



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

EUVALDO SOARES DA SILVA

**O ENSINO DA COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS INFINITOS POR
MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS**

Belém-PA
2023

EUVALDO SOARES DA SILVA

**O ENSINO DA COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS INFINITOS POR
MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Belém-PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Silva, Euvaldo Soares da

O ensino da comparação de conjuntos infinitos por meio de atividades experimentais
/Euvaldo Soares da Silva; orientação de Pedro Franco de Sá. - Belém, 2023

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do
Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém,
2023.

1. Funções-Estudo e ensino. 2. Ensino por atividades experimentais. 3. Sequência
didática. 4. Prática de ensino. I. Sá, Pedro Franco de (orient.). II. Título.

CDD 23ed. 515

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739

EUVALDO SOARES DA SILVA

**O ENSINO DE COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS INFINITOS POR
MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data de aprovação: 28/02/2023

Banca examinadora



Orientador

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

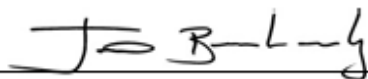
Doutor em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Universidade do Estado do Pará



Examinadora Interna

Prof^a. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos

Doutora em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Universidade do Estado do Pará



Examinador Externo

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

Doutor em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Universidade Federal do Pará

**Belém-PA
2023**

"A felicidade não se resume na ausência de problemas, mas sim na sua capacidade de lidar com eles".

Albert Einstein

Agradecimentos

A Deus toda honra e toda glória, pelo dom da vida e por tudo o que tenho e que sou, a Ele a minha eterna gratidão.

A minha eterna namorada Nágila Portela, pelo amor, compreensão incentivo, força e apoio em todos os momentos dessa difícil jornada, que enfrentamos e vencemos juntos.

Aos meus pais: Hortelino e Margarida, por terem sido escolhidos por Deus para me dar a vida, por me ensinarem valores e lições que nenhuma escola jamais poderia ensinar.

Às minhas princesas Sophia e Sibelly pela alegria e pela força, pela compreensão e por serem a minha razão de existir e lutar pela realização dos meus sonhos.

Aos meus irmãos: Raimunda (in memoriam), Francivalda, Genival, Nivalda, Lourival e Hortelino Júnior, por acreditarem em mim e mostrarem que não estou só na jornada dessa vida e que podemos realizar até mesmo os sonhos que nos pareçam impossível, amo vocês.

Aos professores mais brilhantes e fascinantes que já conheci: Ana Kely Martins da Silva, Cínthia Cunha Maradei Pereira, Ducival Carvalho Pereira, Fábio José da Costa Alves, Francisco Hermes Santos da Silva, Maria de Lourdes Silva Santos, Miguel Chaquiam, Natanael Freitas Cabral, Pedro Franco de Sá e Roberto Paulo Bibas Fialho, por nos ensinar, através do exemplo, a importância e o dever de proporcionar um ensino de qualidade.

Ao meu orientador Professor Doutor Pedro Franco de Sá, pela paciência, por acreditar em mim, por compartilhar sua sabedoria, experiências enriquecedoras, por dedicar seu tempo sendo solícito em todos os momentos em que precisei, pela compreensão, um exemplo do que é ser verdadeiramente um professor, ao senhor Minha eterna gratidão e admiração.

Ao Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma, membro externo da banca examinadora e a Profª Drª Maria de Lourdes Silva Santos, que tão gentilmente aceitaram o convite de compor essa banca avaliadora, contribuindo com suas considerações e sugestões para enriquecer o texto final dessa pesquisa.

Aos amigos e professores Marco Aurélio e Dr. Gesivaldo dos Santos Silva, pelo incentivo e apoio que me fizeram acreditar que o estudo pode transformar uma vida e que o Céu é o limite para aquele sonha e busca a realização desse sonho. Muito obrigado.

Aos amigos do Mestrado: turma de 2019, vocês são mais que amigos, mostraram-se verdadeiros irmãos, preocupando-se uns com os outros, dando a força necessária nos momentos difíceis, compartilhando experiências e conhecimentos geradores de novos conhecimentos.

Meus sinceros e cordiais agradecimentos à Universidade do Estado do Pará, em especial à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática representado pelo Professor Dr Fábio José da Costa Alves, por me proporcionar essa grande oportunidade de usufruir de uma formação de qualidade que resultou em crescimento acadêmico e profissional.

Não poderia deixar de agradecer à Secretaria de Estado da Educação do Maranhão (SEDUC-MA), pelo apoio e a licença concedida para tornar possível a realização desse sonho.

A todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente na concretização desse trabalho, o meu muito obrigado.

RESUMO

SILVA, Euvaldo Soares da. **O Ensino da comparação de Conjuntos Infinitos por meio de Atividades Experimentais**. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

O presente trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino da comparação de conjuntos infinitos por meio de atividades experimentais sobre a participação nas aulas, à construção de conceito e o desempenho dos alunos na resolução de questões que abordam o assunto e sua aplicação. A parte experimental da pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública estadual de Imperatriz no estado do Maranhão, tendo como sujeitos 10 estudantes do Ensino Médio, a fim de investigar o seguinte problema científico: de que forma o ensino por atividades experimentais influencia no ensino e aprendizagem de Bijeção de Função e sua aplicação na comparação da cardinalidade de conjuntos numéricos? Adotou-se como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. A análise dos resultados se deu pelo registro dos discentes nas atividades, confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*, pela comparação entre os resultados do pré-teste com o pós-teste, pela aplicação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson e do Teste de Hipótese. Os resultados da comparação apontaram aumento considerável nas notas do pós-teste; o teste de hipótese comprovou que as notas do pós-teste tiveram melhora significativa em relação ao pré-teste e a análise das correlações mostrou que nenhum dos fatores socioeconômicos levantados teve interferência direta nos resultados obtidos, evidenciando que ocorreu melhoras na aprendizagem e que o bom resultado do experimento é decorrente, sobretudo, da metodologia utilizada. Os ótimos resultados desta dissertação motivaram a construção de um Produto Educacional intitulado: Uma Sequência Didática para o Ensino da comparação de Conjuntos Infinitos por meio de Atividades Experimentais, cujo objetivo é propor uma Sequência Didática para o ensino de Função com ênfase na Bijeção de Função e sua aplicação na comparação de conjuntos infinitos, com a pretensão de contribuir com a prática docente, tornando-se uma alternativa para melhoria da aprendizagem dos estudantes neste tema.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Ensino de Bijeção. Ensino por Atividades Experimentais.

ABSTRACT

SILVA, Euvaldo Soares da. **The Teaching Comparison of Infinite Sets through Experimental Activities**. Dissertation from the Professional Master's Program in Mathematics Teaching - University of the State Pará, Belém, 2023.

This paper presents the results of a research that aimed to analyze the effects of applying a didactic sequence for teaching the comparison of infinite sets through experimental activities on class participation, concept construction and student performance. in the resolution of questions that approach the subject and its application.. The experimental part of the research was developed in a state public school in Imperatriz in the state of Maranhão, with 10 high school students as subjects, in order to investigate the following scientific problem: how teaching through experimental activities influences teaching and learning of Function Bijection and its application in comparing the cardinality of numerical sets? Didactic Engineering was adopted as a research methodology. The analysis of the results took place by registering of the students in the activities, confrontation of a priori and a posteriori analyzes, comparing the results of the pre-test with the post-test, applying Pearson's Linear Correlation Coefficient and the Test of Hypothesis. The results of the comparison showed a considerable increase in the post-test scores; the hypothesis test proved that the post-test scores had a significant improvement in relation to the pre-test and the correlation analysis showed that none of the socioeconomic factors raised had direct interference in the results obtained, showing that there were improvements in learning and that good The result of the experiment is due, above all, to the methodology used. The excellent results of this dissertation motivated the construction of an Educational Product entitled: A Didactic Sequence for Teaching the Comparison of Infinite Sets through Experimental Activities, whose objective is to propose a Didactic Sequence for teaching Function with emphasis on Bijection of Function and its application in the comparison of infinite sets, with the intention of contributing to teaching practice, becoming an alternative for improving students' learning in this subject.

Keywords: Mathematics teaching. Bijection Teaching. Teaching by Experimental Activities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama Sagital da Função f	37
Figura 2: Função Composta de g e f	38
Figura 3: Visualizações da composição de função	38
Figura 4: Representação da Função Composta $g \circ f$	39
Figura 5: Representação da propriedade 2 da função bijetora	47
Figura 6: Representação da Propriedade 4 da função bijetora	48
Figura 7: Correspondência bijetiva entre os números naturais e os números naturais pares	53
Figura 8: Correspondência bijetiva entre os números naturais e os números naturais ímpares	54
Figura 9: Representação da função $h = g \circ f: X \rightarrow N$	56

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Quem auxilia o estudante nas tarefas de matemática?	75
Gráfico 2: Sentimento dos Alunos em relação à Matemática	76
Gráfico 3 – Percentual de alunos que têm sua atenção e interesse em aprender despertado pelas aulas de Matemática	81
Gráfico 4: Distribuição dos estudantes por gênero	176
Gráfico 5: Distribuição dos estudantes por idade	177
Gráfico 6: Dependência em Matemática	177
Gráfico 7: Gosto pela Matemática	178
Gráfico 8: Escolaridade do responsável masculino	179
Gráfico 9: Escolaridade do Responsável Feminino	179
Gráfico 10: Ajuda nas tarefas de matemática	180
Gráfico 11: Estudo de Matemática Fora da Escola	181
Gráfico 12: Entendimento nas aulas de Matemática	182
Gráfico 13: Formas de Avaliação em Matemática	182
Gráfico 14: Interesse nas aulas de Matemática	183
Gráfico 15: A maioria das Aulas de Matemática	184
Gráfico 16: Formas usadas pelo professor para praticar conteúdo	185
Gráfico 17: Tempo máximo para efetivação das atividades	233
Gráfico 18: Desempenho por questão no Pré-teste e Pós-teste	236
Gráfico 19: Desempenho dos discentes nos testes	238
Gráfico 20: Dispersão: Gosto pela Matemática	245
Gráfico 21: Dispersão: Escolaridade responsável masculino	246
Gráfico 22: Dispersão: Escolaridade responsável feminino	248
Gráfico 23: Dispersão: Estudo de Matemática fora da Escola	249
Gráfico 24: Dispersão: Interesse nas aulas de Matemática	251
Gráfico 25: Diagrama t de Student	255

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Quadro Sinótico da Evolução do Conceito de Função.....	33
Quadro 2 Quadro de Dificuldades em Relação à Bijeção de Função	86
Quadro 3 - Resultados do Teste de verificação de aprendizagem de Bijeção e Paridade de Função	88
Quadro 4 - Momentos de ensino por atividades experimentais	94
Quadro 5 - Organização do planejamento de uma Atividade de Conceituação	95
Quadro 6 - Atividades Desenvolvidas	174
Quadro 7: Perguntas dos Estudantes durante o Pré-Teste	186
Quadro 8: Observações dos grupos na Atividade 1	188
Quadro 9: Análises das conclusões dos grupos na atividade 1	189
Quadro 10: Observações dos grupos na Atividade 2	189
Quadro 11: Análises das observações dos grupos na atividade 2	191
Quadro 12: Conclusões dos grupos na Atividade 3	192
Quadro 13: Análises das conclusões dos grupos na atividade 3	193
Quadro 14: Conclusões dos grupos na Atividade 4	194
Quadro 15: Análises das conclusões dos grupos na atividade 4	195
Quadro 16: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 5	197
Quadro 17: Análises das conclusões dos grupos na atividade 5	198
Quadro 18: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 6	199
Quadro 19: Análises das conclusões dos grupos na atividade 6	200
Quadro 20: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 7	201
Quadro 21: Análises das conclusões dos grupos na atividade 7	203
Quadro 22: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 8	204
Quadro 23: Análises das conclusões dos grupos na atividade 8	206
Quadro 24: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 9	207
Quadro 25: Análises das conclusões dos grupos na atividade 9	208
Quadro 26: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 10	209
Quadro 27: Análises das conclusões dos grupos na atividade 10	210
Quadro 28: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 11	212
Quadro 29: Análises das conclusões dos grupos na atividade 11	213
Quadro 30: Solução dos grupos registrados na Atividade 12/Problema 1	215
Quadro 31: Análises das soluções dos grupos registradas na	

Atividade 12/Problema 1	217
Quadro 32: Soluções dos grupos registradas na Atividade 13/Problema 2	218
Quadro 33: Análises das soluções dos grupos registradas na Atividade 13/Problema 2	220
Quadro 34: Soluções dos grupos registradas na Atividade 14/Problema 3	221
Quadro 35: Análises das soluções dos grupos apresentadas na Atividade 14/Problema 3	223
Quadro 36: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 15	224
Quadro 37: Análises das conclusões dos grupos na atividade 15	226
Quadro 38: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 16	227
Quadro 39: Análises das conclusões dos grupos na atividade 16	228
Quadro 40: Soluções dos grupos registradas na Atividade 17/Problema 4	229
Quadro 41: Análises das soluções dos grupos registradas na Atividade 17/Problema 4	230
Quadro 42: Classificação das respostas do Pré-teste e pós-teste	235
Quadro 43: Desempenho nos Diagnósticos: Pré-Teste e Pós-Teste	235
Quadro 44: Desempenho dos estudantes nos testes	237
Quadro 45: Correlação gosto pela matemática e quem ajuda nas tarefas	239
Quadro 46: Correlação gosto pela matemática e frequência do estudo desta fora da escola	240
Quadro 47: Correlação gosto pela matemática e o interesse nas aulas	242
Quadro 48: Classificação da correlação em função de r	243
Quadro 49: Classificação da Correlação de Pearson: Gosto pela Matemática	244
Quadro 50: Correlação entre a diferença das notas nos testes e Gosto por Matemática	244
Quadro 51: Classificação da Correlação de Pearson: Escolaridade responsável masculino	245
Quadro 52: Correlação entre a diferença das notas e Escolaridade responsável masculino	246
Quadro 53: Classificação da Correlação de Pearson: Escolaridade responsável feminino	247
Quadro 54: Correlação entre a diferença das notas e Escolaridade responsável feminino	247
Quadro 55: Classificação da Correlação de Pearson: Estudo de Matemática	

fora da Escola	248
Quadro 56: Correlação entre a diferença das notas e o Estudo de Matemática fora da escola	249
Quadro 57: Classificação da Correlação de Pearson: Interesse nas aulas de Matemática	250
Quadro 58: Correlação entre a diferença das notas e o Interesse nas aulas de Matemática	250
Quadro 59: Resultados da correlação linear de Pearson	252
Quadro 60: Tipos de Curva Normal	253
Quadro 61: Notas conforme os Acertos	254
Quadro 62: Confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades	260

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Escolaridade do responsável masculino e feminino de alunos do 2º Ano do Ensino Médio.....	74
Tabela 2: Como os estudantes do 2º Ano avaliam as explicações do professor de matemática	79
Tabela 3: Alunos que já ficaram de dependência	84
Tabela 4: Instrumentos de Avaliação Utilizados pelo professor de Matemática	85

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 ENGENHARIA DIDÁTICA	21
2.1 As Fases da Engenharia Didática.....	22
2.1.1 Análises prévias	23
2.1.2 Concepção e Análise a Priori	23
2.1.3 Experimentação	24
2.1.4 Análises a Posteriori e Validação	25
3 ANÁLISES PRÉVIAS.....	26
3.1 Aspectos históricos das Funções.....	26
3.1.1 A Importância da História da Matemática como Metodologia de Ensino...	26
3.1.2 A Evolução Histórica do Conceito de Função	29
3.2 Aspectos Matemáticos da Bijeção de Função	35
3.2.1 Definição de Função	36
3.2.2 Função Composta	37
3.2.3 Propriedades da Composição de Funções	40
3.2.4 Função Inversa.....	41
3.2.5 Propriedades da Função Injetora	45
3.2.6 Propriedades da Função Sobrejetora.....	46
3.2.7 Propriedades da Função Bijetora	46
3.2.8 Reconhecimento do tipo de Função a partir do seu Gráfico	49
3.2.9 Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-enumeráveis.....	50
3.2.10 Cardinalidade de um Conjunto	59
3.3 Aspectos Curriculares sobre Bijeção de Função	63
3.4 O Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função na Visão dos Estudantes	65
3.4.1 Revisão de estudos sobre o ensino de bijeção	67
3.4.2 O Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função na Visão dos Estudantes	73
3.5 Tendencias da Educação Matematica.....	90
3.5.1 Ensino por Atividades Experimentais	90
3.5.1.1 Origem do Ensino por Atividades	90
3.5.1.2 Organização de uma Atividade de Conceituação ou Redescoberta	93
3.5.1.3 O Planejamento de uma Atividade de Conceituação	95
3.5.1.4 O Ensino por Atividades Experientais e a nossa pesquisa	97

3.5.2 Resolução de Problemas como Ponto de Partida	97
4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI	102
4.1 Descrição da Sequência Didática.....	102
4.2 Atividades que serão Desenvolvidas e Análise a Priori de cada Atividade	103
4.2.1 Atividade 01.....	103
4.2.2. Atividade 02.....	105
4.2.3 Atividade 03.....	108
4.2.4 Questões de Aprofundamento das Atividades 01, 02 e 03	111
4.2.5 Atividade 04.....	116
4.2.6. Questões de Aprofundamento da Atividade 04 - Domínio de uma Função	118
4.2.7 Atividade 05.....	121
4.2.8. Atividade 06.....	123
4.2.9. Atividade 07.....	125
4.2.10 Questões de Aprofundamento das Atividades 05, 06 e 07	127
4.2.11 Atividade 08	132
4.2.12 Atividade 09	135
4.2.13 Atividade 10	137
4.2.14 Questões de Aprofundamento das Atividades 08, 09 e 10	139
4.2.15. Atividade 11.....	142
4.2.16 Questões de Aprofundamento da Atividade 11	144
4.2.17 Atividade 12.....	146
4.2.18 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 12....	149
4.2.19 Atividade 13.....	150
4.2.20 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 13....	153
4.2.21 Atividade 14.....	153
4.2.22 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 14	158
4.2.23 Atividade 15	159
4.2.24 Atividade 16	161
4.2.25 Atividade 17.....	163
4.2.26 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 17....	166
4.3 Pré-teste e Pós-testes	166
5 EXPERIMENTAÇÃO.....	173
5.1 Diagnóstico Inicial	175
5.1.1 Perfil dos estudantes	175
5.1.2. Sobre a aplicação do Pré-teste	186
5.2. Primeira Sessão de Ensino	187

5.3. Segunda Sessão de Ensino	196
5.4. Terceira Sessão de Ensino	203
5.5. Quarta Sessão de Ensino	214
5.6. Quinta Sessão de Ensino	223
5.7. Sexta Sessão de Ensino	231
5.8. Considerações acerca da Experimentação	232
6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	234
6.1 Resultados e Análises do Pré-teste e Pós-teste	235
6.2 Correlação entre as notas dos testes e algumas variáveis sócioeconômicas	239
6.3 Coeficiente de Correlação Linear de Pearson dos Testes	243
6.4 Síntese dos Coeficientes de Correlação Linear de Pearson nos Testes	251
6.5 Teste de Hipóteses	252
6.6 Teste de Hipótese do Experimento	254
6.7 Análise a <i>posteriori</i> das atividades propostas	256
6.8 Confronto entre as Análises a Priori e a Posteriori das Atividades	260
CONSIDERAÇÕES FINAIS	270
REFERÊNCIAS	273
APÊNDICE	279
APÊNDICE A - PERFIL DISCENTE: QUESTIONÁRIO SOCIOEDUCACIONAL.....	280
APÊNDICE B - Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE)	282
APÊNDICE C - Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE) para o responsável do aluno menor de 18 anos.....	283
APÊNDICE D - QUADRO DE RELAÇÕES	284
APÊNDICE E - QUADRO DE FUNÇÕES 1.....	285
APÊNDICE F - QUADRO DE FUNÇÕES 2	286
APÊNDICE G - QUADRO DE GRÁFICOS	288
ANEXOS	291
ANEXO 1 – FICHA DE OBSERVAÇÃO DE AULA DE REDESCOBERTA.....	292
ANEXO 2 – PERFIL DISCENTE: QUESTIONÁRIO	295

1 INTRODUÇÃO

A importância do conceito de Função é evidenciada pela sua presença destacada em vários ramos da Matemática, bem como sua utilização em outras áreas do conhecimento. Essa relevância deve-se à sua riqueza de linguagens e representações que possibilitam a compreensão, interpretação e construção de argumentos e modelos que fundamentam a resolução de situações-problema no contexto escolar ou da vida cotidiana, bem como o desenvolvimento de competências e habilidades que auxiliam na aquisição de outros conhecimentos da Matemática e outras áreas.

