quadro de Funções 1 para cada equipe, direcionando-as ao momento da execução da atividade, onde cada equipe observará o Quadro de Funções 1 e, com base nas informações obtidas, seguindo o comando de cada questão resolverá a atvidade, preechendo o espaço destinado a cada questão com sua respectiva resolução.

Sugerimos ao professor que, após o registro das resoluções das questões que compõem a Atividade 04, convide um aluno de cada equipe para socializar a resposta da questão 11 e, depois que todos aqueles que desejarem, tiverem compartilhado a sua resposta, efetue a formalização do conceito do conjunto domínio de uma função, com base nas respostas apresentadas pelos discentes, e depois proponha a Atividadae de Aprofundamento a seguir, com o objetivo de fixar melhor o conceito de conjunto domínio de uma função.

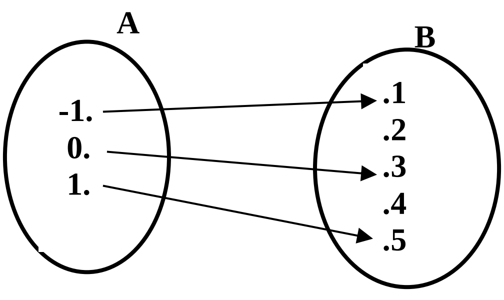
Atividade de Aprofundamento da Atividade 04

1. Determine o domínio de cada uma das funções f de A em B a seguir:

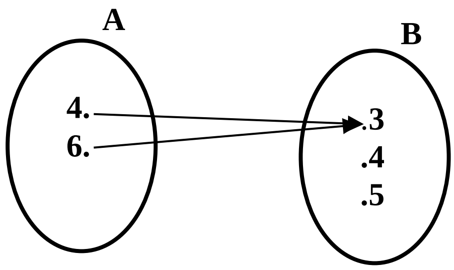
a)



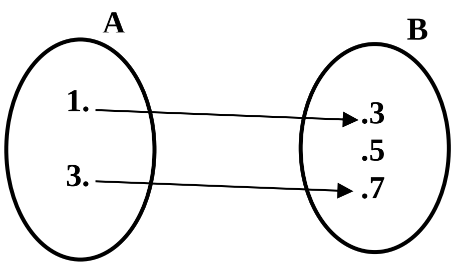
b)



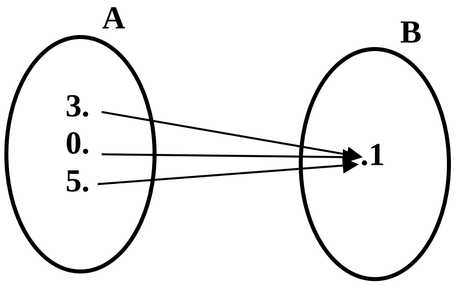
d)



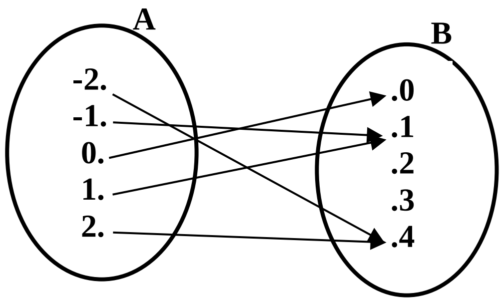
e)



c)



f)



2. De acordo com as respostas obtidas na questão anterior, qual é o domínio da fução $f: A \rightarrow B$ (f de A em B)?

3. Na função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 5$, o domínio dessa função, também conhecido como conjunto de partida é o conjunto de todos os valores que podem substituir a variável x nesta função. Desse modo, podemos concluir que o domínio da função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é

A) o conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros.

B) o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais.

C) obtido multiplicando os elementos dos conjuntos $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{R}$.

D) o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais.

E) formado por todos os valores de $f(x)$.

4. A tabela a seguir apresenta a nota de cinco alunos em uma prova de Matemática:

NOME	Ana	Beatriz	Caio	Daniel	Ellen
NOTA	8,5	10	10	9	6

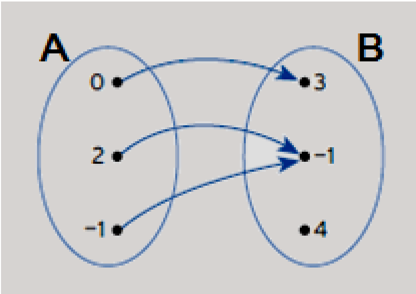
Considerando uma função f que associa o nome de cada aluno à respectiva nota, determine:

a) Qual é o domínio da função f?

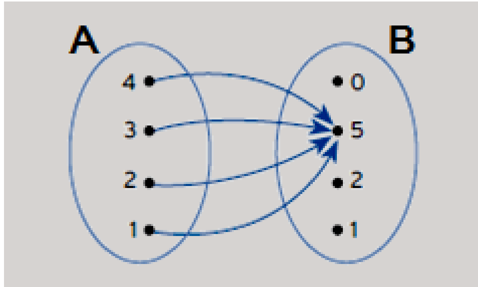
b) Há alguns elementos do domínio que têm a mesma imagem. Quais são esses elementos.

5. Dada a função $f: A \rightarrow B$, determine o domínio de cada função, representada a seguir:

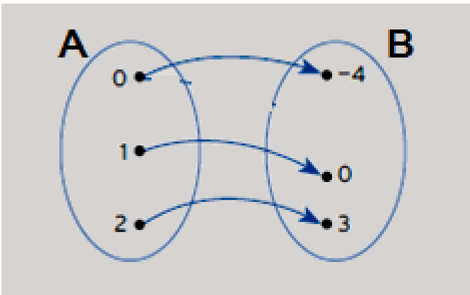
a)



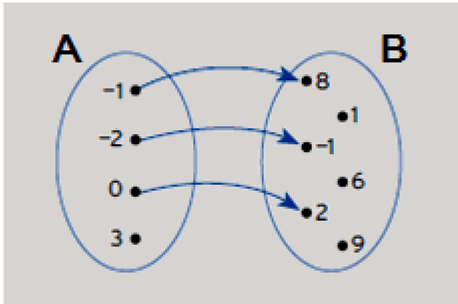
c)



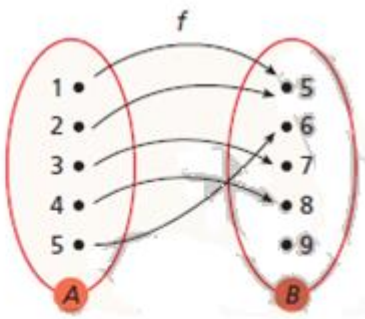
b)



d)



6. O diagrama ao lado representa a função f, onde $x \in A$ e $y \in B$. Nestas condições determine:



a) $D(f)$;

b) $CD(f)$;

c) $Im(f)$;

d) $f(5)$;

e) y, quando $x = 1$;

f) $f(x)$, quando $x = 4$;

7. (UFRS) Considerando $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -1 < x \leq 10\}$, e sendo R a relação em A formada pelos pares (x, y) tais que $y = 2x - 1$, o domínio e a imagem dessa relação correspondem, respectivamente, a

A) {0, 1, 2, 3} e {1, 3, 5, 7}

B) {1, 2, 3, 4} e {3, 5, 7, 9}

C) {0, 1, 2, 3, 4} e {0, 2, 4, 6, 8}

D) {1, 2, 3, 4, 5} e {1, 3, 5, 7, 9}

E) {1, 2, 3, 4, 5} e {0, 2, 4, 6, 8}

8. (IEZZI-2016) Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Em cada caso, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de f:

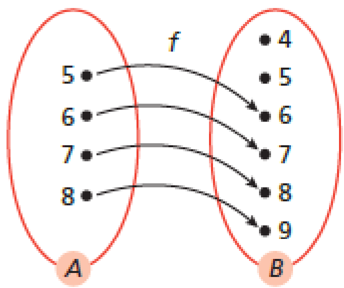
a) $f: A \to B$ dada por $f(x) = x + 2$

b) $f: A \to B$ dada por $f(x) = x^2$

c) $f: A \to B$ dada por $f(x) = -x + 1$

d) $f: A \to B$ dada por $f(x) = |x|$

9. O esquema ao lado representa uma função de “A” em “B”. Determine o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função.



Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade de aprofundamento, apresente as conclusões que eles registraram na questão 11, ajudando-os a recordarem as regularidades identificadas pelos estudantes. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros mais formais que podem ser apresentados por eles e/ou pelo professor.

As atividades 5, 6 e 7, a seguir, devem compor uma aula envolvendo as definições de Função Injetora, Função Sobrejetora e Função Bijetora. Elas apresntam um processo de resolução semelhante ao utilizado nas atividades anteriores, como veremos a seguir:

Atividade 05

ATIVIDADE 05

Título: Função Injetora

Objetivo: Definir Função Injetora;

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 1, caneta ou lápis.

Procedimento:

Observe o Quadro de Funções 1 e:

- Identifique por **I** as funções que não existem elementos distintos do domínio com a mesma imagem;
- Identifique por **NI** as funções que existem os elementos distintos do domínio com a mesma imagem.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Função	Existem elementos distintos do domínio com a mesma imagem?	
	Sim	Não
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

Definição

Orientações Didáticas

A atividade 05 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Funções 1. Inicialmente o professor organizar a turma mantendo os mesmos grupos formados por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 05 e o Quadro de Funções 1, direcionando os alunos à execução da atividade, onde cada equipe deverá analisar o Quadro de Funções 1, escrevendo **I** para aquelas onde não há elementos distintos do domínio que tenham a mesma imagem e **NI** para as funções em que elementos distintos do domínio possuem a mesma imagem e, em seguida, devem preencher o quadro da Atvidade 05, com base nas informações obtidas.

Sugerimos ao professor que, neste momento, esteja atento para auxiliar as equipes, sanando dúvidas e dificuldades, por meio de ponderações com base em perguntas direcionadas à turma, levando-os a refletir sobre o signigicado de I e NI e sua relação com as respostas registradas no quadro da Atividade 05, o que auxiliará no desenvolvimento da capacidade de análise desses educandos e facilitará a execussão das atividades posteriores.

Após deduzir que as funções assinaladas por **I** representam uma Função Injetora e notar as características dessa, as equipes deverão preencher o quadro de observação e concluir que: Função Injetora é aquela em que elementos diferentes do domínio pssuem imagens diferentes no contradomínio, alcançando assim o objetivo proposto para essa atividade. Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e definição e, após a explanação de todos, realizar a formalização da definição de Função Injetora, represntando-a também por meio de desenho e simbologia, podendo em em seguida direcioná-los para a resolução da atividade 06.

Atividade 06

ATIVIDADE 06

Título: Função Sobrejetora

Objetivo: Definir Função Sobrejetora

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 1, caneta, lápis e papel.

Procedimento:

- Observe o Quadro de Funções 1;
- Identifique por **S** cada função em que todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir

Função	Todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio?	
	Sim	Não
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

Definição:

Orientações Didáticas

A atividade 06 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Funções 1. Após receber a atividade 05, o professor deve apresentar e entregar a atividade 06, explicando que seu processo de resolução é o mesmo utilizado na atividade anterior, direcionando os alunos à execução da atividade, onde cada equipe deverá analisar o Quadro de Funções 1, identificando por **S** cada função em que todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio e, em seguida, devem preencher o quadro da Atvidade 06, com base nas informações obtidas.

Sugerimos ao professor que pergunte aos grupos: qual é o signigicado de **S**? E, em seguida solicite a eles que comparam a imagem ($Im(f)$) e o contradomínio ($C(f)$) de cada função, propiciando subsídios para que os estudantes preencham os quadros de observação e definião aproximando-se ao máximo da definição de Função Sobrejetora: uma função é sobrejetora quando a sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, $Im(f) = C(f)$. Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e definição e, após a explanação de todos, realizar a formalização da definição de Função Sobrejetora, represntando-a também por meio de desenho e simbologia, podendo em em seguida direcioná-los para a resolução da atividade 07.

Atividade 07

ATIVIDADE 07

Título: Função Bijetora

Objetivo: Definir Função Bijetora.

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 2, caneta ou lápis.

Procedimento:

- Observe cada um dos diagramas do Quadro de Funções 2;
- Identifique por **I** as funções injetoras;
- Identifique por **S** as funções sobrejetoras.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Função	A função é injetora?		A função é sobrejetora?	
	Sim	Não	Sim	Não
K				
L				
M				
N				
P				

Q				
R				
S				
T				
V				
W				
Z				

Observação:

Definição:

A atividade 07 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Funções 2. Após recolher a atividade 06, o professor deve apresentar e entregar a atividade 07, explicando que seu processo de resolução é o mesmo utilizado na atividade anterior, direcionando os alunos à execução da atividade, onde cada equipe deverá analisar o Quadro de Funções 2, identificando por **I** as funções injetoras e por **S**, as sobrejetoras e, em seguida, devem preencher o quadro da Atvidade 07, com base nas informações obtidas.