Um fato intrigante é que mesmo sendo um assunto tão trabalhado, pesquisas como as de Guimarães (2010), Magarinos (2011), Santos (2013) e Silva (2018) destacam uma acentuada deficiência dos estudantes em relação aos conceitos e linguagens das funções, o que explica o grande número de dissertações do CAPES e do PROFMAT que abordam o tema Função. Nesses trabalhos a pergunta mais recorrente é: por que um assunto que é tão trabalhado é pouco compreendido pelos discentes?

Na busca de uma resposta satisfatória para esse questionamento, iniciamos um estudo sobre função com ênfase na Bijeção de Função, por meio da análise de documentos oficiais (PCN, BNCC, etc.) e seis livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio, em seguida realizamos uma pesquisa de campo com 105 alunos de duas escolas do Ensino Médio, no município de Ananindeua, no Estado do Pará, objetivando verificar como esse conteúdo está contemplado nos documentos oficiais, qual a proposta pedagógica dos livros didáticos e como ocorre na prática o seu ensino.

A nossa pesquisa revelou que 49,5% dos alunos entrevistados não estudaram Bijeção de Função e que a maioria dos alunos, que tinham estudado esse tema, apresentou um resultado insuficiente, confirmando os resultados das pesquisas anteriormente citadas e gerando uma inquietação e questionamentos que nos impulsionou a buscar uma forma eficaz de promover o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

Dessa forma, a nossa pesquisa tem como objetivo analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino da comparação de conjuntos infinitos por meio de atividades experimentais sobre a participação nas aulas, à construção de conceito e o desempenho dos alunos na resolução de questões que

abordam o assunto e sua aplicação. A escolha do tema e a abordagem da Bijeção de Função justifica-se por sua importância histórica e suas aplicações no cotidiano, bem como sua relevância em outras áreas do conhecimento.

O Ensino por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas como Ponto de Partida foram utilizados como ferramentas metodológicas por permitirem que o aluno seja protagonista na construção do seu conhecimento, pois a primeira possibilita ao estudante relacionar conceito, linguagem e gráfico da função, visualizando dinamicamente cada um dos seus elementos, descobrindo suas propriedades de modo que o conhecimento construído seja significativo e sirva de base para a construção de novos conhecimentos da Matemática e de outras áreas.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), no inciso II do artigo 36 estabelece que devem ser adotadas metodologias de ensino que estimulem a iniciativa dos estudantes. Os PCNs reforçam que o desenvolvimento da capacidade de raciocínio resulta em autoconfiança, responsabilidade, autonomia e capacidade de comunicação e argumentação (BRASIL, 1998, p. 52).

A Resolução de Problemas como Ponto de Partida atrelada ao Ensino por Atividades Experimentais são metodologias que contemplam o que foi anteriormente citado, uma vez que essas metodologias propiciam o desenvolvimento intelectual do aluno, que diante de um problema precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos, explorando muitos conceitos e constituindo novos saberes em uma atmosfera de investigação.

Dessa forma, todos esses fatos e argumentos destacam a importância de se desenvolver um estudo que possibilite responder ao seguinte questionamento: **de que forma o ensino por atividades experimentais influencia no ensino e aprendizagem de Bijeção de Função e sua aplicação na comparação da cardinalidade de conjuntos numéricos?** No intuito de responder esse questionamento desenvolveremos o nosso estudo com o seguinte objetivo geral: **analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino da comparação de conjuntos infinitos por meio de atividades experimentais sobre a participação nas aulas, à construção de conceito e o desempenho dos alunos na resolução de questões que abordam o assunto e sua aplicação.** A metodologia adotada para essa pesquisa foi a Engenharia Didática constituída por 4 fases: (1) análises prévias, (2) concepção e análise *a priori*, (3) experimentação, (4) análise *a posteriori* e validação.

Os dados foram coletados por meio dos registros dos discentes nas atividades e analisados à luz de um paralelo entre as análises a priori e a posteriori, comparando os resultados do pré-teste com o pós-teste. Esse procedimento, bem como a verificação de ocorrência de erro na aplicação do pré-teste e/ou pós-teste se deu pela aplicação do Coeficiente de Correlação de Pearson e do teste de Hipótese, porque acreditamos que a comparação desses resultados atrelada à análise das correlações podem evidenciar se ocorreu melhoras na aprendizagem dos alunos e se tal melhora é decorrente da metodologia utilizada. Dessa forma, esperamos responder a questão que motivou a nossa pesquisa.

O nosso estudo está organizado da seguinte forma: na primeira Seção apresentamos um texto introdutório, mostrando a necessidade do estudo da Bijeção de Função, discorrendo sobre a questão norteadora da pesquisa, os objetivos geral e específicos, esclarecendo ainda a metodologia que será utilizada, bem como, a forma de coleta e tratamento dos dados. Na Seção 2 apresentamos a Engenharia Didática de forma dealhada.

Na Seção 3, destacamos a primeira fase da engenharia didática (análises prévias), na qual constam os seguintes tópicos: aspectos históricos das Funções, onde destacamos a importância da história da Matemática como metodologia de ensino e a evolução histórica do conceito de função; aspectos matemáticos da Bijeção, aspectos curriculares da Bijeção de Função, O processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função na visão dos Estudantes, onde apresentamos uma revisão literária sobre o tema e os resultados de um estudo realizado com 105 estudantes do 2º ano do ensino médio; Tendência da educação matemática onde enfatizamos o Ensino por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

Na Seção 4 descrevemos a segunda fase da Engenharia Didática (concepção e análise a priori), apresentando a Sequência Didática (SD) e seu respectivo desenvolvimento. Os tópicos da Bijeção de Função que foram contemplados nessa SD obedecem à seguinte ordem sequencial: Definição de Função, Imagem de uma função, Imagem e contradomínio de uma função, Domínio de uma função, Função injetora, Função sobrejetora, Função bijetora, Comparando a cardinalidade de conjuntos infinitos, Conjuntos Enumeráveis e Conjuntos não enumeráveis.

Na Seção 5, apresentamos de forma detalhada como irá ocorrer a terceira fase da Engenharia Didática (experimentação), descrevendo as técnicas e instrumentos

utilizados na produção de informações; e a forma como será realizada a aplicação das atividades que constituem a Sequência Didática com suas respectivas análises a priori, junto aos alunos da 1ª e 3ª séries do Ensino Médio de uma escola pública estadual localizada no município de Imperatriz, no Estado do Maranhão.

Na Seção 6, destacamos como ocorrerá a quarta e última fase da engenharia didática (análise a posteriori e validação). Nele apresentaremos o conjunto de resultados que serão obtidos durante a experimentação, e também, por meio da confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e a posteriori, para verificar se os objetivos foram alcançados.

Por fim, nas Considerações Finais onde apresentamos os principais resultados alcançados por meio do desenvolvimento da nossa investigação, bem como sugestões validadas para o ensino de Bijeção. Essas sugestões reunidas e organizadas resultaram em um produto educacional que foi elaborado na forma de uma Sequencia Didática para o ensino do referido assunto.

2 ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que foi elaborada no início da década de 80, para dar suporte de natureza metodológica a pesquisas relacionadas com realizações didáticas.

Artigue (1996) justifica o termo engenharia didática ao fazer uma analogia do trabalho didático com o ofício do engenheiro que com o objetivo de realizar um projeto preciso, fundamenta-se em seus conhecimentos científicos, aceitando se submeter ao controle científico e trabalhar com objetos mais complexos que os propostos pela ciência. (ARTIGUE, 1996, p. 193).

A Engenharia Didática (ED) apresenta duplo sentido. Por um lado configura-se uma produção para o ensino, mas por outro é uma metodologia de pesquisa com etapas bem definidas.

De acordo com Conceição (2019, p. 20), a ED vista como produção para o ensino, "é um produto didático, que envolve um plano de ensino, a criação de materiais didáticos, uma experimentação com uma validação e uma avaliação posterior". Essa ideia é confirmada por Douady (1993) ao asseverar que a Engenharia Didática caracteriza-se por propor:

[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (DOUADY, 1993, p. 2 apud MACHADO, 2002, p. 198).

Segundo Artigue (1996, p. 196) a utilização da ED como metodologia de investigação caracterizada "por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

Conforme Pais (2001, p. 99) a Engenharia Didática se caracteriza como "uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa" uma "concepção que contempla tanto a dimensão teórica com a experimental da pesquisa em didática".

Essa organização dos procedimentos metodológicos da ED possibilita contemplar desde a dimensão teórica até a dimensão experimental. Desse modo, ela

interliga a investigação (plano teórico) com a ação (plano experimental) da prática educativa, constituindo uma grande vantagem para quem escolhe essa metodologia.

Há dois níveis distintos de Engenharia Didática, que são complementares e indispensáveis:

- a) a microengenharia, relacionadas às pesquisas que tem um conteúdo específico como objeto de estudo, sendo realizadas de forma local, levando em consideração a complexidade dos fenômenos de sala de aula, e
- b) "a macroengenharia, as pesquisas que possibilitam constituir a complexidade dos estudos da microengenharia com a dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem.". (MACHADO, 1999, p. 19).

A Engenharia Didática se caracteriza ainda pelas investigações realizadas por meio das experimentações em sala de aula com abordagem comparativa, e se distingue das outras metodologias de pesquisa por sua validação interna, confrontando a análise a priori e a análise a posteriori.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) afirmam que "a Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito".

Todas as evidências apresentadas até o momento justificam a vasta utilização dessa metodologia e a escolha da mesma para nortear a nossa pesquisa, destacando a organização dos seus procedimentos metodológicos que propicia a visualização que vai da dimensão teórica até a dimensão prática, interligando investigação e ação da prática educativa, tudo isso somado ao fato de que "a empregabilidade da engenharia didática intensifica a credibilidade da pesquisa e potencializa seu vínculo com a realidade da sala de aula" (ARTIGUE, 1996, p.247 apud PAIS, 2001, p. 108)..

A seguir, apresentamos de forma detalhada as fases que constituem e organizam a metodologia da Engenharia Didática.

2.1 As Fases da Engenharia Didática

A metodologia da Engenharia Didática está organizada em 4 fases: (1) análises prévias; (2) concepção e análise a *priori*; (3) experimentação; (4) análise a *posteriori* e validação.

2.1.1 Análises prévias

Nas análises prévias são efetuadas as análises do quadro teórico didático geral e dos conhecimentos acadêmicos construídos anteriormente sobre o estudo em outras análises preliminares. Nessa primeira fase são realizadas as análises preliminares que de acordo com Artigue (1996, p. 198), na maioria das vezes são:

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- a análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

Dessa forma, a fase das análises prévias ou análise preliminar é constituída pela pesquisa de todo o conhecimento acadêmico pré-existente sobre o objeto estudado por meio de revisões bibliográficas analisando seus aspectos epistemológicos e históricos, análise do ensino usual e das condutas dos alunos diante da execução do ensino.

É nessa fase que o pesquisador: obtém o referencial teórico, faz a revisão literária, analisa a evolução do conteúdo estudado e como esse está sendo ensinado ao aluno, procurando compreender as concepções e dificuldades do aluno.

Artigue (1988) lembra que a expressão "análises prévias" ou "análises preliminares" se refere ao primeiro nível de organização e não a temporalidade, uma vez que esta fase deve ser trabalhada concomitantemente com as outras, podendo cada uma delas ser retomada de acordo com as necessidades que surgirem durante o desenvolvimento da metodologia.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) reforçam que "estas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem: a análise a priori e construção da sequência de ensino".

2.1.2 Concepção e *Análise a Priori*

A segunda fase denominada Concepções e Análise a Priori é crucial para a pesquisa, uma vez que a partir das análises prévias o pesquisador determina as variáveis que julga importante ao problema da pesquisa e aquelas podem conduzir à solução desse problema. Essas variáveis podem ser de dois tipos: as **macrodidáticas** ou **globais**, que organizam e englobam todas as etapas, e as **microdidáticas** ou

locais, que se referem à organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma fase, que podem depender ou não do conteúdo matemático que se deseja ensinar.

É nesse momento que se elabora a Sequência Didática, composta por atividades diretamente relacionadas com o assunto da pesquisa e pautadas nas análises prévias anteriormente realizadas.

Sá e Alves (2011) sugerem que nessa fase da pesquisa:

- “[...] seja construído um roteiro de atividade que esteja escrito de maneira clara numa linguagem acessível aos alunos;
- o roteiro contenha título, objetivos, lista do material necessário, descrição clara dos procedimentos a serem realizados, espaço para registros de resultados do experimento, espaço para registro das primeiras descobertas ou observações oriundas da análise dos registros e espaço para o registro da conclusão alcançada com a atividade;
- as ações propostas na parte do procedimento do roteiro sejam exequíveis dentro das condições cognitivas, intelectuais e emocionais da turma envolvida;
- o procedimento proposto na atividade leve o aluno, por meio de ações que podem envolver construções, comparações, cálculos, análises, reflexões, levantamento e teste de hipóteses, e a perceber regularidades entre os resultados obtidos que possam ser expressas na forma de um conceito, propriedade ou procedimento relativo ao assunto que está sendo trabalhado;
- para cada atividade, de preferência tenha-se somente um objetivo a ser alcançado.”(SÁ; ALVES, 2011, p.151-152)

A Sequência Didática é centrada no aluno, pois sua construção é fundamentada na previsão das ações e dos comportamentos dos alunos durante a aplicação de cada atividade que a constitui, de modo que o estudante torne-se o protagonista de sua aprendizagem.

2.1.3 Experimentação

A fase da Experimentação é o momento em que o pesquisador conhece o lócus e aplica a Sequência Didática, colocando em prática todo o dispositivo construído, efetuando as correções necessárias para o bom andamento da experimentação.

A Sequência Didática é constituída por determinado número de aulas (seções) planejadas e analisadas previamente, objetivando observar situações de aprendizagem dos conceitos pesquisados, possibilitando verificar a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica. (PAIS, 2001, p. 102)

Machado (1999) destaca que essa fase da Engenharia é clássica, tendo seu início no contato do pesquisador/professor/observador(es) com a população de alunos-objetos do estudo. A fase da Experimentação supõe:

- a explicitação dos objetos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.). (MACHADO, 1999, p. 206)

Destacamos que nesse momento não pode haver interferência explícita do pesquisador, uma vez que explicações ou dicas que podem facilitar as resoluções por parte dos estudantes, vão interferir diretamente no resultado.

2.1.4 Análises *a Posteriori* e Validação

Nesta última fase da Engenharia Didática, ocorre a análise do conjunto de informações coletadas durante a experimentação, isto é, a produção dos alunos, as observações realizadas em relação ao comportamento deles durante o desenvolvimento da sequência didática e todos os dados construídos no decorrer da experimentação.

De acordo com Pais (2001), a análise *a posteriori* aumenta sua credibilidade quando complementa os dados obtidos por meio de outras técnicas, como questionários, entrevistas, gravações, diálogos, entre outras, uma vez que essas facilitam a compreensão do fenômeno.

Artigue (1996) afirma que esta fase contempla as expectativas declaradas na análise *a priori* e o confronto da análise *a priori* e análise *a posteriori*, validando, ou não, a hipótese da pesquisa. Dessa forma, a fase validação exige atenção redobrada, uma vez que ela certifica a existência do caráter científico. Portanto, a Engenharia Didática é uma metodologia fundamentada em registros de estudo de caso, cuja validade é interna e permeia o contexto da pesquisa realizada.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta seção, apresentamos os aspectos históricos das Funções, delineando a evolução histórica do conceito e destacando a importância da história da Matemática como metodologia de ensino, em seguida discorremos sobre aspectos matemáticos e curriculares da Bijeção de Função, enfatizando a forma que os documentos oficiais abordam o tema, e os resultados da pesquisa de campo que revela a forma como esse objeto matemático é ensinado na prática, seguido de uma revisão literária e da Tendência da educação matemática onde enfatizamos o Ensino por atividades experimentais e a Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

3.1 Aspectos históricos das Funções

Nesta parte do trabalho buscamos promover uma reflexão sobre a importância da história da Matemática como metodologia de ensino, destacando a origem e a evolução do conceito e notação de função ao longo do tempo.

3.1.1 A Importância da História da Matemática como Metodologia de Ensino

A matemática tem sido vista por muitos, como algo complexo, de difícil compreensão, destinado aos poucos que têm o dom de aprendê-la. Essa visão somada à maneira como seus conteúdos matemáticos têm sido trabalhados, resultam no desinteresse dos alunos pelo estudo dessa disciplina.

Na maioria dos casos, os conhecimentos matemáticos são apresentados como uma coleção arbitrária de informações descontextualizadas, sem aplicação prática, destinada a um grupo seletivo, desvinculados das demais atividades humanas, distante da realidade e que só serve para fortalecer a aversão e a resistência que a maioria dos alunos demonstra por essa disciplina.