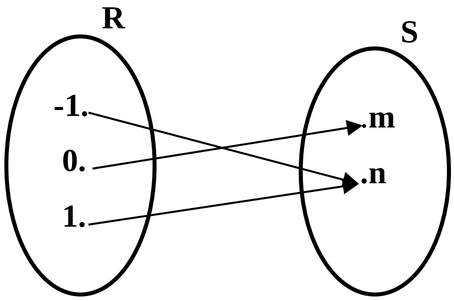
Acreditamos que após o preenchimento do quadro eles notarão que existem funções que são simultaneamente Injetora e Sobrejetora. Nesse momento o docente deve direcioná-los a preencher o quadro de observação com essa informação. É provável que os estudantes tenham dificuldade em definir esse tipo de função como Bijetora, por isso recomendamos que o professor direcione a seguinte pergunta à turma: qual é o significado do prefixo BI? Objetivando promover reflexão, discussão e a construção da definição de que Função Bijetora é aquela que é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e definição e, após a explanação de todos, realizar a formalização da definição de Função Sobrejetora, representando-a também por meio de desenho e simbologia, podendo em em seguida direcioná-los para a resolução da Atividade de Aprofundamento das Atividades 05, 06 e 07.

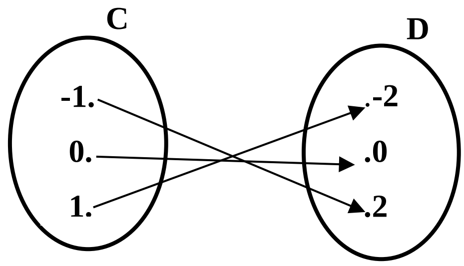
Atividade de Aprofundamento das Atividades 05, 06 e 07

1. Verifique em cada caso a seguir se o esquema representa uma função injetora, justificando a sua resposta.

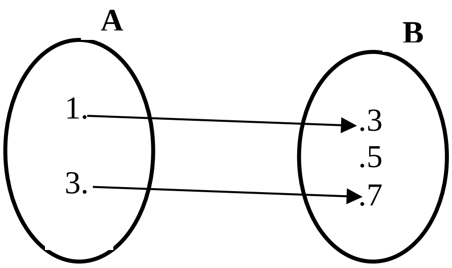
a)



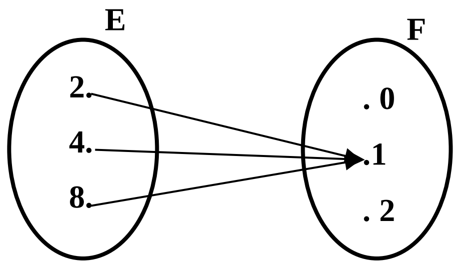
c)



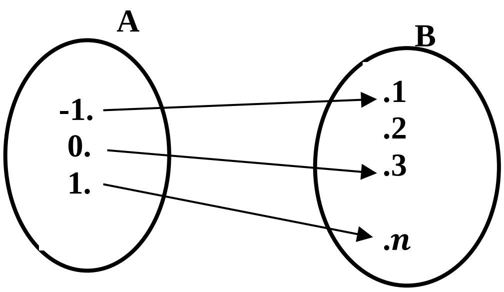
b)



d)

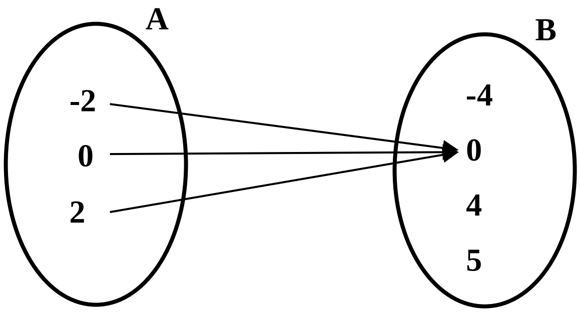


2. A função $f\colon A \to B$, representada pelo esquema a seguir é injetora.



Dessa forma, podemos afirmar que o valor de n não pode ser igual a 1, nem igual a 3, ou seja, $n \neq 1$ e $n \neq 3$. Por quê?

3. Explique o que é necessário fazer para que a função de A em B representada pelo esquema abaixo, seja uma função injetora.



4. Considere três funções f, g e h, tais que:

A função f atribui a cada pessoa do mundo, a sua idade;

A função g atribui a cada país, a sua capital;

A função h atribui a cada número natural, o seu dobro.

Qual (is) dessas funções é (são) injetora(s)? Justifique a sua resposta.

5. (IAUPE/CEP-2017) Considere três funções f, g e h, tais que:

- A função f atribui a cada pessoa do Brasil a sua altura;
- A função g atribui a Estado uma bandeira.
- A função h atribui a cada número natural, o seu triplo.

Podemos afirmar que, das funções dadas, são (é) injetoras (a):

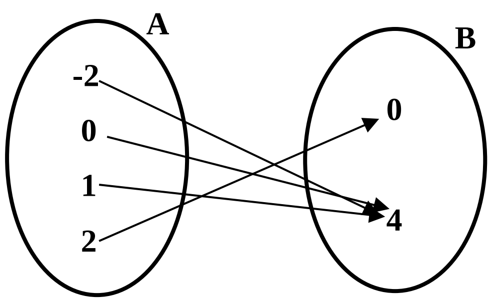
A) f, g e h C) g e h E) nenhuma delas

B) f e h D) apenas h

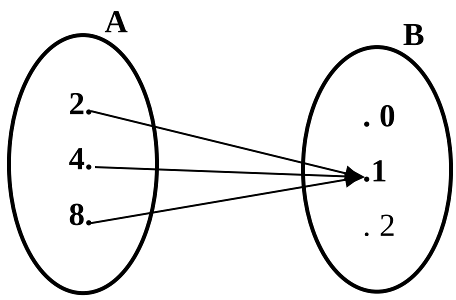
6. (PAIVA-2010 - Adaptada) Em uma biblioteca, todos os livros são catalogados pelo título, além de outros identificadores, e há títulos com mais de um exemplar. Considerando a função *f* que tem como domínio o conjunto de todos os exemplares da biblioteca e como contradomínio o conjunto dos títulos dos livros catalogados biblioteca, é correto afirmar que *f* é uma função injetora? Por quê?

7. Verifique em cada situação a seguir se a função de A em B, representada pelo esquema, define ou não uma função sobrejetora. Justifique a sua resposta.

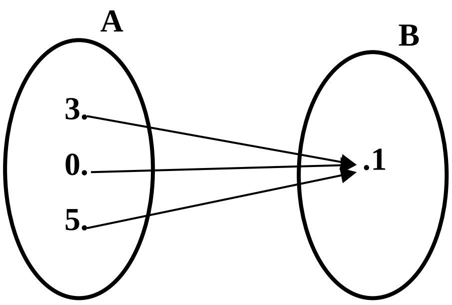
a)



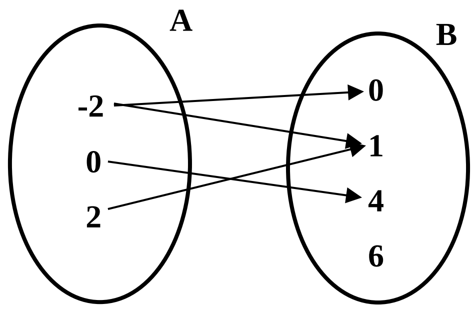
c)



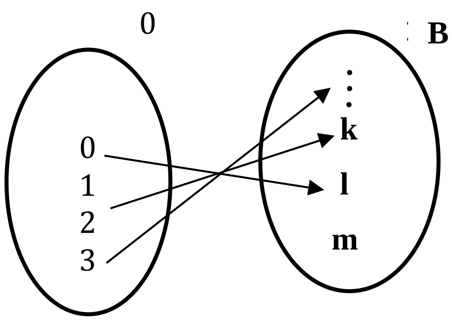
b)



d)



8. Explique o que é necessário fazer para que a função representada pelo esquema seguinte seja uma função sobrejetora.



9. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

A função definida $f: A \to B$, por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetora? Por quê?

10. Julgue cada proposição a seguir em VERDADEIRA ou FALSA, escrevendo a afirmação correta para cada proposição falsa:

a) Uma função é dita sobrejetora quando o seu contradomínio é igual à sua imagem.

b) Uma função não pode ser injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

c) Em uma função sobrejetora o domínio e o contradomínio são iguais.

11. A respeito da função sobrejetora podemos afirmar corretamente que

A) cada elemento do seu contradomínio está associado a um unico elemento do seu contradomínio.

B) toda função sobrejetora é também injetora.

C) uma função é sobrejetora quando o contradomínio e a imagem são iguais.

D) em toda função sobrejetora a quantidade de elementos do domínio e do contradomínio são sempre iguais.

E) em um diagrama de uma função sobrejetora, não pode haver duas flechas com extremidades no mesmo ponto do contradomínio.

12. (UFRN) Sejam B o conjunto formado por todos os brasileiros e R o conjunto dos números reais. Se $f: B \to R$ é a função que associa a cada brasileiro sua altura, medida em centímetros, então f :

A) é injetora e não é sobrejetora.

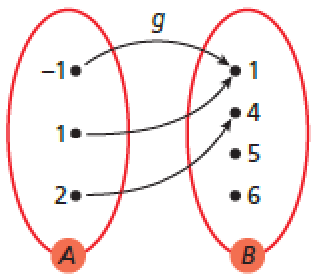
B) é injetora e é sobrejetora.

C) não é injetora e é sobrejetora.

D) não é injetora e não é sobrejetora.

13. (LEONARDO-2016) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é sempre sobrejetora? Justifique sua resposta.

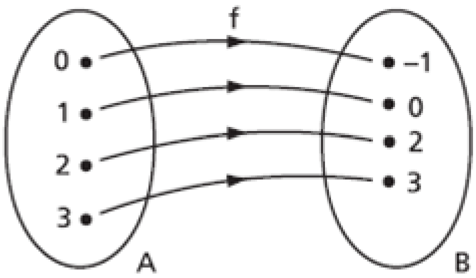
14. (LEONARDO-2016) A função $g: A \to B$ é sobrejetora? E injetora? Justifique sua resposta.



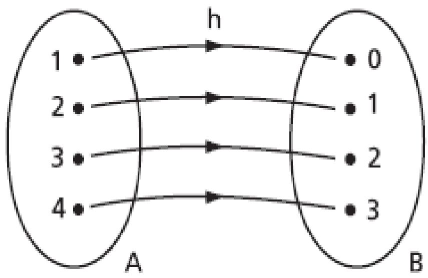
15. Dados os conjuntos $A = \{-1,0,1,2\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$ é correto afirmar que a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = x + 2$ é uma função sobrejetora? Por quê?

16. Verifique em cada caso a seguir, se a função de A em B é uma função bijetora, justificando sua resposta:

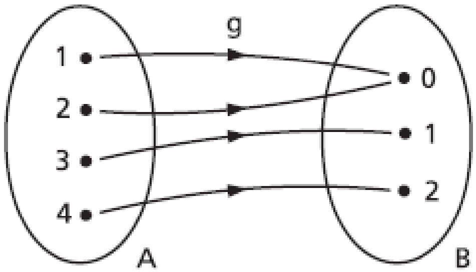
a)



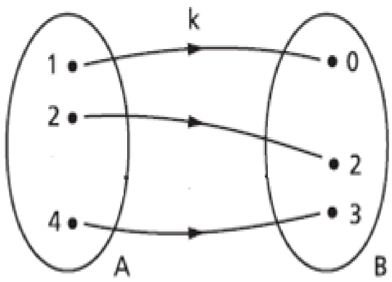
c)



b)



d)



17. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

a) A função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$ é bijetora? Por quê?

b) A função definida $f: A \to B$, por $f(x) = x^2 + 1$ é bijetora? Por quê?

18. Seja M o conjunto formado por todos os maranhenses e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Se $f: M \to \mathbb{N}$ é a função que associa a cada maranhense sua idade, em anos, então f:

A) é injetora, mas não é sobrejetora.
C) não é injetora, nem sobrejetora.
B) não é injetora e é sobrejetora.
D) é bijetora.

19. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A função $f: A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x + 1)(x - 3)$. Então:

A) f é somente sobrejetora;
C) f é bijetora;
B) f é somente injetora;
D) $Im(f) = \{-3, 0, 1, 3\}$.

20. Sejam os conjuntos A e B formados, respectivamente, por 5 estados brasileiros e 7 capitais de estados brasileiros, conforme a representação seguinte:

$$A = \{Ceará, Maranhão, Pará, São\ Paulo, Tocantins\}$$

$$B = \{Belém, Coritiba, Fortaleza, Goiânia, Palmas, São\ Luís, São\ Paulo\}$$

A função f que associa a cada estado brasileiro pertencente ao conjunto A uma capital brasileira pertencente ao conjunto B é uma função bijetora? Por quê?

21. Em uma função bijetora $f: A \to B$, a cada elemento de *A* corresponde um só elemento de *B* e vice -versa? Justifique sua resposta.

22. (PAIVA-2010) O Cadastro de Pessoas Físicas ou CPF é o cadastro da Receita Federal brasileira. Nem todas as pessoas são obrigadas a se inscrever no CPF; só têm essa obrigação aquelas com rendimento tributável proveniente de negócios no Brasil, brasileiras ou não, que vivem ou não no Brasil. Cada contribuinte cadastrado recebe um documento chamado de cartão de CPF, ou simplesmente CPF. Esse documento identifica o contribuinte com um número de onze algarismos. Esse número é único para cada contribuinte e não muda, mesmo quando o cartão é perdido. Consideremos o conjunto *A*, de todos os números de CPFs distribuídos aos cidadãos brasileiros que vivem no Brasil, e o conjunto *B*, de todos os cidadãos brasileiros que vivem no Brasil. Classifique como injetora, sobrejetora ou bijetora a função $f: A \to B$ que associa cada CPF a um cidadão brasileiro.

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade de aprofundamento, apresente as conclusões que eles registraram nas atividades 5, 6 e 7, ajudando-os a recordarem as regularidades identificadas pelos estudantes. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros mais formais que podem ser apresentados pelo professor.