Quando esses assuntos são trabalhados de forma abstrata e desvinculados do cotidiano, fortalecem a ideia de que a Matemática é estática, pronta e acabada, uma ciência onde não há nada a ser descoberto ou inventado, imutável e absoluta, e que sempre teve a forma que nos é apresentada na escola.

Ao tratar essa problemática, D'Ambrosio (2003) nos lembra que

É preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo, através de processos que não estimulam os alunos à participação. É preciso que eles deixem de ver a matemática como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdos é

vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas.
(D'AMBROSIO, 2003, p. 57)

Nesse sentido o autor destaca a necessidade de uma metodologia que mostre ao aluno que a matemática é passível de mudanças e a transmissão de seus conteúdos é um conjunto dinâmico de conhecimentos e técnicas.

Chaquiam (2017) destaca que

[...] os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada. (CHAQUIAM, 2017, p. 14).

A utilização da história nas aulas de matemática, quando apresenta a origem, a evolução e as peculiaridades do objeto matemático, possibilitam ao aluno perceber e identificar as transformações sofridas pelo conteúdo ao longo da história, bem como as contribuições de diversos povos em diferentes lugares e épocas até chegarem à forma que são apresentados no presente, na escola, despertando assim, o interesse e o gosto pelo estudo desse conteúdo, uma vez que o mesmo "se aproxima" do estudante.

Lopes e Ferreira (2013) corroboram com essa ideia ao afirmar que o processo de construção e a evolução dos conhecimentos matemáticos ao longo do tempo podem facilitar sua compreensão e significação dentro do espaço escolar, uma vez que a história da matemática contextualiza historicamente, torna-se um objeto matemático capaz de mostrar o porquê estudar certo conteúdo, construindo um olhar crítico sobre o assunto trabalhado, tornado assim as aulas mais dinâmicas e interessantes. (LOPES; FERREIRA, 2013, p. 76-77)

Chaquiam (2017, p. 14) reforçar essa ideia ao destacar que "pesquisas atuais indicam que a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula".

Dessa forma, o contexto histórico do conteúdo matemático estudado, faz com que o aluno perceba que a Matemática não é fechada em si mesma, passando a compreendê-la como uma herança cultural de diferentes povos, construída e desenvolvida ao longo de vários séculos, resultante da busca de soluções para situações do dia-a-dia, descobrindo-a como algo dinâmico e em evolução, por meio da comparação entre esse conhecimento ao longo da história.

Miguel e Morim (2013, p. 8) consideram que a abordagem histórica dos conteúdos é a melhor estratégia em sala de aula, destacando que ela "é fonte de seleção e constituição de métodos para a elaboração de sequências adequadas aos diferentes tópicos de ensino da matemática escolar". (MIGUEL; MIORIM, 2013 apud LOPES; FERREIRA, 2013, p. 81)

Neste sentido os pesquisadores destacam a importância da conexão entre o conteúdo e sua construção histórica, não só como metodologia de ensino, mas, sobretudo como ferramenta que favorece a elaboração de uma sequência didática eficaz, uma vez que ao conhecer a história da criação e do desenvolvimento do conteúdo trabalhado, o professor já conhece de antemão as dificuldades enfrentadas na sua construção.

De acordo com os PCN, o uso da História da Matemática possibilita o desenvolvimento de atitudes e valores do aluno diante do conhecimento matemático (BRASIL, 2000a, P. 45)

Essa ideia é reforçada por Brolezzi (1991) ao afirmar que a compreensão da evolução histórica dos significados permeia um ensino significativo, porque possibilita reconstruir significados com os alunos e que seu estudo na totalidade fornece a "cada tópico do currículo, uma razão de ser, uma utilidade que transcende a sua possível aplicação prática imediata" (BROLEZZI, 1991, apud LOPES; FERREIRA, 2013, p. 80-81).

Assim cai por terra a ideia de que a Matemática é algo estático, pronto e acabado, que surgiu sem nenhum propósito e da maneira que a conhecemos na sala de aula, sem utilidade ou aplicação prática, distante da nossa realidade cotidiana.

Apropriando-se de um conhecimento histórico mais profundo o professor terá à disposição mais que conhecimentos biográficos ilustrativos ou saber localizar o conteúdo no espaço e no tempo, sendo capaz de permear os processos de criação da Matemática provendo aos alunos o acesso ao conhecimento. (BROLEZZI, 1991, p.51).

Esse conhecimento possibilita ainda, ao professor prever erros e compreender as dificuldades dos alunos, considerando que um objeto matemático que a humanidade construiu ao longo de muito tempo, certamente levará um bom tempo para ser assimilado pelo estudante.

Berlinghoff e Gouvêa (2008, p. 3), destacam que saber como as dificuldades com certos conteúdos matemáticos foram superadas ao longo da história permite ao

professor definir estratégias para que os estudantes consigam superar esses obstáculos.

Dessa forma, a apresentação do conteúdo matemático atrelado ao seu desenvolvimento histórico é uma ótima estratégia pedagógica, pois possibilita ao professor prever erros e compreender as dificuldades dos alunos, além de quebrar o paradigma de que a Matemática é destinada a um grupo seletivo e que seus conteúdos surgiram da forma como conhecemos, sem sentido e desprovida de utilidade.

Portanto, a História da Matemática é uma ferramenta metodológica capaz de motivar e despertar a curiosidade, o interesse e o envolvimento do aluno pelo estudo do conteúdo abordado, uma vez que a contextualização histórica do conteúdo matemático em pauta mostra que o mesmo surgiu com um propósito, como fruto da contribuição de diversas pessoas e povos em diferentes épocas, e possui uma aplicação prática no cotidiano desse estudante.

3.1.2 A Evolução Histórica do Conceito de Função

Em todos os campos da Matemática, bem como em outras ciências, é notória a necessidade de trabalhar com diversas representações para facilitar a compreensão e a construção do conhecimento acerca do objeto de estudo, estabelecendo assim uma comunicação mais efetiva. O estudo das funções apresenta, de forma explícita, uma grande diversidade dessas características, uma vez que uma função pode ser representada na forma algébrica ou gráfica, e também por meio de tabelas e gráficos.

O PCN+ reforça que

“O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática” (BRASIL, 2002, p.121).

O estudo do conteúdo Função é de fundamental importância para a Matemática, bem como para outros campos do conhecimento, uma vez que ela apresenta uma riqueza de linguagens e representações possibilitando modelar, equacionar, representar e solucionar os mais diversos problemas. Mas como surgiu e como ocorreu o processo histórico evolutivo do conceito de Função?

Embora não exista um consenso entre vários autores em relação ao período em que surgiu o conceito de função, sabe-se que ele foi originado a partir da

necessidade e busca do homem em compreender e descrever fenômenos naturais, bem como na tentativa de solucionar problemas do cotidiano.

Ao tratar sobre o desenvolvimento do conceito de função Sá, Souza e Silva (2003, p.1) destacam que "quando o homem levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional".

Para conhecer a quantidade de animais que havia no rebanho, os pastores utilizavam pedrinhas e um saco, colocando nesse uma pedrinha para representar cada ovelha que saía a pastar. À noite, ele retirava uma pedrinha do saco, cada vez que uma ovelha entrava no cercado.

Conforme Ifrah (2005):

Tudo começou com este artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata. (IFRAH, 2005, p.25)

Esse método de relacionar ou associar demonstra a intuição de unicidade, onde o processo de contagem é realizado por meio da correspondência entre objetos, que relaciona um conjunto de pedras com um conjunto de animais, o que evidencia a existência de uma noção de funcionalidade.

Esse provável método de contagem estava baseado em algum método simples que utilizava o princípio de correspondência biunívoca, dessa forma, nessa época, o conceito de função tem suas origens no surgimento do conceito do número. (VAZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, apud MACIEL, 2011, p. 10).

Zuffi (2016) afirma que:

"Podemos encontrar este 'instinto de funcionalidade', que precede uma ideia mais geral de função, desde cerca de 2000 A.C., em cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como "funções tabuladas", destinadas a um fim prático". (ZUFFI, 2016, p. 2)

Aos babilônios também é atribuída a construção de tabelas em argila, "onde para cada valor na primeira coluna havia um número na segunda, que era o resultado da multiplicação do número da primeira por uma constante". (SÁ, SOUZA e SILVA, 2003, p. 125)

Essa ideia de dependência, encontrada nessas tabelas demonstra a existência, mesmo de forma rudimentar, da ideia do conceito de função. Guimarães (2010) assegura que "não é prudente supor que o conceito de função já estava sendo formado [...] o que podemos afirmar é que o instinto de funcionalidade já se fazia útil, presente e necessário há muitos séculos". (GUIMARÃES, 2010, p. 21)

Segundo Boyer (1974, p. 193), durante o período da Idade Média, "Nicole Oresme (1323-1382), matemático francês, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes, para descrever diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo relacionados durante o movimento de um corpo que se desloca com aceleração constante" (BOYER, 1974, p. 193 apud MAGARINUS, 2013, p. 16), o autor afirma ainda que "os termos latitude e longitude, são equivalentes à nossa ordenada e abscissa". (BOYER, 1996, p. 181 apud BUENO; VIALI, 2009, p. 39)

De acordo com Sá, Souza e Silva (2003, p. 127), no século XVI, ocorreu intenso avanço na Álgebra, quando François Viète (1540-1630) inicia os estudos baseados em parâmetros e variáveis, denominada **lógica speciosa**. Maciel (2011) corrobora com essa ideia ao asseverar que

"Viète (1540-1603) contribuiu fortemente para o avanço da Álgebra em seu trabalho *In artem*, no qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico foi fortemente influenciado. Nesse texto, o francês introduziu a prática de se utilizarem vogais para representar incógnitas e consoantes para a representação de valores constantes". (MACIEL, 2011, p. 12-13)

Conforme EVES (2004), antes da notação de Viète, utilizava-se letras ou símbolos diferentes para representar as potências de uma mesma quantidade. Dessa forma, "o que se indica hoje por x , x^2 e x^3 era expresso por Viète como A , A *quadratum* e A *cubum*". (EVES, 2004 apud MACIEL, 2011, p. 13)

Mendes (1994) destaca que Galileu Galilei (1564-1642) utilizou a matemática para modelar os fenômenos da natureza, modelando relações de variáveis interdependentes, para entender a como ocorriam os fenômenos, objetivando descrever mudanças da natureza e que o estudo de movimento originou os conceitos de relação entre variáveis e o de função ou, embora Galileu não tenha formalizado o conceito de função (MENDES, 1994, p. 21-22 apud SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p.127).

Zuffi (2016, p. 3), cita que "Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o quantitativo nas suas representações gráficas. Conforme Monna (1972, p. 58, apud BUENO; VIALI, 2009, p. 40) "Descartes,

com sua aplicação de métodos algébricos à geometria, abriu o caminho para a introdução da noção de função que, gradualmente, se desenvolveu até sua forma moderna”.

Bueno e Viali (2009) asseguram que

"A introdução de funções escritas através de equações iniciou uma verdadeira revolução no estudo de matemática. O uso de expressões analíticas, regidas por operações e relações específicas, introduzido, independentemente, por Pierre Fermat (1601–1665) e René Descartes, originou características específicas do estudo do tema. Proveniente da álgebra aplicada à geometria, essa nova forma de representar as funções logo se estendeu a outras áreas da Matemática e, especialmente, ao desenvolvimento do cálculo diferencial e integral". (BUENO; VIALI, 2009, p. 40)

No século XVIII o **Problema da Corda Vibrante**, mexeu com o raciocínio dos matemáticos da época e influenciou na reformulação do conceito de função, já que na época não era comum a representação de uma função por meio de uma expressão analítica, definida por uma série de potências, para solucionar problemas da matemática aplicada ao conceito relacionado à dependência funcional. (CORREIA, 1999, MACIEL, 2011, p. 15).

Em Mendes (1994) encontramos a definição que Fourier deu a função:

"Acima de tudo deve ser destacado que a função $f(x)$, para a qual esta prova se aplica, é inteiramente arbitrária, e não sujeita a uma lei de continuidade... Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores que são dados à abscissa x , e existe um número igual de ordenadas $f(x)$... Nós não supomos estas **ordenadas** sujeitas a uma lei comum: elas se sucedem de qualquer maneira que seja e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade única". (MENDES, 1994, p. 40, apud, SÁ, SOUZA e SILVA, 2003, p. 132)

No final do século XVIII, surgiram muitos absurdos e contradições na Matemática, evidenciando que era essencial buscar uma fundamentação rigorosa da análise, para formalizar e fundamentar a Matemática. Dessa forma, a ideia de função precisou ser cuidadosa e claramente estabelecida, com as noções de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, provendo o surgimento da Análise Matemática que tinha como objeto de estudo as funções.

No século XIX Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859), contemporâneo de Cauchy, destacou-se, ao propor uma função que ficou conhecida como "função de Dirichlet":

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x \text{ racional;} \\ b, & \text{se } x \text{ irracional;} \end{cases} \quad \text{com } a \neq b, \text{ } a \text{ e } b \text{ constantes.}$$

Segundo Kliner (1989) a função de Dirichlet não poderia ser escrita como uma série de Fourier, nem representada por uma expressão analítica ou por uma curva feita à mão livre. Ela foi o primeiro exemplo de função descontínua em todos os pontos da função; e a primeira função com restrição explícita do domínio num intervalo (KLEINER, 1989, p.292 apud MACIEL, 2011 p. 19).

O conceito de Função foi construído de forma lenta, durante um longo período de tempo, como fruto da contribuição de vários autores, mas esse conceito começa a tomar consistência em um período recente. Esse fato está explícito no quadro sinótico, a seguir, elaborado por Sá, Souza e Silva (2003), que apresenta de forma organizada e em ordem cronológica, a contribuição de cada estudioso para o processo de evolução do conceito de função.

Quadro 1 - Quadro Sinótico da Evolução do Conceito de Função.

(continua)

Autor	Ano	Contribuição
René Descartes (1596-1650)	-	Chegou a definir função como qualquer potência de x , como $x^2, x^3, \dots$
Isaac Newton (1643-1727)	-	Introduziu o termo “variável independente”.
James Gregory	1667	Na obra <i>Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura</i> , conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita: “Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades $a, b, \dots$ se x resulta de $a, b, \dots$ pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável”.
Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716)	1694	Empregou a palavra <i>função</i> para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva. E na obra <i>História</i> usou a palavra “função” para representar quantidades que dependem de uma variável.
Jakob Bernoulli (1654-1705)	1694	Empregou a palavra função como sendo: quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.
Johann Bernoulli	1718	Definiu da seguinte maneira: “função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes.
Leonhard Euler (1707-1783)	-	Introduziu o símbolo $f(x)$.
D’Alembert (1717-1783)	-	Equação da onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
Daniel Bernoulli (1700-1782)	1753	Tentativa de resposta para o problema da corda vibrante: $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}$

(conclusão)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1797	Na obra <i>Théorie des Fonctions Analytiques</i> , definiu: “Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas”
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1806	Lecons sur le calcul des fonctions: “Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo”.
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)	1822	Afirmou em <i>La théorie analytique de la chaleur</i> que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \frac{n\pi x}{l} \right]$
Benhard Bolzano (1781-1848)	1817	Publicou <i>Functionlehre</i> onde conceituou continuidade muito próxima do conceito atual. Demonstrou o teorema do valor médio
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)	1821	Em <i>Cours d’analyse</i> definiu função: “Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de função dessa variável”. Definiu continuidade através de infinitésimos.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	-	Demonstrou que nem todas as funções podem ser descritas pelas serie de Fourier.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	1837	Definiu função como: “Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x , existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x ”.
Nikolái Lobatchesvsky (1792-1856)	-	Definiu função: “A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x . o valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou

		finalmente, a dependência pode existir mas permanece desconhecida”
Bernhard Riemann (1826-1866)	-	Esclareceu os critérios de integrabilidade, e deu origem ao conceito de “integral de Riemann”.
Philipp Cantor (1845-1918)	-	Desenvolveu a teoria dos conjuntos.
Karl Weierstrass (1815-1897)	-	Definiu função como uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.
Giuseppe Peano (1858-1932)	-	Definiu três conceitos primitivos que o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.
Nicolas Bourbaki	1968	Em <i>théorie des Ensembles</i> conceituou função de duas maneiras: “Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y , ou relação funcional de E em F , se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que estejam associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x , e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.” E “um certo subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ ”.

Fonte: Sá, Souza e Silva (2003, p. 136 a 139)

Conforme Guimarães (2010, p. 20) no século XIX notou-se que a definição de função apresentava diversas incoerências e limitações. A Teoria dos Conjuntos de George Cantor, do final do século XIX, e a associação da função às noções de continuidade e de desenvolvimento em séries, ampliaram enormemente sua natureza e seu significado, transformando o conceito de função em uma das pedras angulares da Matemática atual, sendo também utilizada para modelar fenômenos naturais e sociais.

3.2 Aspectos Matemáticos da Bijeção de Função

Nesta subseção vamos nos deter no estudo de Função com ênfase na Bijeção de Funções, por meio da construção de definição, representação e da aplicação do conceito de Função. As referências utilizadas para enunciar e demonstrar os principais resultados presentes nesta subseção foram: Alencar Filho (1980), Ávila

(1994), Campíteli e Campiteli (2006), Gerônimo e Franco (2008), Lima (2014), Neri e Cabral (2011).

3.2.1 Definição de Função

Definição 1. (Função) Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma **função** $f: A \rightarrow B$ (lê-se: função f de A em B) é uma regra de associação, ou relação, entre os elementos de A e B onde a cada $x \in A$ associa um único elemento $f(x)$ (lê-se: f de x) em B , dito **imagem** de x por f . (NERI; CABRAL, 2011, p. 6)

Dessa forma o conjunto A é denominado **domínio** da função $f: A \rightarrow B$ e denotado por $Dm(f)$; e o conjunto B é o **contradomínio**, denominado por $Cd(f)$.