As atividades 8, 9 e 10, a seguir, devem compor uma aula envolvendo a identificação do gráfico da Função Injetora, Função Sobrejetora e Função Bijetora., com processo de resolução semelhante ao utilizado nas atividade anteriores.

Atividade 08

ATIVIDADE 08

Título: Gráfico de uma Função Injetora

Objetivo: Identificar o gráfico de uma Função Injetora.

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Gráficos, régua, caneta ou lápis, borracha.

Procedimento:

Em cada gráfico do Quadro de Gráficos, trace linhas horizontais (paralelas ao eixo x) e a seguir:

- Identifique por **I** os gráficos que não são "cortados" (interceptados) pela mesma reta mais de uma vez;
- Identifique por **NI** os gráficos que são cortados (interceptados) mais de uma vez pela mesma reta.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir**:**

Gráfico	**O gráfico é "cortado" (interceptado) mais de uma vez por uma mesma reta?**	
	Sim	**Não**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

Conclusão

Orientações Didáticas

A atividade 08 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Gráficos. Inicialmente o professor organizar a turma mantendo os mesmos grupos formados por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 08, o Quadro de Gráficos e uma régua. O professor também pode solicitar, com antecedência, que os alunos tragam sua régua.

Em seguida o docente deverá direcionar os estudantes ao momento da execução da atividade, onde um dos integrantes da equipe, utilizando a régua e o lápis ou caneta, deverá traçar retas paralelas ao eixo "x", e juntamente com seu grupo, identificar por **I** os gráficos que são "cortados" (interceptados) pela mesma reta somente uma vez e, por **NI** quando a mesma reta cortar o gráfico nenhuma vez ou mais de uma vez.

Sugerimos ao professor que, nesta etapa, esteja atento para explicar, se necessário, o que é reta paralela, além de exclarecer outras dúvidas que possam surgir. A seguir, com basde nas informações obtidas, os alunos devem preencher o quadro assinalando "sim" ou "não" para a pergunta relacionada a cada gráfico do Quadro de Gráficos.

Após o preenchimento do quadro os estudantes notarão que cada uma das retas paralelas ao eixo "x" toca o gráfico de uma função injetora em um só ponto, devendo ser orientado a preencher o quadro de observação com essa informação. Se os alunos tiverem dificuldade em preencher o quadro de conclusão, recomendamos que o professor faça ponderações, pautadas em perguntas direcionadas à turma, no intuito de promover reflexão, discussão relacionando o conceito de uma Função Injetora e o comportamento do seu gráfico.

Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e conclusão e, após a explanação de todos, realizar a institucionalização do método prático para reconhecimento do gráfico de uma função injetora, podendo em em seguida direcioná-los para a resolução da atividade 09.

Atividade 09

ATIVIDADE 09

Título: Gráfico de uma Função Sobrejetora

Objetivo: Identificar o gráfico de uma Função Sobrejetora

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Gráficos, régua, caneta ou lápis, borracha

Procedimento:

Em cada gráfico do Quadro de Gráficos, trace linhas horizontais (paralelas ao eixo x) e a seguir:

- Identifique por **S** os gráficos que são "cortados" (interceptados) pela mesma reta mais de uma vez;
- Identifique por **NS** os gráficos que não são cortados (interceptados) mais de uma vez pela mesma reta.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir**:**

Gráfico	**O gráfico é "cortado" (interceptado) mais de uma vez por uma mesma reta?**	
	Sim	**Não**
1		
2		
3		
4		
5		
6		

7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

Conclusão

Orientações Didáticas

A atividade 09 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Gráficos. Inicialmente o professor recolhe a Atividade 08 e, em seguida, apresenta e distribui a Atividade 09, o Quadro de Gráficos e uma régua. O docente também pode solicitar, com antecedência, que os alunos tragam sua régua.

Em seguida o docente deverá direcionar os estudantes ao momento da execução da atividade, onde um dos integrantes da equipe, utilizando a régua e o lápis ou caneta, deverá traçar linhas horizontais, ou seja, retas paralelas ao eixo "x", e juntamente com seu grupo, Identificar por **S** os gráficos que são "cortados" (interceptados) pela mesma reta uma ou mais vezes, e por **NS** quando não são cortados (interceptados) por pelomenos uma dessas retas. A seguir, com basde nas informações obtidas, os alunos devem preencher o quadro assinalando "sim" ou "não" para a pergunta relacionada a cada gráfico do Quadro de Gráficos.

Sugerimos que neste momento, o professor oriente os estudantes a comparar o Quadro de Gráficos com o quadro da Atividade 09, desse modo eles notarão que em todos os gráficos de Função Sobrejetora cada uma das retas paralelas ao eixo "x" toca o gráfico em um ou mais pontos do seu domínio.

Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e conclusão e, após a explanação de todos, realizar a institucionalização do método prático para reconhecimento do gráfico de uma Função Sobrejetora, podendo em em seguida direcioná-los para a resolução da atividade 10.

Atividade 10

ATIVIDADE 10

Título: Gráfico de uma Função Bijetora

Objetivo: Identificar o gráfico de uma Função Bijetora

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Gráficos, régua, caneta ou lápis, borracha

Procedimento:

Em cada gráfico do Quadro de Gráficos, trace linhas horizontais (paralelas ao eixo x) e a seguir:

- Identifique por **B** os gráficos que são "cortados" (interceptados) uma única vez pela mesma reta;
- Identifique por **NB** os gráficos que não são cortados (interceptados) ou são cortados mais de uma vez pela mesma reta.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir**:**

Gráfico	**Cada reta "corta" (intercepta) o gráfico uma única vez?**	
	Sim	**Não**
1		
2		
3		
4		
5		
6		

7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

Conclusão

Orientações Didáticas

A atividade 10 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Gráficos. Inicialmente o professor recolhe a Atividade 09 e, em seguida, apresenta e distribui a Atividade 10, o Quadro de Gráficos e uma régua. O docente também pode solicitar, com antecedência, que os alunos tragam sua régua.

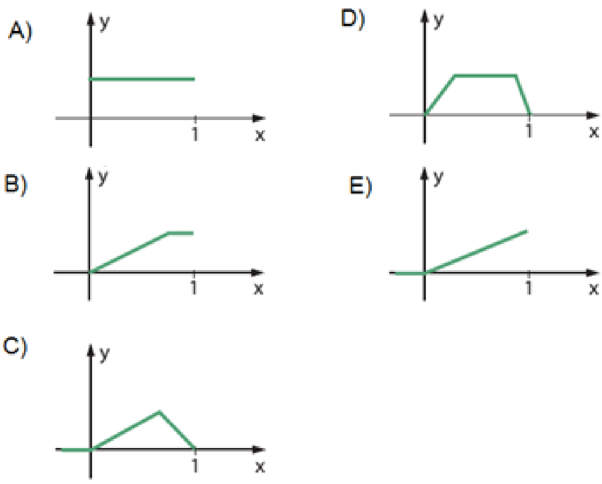
Em seguida o docente deverá direcionar os estudantes ao momento da execução da atividade, onde um dos integrantes da equipe, utilizando a régua e o lápis ou caneta, deverá traçar linhas horizontais, ou seja, retas paralelas ao eixo "x", e juntamente com seu grupo, identificar por **B** os gráficos que são "cortados" (interceptados) uma única vez pela mesma reta, e por **NB** quando isso não ocorrer. A seguir, com basde nas informações obtidas, os alunos devem preencher o quadro assinalando "sim" ou "não" para a pergunta relacionada a cada gráfico do Quadro de Gráficos.

Sugerimos que neste momento, o professor oriente os estudantes a comparar o Quadro de Gráficos com o quadro da Atividade 10, desse modo eles notarão que em todos os gráficos de Função Bijetora cada uma das retas paralelas ao eixo "x" toca o gráfico em um único ponto do seu domínio, alcançando o objetivo proposto para essa atividade que é identificar o gráfico de uma Função Bijetora.

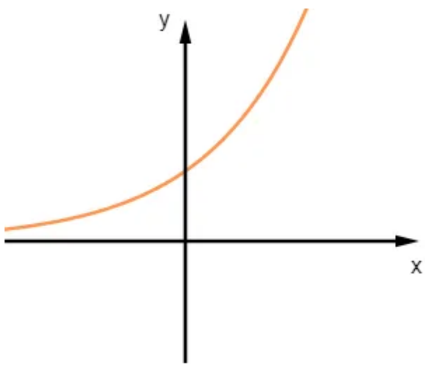
Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e conclusão e, após a explanação de todos, realizar a institucionalização do método prático para reconhecimento do gráfico de uma Função Bijetora, podendo em em seguida direcioná-los para a resolução da Atividade de Aprofundamento das Atividades 08, 09 e 10.

Atividade de Aprofundamento das Atividades 08, 09 e 10

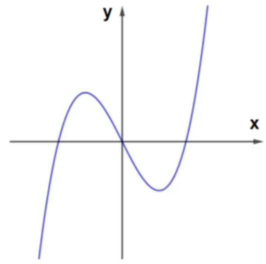
1. (UNIFESP) Há funções $y = f(x)$ que possuem a seguinte propriedade: “a valores distintos de x correspondem valores distintos de y". Tais funções são chamadas injetoras. Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem a seguir, é injetora?



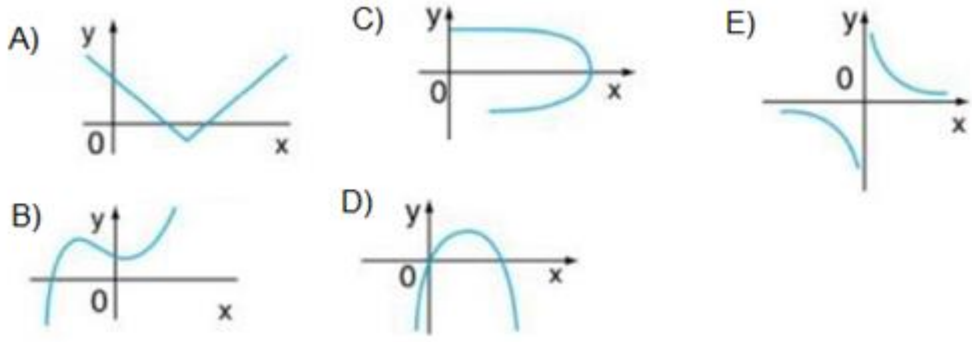
2. A seguir temos o gráfico que representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Essa função é injetora? Justifique a sua resposta.



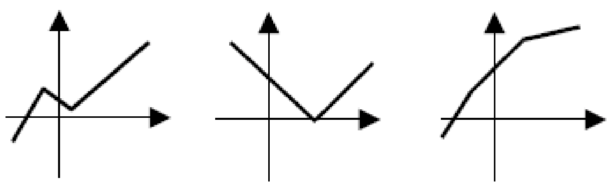
3. O gráfico ao lado represeta a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x$. Essa função é injetora, sobrejetora ou bijetora? Por quê?



4. (UFPE) Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora $y = f(x)$?



5. (EEAR-2018) Considere os gráficos.



Função I Função II Função III

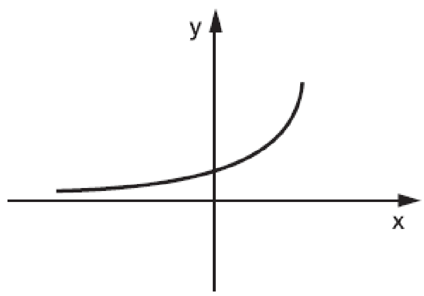
É(são) injetora(s) a(s) função(ões)

A) I e III, apenas C) I, apenas

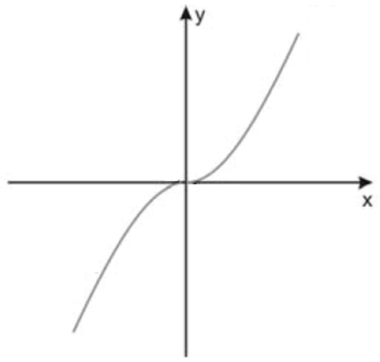
B) III, apenas D) I, II e III

6. Verifique se cada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir representa uma função bijetora. Justifique a sua resposta.

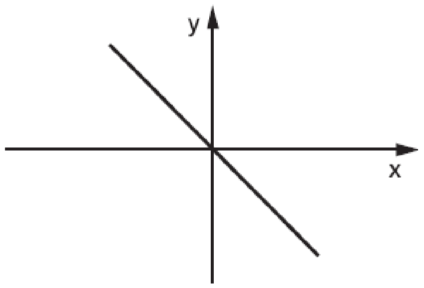
a)



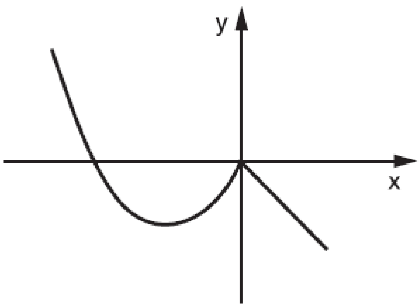
b)



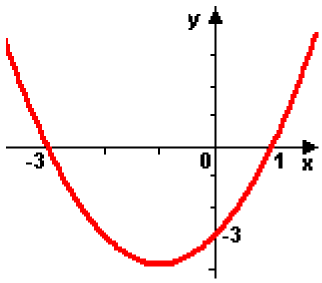
c)



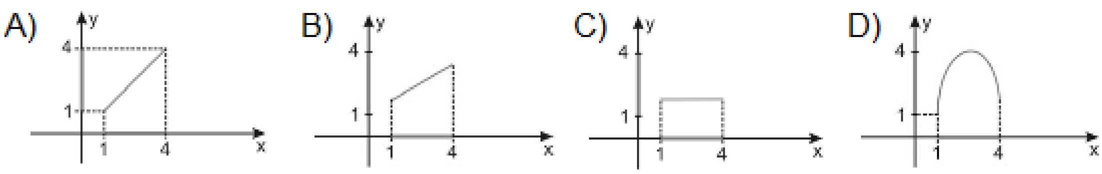
d)



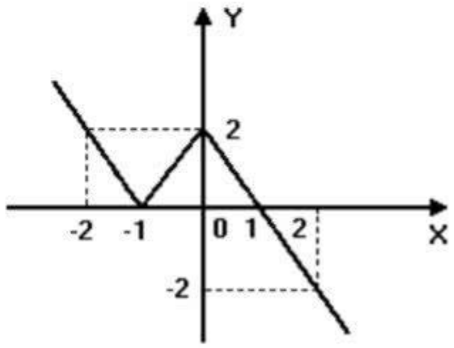
7. A curva abaixo é o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Essa função é bijetora? Por quê?



8. As funções a seguir, definidas pelos gráficos, têm domínio $A = [1, 4]$ e contradomínio $B = [1, 4]$. Qual deles representa uma função bijetora?

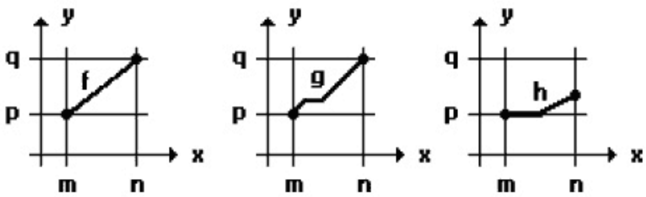


9. (PUCCAMP-SP) Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pelo gráfico a seguir. É correto afirmar que:



A) f é sobrejetora e não injetora.
B) f é bijetora.
C) $f(x) = f(-x)$ para todo x real.
D) $f(x) > 0$ para todo x real.
E) o conjunto imagem de f é $]-\infty;\ 2]$

10. (UFF) Considere as funções f, g e h, todas definidas em $[m, n]$ com imagens em $[p, q]$ representadas através dos gráficos a seguir.



A) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.
B) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
C) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.
D) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.
E) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade de aprofundamento, apresente as conclusões que eles registraram nas atividades 8, 9 e 10, ajudando-os a recordarem as regularidades identificadas pelos estudantes. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros métodos mais formais, que podem ser apresentados pelo professor, que facilitam a identificação do gráfico de uma Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora. Em seguida o docente deve direcionar os estudantes à resolução da Atividade 11.

Atividade 11

ATIVIDADE 11

Título: Cardinalidade do Domínio e do Contradomínio de uma Função Bijetora

Objetivo: Descobrir a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma função bijetora.

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 2, caneta ou lápis.

Procedimento:

- Observe cada um dos diagramas do Quadro de Funções 2;
- Identifique aquelas que são bijetoras.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Função	A função é bijetora?		A quantidade de elementos (cardinalidade) do domínio e do contradomínio é igual?	
	Sim	Não	Sim	Não
K				
L				
M				
N				
P				
Q				
R				
S				
T				
V				
W				
Z				

Observação:

Conclusão:

Orientações Didáticas

A atividade 11 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Funções 2. Inicialmente o professor recolhe a Atividade 10 e, em seguida, apresenta e distribui a Atividade 11, o Quadro de Funções 2.

Em seguida o docente deverá direcionar os estudantes ao momento da execução da atividade, onde cada equipe deverá obsevar os diagramas de setas do Quadro de Funções 2 e identificar aqueles que representam uma função bijetora e, em seguida, com base nas informações obtidas, devem preencher o quadro da Atividade 11, marcando sim ou não para cada pergunta.

Sugerimos que neste momento, o professor explique aos estudantes que cardinalidade é o mesmo que quantidade de elementos e, em seguida estimule os estudantes a comparar a quantidade de elementos do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora, e após a discussão em grupo, registrar no quadro de observação as características observadas, notando que em toda Função Bijetora o domínio e o contradomínio possuem a mesma cardinalidade, ou seja, a mesma quantidade de elementos.

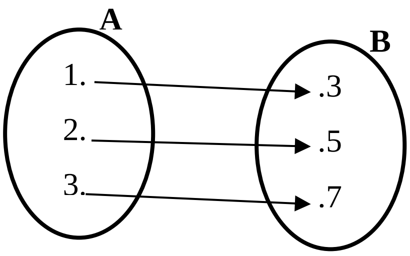
Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e conclusão e, após a explanação de todos, realizar a institucionalização de que em toda função bijetora o domínio e o contradomínio possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos, podendo em em seguida direcioná-los para a resolução da Atividade de Aprofundamento da Atividade 11.

Atividade de Aprofundamento da Atividade 11

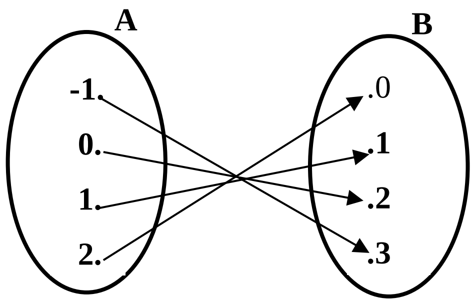
1. A quantidade de elementos que um conjunto A possui é deonominada cardinalidade do conjunto A, sendo sibolizada por $\#A$.

Compare a cardinalidade do domínio $(\#A)$ e do contradomínio $(\#B)$ de cada uma das seguintes funções:

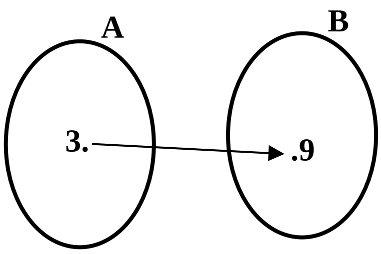
a)



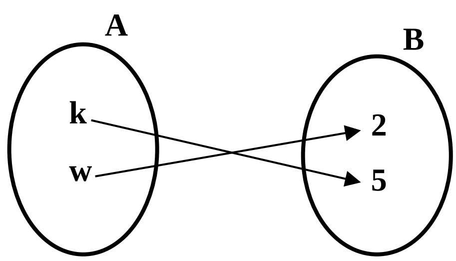
c)



b)

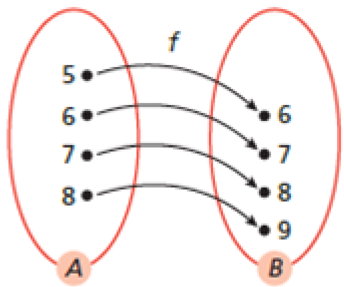


d)



2. Na questão anterior todas as funções são bijetoras. Qual é a relação existente entre a bijeção de dois conjuntos e a cardinalidade desses conjuntos?

3. O diagrama ao lado representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$, ou seja, que associa a cada elemento do conjunto A o seu sucessor no conjunto B.



a) compare a cardinalidade (a quantidade de elementos) dos conjuntos A e B.

b) essa função é bijetora? Por quê?

c) o que podemos afirmar em relação à cardinalidade de dois conjuntos quando entre eles há uma bijeção?

d) se esses conjuntos fossem infinitos qual seria a imagem do elemento 100? E do elemento n?

e) Se é possivel estabelecer uma bijeção entre dois conjuntos infinitos é correto afirmar que eles possuem a mesma quantidade de elementos? Justifique a sua resposta.

4. É possível estabelecer uma relação que leva cada um dos elementos do conjunto $\mathbb{Z}$ a um único elemento de $\mathbb{N}$? Cite outros conjuntos em que essa relação com o conjunto $\mathbb{N}$ pode ser estabelecida.

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade de aprofundamento, apresente as conclusões que eles registraram nas atividades 11, ajudando-os a recordarem as regularidades identificadas. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções.

As atividades 12, 13 e 14, a seguir, devem compor uma aula envolvendo a comparação da quantidade de elementos de conjuntos infinitos, por meio da Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

Atividade 12

ATIVIDADE 12

Problema 1: Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares?

Orientações Didáticas

A atividade 12 é composta pelo Problema 1 e 8 questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos do conjuntos dos números naturais e do conjunto dos números naturais pares.

O objetivo dessa atividade é desenvolver a habilidade de aplicar conceito de Função Bijetora para comparar a cardinalidade ou quantidade de elementos de conjuntos infinitos, percebendo que se existe uma Função Bijetora que relaciona os elementos de dois conjuntos, esses possuem a mesma cardinalidade (quantidade de lementos). Para obter êxito, o professor deverá seguir rigorosamente os momentos da Resolução de Problema como Ponto de Partida:

Momento da apresentação

Inicialmente o professor organiza a turma mantendo as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01, entregando para cada uma delas uma folha de papel sulfite com o Problema 1, colocando-a com o verso para cima, de modo que os alunos não possam ler o problema até que todos eles o recebam e sejam autorizados pelo professor a desvirar a folha e efetuar a leitura do problema a seguir:

Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares?

Momento de resolução

Após a leitura do problema, que pode ser realizada pelo professor ou por toda a turma, será estipulado um tempo de 20 minutos para os grupos realizarem a resolução do problema.

Embora existam algumas maneiras distintas de obter a resolução do problema acima, os alunos podem ser conduzidos ao erro se utilizarem o senso comum de que o todo é sempre maior do que a parte, afirmando que, como o conjunto dos números naturais pares é uma parte dos números naturais (que também é composto pelos números naturais ímpares), o conjunto dos números naturais possui mais elementos, o que vai gerar uma boa discussão, favorecendo a introdução e o desenvolvimento da aplicação da bijeção de função na comparação de conjuntos infinitos.

Momento da análise

Ao término dos 20 minutos, o docente inicia o momento da análise, mediante a verificação de que há uma correspondência "um a um" entre os elementos dos dois conjuntos, e dessa forma, mesmo sendo P um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$, temos uma correspondência biunívoca, ou seja, uma função bijetora, pois a função $f\colon \mathbb{N} \to P$, definida por $f(n) = 2n$ faz corresponder cada elemento de $\mathbb{N}$ a um elemento distinto de P, então o número de lementos do cojunto $\mathbb{N}$ é iagual ao número de elementos do conjunto P. Portanto os dois conjuntos, mesmo sendo infinitos, possuem a mesma quantidade de elementos.

Solução 1: Utilizando a representação dos dois conjuntos por enumeração e verificar que há uma bijeção entre eles.

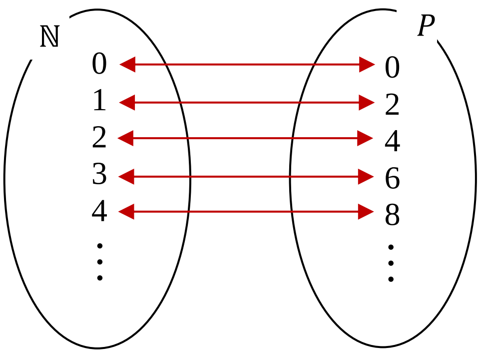
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Ao representar o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números naturais pares, colocando esse último abaixo do primeiro, o professor utilizará a seta indicada na figura, mostrando que cada elemento do conjunto dos números naturais possui um único elemento correspondente no conjunto dos números naturais pares, em seguida ele perguntará aos alunos: e o elemento $\boldsymbol{n}$ do conjunto dos naturais, qual é o seu elmento correspondente no conjunto dos números naturais pares? Esse questionamento fará com que os alunos percebam que cada elemento do primeiro conjunto possui correspondência com o seu dobro, chegando fácil à resposta: $\boldsymbol{2n}$.

A seguir o professor apresentará uma segunda solução para o problema utilizando o digrama de Venn, da seguinte forma:

Solução 2: Utilizando o Diagrama de Venn fazendo cada elemento do conjunto dos naturais corresponder a um elemento do conjunto dos números naturais pares.



Ao Representar os dois conjuntos por meio do Diagrama de Venn e demosntrar que cada lementos do conjunto dos naturais possui um elemento correspondente no conjunto dos naturais pares, e dessa forma concluir que os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, embora o senso comum "afirme" o contrário.

Essa conclusão mostra que para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos (mesma cardinalidade), basta verifica se existe uma bijeção entre eles. Em seguinda o educado inicia o momento da sitematização.

Momento da Sistematização

Neste momento o professor apresentará a definição que utiliza a bijeção para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de lementos, que é invariante na resolução do problema proposto.

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma quatidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f: A \to B$. Caso contrário eles não possuem a mesma quantidade de elementos.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Após a apresentação da definição o professor apresentará a interpretação do problema inicial demostrando que a utilização da definição acima facilita a resolução do problema proposto, sendo eficaz para verificar se dois conjuntos possuem ou não a mesma quantidade de elementos, ou seja, se eles são equipotentes. Após estabelecer que dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos quando existe uma bijeção entre eles, o professor dar continuidade ao estudo do assunto, entregando uma lista de exercícios com questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos.

Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 12

1. Quem possui mais elementos o conjunto dos dias da semana ou o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

2. Entre os conjuntos dos números naturais e os números naturais múltiplos de 5 quem tem mais elementos? Justifique a sua resposta

3. Onde há mais números no conjunto dos números naturais ou no conjunto dos números quadrados perfeitos?
4. Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais ímpares?