Neste sentido Lima (2014) destaca que uma função $f: A \rightarrow B$ é constituída por três partes: (a) Domínio: (conjunto A) conjunto onde a função é definida (ou conjunto de partida) (b) Contradomínio: (conjunto B) conjunto onde a função toma valores (conjunto de chegada) e (c) Lei de correspondência, isto é, uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento de $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$. (LIMA, 2014, p. 13)

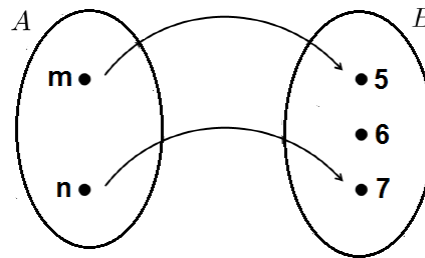
O autor lembra ainda que "não se deve confundir f com $f(x)$: f é a função, enquanto $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio" e menciona duas condições sobre a natureza da regra ou lei de correspondência da função:

- a) Não deve haver exceções: a regra deve fornecer $f(x) \in B$ para todo $x \in A$;
- b) Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x) \in B$. (LIMA, 2014, p. 13)

Em outros termos, uma função $f: A \rightarrow B$ é um tipo especial de relação de A em B onde para cada elemento $x \in A$ corresponde um, e somente um, elemento $y \in B$, ou seja, não pode existir elemento do domínio (conjunto A) que não tenha imagem (elemento correspondente em B) ou possua mais de uma imagem (em B).

É importante destacar que nem todo elemento de B é, necessariamente, imagem de um elemento de A e, também, que elementos distintos de A podem ter a mesma imagem.

Exemplo 1. Dados os conjuntos $A = \{m, n\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$. A relação de A e B dada por $f = \{(m, 5), (n, 7)\}$ é uma função de A em B , porque, para todo elemento de A vale a **Definição 1**.

Figura 1: Diagrama sagital da função f **Fonte:** O autor

O diagrama sagital, também denominado diagrama de flechas, diagrama de setas ou diagrama de Venn é um gráfico utilizado para representar relação entre conjuntos. (KIELING, 2019, p. 45).

Exemplo 2. Sejam $A = \{5, 6, 7\}$ e $\{a, b, c\}$. A relação de A em B dada por $f = \{(5, a), (5, c), (6, b), (7, c)\}$ não é uma função de A em B , porque $f(5) = a$, $f(5) = c$ e $a \neq c$, o que contraria a Definição 1. (b).

Dessa forma, podemos concluir que função é toda relação de A em B , onde cada elemento de A possui um único elemento correspondente em B . Assim:

- i) um elemento $x \in A$, não pode ter mais de um elemento correspondente em B ;
- ii) não pode existir elemento de A que não tenha um elemento correspondente em B .

É importante destacar que, de acordo com a definição, para que uma relação de A em B seja uma função não depende da quantidade de elementos do conjunto A ou do conjunto B , mas sim de que cada elemento do conjunto A tenha um, e um só elemento correspondente em B . Pode existir elementos do conjunto B que não possuam elementos de A associado a eles.

3.2.2 Função Composta

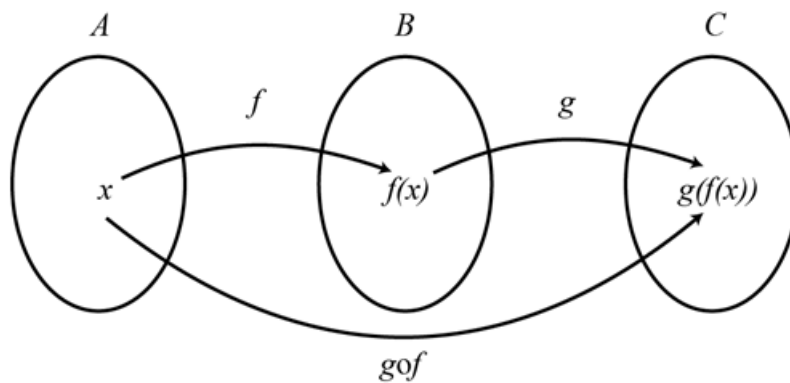
Definição 2: Conforme Alencar Filho (1980): "sejam A, B, C três conjuntos, distintos ou não. Consideremos as duas funções $f = (F, A, B)$ e $g = (G, B, C)$ tais que o contradomínio da primeira e o domínio da segunda coincidam".

Teorema 1. A relação composta $g \circ f = (G \circ F, A, C)$ de g e f é uma função de A em C . (ALENCAR FILHO, 1980, p. 265)

Demonstração :

Pela função f , a todo elemento $x \in A$ corresponde o elemento único $f(x) \in B$ tal que $(x, f(x)) \in F$. Além disso, a todo elemento $y \in B$ corresponde, pela função g , o elemento único $g(y) \in C$ tal que $(y, g(y)) \in G$. Portanto, em particular, ao elemento $y = f(x) \in B$ corresponde, pela função g , o elemento único $g(f(x)) \in C$ tal que $(f(x), g(f(x))) \in G$. Assim sendo, fazendo corresponder, diretamente, a todo elemento $x \in A$ o elemento único $g(f(x)) \in G \circ F$, resulta definida uma outra função $g \circ f = (G \circ F, A, C)$ de A em C tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$, denominada função composta de g e f .

A figura a seguir ilustra a composição da da função f em g , isto é, a função composta de g e f :

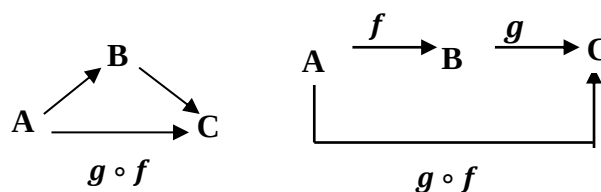
Figura 2: Função Composta de g e f 

Fonte: O autor

Simbolicamente temos: $g \circ f = \{(x, g(f(x))) \mid x \in A\}; A, C\}$

De acordo com Alencar Filho (1980, p. 265) Composição de função é a operação que associa a todo par ordenado da função $f = (F, A, B)$ e $g = (G, B, C)$, uma determinada função $g \circ f = (G \circ F, A, C)$.

A composição de função pode também ser visualizada conforme os diagramas seguintes:

Figura 3: Visualizações da composição de função

Fonte: Alencar Filho (1972, p. 266)

Dessa forma, podemos escrever a seguinte definição:

Definição 3: (Função Composta) Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f , denominamos Função Composta de f e g a função de f em g , indicada por $g \circ f: A \rightarrow C$, e definida por

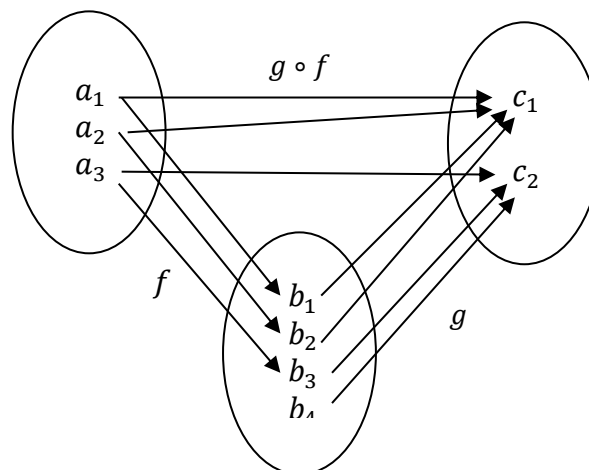
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{LIMA, 2014, p. 20})$$

Exemplo 3: Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ e $C = \{c_1, c_2\}$ e as funções:

$f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$ de A em B ; e $g = \{(b_1, c_1), (b_2, c_1), (b_3, c_2), (b_4, c_2)\}$ de B em C .

A função composta de f e g , cuja notação é $g \circ f: A \rightarrow C$, pode ser representada pela figura a seguir:

Figura 4: Representação da Função Composta $g \circ f$



Fonte: O autor.

Exemplo 4: Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x) = 3x^2$, determine a função composta de f e g .

Resolução:

De acordo com a Definição 4, a função composta de f e g , definida por $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(2x)^2 = 3 \cdot 4x^2$$

$$\text{Portanto: } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 12x^2$$

Teorema 2: Sejam $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$ e $h: E \rightarrow F$ funções tais que $Im(f) \subset C$ e $Im(g) \subset E$. Então:

$$(a) (g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A.$$

$$(b) (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (\text{Propriedade Associativa})$$

Demonstração:

(a) Dado $x \in A$, sejam $y = f(x)$ e $z = g(f(x))$, então $(x, y) \in Gr(f)$ e $(y, z) \in Gr(g)$.

Logo, pela Definição 6, temos que $(x, z) \in Gr(g \circ f)$, ou seja, $z = (g \circ f)(x)$.

$$\text{Portanto, } (g \circ f)(x) = z = g(f(x)).$$

(b) Pelo item (a), para $x \in A$, temos que

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g \circ f)(x) = h \circ (g \circ f)(x)$$

$$\text{Portanto, } ((h \circ g) \circ f) = h \circ (g \circ f).$$

Geralmente a propriedade comutativa não é válida na composição de função, como mostraremos no exemplo a seguir:

Exemplo 5: Sejam Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x + 2$. Dessa forma temos que:

$$i) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(x + 3) + 2 = 3x + 9 + 2$$

$$\text{Assim, } (g \circ f)(x) = 3x + 11$$

Por outro lado,

$$(f \circ g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (3x + 2) + 3 = 3x + 2 + 3$$

$$(f \circ g)(x) = 3x + 5$$

$$\text{Dessa forma } (g \circ f)(0) = 3(0) + 11 = 0 + 11 \Rightarrow (g \circ f)(0) = 11 \text{ e}$$

$$(f \circ g)(0) = 3(0) + 5 \Rightarrow (f \circ g)(0) = 5$$

$$\text{Portanto } (g \circ f)(0) \neq (f \circ g)(0)$$

3.2.3 Propriedades da Composição de Funções

Propriedade 1: A composição de função é associativa, isto é,

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

Demonstração:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g \circ f)(x) = h \circ (g \circ f)(x)$$

$$\text{Portanto, } ((h \circ g) \circ f) = h \circ (g \circ f). \quad \blacksquare$$

Propriedade 2 : A função identidade ($A \subset \mathbb{R}$ e $Id: A \rightarrow \mathbb{R}, Id(x) = x$) funciona como um “elemento neutro” da composição, ou seja: para

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } Id: A \rightarrow A, Id \circ f = f \circ Id = f$$

Demonstração:

De fato, $Id \circ f$, $f \circ Id$ e f têm o mesmo domínio A e ainda:

$$[(Id) \circ f](x) = Id(f(x)) = f(x), \forall x \in Dm(f) \text{ e}$$

$$[f \circ (Id)](x) = f(Id(x)) = f(x), \forall x \in Dm(f)$$

Logo, $Id \circ f = f \circ Id = f$ ■

3.2.4 Função Inversa

Definição 4. (Função Injetora) Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada injetora quando

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in A.$$

ou, equivalentemente, quando,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in A.$$

(IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 221).

Em outras palavras, a função $f: A \rightarrow B$ é dita injetora ou injetiva, se dois elementos diferentes quaisquer de A possuem imagens diferentes em B .

A função $f(x) = 2x$ é injetora, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, $f(x) = x^2 + 1$ não é injetora, pois tomando $x_1 \neq x_2$, por exemplo $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, teremos

$$f(x_1) = f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \text{ e } f(x_2) = f(1) = (1)^2 + 1 = 2$$

$$\text{Logo } f(x_1) = f(x_2).$$

Note que, conforme a Definição 4, para elementos iguais do domínio temos imagens iguais.

Exemplo 6: Prove que a função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, é injetora.

De fato, para todos x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \quad \text{Adicionado } -b, \text{ membro a membro, vem}$$

$$ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow ax_1 - ax_2 = 0 \quad \text{escrevendo } a \text{ em evidência, temos}$$

$$a(x_1 - x_2) = 0. \text{ Como } a \neq 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

Desse modo $x_1 = x_2$.

Portanto, a função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, é injetora. ■

É importante destacar que para determinar a injetividade de uma função devemos analisar seu domínio, pois a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$ não é injetora, mas se tivéssemos $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, essa função seria injetora. Dessa forma podemos concluir que o domínio determina a injetividade de uma função.

Definição 5. (Função Sobrejetora) Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada sobrejetora, se $Im(f) = B$, ou seja, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 220). Note que na Função Sobrejetora o contradomínio é igual à imagem da função.

Exemplo 7: Verifique se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 3$ é sobrejetora.

Seja $y \in \mathbb{R}$. Se $y = 2x - 3$, então $x = \frac{y+3}{2}$. Dessa forma temos que

$$f(x) = f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y.$$

Logo, $f(x) = y$

Portanto, a função f é sobrejetora.

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2$ não é sobrejetora, pois existe um elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) \neq y$, uma vez que para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) \geq 0$. Por outro lado, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, a função seria sobrejetora. Portanto, é por meio da análise do contradomínio de uma função que podemos determinar a sobrejetividade da mesma.

Teorema 3. Seja $f: A \rightarrow B$ uma função. Se existir $g: B \rightarrow A$ tal que $(f \circ g) = I_B$, então f é sobrejetora.

Demonstração:

Seja $y \in B$ e escrevemos $x = g(y)$, então

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I_B(y) = y.$$

Portanto, f é sobrejetora. ■

Definição 6 (Função Bijetora). Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada bijetora se for, simultaneamente, injetora e sobrejetora. (KIELING, 2019, p. 85)

Exemplo 8: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^3$ é bijetora, pois cada número real do domínio, possui uma única imagem real no contradomínio e o contradomínio é igual à imagem, $Cd(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.

Proposição 1. Dados uma função $f: A \rightarrow B$ e subconjuntos $X, Y \subset A$, valem as seguintes propriedades:

- (i) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
- (ii) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$;
- (iii) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$;
- (iv) $f(\emptyset) = \emptyset$.

Demonstração:

(i) Se $y \in f(X \cup Y)$, então existe $x \in X \cup Y$ tal que $y = f(x)$.

Se $x \in X$, tem-se $y \in f(X)$ e, caso $x \in Y$, tem-se $y \in f(Y)$. Em qualquer caso, $y \in f(X) \cup f(Y)$, logo $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$.

Reciprocamente, seja $z \in f(X) \cup f(Y)$. Assim, $z \in f(X)$ ou $z \in f(Y)$. No primeiro Caso, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. No segundo, existe $y \in Y$ tal que $z = f(y)$. Em qualquer caso, existe $w \in X \cup Y$ tal que $z = f(w)$. Assim, $z \in f(X \cup Y)$, mostrando que $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$. As duas inclusões provam a igualdade desejada.

(ii) Se $y \in f(X \cap Y)$, então existe $x \in X \cap Y$ tal que $y = f(x)$.

Como $x \in X \cap Y$, então $x \in X$ e $x \in Y$, logo $y \in f(X)$ e $y \in f(Y)$.

Portanto, $y \in f(X) \cap f(Y)$. ■

(iii) Dado $y \in f(X)$, tem-se que existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

Como $X \subset Y$, tem-se que $x \in Y$, logo $y = f(x) \in f(Y)$. ■

(iv) Suponha que $f(\emptyset) \neq \emptyset$. Assim, existe ao menos um elemento y na imagem $f(\emptyset)$

De f . Logo existe $x \in \emptyset$ tal que $y = f(x)$. No entanto, como $x \in \emptyset$ é impossível,

Concluimos que $f(\emptyset) = \emptyset$. ■

Definição 7. (Função Inversa). Uma função $g: B \rightarrow A$ é denominada inversa da função $f: A \rightarrow B$ quando $g \circ f = id_A$, e $f \circ g = id_B$, ou seja quando g é iversa à esquerda e à direita para f , isto é, quando a função é, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Com base no que foi anteriormente apresentado e na definição 6, podemos

afirmar que uma função $f: A \rightarrow B$ possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Proposição 2. Seja a função $f: A \rightarrow B$. Uma condição necessária e suficiente para que a relação inversa de f , denominada por f^{-1} , seja uma função de B em A : $f^{-1}: B \rightarrow A$, é que f seja uma função bijetora.

Demonstração:

I. Provemos que, se f^{-1} é uma função, então a função $f: A \rightarrow B$ é bijetora.

(a) Sejam $x_1, x_2 \in A$, tais que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Então $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$ e, daí, $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Como f^{-1} é uma função, podemos escrever $x_1 = f^{-1}(y)$ e $x_2 = f^{-1}(y)$. Desse modo $f^{-1}(y)$ é único, e $x_1 = x_2$. Portanto, a função f é injetora.

(b) Seja $y \in B$. Como f^{-1} é uma função de B em A , existe $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$ e, assim, $f(x) = y$. Portanto, f é sobrejetora.

II. Provemos que, se f é bijetora, então f^{-1} é uma função.

(a) Como f é sobrejetora, dado $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e, portanto, $(y, x) \in f^{-1}$. Desse modo $Dm(f^{-1}) = B$.

(b) Seja $y \in B$ e suponhamos $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Então $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$ ou considerando-se que f é uma função, temos $f(x_1) = y = f(x_2)$. Como f é injetora, conclui-se dessas igualdades que $x_1 = x_2$. Isso mostra que, para cada $y \in B$, existe um único elemento x tal que $(y, x) \in f^{-1}$. De (a) e (b) segue que f^{-1} é uma função de A em B , representada por $f^{-1}: B \rightarrow A$. ■

Exemplo 9: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 1$ uma função bijetora, determine a função f^{-1} , inversa de f .

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in f\} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y + 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x-1}{2}\} \end{aligned}$$

Portanto, f^{-1} é uma função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, inversa de f , dada pela lei $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Definição 8. (Função Idêntica). Dado um conjunto A não-vazio ($A \neq \emptyset$), chama-se função idêntica de A a função $i_A: A \rightarrow A$ dada pela lei $i_A(x) = x$, para todo $x \in A$.

Note que para cada A existe uma função idêntica i_A e, ainda que, se

$A \neq B \Rightarrow i_A \neq i_B$, por terem diferentes domínios.

3.2.5 Propriedades da Função Injetora

Propriedade 1. Em toda função $f: A \rightarrow B$ injetora, temos que

$f(X - Y) = f(X) - f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A .

Demonstração:

Considere $t \in f(X - Y)$.

Como $f(X - Y) = \{b \in B; b = f(a), a \in X - Y \subset A\}$,

logo $t \in B; t = f(x), x \in X - Y \Rightarrow t \in B; t = f(x), x \in X \text{ e } x \notin Y$.

Nada impede que $\exists y \in Y; f(y) = t$. Mas como t é injetora, temos que $f(x) = t = f(y) \Rightarrow x = y$.

Assim, $t = f(x) \in f(X)$ e $t = f(x) \notin f(Y)$. Logo $t \in f(X) - f(Y)$.

Portanto se a função $f: A \rightarrow B$ é injetiva, então $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A .

Propriedade 2. A função $f: A \rightarrow B$ é injetora, se e somente se,

$f(A - X) = f(A) - f(X)$ para todo $X \subset A$

Demonstração:

(i) Tomando $t \in f(A) - f(X)$, onde $f(A) = \{b \in B; b = f(x), x \in A\}$ e $\{b \in B; b = f(x), x \in X \subset A\}$

Logo $t \in f(A)$ e $t \notin f(X) \Rightarrow t \in B; t = f(a)$, onde $a \in A$ e $a \notin X \Rightarrow t \in B; t = f(a)$

Assim $a \in A$ e $a \notin X \Rightarrow t \in B; t = f(a)$, onde $a \in A - X$

Dessa forma, $f(A) - f(X) = \{b \in B; b = f(x) \in A - X \subset A\}$.