5. Entre os conjuntos dos números naturais e os números múltiplos de três quem tem mais elementos?

6. Quem possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros estritamente positivos?
7. Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros estritamente negativos?

8. Quem possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros não negativos?

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade com questões de sistematização do assunto, relembre a definição apresentada no momento da sistematização. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros mais formais que podem ser apresentados por eles ou pelo professor. Em seguida, os alunos devem ser direcionados à resolução da atividade 13, que apresnta um processo de resolução semelhante ao utilizado nas atividade anterior, como veremos a seguir:

Atividade 13

ATIVIDADE 13

Problema 2: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros?

Orientações Didáticas

A atividade 13 é composta pelo Problema 2, e 5 questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos do conjuntos dos números naturais e do conjunto dos números inteiros.

O objetivo dessa atividade é desenvolver a habilidade de aplicar conceito de Função Bijetora para comparar a cardinalidade ou quantidade de elementos de conjuntos infinitos. Para obter êxito, o professor deverá seguir rigorosamente os momentos da Resolução de Problema como Ponto de Partida:

Momento da apresentação

Após recolher a atividade com questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos, o deverá entregar uma cópia do problema para cada grupo colocando-a com o verso para cima, de modo que os alunos não possam ler o problema até que todos eles o recebam e sejam autorizados pelo professor a desvirar a folha e efetuar a leitura do problema a seguir:

Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros?

Momento de resolução

Ao concluir a leitura do problema, o professor informará que os alunos terão 20 minutos para apresentar a solução do problema.

A experiência adquirida por meio da resolução do problema 1 e das questões envolvendo a sistematização do assunto, pode fazer com que alguns grupos apresentem a solução correta para o problema 2, uma vez que eles aprosentam um processo de resolução semelhante.

Sugerimos ao professor que peça às duplas para não socializarem a solução do problema com os outros estudantes até o momento oportuno que será indicado por ele.

Momento da análise

Ao término dos 20 minutos, o professor pedirá que um representante de cada grupo vá até o quadro e apresente a sua solução para o problema 2, analisando e discutindo com a turma cada etapa da resolução do problema, verificando assim se a solução apresentada pela grupo está correta.

Após a apresentação da primeira dupla, caso outras tenham obtido uma solução diferente para o problema, o professor pedirá que algumas delas apresentem a sua solução. Não havendo, o docente apresentará uma solução diferente para o problema, embora tenha a mesma resposta.

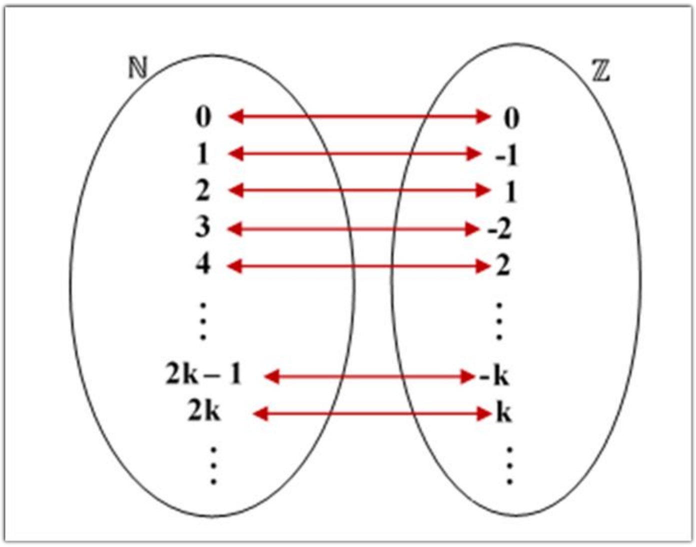
Solução 1: Utilizando a representação dos dois conjuntos por enumeração e verificar que há uma bijeção entre eles.

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\mathbb{N} = \cdots & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2k-1 & 2k & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{Z} = \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & -k & k & \ldots
\end{array}
$$

inteiros, o professor demonstrará que existe uma relação que associa a cada número natural par um número inteiro que corresponde à sua metade, e cada número natural ímpar está associado a um número inteiro igual ao oposto ou simétrico do número inteiro correpondente ao seu sucessor, demonstrando assim que há uma bijeção entre os dois conjuntos e por isso os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos.

Se julgar necessário, o professor pode apresentar uma segunda solução para o problema utilizando o digrama de Venn, da seguinte forma:

Solução 2: Utilizando o Diagrama de Venn fazendo cada elemento do conjunto dos naturais corresponder a um elemento do conjunto dos números inteiros.



Ao Representar os dois conjuntos por meio do Diagrama de Venn e demosntrar que existe uma Função Bijetora que associa, um a um, os elementos dos dois conjuntos, o professor demonstrará que os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, embora o senso comum "afirme" o contrário, pois a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & se\ n\ é\ par \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right), & se\ n\ é\ ímpar \end{cases}$ faz corresponder cada elemento de $\mathbb{N}$ a um elemento distinto de $\mathbb{Z}$, então o número de lementos do cojunto $\mathbb{N}$ é iagual ao número de elementos do conjunto $\mathbb{Z}$. Portanto, os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos. Em seguinda o educado inicia o momento da sitematização.

Momento da Sistematização

Neste momento o professor apresentará a aplicação da definição de Função Bijetora para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de lementos, que é invariante na resolução do problema proposto.

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma quatidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f: A \to B$. Caso contrário eles não possuem a mesma quantidade de elementos.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Após estabelecer que dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos quando existe uma bijeção entre eles, o professor dar continuidade ao estudo do assunto, entregando uma lista de exercícios com questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos.

Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 13

1. Quem possui mais elementos o conjunto dos números naturais ímpares ou o conjunto dos números inteiros?
2. Onde há mais pontos no conjunto dos pontos de um segmento de 1m ou no conjunto dos pontos de um segmento de 10m?

3. Onde há mais pontos no conjunto dos pontos de uma circunferência de raio 2 cm ou no conjunto dos pontos de uma circunferência de raio 10 cm?

4. Qual conjunto possui a maior quantidade de elementos: o conjunto dos números inteiros não negativos ou o conjunto dos números inteiros?

5. Que conjunto possui a maior quantidade de elementos: o conjunto dos números inteiros negativos ou o conjunto dos números inteiros?

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade com questões de sistematização do assunto, relembre a definição apresentada no momento da sistematização. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros mais formais que podem ser apresentados por eles ou pelo professor. Em seguida, os alunos devem ser direcionados à resolução da atividade 14, que apresnta um processo de resolução semelhante ao utilizado nas atividade anterior, como veremos a seguir:

Atividade 14

ATIVIDADE 14

Problema 3: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais?

Orientações Didáticas

A atividade 14 é composta pelo Problema 2, e 6 questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos do conjuntos dos números naturais e do conjunto dos números racionais.

O objetivo dessa atividade é desenvolver a habilidade de aplicar conceito de Função Bijetora para comparar a cardinalidade ou quantidade de elementos de conjuntos infinitos. Para obter êxito, o professor deverá seguir rigorosamente os momentos da Resolução de Problema como Ponto de Partida:

Momento da apresentação

Após recolher a atividade com questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos, o professor deverá entregar uma cópia do problema 3 para cada grupo, colocando-a com o verso para cima, de modo que os alunos não possam ler o problema até que todos eles o recebam e sejam autorizados pelo professor a desvirar a folha e efetuar a leitura do problema a seguir:

Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais?

Momento de resolução

Ao concluir a leitura do problema, o professor informará que os alunos terão 25 minutos para resolver o problema, solicitando aos grupos que não socializem a solução do problema com os outros estudantes até o momento que será indicado por ele.

Momento da análise

Ao término dos 25 minutos, o professor pedirá que um representante de cada grupo vá até o quadro e apresente a sua solução para o problema 3, analisando e discutindo com a turma cada etapa da resolução do problema, verificando assim se a solução apresentada pela grupo está correta.

Após a apresentação da primeira dupla, caso outras tenham obtido uma solução diferente para o problema, o professor pedirá que algumas delas apresentem a sua solução. Não havendo, o docente apresentará uma solução diferente para o problema, embora tenha a mesma resposta.

Solução 1: Demonstrando que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Demonstração:

Seja a seguinte partição do conjunto dos números racionais:

$$Q = Q_-^* \cup \{0\} \cup Q_+^* \,.$$

Como a função $f: Q_+^* \to Q_-^*$, dada por $f\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si é bijetora, então fica provado que Q_+^* e Q_-^* são equipotentes.

Seja a função $f: Q_+^* \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$, com p e q primos entre si

Se $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n}$, então $(p, q) = (m, n)$. Logo $p = m$ e $q = n$.

Portanto, f é injetora.

Como a imagem de toda função injetora é equipotente a seu domínio. Então, $f: (Q_+^*)$ é equipotente a Q_+^* e está contido em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é equipotente. E já que Q_+^* é infinito, pois $\mathbb{N} \subset Q_+^*$. Então temos que $f: (Q_+^*)$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é enumerável.

Logo, Q_+^* é enumerável.

$Q_-^* \cup Q_+^*$ é enumerável, pois Q_-^* é equipotente a Q_+^*.

Portanto, $Q = Q_-^* \cup \{0\} \cup Q_+^*$ é enumerável.

Como o conjunto Q dos racionais é enumerável e todo conjunto enumerável possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, o professor prova que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros possuem a mesma quantidade de elementos.

A seguir o professor apresentará uma segunda solução para o problema utilizando "O passeio de Cantor":

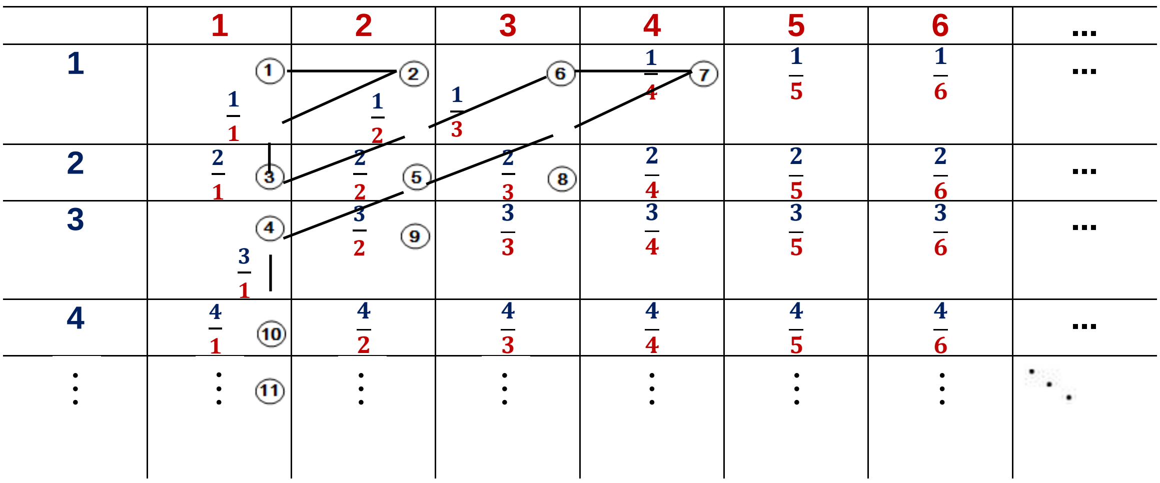
Solução 2: Utilizando a demonstração clássica conhecida como "O passeio de Cantor"

George Cator provou, por meio de uma demonstração clássica, que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Nessa demonstração ele conseguiu listar, de forma ordenada, todas as frações positivas (incluindo as frações equivalentes como $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$), por meio de uma tabela onde na i-ésima linha ele escreveu as frações com numerador i e na j-ésima coluna as frações com denominador j, ou seja, na 1ª linha da tabela estão todas as frações positivas cujo numerador é 1 e 3ª coluna estão todas as frações positivas com denominador 3, de acordo com a figura a seguir:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Em seguida ele enumerou todos os quadradinhos dessa tabela inifinita com os números naturais "passeando" num zigue-zague, conforme a figura seguinte:



Desse modo ele observou que temos uma correspondência bijetora entre o conjunto dos números naturais e o cojunto dos quadradinhos, da tabela, que contém os números racionais positivos. Assim, ele concluiu que o conjunto dos números racionais positivos possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, ou seja, o conjunto dos números racionais positivos é enumerável.

O conjunto dos números naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais e mesmo assim os dois possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos. Concluindo que nesse caso a parte não é menor que o todo, mas se o conjunto é finito a parte é sempre menor que o todo.

A tabela infinita que Cantor construiu estabelce uma função sobrejetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$ tal que: $f(1) = \frac{1}{1}$, $f(2) = \frac{2}{1}$, $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{1}{3}$, ...
Como $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável e $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$ é sobrejetiva, segue que o conjunto $\mathbb{Q}_+$ também é enumerável.

De modo semelhante podemos provar que o conjunto $\mathbb{Q}_-$ dos números racionais negativos é enumerável.

Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ e a união entre conjuntos enumeráveis é enumerável, podemos concluir que o conjunto dos números racionais é enumerável, isto é, ele possui a mesma quantidade de elementos do conjunto dos números naturais

Momento da Sistematização

Nesse momento o professor reforçará a importância da utilização do conceito de bijeção para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de lementos, que é invariante na resolução do problema proposto.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado

Após estabelecer que dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos quando existe uma bijeção entre eles, o professor dar continuidade ao estudo do assunto, entregando uma lista de exercícios com questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos.

Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 14

1. Qual intervalo possui maior quantidade de elementos: $[0, 1]$ ou $]0, 1]$?

2. Dizemos que dois intervalos são equipotentes quando eles possuem a mesma quantidade de elementos. O intervalo $[0,1]$ é equipotente ao intervalo $]0,1[$?

3. Qual conjunto possui mais elementos: o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números reais que estão entre 0 e 1?

4. Qual conjunto possui a maior quantidade de elementos: o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ou o conjunto dos números raiconais $\mathbb{Q}$?

5. O axioma grego que afirma que "o todo é sempre maior que as partes" está correto? Por quê?

6. Em matemática dizemos que dois conjuntos são equipotentes quando possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma a quantidade de elementos. Nestas condições é correto afirmar que os conjuntos dos números naturais é equipotente ao conjunto dos números inteiros e ao dos racionais? Justifique a sua resposta

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade com questões de sistematização do assunto, relembre a definição apresentada no momento da sistematização. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros mais formais que podem ser apresentados por eles ou pelo professor.

As atividades 15, 16 e 17, a seguir, devem compor uma aula envolvendo a comparação da quantidade de elementos de conjuntos infinitos. Nas Atvidades 15 e 16 será utilizado o Ensino por Atividades Experimentais, e na Atividade 17, a Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

Atividade 15

ATIVIDADE 15

Título: A cardinalidade dos intervalos reais

Objetivo: Descobrir uma relação entre a cardinalidade dos intervalos de números reais

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Intervalos Reais, caneta ou lápis

Procedimento:

- Observe o Quadro de Intervalos Reais, indicando por **B** as relações, entre os intervalos reais, que reprentam uma função bijetora e por **NB** aquelas que não representam;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Conjuntos	A relação de A em B é uma função bijetora?	
	Sim	Não
$\boldsymbol{A} = [0,1]$ e $\boldsymbol{B} =]0,1[$		
$\boldsymbol{A} = [0,1]$ e $\boldsymbol{B} = [0,1[$		
$\boldsymbol{A} = [0,1]$ e $\boldsymbol{B} =]0,1]$		
$\boldsymbol{A} = [0,1]$ e $\boldsymbol{B} = [0,1]$		
$\boldsymbol{A} =]0,1[$ e $\boldsymbol{B} = [0,1[$		
$\boldsymbol{A} = [0,1]$ e $\boldsymbol{B} = [-1,1]$		

Observação:

Conclusão

Orientações Didáticas

A atividade 15 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no Quadro de Intervalos Reais. Inicialmente o professor organizar a turma mantendo os mesmos grupos formados por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 15 e o Quadro de Intervalos Reais.

Em seguida o docente deverá direcionar os estudantes ao momento da execução da atividade, onde cada equipe deverá analisar o Quadro de Relações de Intervalos reais, escrevendo **B** para aquelas onde existe uma função bijetora que relaciona os elementos do primeiro intervalo com os do segundo intervalo e, em seguida, devem preencher o quadro da Atvidade 15, com base nas informações obtidas, assinalando “sim” ou “não” para a pergunta referente a cada relação de intervalos.

Após o preenchimento do quadro os estudantes notarão que em todos os casos analisados existe uma bijeção entre os intervalos reais, eles devem ser orientados a registrar essa informação no quadro de observação. Se os alunos tiverem dificuldade em preencher o quadro de conclusão, recomendamos que o professor faça ponderações, que ajude a recordarem que quando existe uma bijeção entre dois conjuntos eles possuem a mesma quantidade de elementos, pois desse forma os grupos concluirão que todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos, alcançando assim o objetivo proposto para essa atividade.

Em seguida o docente deve pedir que um representante de cada equipe solcialize sua observação e conclusão e, após a explanação de todos, realizar a formalização da conclusão de que todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos, represntando-a também por meio de desenho e simbologia. A seguir, o professor direcionará os estudantes à resolução da Atividade 16.

Atividade 16

ATIVIDADE 16

Título: Comparando a cardinalidade de um intervalo de números reais e a cardinalidade do conjunto dos números reais

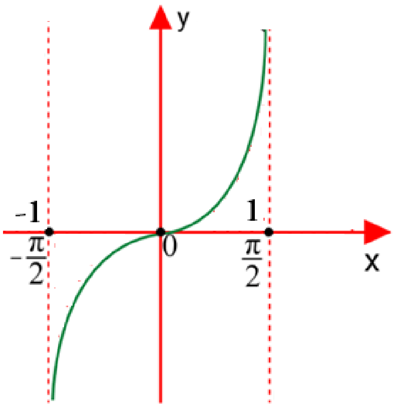
Objetivo: Descobrir a relação entre a cardinalidade de um intervalo de números reais e a cardinalidade do conjunto dos números reais

Material: Roteiro da atividade, régua, caneta ou lápis, borracha

Procedimento:

O gráfico a seguir representa a função $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$.

- Utilizando a régua e o lápis, trace retas paralelas ao eixo x e que passem pelos pontos do contradomínio.



Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir**:**

	Sim	**Não**
Cada uma das retas traçadas cortam um elemento diferente do contradomínio?		
O conjunto imagem é igual ao contradomínio da função?		
A função $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ é bijetora?		

Observação:

Conclusão

Orientações Didáticas

A atividade 16 é composta por um quadro, cujos espaços em branco devem ser preenchidos pelos estudantes, com base nas informações obtidas no gráfico que se encontra na própria atividade. Inicialmente o professor recolherá a Atividade 15 e, em seguida, apresenta e distribui a Atividade 16 e uma régua.

Em seguida o docente deverá direcionar os estudantes ao momento da execução da atividade, onde cada equipe deverá escolher um representante para traçar várias retas paralelas ao eixo "x" e, em seguida, preencher o quadro da Atividade 16, marcando sim ou não para cada pergunta.

Após o preenchimento do quadro os estudantes notarão que existe uma função bijetora entre os intervalos reais e o conjunto dos números reais. Recomendamos que nesse momento o professor esteja atendo para orientar os alunos a registrarem essa informação no quadro de observação e, caso eles tiverem dificuldade em preencher o quadro de conclusão, ajuda-los a recordarem, por meio de perguntas reflexivas direcionadas à turma, a relação entre o domínio e o contradomínio de uma Função Bijetora. Dessa forma, os discentes alacançarão o objetivo proposto para essa atividade que é compreendar que existe uma função bijetora que relaciona o intervalo de números reais e o conjunto dos números reais, concluindo que eles possuem a mesma cardinalidade.

Em seguida o docente deve solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e conclusão, e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a formalização da conclusão de que todo e qualquer intervalo real possui a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos do conjunto dos números reais, representando esse fato por meio desenho e simbologia. A seguir, o professor direcionará os estudantes à resolução da Atividade 17.

Atividade 17

ATIVIDADE 17

Problema 4: Existe infinito maior que o outro?

Orientações Didáticas

A atividade 17 é composta pelo Problema 4, que tem por objetivo verificar que existe um infinito maior que o outro. Para obter êxito, o professor deverá seguir rigorosamente os momentos da Resolução de Problema como Ponto de Partida:

Momento da apresentação

Após recolher a atividade 16, o professor deverá entregar uma cópia do problema para cada grupo, colocando-a com o verso para cima, de modo que os alunos não possam ler o problema até que todos eles o recebam e sejam autorizados pelo professor a desvirar a folha e efetuar a leitura do problema a seguir:

Existe infinito maior que o outro?

Momento de resolução

Ao concluir a leitura do problema, o professor informará que os cada grupo terá 25 minutos para realizar a resolução do problema. Sugerimos ao professor que peça aos grupos para não socializarem a solução do problema com os outros estudantes até o momento oportuno que será indicado por ele.

Acreditamos que por se tratar de um problema com elevado grau de dificuldade, os alunos não conseguirão apresentar a solução correta para esse problema, no entanto a discussão de ideias e a apresentação das estratégias utilizadas por cada dupla, bem como a construção de cada etapa da solução do problema propiciará um ambiente favorável à construção de novos conhecimentos, sobretudo a compreensão de que existe infinito maior que o outro.

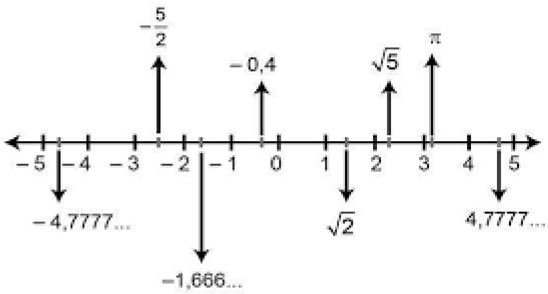
Momento da análise

Ao término dos 25 minutos, o professor pedirá que um representante de cada grupo vá até o quadro e apresente a sua solução para o problema 4, analisando e discutindo com a turma cada etapa da resolução do problema, verificando assim se a solução apresentada pela grupo está correta.

Após a apresentação da primeira dupla, caso outras tenham obtido uma solução diferente para o problema, o professor pedirá que algumas delas apresentem a sua solução. Não havendo, o docente apresentará uma solução diferente para o problema, embora tenha a mesma resposta.

Solução:

Para resolver esse problema utilizaremos o método de redução ao absurdo. Quando tentamos representar todos os números reais em uma reta numérica, percebemos que é impossível listar todos eles:



Por que é impossível representar todos os números reais em uma reta numérica? Existe uma bijeção $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ ou o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais é não enumerável?

Para facilitar a nossa compreensão, suponhamos que é possível listar todos os números reais (na forma decimal) compreendidos entre 0 e 1 e que além disso sejam formados somente pelos algarismos 0 e 1, destacando na nossa lista o 1º algarismo após a vírgula, do 1º número; o 2º algarismo após a vírgula, do 2º número e assim sucessivamente, conforme destacamos a seguir:

$$1^{\underline{o}} \to 0,\mathbf{1}1111111\ldots$$

$$2^{\underline{o}} \to 0,0\mathbf{1}010101\ldots$$

$$3^{\underline{o}} \to 0,10\mathbf{0}11001\ldots$$

$$4^{\underline{o}} \to 0,110\mathbf{1}1011\ldots$$

$$5^{\underline{o}} \to 0,0010\mathbf{0}100\ldots$$

$$6^{\underline{o}} \to 0,11011\mathbf{1}01\ldots$$

$$7^{\underline{o}} \to 0,000100\mathbf{0}1\ldots$$

$$8^{\underline{o}} \to 0,1110111\mathbf{0}\ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

A partir desses algarismos obtemos o número $\mathbf{0,11010100}\ldots$

Trocando a posição dos algarismos $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ que se encontram após a vírgula, surge um novo número: $\mathbf{0,00101011}\ldots$ que é um número real compreendido entre 0 e 1 e formado somente pelos algarismos 0 e 1, mas que com certeza não aparece na nossa lista anterior, uma vez que seu primeiro dígito é diferente do algarismo da primeira posição da diagonal, tendo também sua segunda casa decimal diferente do algarimso que ocupa a segunda posição da diagonal e assim por diante.

Assim, o número $\mathbf{0,00101011}\ldots$ não pode ser nenhum número da nossa lista, mas nossa lista tinha todos os números reais que atendiam as condições estabelecidas, o que é um absurdo!

Isso ocorreu porque supomos que o conjunto dos números reais é enumerável, o que leva ao absurdo do número está e, ao mesmo tempo, não está numa lista.

Logo o conjunto dos números reais não pode ser enumerado, isto é, o conjunto dos números reais, que é infinito, possui mais elementos que o conjunto dos números naturais, que também é infinito, portanto, está provado que existe infinito maior que o outro.

Momento da Sistematização

Neste momento o professor apresentará a resolução do problema, provando que o conjunto dos números reais possui mais elementos que o conjunto dos números naturais, apresentando aos estudantes uma nova de técnica de comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos, além de ampliar a visão deles acerca do infinito.

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma quatidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f: A \to B$. Caso contrário eles não possuem a mesma quantidade de elementos.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado

Após estabelecer existem infinito maio que outro, o professor dar continuidade ao estudo do assunto, entregando uma lista de exercícios com questões envolvendo a sistematização da comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos.

Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 17

1. Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números reais ou o intervalo real $[0, 1]$?

2. Considere o conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ dos números irracionais e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Existem mais números racionais ou irracionais?

3. Dados o conjunto dos números reais entre 0 e 1, ou seja, $]0, 1[$ e o conjunto dos números reais entre 0 e 100, isto é, $]0, 100[$. Qual deles possui mais elementos?

4. Dados o conjunto dos números reais entre 0 e 1, ou seja, $]0, 1[$ e o conjunto dos números reais maiores que 0, isto é, $]0, \infty[$. Qual deles possui mais elementos?

Orientações Didáticas

Sugerimos ao professor que, caso perceba que os alunos apresentam muita dificuldade durante a resolução dessa atividade com questões de sistematização do assunto, relembre a definição apresentada no momento da sistematização. Logo depois que todos os discentes tiverem concluído a resolução da atividade, devem ser encaminhados para a etapa da formalização, onde terão a oportunidade de sociabilizar suas respostas, discutindo possíveis métodos propostos nessas resoluções, bem como outros mais formais que podem ser apresentados por eles ou pelo professor.

7. CONSIDERAÇÕES

O objetivo desse produto educacional foi apresentar uma Sequência Didática para o ensino de para o ensino de Função com ênfase na Bijeção de Função, com a pretensão de contribuir com a prática docente, tornando-se uma alternativa para melhoria da aprendizagem dos estudantes neste tema. Sua construção levou em consideração informações, tais como, os aspectos históricos da Função, aspectos curriculares e uma revisão de estudos sobre o ensino e aprendizagem de Função com ênfase na Bijeção de Função, além da utilização das metodologias Ensino por Atividades Experimentais e Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

Os apectos históricos das Funções evidenciram a importância da História da Matemática como metodologia de ensino, além de nos possiblitar compreender como ocorreu a evolução da ideia de Função, bem como as contribuições de vários povos ao longo do tempo, ocasionando transformações em seus conceitos, linguagem e representações, de modo que esse se tornou uma das pedras angulares da Matemática atual, sendo também utilizada para modelar fenômenos naturais e sociais.