Propriedade 3. A composta de duas funções injetoras também é injetora.

Se as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são injetoras, então a função composta

$g \circ f: A \rightarrow C$ também é injetora.

Demonstração:

Sejam x e y dois elementos de A tais que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Vamos demonstrar que $x = y$. Com efeito, temos $g(f(x)) = g(f(y))$, e como g é injetora, segue-se que $f(x) = f(y)$, donde, por ser f injetora, $x = y$. Portanto, a função $g \circ f$ é injetora.

Propriedade 4.

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ duas funções e $g \circ f: A \rightarrow C$ a função composta de g e f . Então se $g \circ f$ é injetora, g também é injetora.

Demonstração:

Sejam x e y dois elementos de tais que $f(x) = f(y)$. Vamos demonstrar que $x = y$. Com efeito, por ser g uma função, temos $g(f(x)) = g(f(y))$ ou $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, donde, por ser $g \circ f$ injetora, $x = y$. Logo, a função f é injetora.

3.2.6 Propriedades da Função Sobrejetora

Propriedade 1. A composta de duas funções sobrejetoras também é sobrejetora.

Se as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são sobrejetoras, então a função composta $g \circ f: A \rightarrow C$ também é sobrejetora.

Demonstração:

Seja z um elemento qualquer de C . Como g é sobrejetora, existe, ao menos, um elemento $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Analogamente, sendo f sobrejetora, existe, ao menos, um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo, temos:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Portanto, a função composta $g \circ f$ é sobrejetora.

Propriedade 2.

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ duas funções e $g \circ f: A \rightarrow C$ a função composta de g e f . Então se $g \circ f$ é sobrejetora, g também é sobrejetora.

Demonstração:

Seja z um elemento qualquer de C . Vamos demonstrar que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Com efeito, sendo $g \circ f$ sobrejetora, existe, ao menos, um elemento $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$, ou seja, tal que $g(f(x)) = z$. Denotando por y o elemento $f(x) \in B$, vem que $g(y) = z$. Logo, a função g é sobrejetora.

3.2.7 Propriedades da Função Bijetora

Propriedade 1. A composta de duas funções bijetoras também é bijetora.

Se as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são bijetoras, então a função composta $g \circ f: A \rightarrow C$ também é bijetora.

Demonstração:

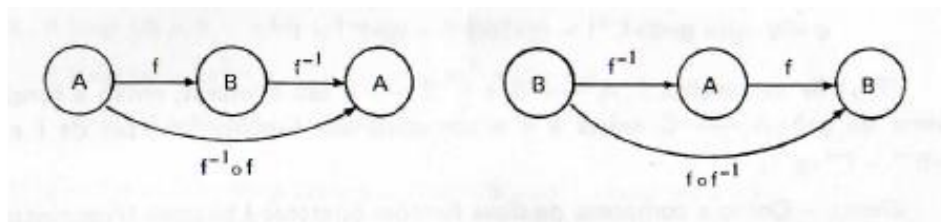
Com efeito, as funções f e g , sendo bijetoras, são ao mesmo tempo sobrejetoras e injetoras. Como a composta de duas funções sobrejetoras também é sobrejetora e a composta de duas funções injetoras também é injetora. Portanto, a composta $g \circ f$ também é simultaneamente sobrejetora e injetora, ou seja, bijetora.

Propriedade 2.

Qualquer que seja a função bijetora $f: A \rightarrow B$, as compostas $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ e $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$ são, respectivamente, iguais às funções idênticas I_A e I_B :

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Figura 5: Representação da propriedade 2 da função bijetora



Fonte: Alencar Filho (1980, p. 273).

Demonstração:

Seja x um elemento qualquer de A e $y \in B$ a sua imagem pela f , isto é, $f(x) = y$, donde, pela definição de função inversa, $f^{-1}(y) = x$.

Portanto:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_A(x)$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = I_B(y)$$

o que demonstra as igualdades $f^{-1} \circ f = I_A$ e $f \circ f^{-1} = I_B$.

Em particular, se f é uma função bijetora de A em A , ou seja, se f é uma permutação de A ($f \in P_A$), temos:

$$f^{-1} \circ f = I_A = f \circ f^{-1}$$

Propriedade 3.

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são duas funções tais que as compostas $g \circ f: A \rightarrow C$ e $f \circ g: B \rightarrow B$ são, respectivamente, iguais às funções idênticas de A e B : $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$, então as funções f e g são bijetoras.

Demonstração:

Como I_A é bijetora, então $g \circ f$ também é bijetora. Logo pela Propriedade 1 (da função bijetora) a função f é injetora e g é sobrejetora.

Analogamente, como I_B é bijetora, então $f \circ g$ também é bijetora. Logo pela Propriedade 1 (da função bijetora), a função f é sobrejetora e a função g é injetora.

Assim sendo, f e g são simultaneamente sobrejetoras e injetoras, isto é, f e g são bijetoras.

Propriedade 4.

Se as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são bijetoras, então a função inversa de $g \circ f: A \rightarrow C$ existe e é a composta das funções inversas de

$$f \text{ e } g: (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demonstração:

Como a composta de duas funções bijetoras é bijetora (Propriedade 1), $g \circ f$ é bijetora, e, portanto, existe a sua inversa $(g \circ f)^{-1}$.

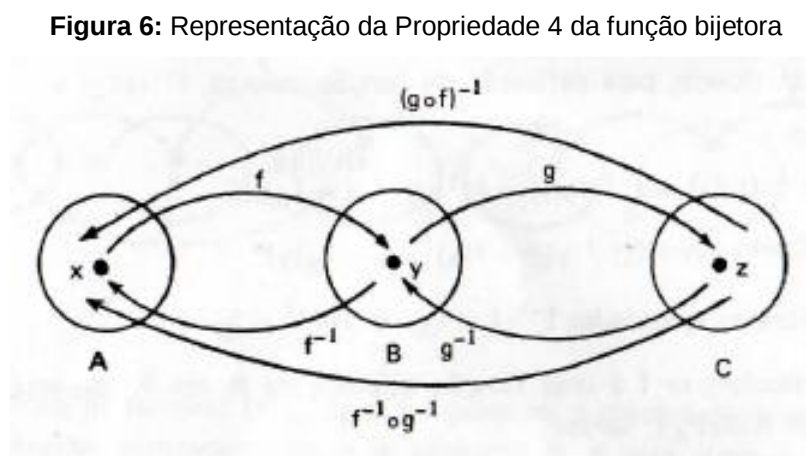


Figura 6: Representação da Propriedade 4 da função bijetora

Fonte: Alencar Filho (1980, p. 274).

Por outra parte, como as funções $(g \circ f)^{-1}$ e $f^{-1} \circ g^{-1}$ têm o mesmo domínio – o conjunto C, o mesmo contradomínio – o conjunto A, para estabelecer que elas são iguais, basta mostrar que é:

$$(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z), \quad \forall x \in C$$

Realmente, temos:

$$\begin{aligned} x = (g \circ f)^{-1}(z) &\Leftrightarrow (g \circ f)(x) = z \Leftrightarrow g(f(x)) = z \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(z) \Leftrightarrow \\ x &= f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \end{aligned} \quad \text{Alencar Filho (1980, p. 274)}$$

Propriedade 5.

Toda função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ é uma função bijetora.

Demonstração:

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$.

Vamos inicialmente provar que ela é uma função injetora.

De fato, para todos X_1 e X_2 em $\mathbb{R}$, temos $f(X_1) = f(X_2) \Leftrightarrow aX_1 + b = aX_2 + b \Leftrightarrow aX_1 = aX_2 \Leftrightarrow aX_1 - aX_2 = 0 \Leftrightarrow a(X_1 - X_2) = 0$.

Como $a(X_1 - X_2) = 0$, com $a \neq 0$, então $X_1 - X_2 = 0$ e portanto, $X_1 = X_2$. Logo a função afim $f(x) = ax + b$ é injetora.

Provaremos agora que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é sobrejetora.

De fato, pois dado $y \in \mathbb{R}$, exibiremos $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Se $y \in \mathbb{R}$ então: $ax + b = y \Rightarrow ax = y - b$, assim temos $x = \frac{y-b}{a}$.

Substituindo $x = \frac{y-b}{a}$ na função $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(x) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y - b + b \Rightarrow f(x) = y.$$

Logo $f(x) = ax + b$ é sobrejetora.

Desse modo, $f(x) = ax + b$ é injetora e sobrejetora.

Portanto, $f(x) = ax + b$ é uma função bijetora.

É importante destacar que existem funções que não são sobrejetoras nem injetoras. Um exemplo disso é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, pois

I) para $y \in \mathbb{R}_+$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = |x|$, portanto f não é sobrejetora;

II) existem x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, e opostos, isto é, $x_1 = -x_2$, tais que $|x_1| = |x_2|$. Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, logo f não é injetora.

3.2.8 Reconhecimento do tipo de Função a partir do seu Gráfico

Para reconhecer, por meio de uma representação gráfica, no plano cartesiano, se uma função f de A em B ($f: A \rightarrow B$) é injetora, sobrejetora ou bijetora, só precisamos traçar retas paralelas ao eixo x e, em seguida, verificar a quantidade de retas e o número de pontos de intersecção dessas retas com o gráfico da função.

Desse modo, dada a função $f: A \rightarrow B$, traçam-se retas horizontais $(0, y)$ com $y \in B$:

1º) se nenhuma reta corta o gráfico mais de uma vez, então f é injetora.

2º) se toda reta corta o gráfico, então f é sobrejetora.

3º) se toda reta corta o gráfico em um só ponto, então f é bijetora.

3.2.9 Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-enumeráveis

Seja I_n o conjunto dos números naturais de 1 até n , ou seja, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}.$$

Definição 9. (Conjunto finito). Um conjunto X chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$. (LIMA, 2014, p. 42)

Se o conjunto X é vazio, ele tem zero elementos, quando esse conjunto é finito e não vazio ele possui n elementos.

Lima (2014, p. 43) afirma que: uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$ significa uma contagem dos elementos de X . Pondo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n$, temos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que é a representação ordinária de um conjunto finito.

Teorema 4. Se X é um conjunto finito então todo subconjunto $Y \subset X$ é finito. O número de elementos de Y não excede o de X e só é igual quando $Y = X$. (LIMA, 2014, p. 44)

Demonstração:

Vamos provar que $X = I_n$, o que torna verdadeiro o teorema x.

Para $n = 1$, as únicas partes de I_1 são $\emptyset$ e I_1 . Supondo o teorema demonstrado para I_n e considerando um subconjunto $Y \subset I_{n+1}$. Dessa forma se $Y \subset I_n$ então, pela hipótese de indução, Y será um conjunto finito cujo número de elementos $\leq n$ e, portanto, $\leq n + 1$. Se porém, $n + 1 \in Y$ então $Y - \{n + 1\} \subset I_n$ e consequentemente (salvo no caso trivial $Y = \{n + 1\}$) existe uma bijeção $f: I_p \rightarrow Y - \{n + 1\}$, com $p \leq n$.

Definiremos então uma bijeção $g: I_{p+1} \rightarrow Y$, pondo $g(x) = f(x)$ para $x \in I_p$ e $g(p + 1) = n + 1$. Segue que Y é finito e seu número de elementos não excede $p + 1$.

Como $p \leq n$, temos $p + 1 \leq n + 1$. Como não pode existir bijeção $f: X \rightarrow Y$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria $Y \subset X$, logo se $Y \subset I_n$ tem n elementos, então $X = I_n$. ■

Corolário 1. Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função injetiva. Se Y for finito então X também será. Além disso, o número de elementos de X não excede o de Y . (LIMA, 2014, p. 45)

Demonstração:

A função f define uma bijeção de X sobre sua imagem $f(X)$. Como a imagem $f(X)$ é uma parte do conjunto Y , segue do Teorema 4 que X é finito, com número de elementos que não excede o de Y . ■

Corolário 2. Seja $g: X \rightarrow Y$ uma função sobrejetiva. Se X for finito então Y também será finito. Além disso, o número de elementos de Y não excede o de X . (LIMA, 2014, p. 45)

Demonstração:

Como a função $g: X \rightarrow Y$ é sobrejetiva, ela possui inversa à esquerda, ou seja, existe uma função $f: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = id_Y$. Logo g é inversa à esquerda de f . Portanto, f é uma função injetiva de Y no conjunto finito X . Segue do Corolário 1 que Y é finito e seu número de elementos não excede o de X . ■

Teorema 5. Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f: I_n \rightarrow A$, então $A = I_n$. (LIMA, 2014, 43)

Demonstração:

Usaremos indução em n . O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponha que ele seja válido para um certo n e considere uma bijeção $f: I_{n+1} \rightarrow A$. Ponhamos $a = f(n+1)$. A restrição de f a I_n fornece uma bijeção $f': I_n \rightarrow A - \{a\}$. Se tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então pela hipótese de indução, concluiremos que $A - \{a\} = I_n$, donde $a = n+1$ e $A = I_{n+1}$. Se, porém, não for $A - \{a\} \subset I_n$, então deve-se ter $n+1 \in A - \{a\}$. Neste caso, existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n+1$. Então definiremos uma nova bijeção $g: I_{n+1} \rightarrow A$ pondo $g(x) = f(x)$ se $x \neq p$ e $x \neq n+1$, enquanto $g(p) = a$, $g(n+1) = n+1$. Agora, a restrição de g a I_n nos dará uma bijeção $g': I_n \rightarrow A - \{n+1\}$. Evidentemente, $A - \{n+1\} \subset I_n$. Logo, pela hipótese de indução, $A - \{n+1\} = I_n$, donde $A = I_{n+1}$. ■

Corolário 1. Se existir uma bijeção $f: I_m \rightarrow I_n$ então $m = n$. Consequentemente, se existem duas bijeções $\psi: I_n \rightarrow X$ e $\psi: I_m \rightarrow X$, deve-se ter $m = n$. (LIMA, 2014, 43).

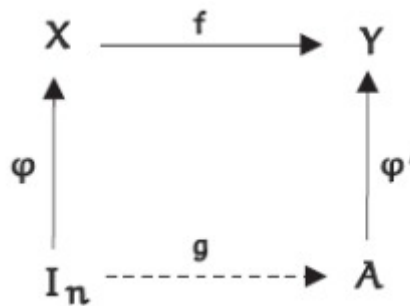
Demonstração:

Supondo que $m \leq n$, então $I_m \subset I_n$. Tomando-se $A = I_m$ no Teorema 5, obtemos $I_m = I_n$ e, portanto $m = n$. ■

Corolário 2. Não pode existir uma bijeção $f: X \rightarrow Y$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria $Y \subset X$. (LIMA, 2014, 44).

Demonstração:

De fato, sendo X finito, existe uma bijeção $\varphi: I_n \rightarrow X$. Seja $A = \varphi^{-1}(Y)$. Então A é uma parte própria de I_n e a restrição de φ a A fornece uma bijeção $\varphi': A \rightarrow Y$.



A composição $g = (\varphi')^{-1} \circ f \circ \varphi: I_n \rightarrow A$ seria então uma bijeção de I_n sobre uma parte própria de A , o que contraria o Teorema 5. Logo não existe a bijeção f . ■

Definição 10. (Conjunto Infinito). Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f: X \rightarrow Y$, X sobre uma parte própria $Y \subset X$. (LIMA, 2014, 49).

Demonstração:

Considerando que $f: X \rightarrow Y$ é uma bijeção, conclui-se pelo corolário 2 do Teorema 5, que X será infinito.

Definição 10.1. (Conjunto Infinito). Um conjunto X é dito infinito quando não é finito. Isto é, se X não é vazio e não importando qual seja $n \in \mathbb{N}$, não existe bijeção $f: I_n \rightarrow X$. (DANTAS, 2021, p. 35).

Borges (2015, p. 39) destaca que: "podemos dizer que conjuntos **infinitos** são aqueles que não conseguimos "contar" todos seus elementos um a um, não conseguimos associar a quantidade de seus elementos a um número natural".

Exemplo 10: O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito, pois dada qualquer função $f: I_n \rightarrow \mathbb{N}$, não importando qual n se fixou, podemos tomar

$k = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$. Como para todo $x \in \mathbb{I}_n$, tem-se $f(x) < k$, logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Assim, f não pode ser sobrejetiva. Portanto, $f: I_n \rightarrow \mathbb{N}$ não é uma bijeção e, podemos concluir que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito.

Em Dourado (2015) temos a seguinte definição para conjunto infinito:

Definição 10.2. (Conjunto infinito). Um conjunto A é infinito se, e somente se, existir um subconjunto próprio de B de A e uma correspondência um-a-um entre A e B ; e o conjunto A será finito se não for infinito. (DOURADO, 2015, p. 42).

Exemplo 11: O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é um conjunto infinito pois se tomarmos, por exemplo, o conjunto dos números naturais pares $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, que é um subconjunto próprio dos números naturais, é possível verificar a existência de uma correspondência um-a-um, (correspondência bijetiva), dada pelo dobro entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números naturais pares, conforme a figura a seguir:

Figura 7: Correspondência bijetiva entre os números naturais e os números naturais pares

Números naturais:	0	1	2	3	4	5	6	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
Números naturais pares:	0	2	4	6	8	10	12	...

Fonte: Dourado, 2015 (Adaptado).

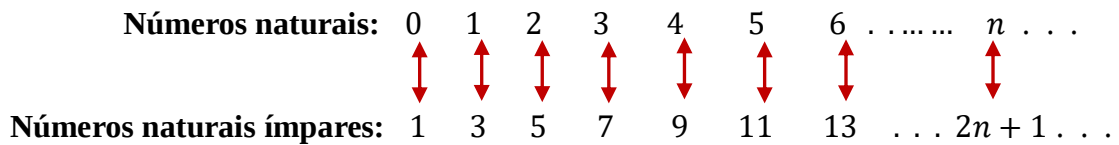
Note que o conjunto $\mathbb{P}$ dos números naturais pares é um subconjunto próprio do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, isto é $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, no entanto existe uma função bijetora $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$, definida por $f(x) = 2x$, que faz corresponder (um a um) cada número natural ao seu dobro. Portanto, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito.

Definição 11. (Conjunto Enumerável). Um conjunto X é enumerável quando é finito ou existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. No segundo caso, X é um conjunto infinito e enumerável e, pondo-se $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, ..., $x_n = f(n)$, ..., tem-se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Cada bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ chama-se enumeração (dos elementos) de X . (LIMA, 2014, p. 48).

Exemplo 12: O conjunto $\mathbb{I}$ dos números naturais ímpares é infinito e enumerável. Pois a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$, definida por $f(n) = 2n + 1$ é uma bijeção, uma vez que ela associa

a cada elemento do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais um elemento distinto do conjunto dos números naturais ímpares, e vice-versa, conforme indica a figura a seguir:

Figura 8: Correspondência bijetiva entre os números naturais e os números naturais ímpares



Fonte: Dourado, 2015 (Adaptado)

A Figura 8 indica que há uma correspondência um-a-um entre os elementos dos dois conjuntos.

Proposição 3: O conjunto dos números naturais ímpares é enumerável.

Demonstração:

Seja $\mathbb{I} = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, o conjunto dos números naturais ímpares e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, o conjunto dos números naturais, provemos que a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ é bijetora. Assim tomando $f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 7, \dots, f(n) = 2n + 1$. É fácil notar que cada elemento $n \in \mathbb{N}$, está associado a um elemento $2n + 1$, do conjunto dos naturais ímpares, dessa forma a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$, definida por $f(n) = 2n + 1$ é bijetora. Portanto, o conjunto dos números naturais ímpares é enumerável. ■

Teorema 6. Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável. (Dantas, 2021, p. 42)

Demonstração: Se X é finito, nada há para demonstrar. Caso contrário, enumeramos os elementos de X pondo $x_1 =$ menor elemento de X , e supondo definidos $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, escrevemos $A_n = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, sendo $A_n \neq \emptyset$, pois X é infinito, definimos $x_{n+1} =$ menor elemento de A_n . Então $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Com efeito, se existisse algum elemento $x \in X$ diferente de todos os elementos x_n , teríamos $x \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo x seria um número natural maior do que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, contrariando o Corolário 1 do Teorema 5. ■

Corolário 1 O conjunto dos números primos é infinito e enumerável, pois é um subconjunto dos naturais.

Teorema 7. Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.
(LIMA, 2014, p. 48)

Demonstração:

Basta definir uma função injetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Para isso, começamos escolhendo, em cada subconjunto não-vazio $A \subset X$, um elemento $x_A \in A$. Em seguida definimos f por indução. Pomos $f(1) = x_X$ e, supondo já definidos $f(1), \dots, f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), \dots, f(n)\}$. Como X não é finito, A_n não é vazio. Poremos então $f(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição indutiva da função $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Afirmamos que f é injetiva. Com efeito, dados $m \neq n$ em $\mathbb{N}$ tem-se, digamos $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), \dots, f(n-1)\}$ enquanto que $f(n) \in C\{f(1), \dots, f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$. A imagem $f(\mathbb{N})$ é, portanto, um subconjunto infinito numerável de X .

Teorema 8. Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Demonstração:

Seja X um conjunto enumerável, logo existe $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ bijeção, de modo que $f(n_1) = x_1, f(n_2) = x_2, \dots, f(n_i) = x_i, \dots$

Agora, tomemos $A \subset X$ com $A = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ e $Y \subset \mathbb{N}$, de modo que $Y = \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}$. Assim, temos que $g: Y \rightarrow A$ é bijetora e portanto como $Y \subset \mathbb{N}$, segue do Teorema 6 que Y é enumerável, e conseqüentemente existe $h: \mathbb{N} \rightarrow Y$ bijetora. Logo, tomando $(g \circ h): \mathbb{N} \rightarrow A$, temos que $(g \circ h)$ é bijetora. Portanto A é enumerável. ■

Teorema 10. Seja X um conjunto enumerável. Se $f: X \rightarrow Y$ é sobrejetiva, então, Y é enumerável.

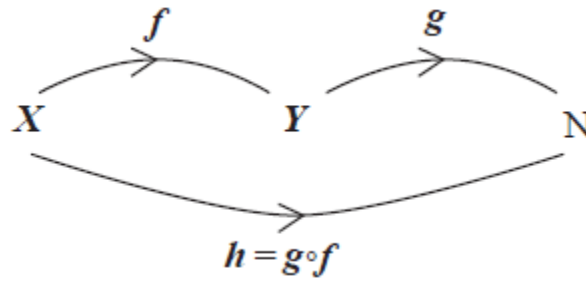
Demonstração:

Se a função $f: X \rightarrow Y$ é sobrejetiva, então existe $g: Y \rightarrow X$, tal que $f \circ g = id_Y$. Logo f é uma inversa à esquerda de g , e, portanto, g é injetiva. Segue-se que Y é enumerável. (LIMA, 2014, p. 50)

Proposição 4. Se $f: X \rightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é finito ou enumerável.

Demonstração: Como Y é enumerável, existe uma bijeção $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$.

Consideremos a função composta $h = g \circ f: X \rightarrow \mathbb{N}$.

Figura 9: Representação da função $h = g \circ f: X \rightarrow \mathbb{N}$ 

Fonte: Gonçalves e Gonçalves (2012, p. 14).

Como f e g são injetivas, o mesmo ocorre com h .

Portanto, $h: X \rightarrow h(X) \subset \mathbb{N}$ é uma bijeção.

Como $h(X) \subset \mathbb{N}$, ele é finito ou enumerável. Logo, X é finito ou enumerável.

Como a composta de duas funções bijetoras é bijetora (Propriedade 1), $g \circ f$ é bijetora.

Teorema 11. Sejam X, Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.

Demonstração:

Sendo X e Y conjuntos enumeráveis é evidente que existem funções injetivas $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$. Logo $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $h(x, y) = (f(x), g(y))$ também é injetiva. Dessa forma, pela Proposição 6, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Assim, vamos definir a função $f(x): \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde $f(m, n) = 2^m 3^n$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, f é injetiva, de onde fornece uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre o conjunto enumerável $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. ■

Proposição 5. A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. (NERI e CABRAL, 2011, p. 21)

Demonstração:

Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis, então ou $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap B \neq \emptyset$.

(i) $A \cap B = \emptyset$.

Como A é enumerável então existe uma função $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ injetora e como existe uma função $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$, onde $\mathbb{P}$ são números naturais pares, $g(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então g é bijetora porque para todo $2n$ existe um n tal que $g(n) = 2n$, e $g(n) = g(m)$ se, e somente se, $2n = 2m \Leftrightarrow n = m$. Logo, existe uma função composta $h_1 = g \circ f$ onde h_1 é injetora. Como B é enumerável, então existe uma função $f: B \rightarrow \mathbb{N}$ injetora e como existe uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I}$ são os números naturais ímpares, $g(n) =$

$2n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então g é bijetora porque para todo $2n + 1 = 2m + 1 \Leftrightarrow n = m$. Logo existe uma função composta $h_2 = g \circ f$ onde h_2 é injetora. Então seja

$$f: (A \cup B) \rightarrow (\mathbb{P} \cup \mathbb{I}) \text{ onde } f(x) = \begin{cases} h_1, & \text{se } x \in A \\ h_2, & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Está bem definida, porque $A \cap B = \emptyset$ e sendo assim, como $\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{N}$ é enumerável, então $A \cup B$ também o é.

(ii) $A \cap B \neq \emptyset$.

Seja $C = A - B$, um conjunto tal que $A \cup B = C \cup B$ e temos C e B conjuntos disjuntos por construção, como $C \cup B$ é enumerável pela parte (i), então $A \cup B$ também é enumerável. (SANTANA, 2010, p. 10) ■

Proposição 6. A união de uma família de conjuntos enumeráveis é enumerável. (NERI e CABRAL, 2011, p. 21)

Demonstração:

Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ conjuntos enumeráveis. Então $\bigcup_{k=1}^n A_k$ é enumerável.

Já sabemos que para $n = 2$ isto é verdade, então vamos supor por indução finita que $\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ é enumerável, então, pela proposição 5, $\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cup A_n$ é enumerável, porque é a união de dois conjuntos enumeráveis, portanto $\bigcup_{k=1}^n A_k$ é enumerável. ■

Definição 12. (Conjunto não enumerável). Todo conjunto infinito que não é enumerável, é dito não enumerável. (GONÇALVES e GONÇALVES, 2012, p. 18)

Teorema 12. O intervalo aberto $]0,1[$ de números reais é um conjunto não enumerável.

Demonstração: Todos os números x entre 0 e 1 tem como expansão decimal a forma $0, x_1 x_2 x_3 \dots$, ou seja, em série de potência escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \text{ e representamos } 0,4 = 0,3999 \dots \text{ porque evidentemente}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} + 0,3 \text{ tende a } 0,4. \text{ Dessa forma, dois números desta representação serão}$$

iguais se, e somente se, para $0, x_1 x_2 x_3 \dots = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ então para cada n -ésima casa decimal temos $x_n \neq y_n$, então $x \neq y$.

Vamos supor por absurdo que intervalo aberto $]0, 1[$ de números reais é um conjunto enumerável, então existe uma função $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(1) = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$f(2) = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$f(3) = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

.

.

.

$$f(n) = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots$$

.

.

.

onde cada $a_{mn} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Seja $z \in]0, 1[$ onde $z = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$ como $z_n = 3$ se $a_{nn} \neq 3$, e $z_n = 1$ se $a_{nn} = 3$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como o número z obviamente está entre 0 e 1, mas $z \neq f(1)$ porque $z_1 \neq a_{11}$, e $z_2 \neq f(2)$ porque $z_2 \neq a_{22}$, e assim sucessivamente. Desse modo, não é possível obtermos $f(n)$ tal que $f(n) = z$, o que é um absurdo. Logo não existe tal função f e, portanto o intervalo aberto $]0, 1[$ de números reais é um conjunto não enumerável. (SANTANA, 2010, p. 11).

Exemplo 13: O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.

Demonstração:

Suponhamos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais seja enumerável. Pelo Teorema 9 temos por que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ é enumerável, mas no Teorema 12 demonstramos que o intervalo aberto $]0, 1[$ que é um subconjunto dos números reais, é um conjunto não enumerável, portanto, temos por absurdo, que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável. ■

Exemplo 14: O conjunto dos números irracionais é não enumerável.

Demonstração:

Seja $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o conjunto dos números irracionais, e suponha que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é enumerável. Dessa forma, como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável e $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, segue da Proposição 5 que $\mathbb{R}$ é enumerável, que é uma contradição. Portanto, o conjunto dos números irracionais é não enumerável. ■

Definição 13. (Conjuntos equipotentes). Um conjunto A diz-se equipotente a um conjunto B se, e somente se, existe uma função $f: A \rightarrow B$ que é bijetora. (ALENCAR FILHO, 1980, p. 284)

Se A é equipotente a B , a função bijetora $f: A \rightarrow B$ e a sua inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ estabelecem uma correspondência biunívoca ou correspondência um a um entre os conjuntos A e B . (ALENCAR FILHO, 1980, p. 284)

Dessa forma, quando existe uma bijeção entre dois conjuntos podemos afirmar que eles são equipotentes, isto é, possuem a mesma quantidade de elementos.

A seguir apresentamos o conceito de cardinalidade de um conjunto, além de demonstrar o modo de comparar a quantidade de elementos de dois conjuntos, destacando resultados surpreendentes.

3.2.10 Cardinalidade de um Conjunto

Para determinar a quantidade de elementos de um conjunto, utilizamos a contagem desses elementos associando cada um deles a um elemento do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Por exemplo, quando queremos determinar o número de dias que compõem uma semana procedemos da seguinte forma:

Associamos a cada dia da semana um elemento do conjunto $\mathbb{N}$, de forma ordenada: domingo 1, segunda-feira 2, terça-feira 3, quarta-feira 4, quinta-feira 5, sexta-feira 6 e sábado 7.

Note que a função f do conjunto $A = \{\text{Dias da semana}\}$ no conjunto $\mathbb{N}$ é uma função injetora, porque para cada dia da semana há um número correspondente distinto, ou seja, $f(\text{domingo}) = 1$, $f(\text{segunda-feira}) = 2$, $f(\text{terça-feira}) = 3$, $f(\text{quarta-feira}) = 4$, $f(\text{quinta-feira}) = 5$, $f(\text{sexta-feira}) = 6$, $f(\text{sábado}) = 7$. Considerando o conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ como contradomínio da função f , essa função continua sendo injetora, por outro lado, f não seria injetora se o contradomínio fosse $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, porque dessa forma pelo menos um elemento de B seria imagem de mais de um elemento do domínio, isto é, pelo menos um dos elementos do conjunto B estaria associado a mais de um dia da semana. Dessa forma podemos afirmar que 7 é o menor número n tal que o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ seja contradomínio da função f de modo que essa função seja injetora.

Lima (2004, p. 38) afirma que "para contar os elementos de um conjunto é necessário usar a noção de correspondência biunívoca, ou bijeção".

Exemplo 15: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. É evidente que não pode existir uma correspondência biunívoca $f: A \rightarrow B$, porque pelo menos um elemento do contradomínio não será imagem de alguma elemento do conjunto A , ou seja essa função não é sobrejetora, portanto A e B não possuem a mesma quantidade de elementos, uma vez que para isso a função precisa ser injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, ou seja bijetora.

Galigleu Galilei, que viveu há quatrocentos anos, descobriu um exemplo curioso de correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais pares $P = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ e o conjunto dos números naturais, representada por $f: \mathbb{N} \rightarrow P$ definida por $f(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, mesmo sendo P um subconjunto de $\mathbb{N}$, temos uma correspondência biunívoca, ou seja uma função bijetora, pois $f(n) = 2n$ faz corresponder cada elemento de P a um elemento distinto de $\mathbb{N}$, então o número de elementos do conjunto P é igual ao número de elementos do conjunto $\mathbb{N}$. (Lima, 2004, p. 42)

Exemplo 16: O funcionário de uma empresa recebeu a tarefa de colocar embalar certa quantia de jarras em caixas com capacidade para uma jarra cada, mas não tem certeza se a quantidade de caixas disponível é suficiente. Para resolver a situação ele pode contar as caixas e as jarras e comparar os resultados ou simplesmente colocar uma jarra em cada caixa, obtendo ao final do processo uma das três situações a seguir:

- I. existem jarras fora da caixa e todas as caixas estão ocupadas;
- II. existem caixas livres e todas as jarras estão embaladas;
- III. todas as jarras estão embaladas e todas as caixas estão ocupadas.

Na primeira situação evidencia-se que o número de jarras é maior que o de caixas, na segunda ocorre o contrário e, finalmente, na terceira situação o número de jarras e de caixas são iguais.

Perceba que nesse exemplo é possível determinar qual conjunto tem mais elementos sem necessariamente conhecer o número de elementos dos conjuntos envolvidos, ou seja, podemos comparar a cardinalidade de dois conjuntos mesmo sem conhecer a cardinalidade desses conjuntos.

A terceira situação do Exemplo 17 apresenta uma bijeção de função, onde o conjunto A é o conjunto das jarras e B , o conjunto das caixas e dessa forma a função $f: A \rightarrow B$ é injetora, pois diferentes jarras de A possuem caixas diferentes correspondentes em B , e também é sobrejetora, pois todas as caixas do conjunto B é correspondente de uma jarra do conjunto A . Do exposto decorre a seguinte definição:

Definição 14. Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma cardinalidade ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f: A \rightarrow B$. Caso contrário eles não possuem a mesma cardinalidade, isto é, suas cardinalidades são diferentes e escrevemos $\#A \neq \#B$. (NERI e CABRAL, 2011, p. 17)

Exemplo 17: Seja A um conjunto não vazio. É evidente que $\#A = \#A$, pois a função identidade $Id: A \rightarrow A$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in A$ é uma bijeção.

A Definição 14 é válida também para conjuntos infinitos, neste caso o símbolo $\#A$ isoladamente não tem nenhum sentido, somente as expressões $\#A = \#B$ e $\#A \neq \#B$ têm. Se A é um conjunto finito, então $\#A$ é um número natural, dessa forma na expressão $\#A = \#B$, a "igualdade" tem dois sentidos distintos: (a) igualdade de números naturais e (b) cardinalidade, "como a "igualdade" ocorre num sentido se, e somente se, ocorre no outro", justifica-se a ideia do conceito de cardinalidade como número de elementos. (NERI e CABRAL, 2011, p. 17 e 18).

Borges (2015, p. 44) destaca que "a definição da cardinalidade de um conjunto é uma boa maneira de descrever, de mensurar o "tamanho" ou a "quantidade" de elementos de um conjunto infinito, que a princípio não conseguimos contar". Dessa forma podemos comparar a quantidade de elementos dos conjuntos infinitos.

Exemplo 18: Qual conjunto possui a maior quantidade de elementos, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais ou o conjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros?

Se usarmos o senso comum de que o todo é sempre maior que a parte, responderemos que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros possui maior quantidade de elementos que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. No entanto, escrevendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ e $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$, nos salta aos olhos a existência de uma correspondência "um a um" entre os elementos dos dois conjuntos, e dessa forma, mesmo sendo $\mathbb{N}$ um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$, temos uma correspondência biunívoca, ou seja, uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

que faz corresponder cada elemento de $\mathbb{N}$ a um elemento distinto de $\mathbb{Z}$. Dessa forma: $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -2$, $f(4) = 2$, $f(5) = -3$, $f(6) = 3$, ...

Assim, temos que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ é igual a cardinalidade do conjunto $\mathbb{Z}$, e indicamos por $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$. Portanto os dois conjuntos, possuem a mesma quantidade de elementos.

Depois desse resultado surpreendente, surge o seguinte questionamento: quem possui mais elementos o conjunto dos números racionais ou o conjunto dos números naturais?

Para responder esse questionamento, vamos utilizar o conjunto $\mathbb{Z}^*$ dos números inteiros não nulos, como $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, e sendo $\mathbb{Z}$ enumerável, segue do Teorema 6 que $\mathbb{Z}^*$ também é enumerável. Agora, seja $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(p, q) = \frac{p}{q}$, temos que pelo Teorema 8, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, e assim como f é sobrejetiva, segue que pelo Teorema 7 que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Pela Definição 9 temos que existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, portanto, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais possuem a mesma quantidade de elementos, isto é, $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$.

O fato exposto anteriormente nos permite concluir que todo conjunto infinito enumerável possui a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, ou seja, a mesma quantidade de elementos, uma vez que um conjunto X infinito é enumerável quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Podemos afirmar que todo conjunto infinito é enumerável? Todo conjunto infinito é equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, ou seja, possuem a mesma cardinalidade dos números naturais? Todos os conjuntos infinitos possuem o mesmo tamanho ou existem infinitos maiores que os outros?

Para tentar responder esses questionamentos, vamos iniciar verificando se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é enumerável. Considerando o Exemplo 15 (p. 53), onde provamos que não existe uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto dos números reais compreendidos entre 0 e 1, e que portanto o intervalo $(0,1)$ é não enumerável.