Os aspectos curriculares sinalizam para a necessidade da utilização de novas metodologias que tenham o aluno como protagonista na construção do seu conhecimento, bem como de modelos que lhe permita interpretar e investigar em Matemática e, dessa forma, continuar aprendendo.

A revisão de estudos possibilitou a construção de um panorama que revelou a necessidade de buscar novas estratégias didáticas e metodológicas mais eficazes para o ensino de Bijeção de Função, norteando o planejamento desse produto educacional, além de apresentar algumas sugestões fundamentais para a elaboração da Sequência Didática, na qual adotamos como metodologias o Ensino por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas como Ponto de Partida, por promoverem o protagonismo do estudante na construção do seu conhecimento.

A Sequência Didática aqui apresentada foi utilizada em uma dissertação de mestrado do autor Silva (2023), após ter sido aplicada a estudantes das 1ª e 3ª séries do Ensino Médio, obtendo resultados expressivos na aprendizagem de Função com ênfase na Bijeção de Função, por isso, essa Sequência Didática é apresentada neste livro como um Produto Educacional, acompanhada com orientações diáticas, para serem utilizadas por professores em sala de aula, ou em aula remota, estando sujeita a ajustes pelo docente para melhor se adequar a cada situação.

Por meio desse Produto Educacional esperamos contribuir com a prática docente de Matemática, facilitando significativamente o planejamento e a execução de aulas sobre Função com ênfase na Bijeção de Função e sua aplicação na comparação de conjuntos infinitos, no Ensino Médio ou Superior.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Versão final Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e B. Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996**.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM).** Brasília: MEC, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares . Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

BUENO, Rafael Winicius da Silva; VIALI, Lori. A construção histórica do conceito de função. In **Educação Matemática em Revista** - EMR-RS - Ano 10 - 2009 - n. 10, v. 1 - p. 37-47.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho. **O ensino de análise combinatoria no ensino médio por atividades.** 2019. 352 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

CORRÊA, João Nazareno Pantoja. **O Ensino de Poliedros por Atividades**. 2019. 346 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

ESPÍRITO SANTO, Andressa do. **Conjuntos infinitos e funções bijetivas: uma abordagem na educação básica**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 63 f. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, PR, 2019.

GUIMARÃES, Rita Santos. **Atividades para aprendizagem do conceito matemático de função**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). 201 f. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2010.

IFRAH, Georges. **Os números: história de uma grande invenção**. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra; revisão técnica Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. - 11 ed. - São Paulo: Globo, 2005.

MACIEL, Paulo Roberto Castor. **A construção do conceito de função atráves da história da matemática.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e

Matemática). 107 fls - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca- CEFET/RJ. Rio de Janeiro, 2011.

MAGARINUS, Renata. **Uma proposta para o ensino de função através da utilização de objetos de aprendizagem**. Dissertação Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 99 fls. Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Santa Maria, RS, 2013.

MELO, Alex Gonçalves de. **Modelagem matemática no estudo das funções afim quadrática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 67 f. Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Maceió, 2017.

MIRANDA, Ana Sofia Macedo Szczepaniak. **Resolução de problemas como metodologia de ensino:** uma análise das repercussões de uma formação continuada. 2015, 116. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). PUCRS, Fac. de Física, Porto Alegre, 2015.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In.: **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org). São Paulo: Ed. UNESP, 1999, p. 199-220

POZO, Juan Ignácio. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Isaac Dayan Bastos da. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. **Traços**. Belém, v. 6, n.11, p. 123-140, 2003.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades**. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I).

SÁ, Pedro Franco de. O Que é Resolução de Problemas, afinal?. **Revista Trilhas** (UNAMA) , Belém, v. 5, n.2, p. 11-17, 2004.

SÁ, Pedro Franco. A resolução de problemas como ponto de partida nas aulas de matemática. **Revista Trilhas** (UNAMA) , v. 11, p. 7-24, 2009.

SANTOS, Cristiane do Socorro Ferreira dos. **Ensino das funções afim e quadrática por atividades**. 2013. 312 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2013.

SILVA, Benino Sebastião da. **A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções.** 2017, 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

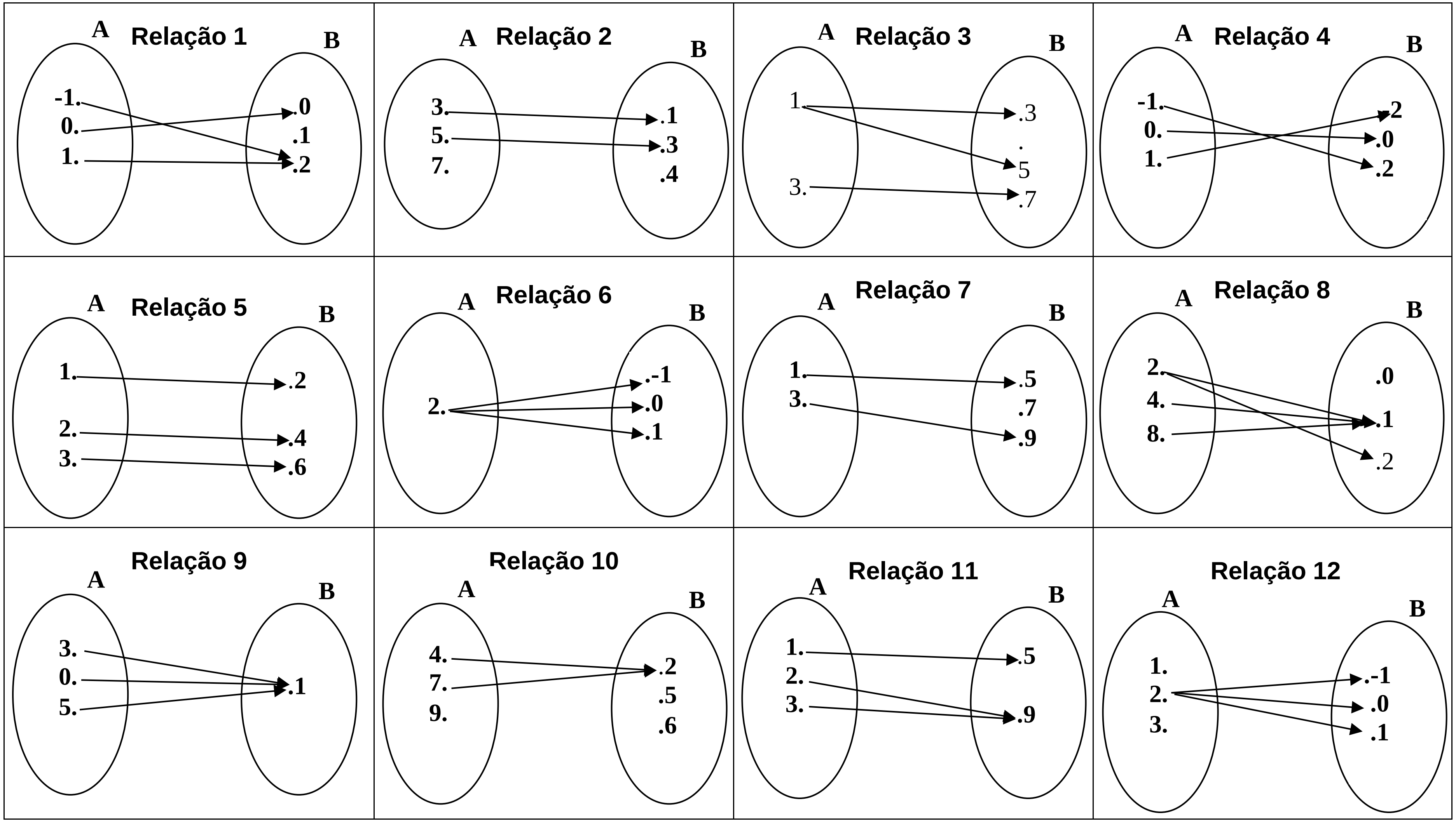
SILVA, Diego Cunha da. **O ensino de Função Afim por Atividades:** experiência em uma escola publica do Estado do Pará. 2018, 212 f. Dissertação (Mestrado

Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

ZUFFI, Edna maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Hipátia**. (IFSP). v. 1, n. 1, p. 1-10, Campos do Jordão, SP, 2016.

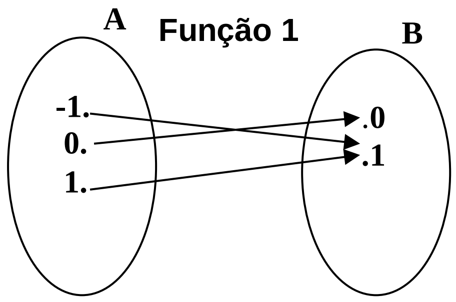
APÊNDICES

APÊNDICE A – Quadro de Relações

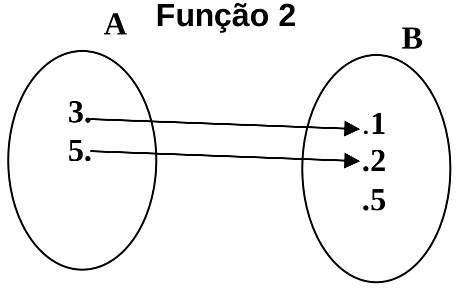


APÊNDICE B – Quadro de Funções 1

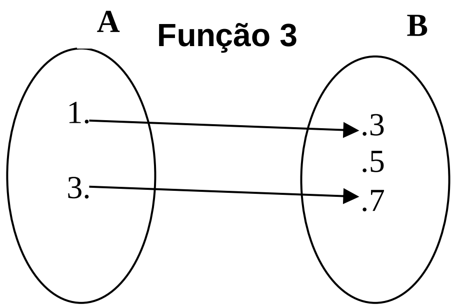
Função 1



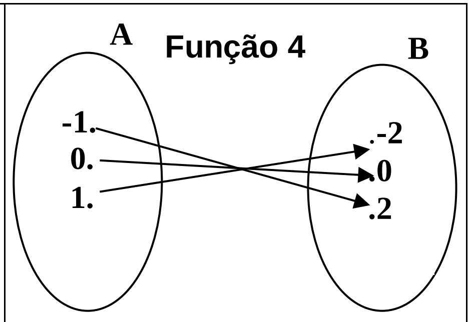
Função 2



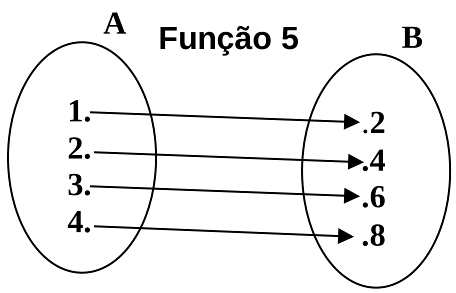
Função 3



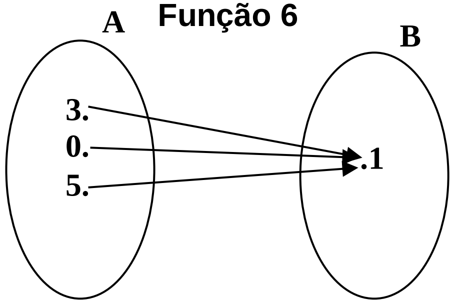
Função 4



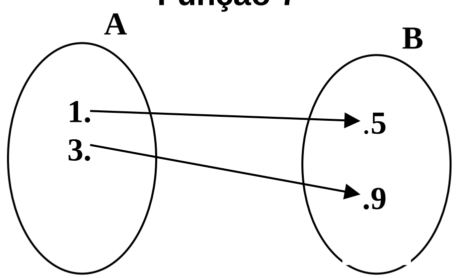
Função 5



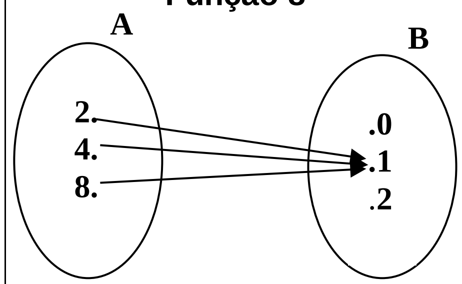
Função 6



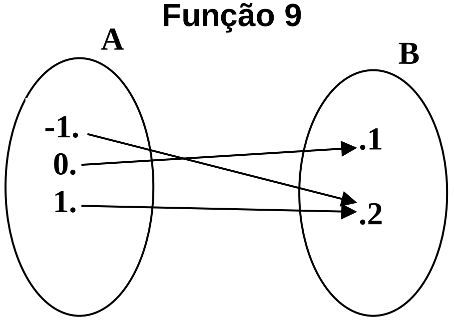
Função 7



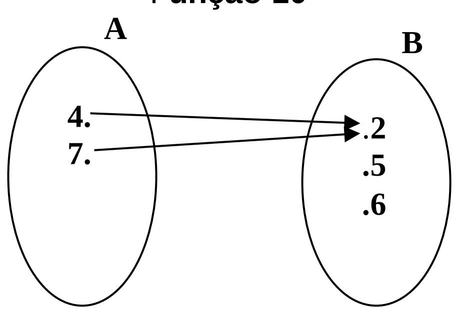
Função 8



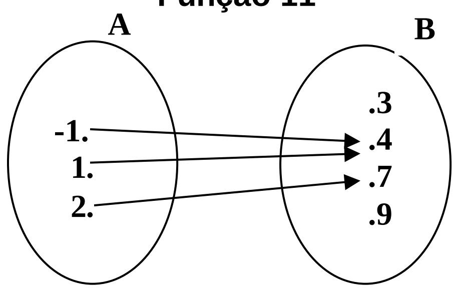
Função 9



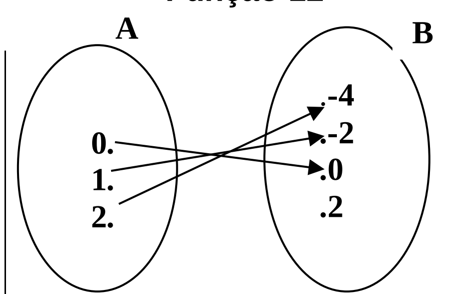
Função 10



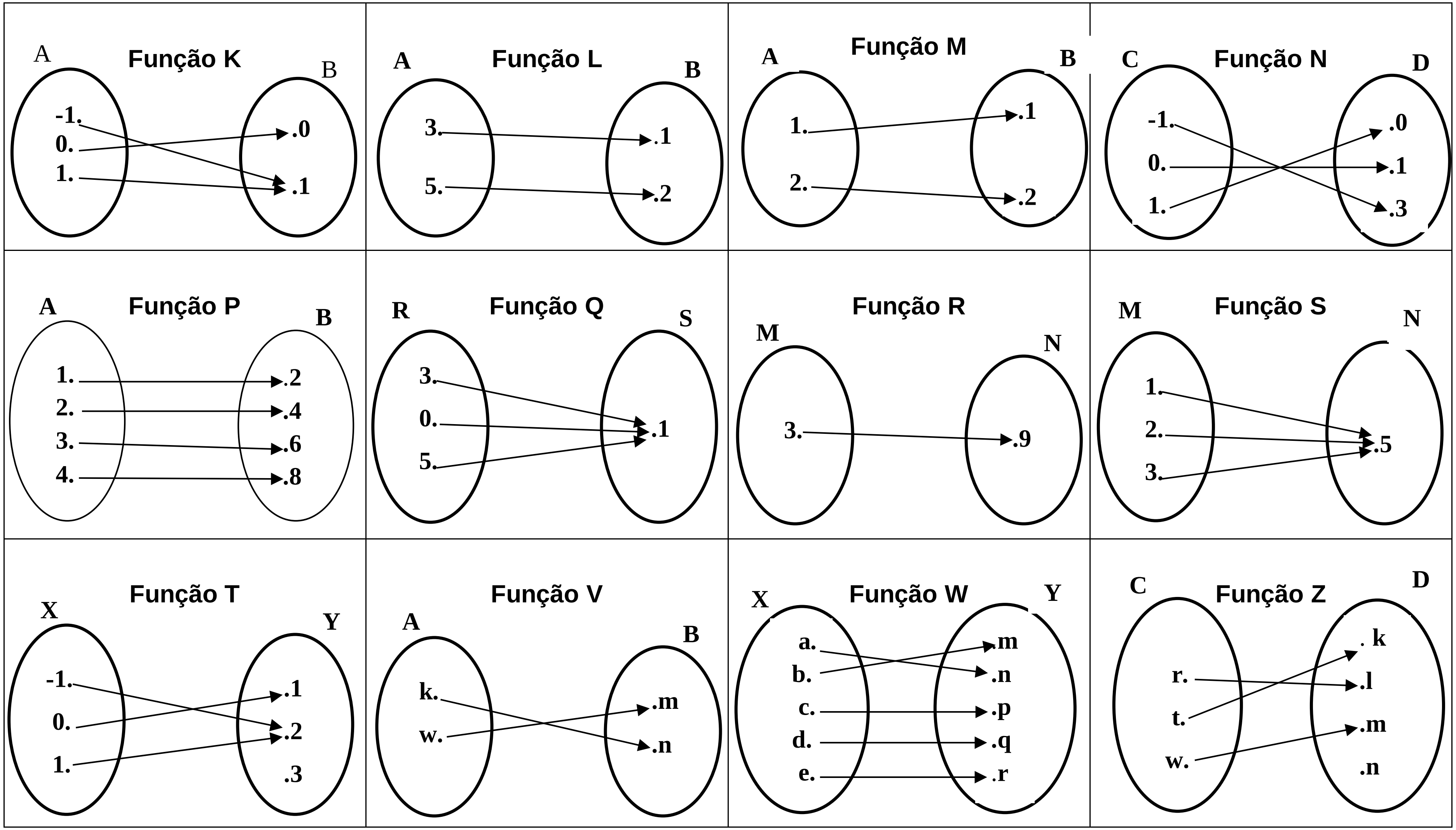
Função 11



Função 12



APÊNDICE C - Quadro de Funções 2



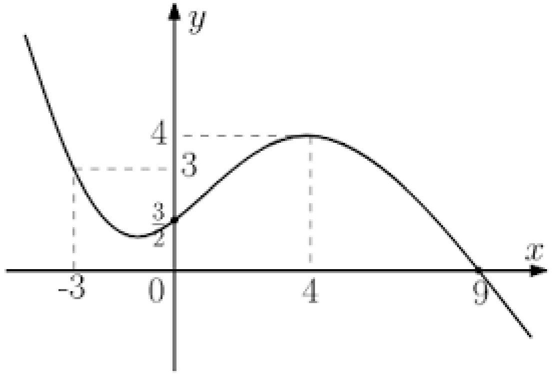
APÊNDICE D - Quadro de Gráficos

QUADRO DE GRÁFICOS (Continua)

<table>
<tr>
<td>

Gráfico 1

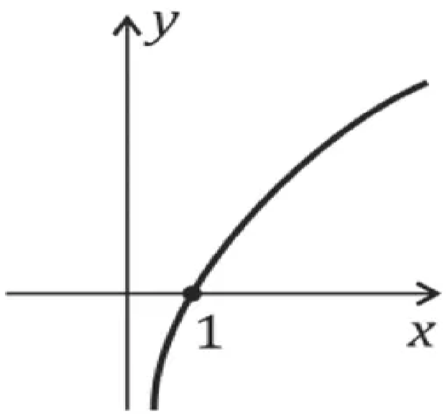
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



</td>
<td>

Gráfico 2

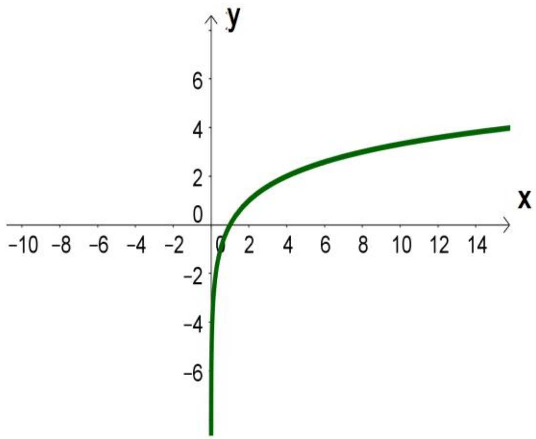
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



</td>
<td>

Gráfico 3

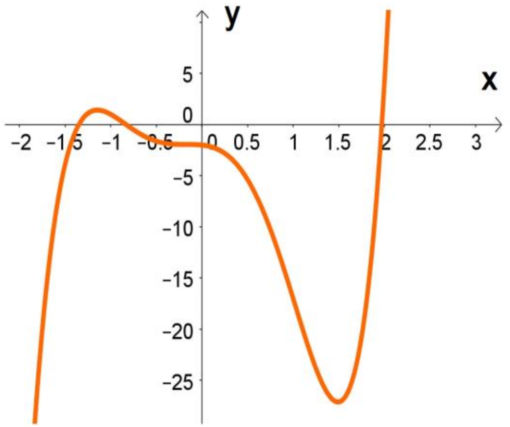
$f: \mathbb{R} \to]-\infty, 4]$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Gráfico 4

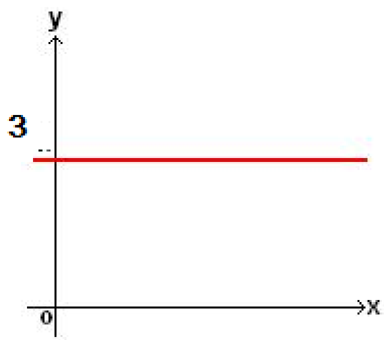
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



</td>
<td>

Gráfico 5

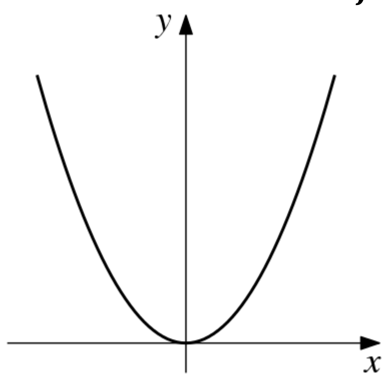
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$



</td>
<td>

Gráfico 6

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



</td>
</tr>
</table>

(Conclusão)

Gráfico 7

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

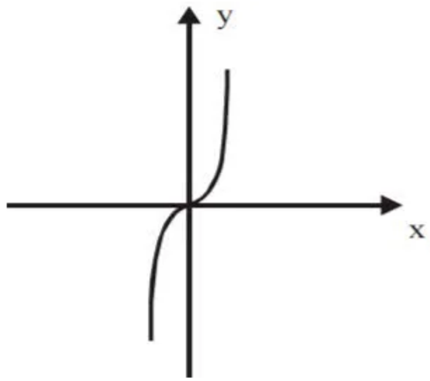


Gráfico 8

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

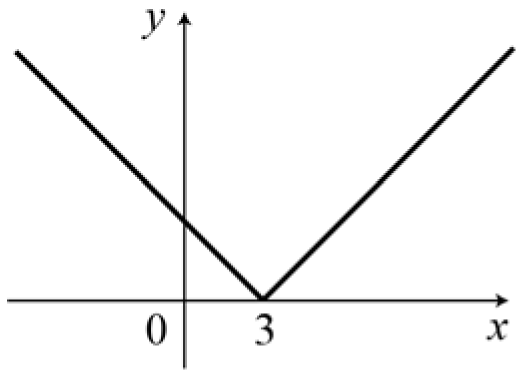


Gráfico 9

$\boldsymbol{f}: [-5, 10] \to [-1, 8]$

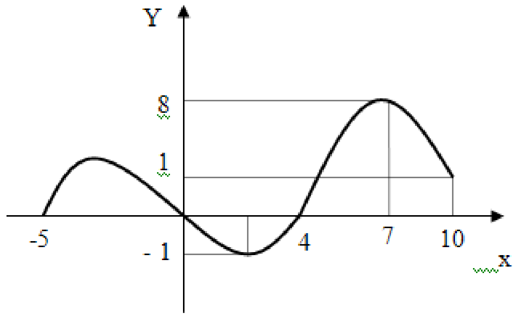


Gráfico 10

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

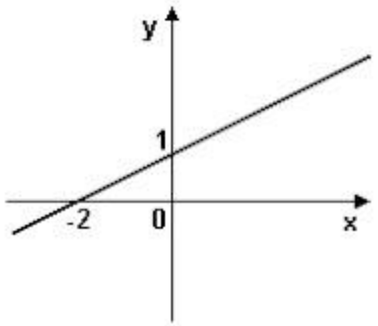


Gráfico 11

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

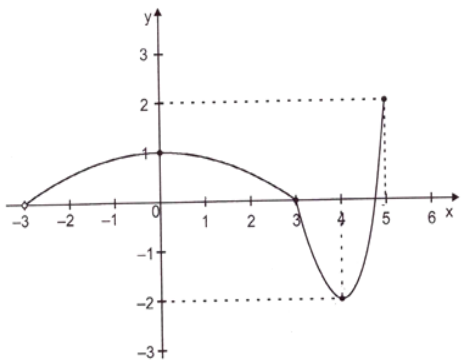
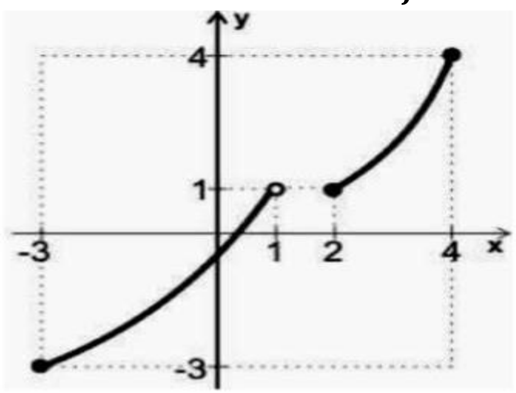


Gráfico 12

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Euvaldo Soares da Silva

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (2005); Especialização em Matemática pela Facudade de Ciências, Educação e Tecnologia Darwin (2009); Mestrado em Ensino de Matemática pelo PPGEM/UEPA(2023). Atua como professor efetivo da Secretaria do Estado de Educação (SEDUC) desde 2009; Atua como professor da rede particular de ensino desde 2012.

Pedro Franco de Sá

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1988); Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1996) e Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2003). Foi diretor, no período de junho de 2012 a maio de 2016, do Centro de Ciências Sociais e Educação da Universidade do Estado do Pará onde é professor Titular de Educação Matemática do Departamento de Matemática, Estatística e Informática desde 2013.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br