Suponha que $\mathbb{R}$ é enumerável. Como $(0,1) \subset \mathbb{R}$, e pelo Teorema 6 que afirma que todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável, então o intervalo $(0,1)$ é enumerável, o que é uma contradição, uma vez que ficou provado que o intervalo $(0,1)$ é não enumerável. Portanto, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é enumerável é não enumerável.

Em outras palavras o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais que é infinito possui cardinalidade maior que a cardinalidade dos números naturais. Assim, podemos escrever: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R}$. Essas evidências permitem concluir que existem infinitos maiores que os outros e que todo conjunto infinito possui cardinalidade maior ou igual à cardinalidade do conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Outro fato intrigante é que, conforme demonstrado no Exemplo 14 (p. 57), o conjunto dos números irracionais é não enumerável e portanto, possui mais elementos que o conjunto dos números naturais.

George Cantor foi o matemático que desenvolveu o estudo da cardinalidade de conjuntos infinitos, chegando ao surpreendente resultado:

$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} = \aleph_0 < \#\mathbb{R}$, que o levou a se questionar se existia infinitos maiores que o conjunto dos números reais.

De acordo com Dantas (2021, p.71), Cantor provou que a cardinalidade das partes de qualquer conjunto (finito ou infinito) é sempre maior que a cardinalidade do conjunto original, isso levou-o a imaginar uma hierarquia cada vez maior de números que se estendiam aos números transfinitos, sendo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$1 < 2 < 3 < \dots < n < \dots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots < \aleph_n < \dots$$

Onde $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$, $\aleph_1 = \#\mathbb{R}$, $\aleph_2 = \#(\wp(\mathbb{R}))$, $\aleph_3 = \#(\wp(\wp(\mathbb{R})))$ e assim sucessivamente.

A seguir discorreremos sobre os aspectos curriculares da Bijeção de Função, destacando a importância do estudo de Função e forma como esse conteúdo é contemplado nos documentos oficiais e como eles sugerem que o assunto seja trabalhado.

3.3 Aspectos Curriculares sobre Bijeção de Função

A importância do conceito de Função é evidenciada pela sua presença destacada em vários ramos da Matemática, bem como sua utilização em outras áreas

do conhecimento com, tais como expresar e compreender fenômenos físicos, biológicos e sociais.

A Lei de Diretrizes e Bases (LDB) destaca, que o Ensino Médio, etapa final da educação básica, deve assegurar aos estudantes instrumentos que lhes permitam "continuar aprendendo", promovendo o desenvolvimento da compreensão dos "fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos", formando assim, um indivíduo apto para o trabalho e o cumprimento da cidadania.

Com o intuito de assegurar uma educação com base científica e tecnológica, as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), organiza o Ensino Médio em áreas do conhecimento, onde o estudo da Função apresenta-se na área das Ciências da Natureza e da Matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) o ensino de Função deve

[...] garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando o seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 257)

O documento aponta para a necessidade da utilização de novas metodologias que tenham o aluno como protagonista na construção do seu conhecimento, bem como de modelos que lhe permita interpretar e investigar em Matemática e, dessa forma, continuar aprendendo.

Os PCNEM destacam a necessidade de o aluno perceber "a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação e ideias e permitam modelar a realidade e interpretá-la" (BRASIL, 1998, p. 39).

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+):

"Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas de conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre função para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (BRASIL, 2002, p. 43-44).

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM):

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006, p. 121).

Esse documento aponta para uma metodologia capaz de propiciar uma conexão do objeto Função com outros conteúdos matemáticos, visualização e aplicabilidade desse conteúdo.

Na BNCC o objeto Função está contemplado

Na Competência Específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Habilidade: (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 332)

Competência específica 4:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decréscimo, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 538-539).

Dessa forma, fica evidente a importância do estudo do objeto Função, uma vez que seu conceito, linguagem e representações auxiliam no desenvolvimento de competências e habilidades que promovem a construção do conhecimento de Matemática bem como em outras áreas do conhecimento.

3.4 O Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função na Visão dos Estudantes

Durante o desenvolvimento da disciplina Currículo e Avaliação da aprendizagem em Matemática, do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, foi proposto a realização de uma pesquisa de campo

com o objetivo de compreender os fatores que articulam o ensino-aprendizagem e detectar os principais elementos que dificultam o processo de ensino e aprendizagem.

Após a apresentação e discussão das normas técnicas de aplicação, formas de tabulação, correção padrão dos testes e elaboração de questões, as professoras que ministraram a disciplina elaboraram, com a colaboração dos discentes, os instrumentos de pesquisa que seriam utilizados para coletar os dados do estudo:

- Ofício a ser entregue na instituição onde a pesquisa seria realizada;
- Minuta do trabalho de campo, com apresentação, caracterização e justificativa da pesquisa pretendida.
- Termos de consentimento livre e esclarecido.
- Questionário de dados sócio educacionais e sobre as formas metodológicas de ensino e de avaliação de matemática e do assunto pesquisado.
- Quadro de dificuldades sobre o assunto pesquisado.
- Teste de conhecimentos sobre o assunto pesquisado.

A consulta foi realizada em duas Escolas da rede Estadual de Ensino de Ananindeua-Pa, utilizando uma amostra de 105 alunos de quatro turmas do 2º Ano do Ensino Médio, do turno matutino, sendo duas de cada escola, e teve como instrumento de produção de informação, um questionário contendo perguntas fechadas, abertas e relacionadas, dividido em três partes: a primeira aborda informações pessoais dos estudantes e responsáveis, organizados em quatro categorias: Perfil socioeconômico dos estudantes e família, Currículo, Metodologia e Avaliação; a segunda parte apresenta um quadro com a opinião dos informantes acerca do grau de dificuldades na aprendizagem de alguns tópicos de Bijeção e de Função; e a terceira parte, foi um Teste de Verificação de Aprendizagem, composta por dez questões subjetivas sobre Bijeção. A escolha do 2º ano de Ensino Médio como amostra da pesquisa, justifica-se pelo fato do tema abordado neste trabalho, fazer parte do rol de conteúdos do 1º ano do Ensino Médio, portanto os alunos das turmas pesquisadas já estudaram ou deveriam ter estudado tal conteúdo.

O estudo está organizado da seguinte forma: na primeira parte apresentamos a fundamentação teórica, que possibilitou o aprofundamento do conhecimento do tema e norteou a pesquisa campo. A seguir apresentamos parte dos resultados da pesquisa que são analisados à luz dos conhecimentos obtidos por meio da revisão

bibliográfica e por fim apresentamos as respostas para os questionamentos que originaram a nossa pesquisa.

3.4.1 Revisão de estudos sobre o ensino de bijeção

Nesta parte do trabalho, realizamos uma revisão bibliográfica, no intuito de construir um panorama que facilite a compreensão do assunto, promovendo o norteamento da pesquisa. A análise das obras procurou destacar: objetivo, metodologia adotada, resultados obtidos, técnicas de sistematização das informações, técnicas de análise, conclusões/sugestões do autor, pois acreditamos que:

Os estudos de revisão consistem em organizar, esclarecer e resumir as principais obras existentes, bem como fornecer citações completas abrangendo o espectro de literatura relevante em uma área. As revisões. [...] Muitas vezes uma análise ou assunto das publicações pode contribuir na reformulação histórico do diálogo acadêmico por apresentar uma nova direção, configuração e encaminhamento. (VOSGERAU; ROMANOWSKI, 2014, p. 167)

Com o objetivo de organizar e sistematizar o nosso estudo, adotamos as categorias definidas por Silva (2014, apud SILVA, 2018, p. 32), que as dividiu em três categorias: estudos diagnósticos, que são aqueles que analisam e identificam algumas dificuldades dos alunos, durante o processo de ensino e aprendizagem; estudos experimentais, que se propõem a realizar atividades voltadas ao ensino de determinado assunto, com o objetivo de diminuir e/ou superar dificuldades e/ou aumentar a eficácia do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos; e estudos teóricos, que apresentam aspectos conceituais sobre o conteúdo estudado.

Estudos diagnósticos

Em Santos (2013), temos uma dissertação com o título: O Ensino das Funções Afim e Quadráticas por Atividades, que apresenta como questão norteadora: “Quais os efeitos de um conjunto de atividades sobre função afim e quadrática no desempenho de alunos do 1º ano do ensino médio?” E tem como objetivo investigar as contribuições de atividades para o processo de compreensão do conteúdo de funções afim e quadrática.

Neste estudo, a autora observou como um conjunto de atividades pode ser utilizado como um recurso metodológico para o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse intuito, ela aplicou uma sequência de atividades que propiciaram os alunos: observar, inferir, testar e concluir, conceitos, propriedades, utilização e aplicação dos conteúdos de Função Afim e Função Quadrática.

A metodologia utilizada foi baseada na Engenharia Didática, de Michèle Artigue e para elaboração das atividades em análises de situações de ensino, ela utilizou a perspectiva da didática da matemática, proposta por Brousseau. A decisão de trabalhar com modelagem matemática e o ensino por atividades, foi tomada após o estudo e análise do levantamento bibliográfico. A pesquisa foi desenvolvida em uma Escola Estadual de Belém, tendo com amostra 30 alunos, de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio.

Os resultados da pesquisa mostraram que a intervenção proposta, melhorou a aprendizagem dos conteúdos matemáticos trabalhados, promovendo o desenvolvimento de habilidades de observação, de proposição, de diálogo, de elaboração de texto, de interpretação, de autonomia na busca de caminhos para a resolução das questões e na construção dos conceitos e noções em relação aos conteúdos matemáticos tratados.

A autora concluiu que houve melhora considerável na aprendizagem e que o ensino por atividades e modelagem matemática contribui para o envolvimento dos alunos acarretando um aumento significativo no nível de aprendizagem sobre os conteúdos abordados.

Estudos experimentais

Em Silva (2017), temos uma dissertação que trabalha o tema A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções, que tem como objetivos: investigar o impacto da abordagem geométrica no estudo das funções, e certificar-se de como ela pode contribuir para a aquisição de competências em outras áreas do conhecimento; Fazer uma abordagem que forneça um sentido no estudo de algumas funções estabelecendo algumas conexões entre as propriedades das funções e seus significados, em aplicações em outras áreas do conhecimento.

A metodologia adotada foi a Engenharia Didática. A pesquisa foi realizada no Centro de Ensino Médio 02 de Planaltina-CEM-02, localizado em uma cidade satélite do Distrito federal, no setor educacional, região central da cidade de Planaltina, no turno da noite. A amostra foi constituída por professores (de Física, Química, Biologia, Geografia e Sociologia) e os alunos de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio

composta por 40 alunos. Os dados foram coletados por meio de, uma entrevista composta de 10 perguntas pertinentes ao tema abordado, proposta aos professores, tendo em vista verificar o quanto o ensino de Matemática, e, sobretudo a abordagem geométrica, está presente em outras áreas do conhecimento, servindo como aporte a essas disciplinas; e a aplicação de atividades para os alunos, visando analisar o seu domínio na interpretação de gráficos para a resolução de questões de Matemática e de outras áreas do conhecimento, bem como a receptividade dos mesmos quanto a esse tipo de abordagem.

Os resultados obtidos apontaram que a Matemática está presente em todas as disciplinas pesquisadas e que trabalho interdisciplinar pode contribuir para desenvolver a habilidade de fazer a leitura de gráficos de funções por parte dos discentes, permitindo ao autor concluir que a abordagem geométrica das funções torna o conteúdo mais palpável, favorecendo tanto no estudo da Matemática quanto de outras disciplinas, permitindo visualizar e compreender fenômenos, que se representados por meio de um texto ou de forma algébrica, ele não compreenderia.

Em Guimarães (2010), temos uma dissertação que versa sobre Atividades para Aprendizagem do Conceito Matemático de Função, com o objetivo de facilitar o ensino e a aprendizagem do conceito matemático de função. Segundo a autora, a escolha do tema foi motivada pela constatação das dificuldades dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio com o tema funções.

A metodologia aplicada foi a Engenharia Didática. A pesquisa foi realizada em uma escola Estadual de Campinas-SP e uma escola Cooperativa – Araraquara-SP. A amostra foi composta por 86 alunos de quatro turmas do 1º ano do Ensino Médio, sendo duas turmas de cada escola. A coleta de dados foi realizada por meio da aplicação de folhas de atividades, resolvidas em grupos pequenos de estudantes.

Os resultados obtidos possibilitaram a análise e comparação com as observações prévias, apontando para a necessidade de uma reformulação de alguns trechos das folhas de atividades, tornando ainda mais positivos, os resultados de sua aplicação. Tudo isso levou a pesquisadora a concluir que a dinâmica, em geral, estimulou e incentivou a participação dos estudantes no seu próprio processo de aprendizagem. A autora destaca que o material elaborado pode auxiliar outros profissionais da área, mesmo que seja necessário fazer pequenas alterações para torná-lo compatível com cada realidade.

O trabalho de Silva (2018) é uma dissertação que tem por título O Ensino de Função Afim por Atividades: experiência em uma escola pública do Estado do Pará. Apresenta os resultados de um estudo, com o objetivo de avaliar os efeitos que uma sequência didática tem sobre os discentes quando da resolução de questões relacionadas à função afim, partindo da seguinte questão norteadora: quais os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente do modelo tradicional, têm para a resolução de questões envolvendo função afim?

A metodologia adotada foi Engenharia Didática, estando as suas etapas descritas ao longo do trabalho. A pesquisa foi desenvolvida a partir da análise bibliográfica de trabalhos que abordam a temática, seguida da aplicação de questionários, testes e uma sequência didática, aplicada a uma amostra de 25 alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola pública no município de Belém.

Os resultados evidenciaram uma melhora na compreensão do conceito de função afim, avanços progressivos dentro do processo de discussão dos conceitos e definições matemáticas trabalhadas, bem como um aumento efetivo da participação dos alunos nas aulas. O autor concluiu que houve melhoras significativas na compreensão dos conceitos relacionados à função afim e que a metodologia adotada na pesquisa favoreceu a investigação da aplicação da sequência didática elaborada.

O autor ressalta que para utilizar a sequência didática proposta neste trabalho, é necessário primeiro identificar as dificuldades dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos do ensino fundamental e, concomitantemente, utilizar os recursos tecnológicos disponíveis, para desenvolver as atividades que versam sobre a construção e leitura do gráfico da função no plano cartesiano, a exemplo do Geogebra.

Estudos teóricos

Em Espírito Santo (2019) temos uma dissertação com o tema Conjuntos infinitos e funções bijetivas: uma abordagem no ensino básico, com o objetivo de formalizar a definição de conjunto infinito na educação básica através do conceito de função bijetiva, tornando o aluno capaz de diferenciar um conjunto infinito de um conjunto finito muito grande. A metodologia adotada foi a pesquisa bibliográfica. Para defender a ideia de que o estudo de conjuntos infinitos é importante como introdução a utilização de conceitos abstratos e ainda ajuda a amadurecer os conceitos fundamentais de conjuntos e funções, a autora utiliza como referências o trabalho do

PROFMAT (BACCARIN, 2013), o livro (GRIFFITHS, 1975) e o livro (ARAGÓN et al., 2011). Em seguida, é trabalhada a definição de conjunto infinito, partindo da ideia de que bijeções só podem ser definidas entre conjuntos com mesma cardinalidade, pautando-se no trabalho do PROFMAT (BORGES, 2015) e os livros (LIMA, 2016) e (GRIFFITHS, 1975).

A pesquisadora realiza uma pesquisa descritiva em alguns livros didáticos nacionais, com o objetivo de se fazer uma sondagem para verificar de que forma os conceitos de conjunto finito e funções aparecem em tais livros, bem como se existe algum tipo de abordagem relacionada a conjunto infinito. Os resultados obtidos foram organizados e apresentados por meio de imagens e análise dos livros, avaliando a forma como são abordados os conceitos de conjuntos e função, bem como a definição de conjunto finito e conjunto infinito.

A autora concluiu que diante de toda a sondagem realizada em alguns livros didáticos nacionais, notou-se a ausência em quase todos de uma abordagem sobre conjunto infinito. A importância de se explorar o conceito de infinito através de atividades propostas que não estão nos livros permite aos estudantes formular hipóteses para a resolução das atividades, fazendo o aluno pensar matematicamente o que proporciona um maior entendimento em conceitos abstratos envolvendo bijetividade de funções.

Em Melo (2017), temos uma dissertação que trabalha o tema Modelagem matemática no estudo das funções afim e quadrática, que tem como objetivo principal apresentar a modelagem matemática atrelada à teoria de registro de representação semiótica como uma perspectiva de ensino que auxilia professores de Matemática em suas aulas, bem como o desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino básico, que possa auxiliar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem em Matemática. A metodologia aplicada na pesquisa foi a modelagem matemática de Bassanezi atrelada à teoria de registro de representação semiótica de Duval seguidas da aplicação e análise da avaliação diagnóstica.

O estudo iniciou a partir de um levantamento bibliográfico, complementando pela análise de textos didáticos, seguidos da análise de alguns trabalhos acadêmicos que abordam a mesma temática, nos quais se percebeu que as propostas de utilização dos temas no ensino básico eram bem amplas e vêm ganhando espaço, reforçando assim, a relevância de se discutir o tema, possibilitando a elaboração de

sequências didáticas a serem utilizadas como ajuda no processo de ensino e aprendizagem, visando esse ser o produto final do trabalho dissertativo.

A amostra da pesquisa foi composta por 48 alunos de duas turmas do 1º Ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio Henrique Justino de Melo. Os resultados foram obtidos por meio da aplicação de uma avaliação diagnóstica com duração de 2 aulas, que possibilitou identificar a acentuada dificuldade dos estudantes em conceitos matemáticos básicos como operações com inteiros, além da dificuldade em interpretação textual, e os resultados da pesquisa bibliográfica, possibilitaram a construção uma sequência didática voltada para o trabalho docente baseado na Modelagem Matemática e a Teoria de Registro de Representações Semióticas. Diante do exposto, o autor concluiu que o uso da Modelagem Matemática associada à Teoria de Registro de Representações Semióticas traz ganho ao processo de ensino e aprendizagem, pois possibilita aos alunos a conexão entre a matemática da escola com a matemática do seu cotidiano e aos professores uma dinâmica melhor na sua prática pedagógica e consequentemente na sua forma de avaliar.

Em Magarinus (2011), encontramos uma dissertação que trabalha o tema: Uma proposta para o ensino de função através da utilização de objetos de aprendizagem. Neste trabalho a autora relata que ao constatar a existência de inúmeras dificuldades de compreensão e aprendizagem dos conceitos relacionados ao objeto Função, sentiu-se motivada a refletir em sua prática pedagógica e repensar seus métodos, o que resultou na realização de uma pesquisa investigativa no intuito de identificar a verdadeira compreensão dos alunos do conceito de Função. O objetivo desse estudo foi apresentar uma proposta para o ensino de função através da utilização de objetos de aprendizagem. Para tanto, a autora propõe atividades pautadas na contextualização e interdisciplinaridade, partindo de problemas reais que pudessem contribuir na aprendizagem significativa, com o auxílio dos softwares Tracker e Geogebra.

A metodologia adotada pela autora foi o desenvolvimento de uma sequência de atividades atraentes, interativas e específicas para cada conteúdo conforme o planejado para cada aula. A partir da apresentação da ideia intuitiva de função, ela utilizou o computador para apresentar de forma atraente e diferente do método tradicional, a análise de movimentos mecânicos simples, quando trabalhado a função

afim, e a exibição de um vídeo de uma esfera em queda livre, quando abordado função quadrática.

A pesquisadora concluiu que existe a necessidade da aplicação de novas metodologias de ensino da matemática, que possibilitem uma participação efetiva do aluno com relação à construção do conhecimento, para torná-lo significativo. Por isso, ela propõe o uso de softwares e a resolução de problemas contextualizados, pois é uma proposta metodológica diferenciada e interativa, mas ela lembra que não se pode garantir sua plena eficácia, pois durante o processo de ensino-aprendizagem há diferentes variáveis.

3.4.2 O Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função na Visão dos Estudantes

O conceito de função é um dos conceitos mais frequentes na educação básica. Ele possui grande relevância no ensino de Matemática sendo muito importante por está ligado a outras áreas do conhecimento. A maioria das pesquisas publicadas em artigos, dissertações e teses encontradas no sítio eletrônico da CAPES, do PROFMAT e nos repositórios de faculdades brasileiras, apontam para necessidade da melhoria do processo de Ensino e Aprendizagem de Função. Com o objetivo de conhecer na prática como ocorre o Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função na Visão dos Estudantes, apresentamos, neste tópico, parte de uma pesquisa de campo realizada em quatro turmas do 2º Ano do Ensino Médio, de duas Escolas da Rede Estadual de Ensino de Ananindeua-PA.

Por entendermos que Processo de Ensino e Aprendizagem é muito complexo e envolve muitas variáveis e fatores que se inter-relacionam, procuramos organizar os dados a seguir, analisando-os pautados nos conhecimentos obtidos por meio da revisão literária.

A seguir apresentamos os resultados que nos permite traçar o perfil socioeconômico dos estudantes e da família.

a) Perfil socioeconômico dos estudantes e família

A nossa amostra foi constituída por 105 alunos do 2º Ano do Ensino Médio, sendo 53,3% do sexo feminino e 46,7% do masculino. Este resultado diverge do obtido na pesquisa de Silva (2016), onde 64% da amostra eram do sexo masculino e somente 36% do feminino.

Dos alunos entrevistados, 14,3% apresentam distorção idade-série. Nosso resultado está de acordo com os 12%, relatados no trabalho SILVA (2018). De acordo com Girard (2016) “A distorção idade-série é calculada em anos e o estudante é considerado em situação de distorção ou defasagem quando a diferença entre a idade do aluno e a idade prevista para a série é de dois anos ou mais”. Conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/1996), a escolarização obrigatória vai dos 4 aos 17 anos de idade, infere-se que o aluno deve cursar o 2º ano aos 16 anos.

O Censo Escolar 2017 aponta que dos alunos matriculados no 2º Ano do Ensino Médio, 30% apresentam distorção idade-série.

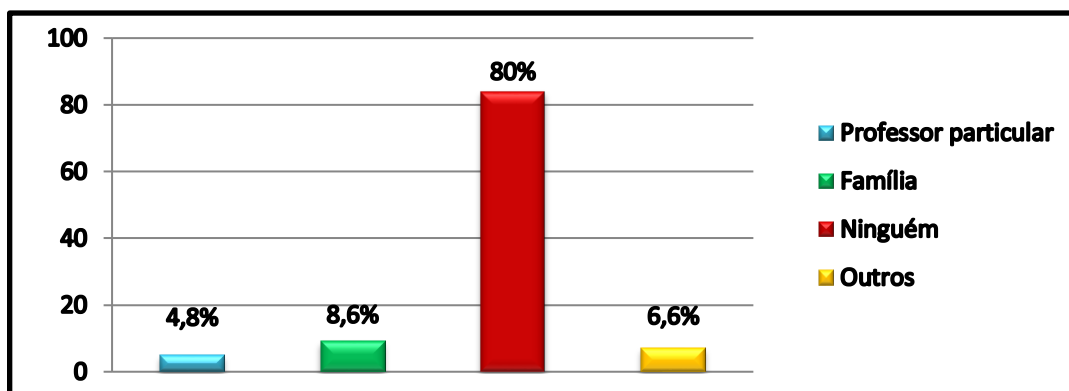
A tabela seguinte indica as escolaridades dos responsáveis masculino e feminino dos estudantes consultados:

Tabela 1 - Escolaridade do responsável masculino e feminino de alunos do 2º Ano do Ensino Médio

ESCOLARIDADE	RESPONSÁVEL MASCULINO		RESPONSÁVEL FEMININO	
	Nº DE ALUNOS	%	Nº DE ALUNOS	%
Não estudou	2	1,9	1	1
Fundamental incompleto	13	12,4	13	12,4
Fundamental	15	14,3	12	11,4
Médio	51	48,6	56	53,3
Superior	14	13,3	21	20
Não respondeu	10	9,5	2	1,9
Total	105	100	105	100

Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

A tabela 1 indica que a maioria dos responsáveis pelos alunos possui o Ensino Médio, 48,6% do sexo masculino e 53,3% do feminino. Embora esse percentual esteja abaixo da média nacional, indicada pela Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio (PNAD) do primeiro trimestre de 2019, onde 60,3% da população empregada tinham concluído o Ensino Médio, nossos resultados aproximam-se dos obtidos na pesquisa de Silva (2018), onde os responsáveis femininos e masculinos, respectivamente, 58,8% e 45,9% possuíam o ensino médio (completo ou incompleto). O fato de os responsáveis pelos estudantes, em sua maioria, possuírem o Ensino Médio, possibilita a eles auxiliar os estudantes nas atividades de casa, bem como incentivar uma rotina de estudos fora da sala de aula. No entanto o gráfico abaixo mostra outra realidade:

Gráfico 1 – Quem auxilia o estudante nas tarefas de matemática?

Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

A partir da análise do gráfico 1, fica claro que a maioria (80%) dos estudantes não recebem ajuda durante a realização das tarefas de Matemática. Esses dados são reforçados pelos resultados obtidos no trabalho de Silva (2016), onde 69% dos estudantes pesquisados não recebem auxílio durante as tarefas de Matemática. Convém ressaltar que na pesquisa mencionada, 3% dos alunos responderam que são auxiliados por outros, o que em nossa pesquisa superou o dobro desse resultado, sinalizando que 6,6% recebem ajuda de outros, destes a grande maioria (60% dos que responderam outros) afirmaram que são ajudados por meio de vídeo aula e 40% por amigos.

Aqui fica evidente que, neste caso, a família não tem cumprido com sua responsabilidade, uma vez que a LDB, no artigo Art. 2º, afirma que: “A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho”.

É importante frisar que as tarefas de casa “exercem também uma função social, pois através delas os pais tomam contato com o trabalho realizado na escola, na classe dos filhos, sendo um importante meio de interação dos pais com os professores e destes com aqueles” (LIBÂNEO, 1994, p. 192), e, além disso, ela é uma ferramenta pedagógica dotada de múltiplas finalidades:

“[...] estender o tempo de aprendizagem, completar a quantidade de matéria a ser dada numa jornada escolar insuficiente, conectar o trabalho de classe precedente e subsequente, treinar e reforçar habilidades, estimular hábitos de estudo independente, aplicar os conhecimentos acadêmicos à vida cotidiana, enriquecer o currículo ampliando as experiências de aprendizagem, informar os pais sobre as atividades da escola e conectar escola e família”. (CARVALHO, 2001 apud CARVALHO; NASCIMENTO; PAIVA, 2006, p. 342).

Diante do exposto fica claro a grande importância das tarefas de Matemática e da participação efetiva da família auxiliando o aluno na resolução dessas atividades. Pois esta postura culminará na criação de um vínculo com a escola e na inserção do aluno e da família no processo de ensino e aprendizagem, tornando a construção do conhecimento, mais eficaz e prazerosa.

b) Currículo

Currículo é o caminho percorrido, ou a percorrer que envolve de forma abrangente, dinâmico e existencial, tudo aquilo que promove e facilita a construção do saber do aluno. Para Melo (2014):

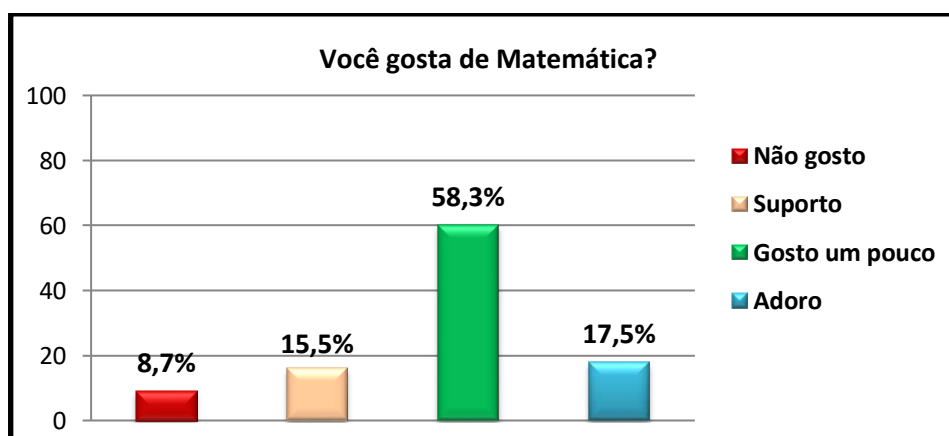
"Currículo é tudo aquilo que uma sociedade considera necessário que os alunos aprendam ao longo de sua escolaridade. Como quase todos os temas educacionais, as decisões sobre currículo envolvem diferentes concepções de mundo, de sociedade e, principalmente, diferentes teorias sobre o que é o conhecimento, como é produzido e distribuído, qual seu papel nos destinos humanos. Pode-se agrupar essas teorias em duas grandes vertentes: o currículo centrado no conhecimento e o currículo centrado no aluno". (MELLO, 2014, p, 1)

O currículo é apresentado como uma bagagem cultural que a própria sociedade define como necessária ao aluno, levando em consideração como conhecimento e produzido e distribuído.

Neste sentido, ele apresenta-se como um conjunto de disciplinas a serem ensinadas, composto por todas as ações, instrumentos e mecanismos envolvidos na produção, transmissão e assimilação do conhecimento.

O gráfico abaixo apresenta o sentimento dos alunos em relação à Matemática:

Gráfico 2 - Sentimento dos Alunos em relação à Matemática.



Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

Pelo gráfico 2, podemos notar que a maioria dos alunos entrevistados (58,3%) afirmam gostar um pouco de Matemática, e 75,8% dos estudantes gostam um pouco ou adoram Matemática, isto é, afirmam ter alguma afinidade com essa disciplina. Tal resultado distancia-se daquele encontrado na pesquisa de Silva (2018), onde 41,2% a maioria, dos alunos pesquisados gostam um pouco de Matemática e 14,1% a adoram. O autor enfatiza em sua pesquisa que o alto índice de entrevistados que não gostam de matemática, aqueles que suportam ou detestam, demonstram um sentimento de rejeição em relação à disciplina, reafirmando sua ideia com Reis (2005):

É fácil observar na comunidade escolar que a relação entre aluno e Matemática não é das mais amistosas. Muitos são enfáticos quando afirmam não gostarem desta disciplina, até mesmo os alunos que têm bom rendimento declaram sua rejeição, não sentem prazer em resolver problemas de Matemática, declaram ainda que não gostam das aulas, pois são muito chatas. Que não entendem nada do que o professor fala, dentre outras queixas. Este fato pode ser observado desde os primeiros anos de escolarização até os cursos superiores. Sem dúvida a Matemática é rigorosa em suas demonstrações e aplicações e necessita ser assim para ser fiel ao modelo que pretende representar, precisa ser exata ou chegar bem próximo para dar credibilidade ao fenômeno estudado. Talvez por ser tão rígida provoca certo medo aos alunos que a acham difícil criando assim uma relação áspera, às vezes até traumática que pode culminar em dificuldade, falta de interesse e rejeição (REIS, 2005, p. 4, apud SILVA, 2018, p. 67).

Essa rejeição é ocasionada pelas inúmeras dificuldades do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, por isso é necessário refletir sobre a prática pedagógica e buscar novas estratégias para facilitar a aprendizagem dos alunos, despertando o gosto e o interesse pelo estudo da Matemática.

Quando perguntados sobre com que frequência estudam Matemática fora da escola, 56,2% dos entrevistados responderam que só estudam no período de provas ou na véspera das provas e 9,5% não estudam fora da escola, ou seja, a maioria dos alunos não possui uma rotina de estudo da disciplina de Matemática fora da escola.

A falta de tempo destinado ao estudo fora do ambiente escolar influencia no baixo rendimento dos alunos, pois a atitude de exercitar os conhecimentos apreendidos resulta na fixação dos conteúdos e sana as dificuldades encontradas pelos alunos na aquisição do saber. (SILVA, 2018; SANTOS, 2013)

A participação da família, auxiliando o aluno na resolução das atividades de casa e promovendo a construção de uma rotina de estudos, evidencia o valor do estudo, resultando no desenvolvimento de competências e habilidades, propostas nestas tarefas, bem como a construção do conhecimento que subsidiarão outros.

Mas se por outro lado, os pais demonstram interesse somente pelas notas das avaliações, seu filho pode cair no erro da maioria dos alunos de nossa pesquisa, de estudar somente no período de provas ou até mesmo às vésperas das provas. Essa atitude faz com que o aluno passe a estudar com o intuito de obter boas notas sem se preocupar com a construção do conhecimento e consequentemente o desenvolvimento de competências e habilidades.

Ao discorrer sobre esse problema Perrenoud (1996) faz a seguinte reflexão:

Estudar apenas para a prova é uma maneira honesta, mas simplória, de se tornar capaz de um "desempenho de um dia". Isso não constrói uma verdadeira competência, mas permite iludir, durante uma prova escrita ou oral. Em uma noite, um aluno que não compreendeu nada, não trabalhou antes e nada sabe não pode se tornar um bom aluno, mas isso basta, às vezes, para salvar as aparências. (PERRENOUD, 1999, p. 69, apud CALCAGNI, 2012, p. 43)

Para resolver esse problema é necessário fazer com que o estudante compreenda a importância de ter uma rotina de estudos da Matemática, para que o mesmo consiga construir os conhecimentos necessários não só para avançar em seus estudos, mas sobre tudo para torná-lo apto a enfrentar os problemas do cotidiano e respaldá-lo para a obtenção de novos conhecimentos.

Quando questionados se já haviam estudado Bijeção de Função (Função Bijetora), praticamente a metade (49,5%) dos estudantes responderam que não estudaram Função Bijetora. Estes dados são preocupantes, uma vez que conforme a BNCC, este assunto faz parte do rol de conteúdos do 1º Ano, portanto os alunos do 2º já deveriam ter estudado esse tema.

O motivo de o professor não ensinar o conteúdo pode ser a falta de conhecimento da importância desses conteúdos ou a grande quantidade de conteúdos a serem trabalhados em uma carga horária insuficiente, ou seja, a constante corrida contra o tempo. De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio: “é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p. 70)

A escolha de um conteúdo deve está fundamentada na sua eficiência para desenvolver a capacidade do aluno de resolver situações-problema do seu dia a dia e propiciar a construção de novos conhecimentos.

c) Metodologia

Entendemos metodologia de ensino como o conjunto de métodos e estratégias aplicados pelo professor com o objetivo de promover e construir o conhecimento do aluno.

A prática pedagógica do professor não se resume na ministrarção de aulas embasada em metodologia e estratégias, uma vez que para alcançar o objetivo de fazer com que o aluno assimile e compreenda o conteúdo abordado, é necessário refletir em nossa prática docente, melhorando os pontos positivos e corrigindo as falhas existentes nessa prática.

Ser professor hoje vai além de saber expor um conteúdo, passar exercícios, elaborar uma prova. Ser professor hoje significa ser um verdadeiro estrategista, no sentido de planejar, estudar, selecionar, organizar e propor os melhores meios que facilitem e conduzam os alunos à apropriação do conhecimento.

O fazer docente tornou-se mais trabalhoso e porque não dizer mais difícil, necessita de uma elaboração mais consciente e direcionada, de um pensar mais profundo sobre para que, o que e como ensinar. O tempo do improviso, da receita pronta que se repete ano após ano, já se desgastou, é preciso repensar, refazer, inovar. Começar de novo, sonhando sim, mas com os pés no chão, conscientes de. Ser estrategista é saber o que se pretende atingir, requer que se tenha clareza sobre onde se pretende chegar com o processo ensino-aprendizagem (FONSECA, 2008, p. 13-14)

A maioria dos entrevistados (96,2%) acredita que o professor de Matemática demonstra domínio em relação ao conteúdo de Função com ênfase na Função Bijetora, o que está em conformidade com a pesquisa de Silva (2018), onde 93% dos alunos afirmam identificar o domínio do professor em relação ao conteúdo ministrado nas aulas. 43,3% dos entrevistados responderam que entendem quase sempre, e 21,1% entendem sempre, as explicações dadas nas aulas de matemática. Os resultados anteriores concordam com dos da tabela abaixo:

Tabela 2 – Como os estudantes do 2º Ano avaliam as explicações do professor de Matemática

Avaliação das explicações do professor de Matemática	Nº de alunos	%
Ruim	2	1,9
Regular	5	4,8
Boa	27	25,7
Excelente	69	65,7
Não respondeu	2	1,9
Total	105	100

Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

Os dados apresentados na tabela 2 mostram que a maioria dos alunos consegue compreender, as explicações dadas pelo professor de Matemática durante a ministração das aulas, uma vez que somente 1,9% consideram ruim e 4,8% regular. Esse resultado está bem distante daqueles encontrados na pesquisa de Silva (2018), onde 43,5% dos alunos avaliam como ruim, as explicações do professor, 20% considera regular, 35,3% boa e somente 1,2% classificaram como ótima as explicações do professor.

Ao serem questionados sobre a forma que o professor de Matemática costumava iniciar a maioria das aulas, os estudantes informaram que na maioria das aulas (77,3%) ele iniciou pela definição seguida de exemplos e exercícios, o que evidencia que o professor desenvolveu o conteúdo utilizando o método tradicional de ensino.

Em Pozo (2009) encontramos a seguinte reflexão:

O modelo tradicional, baseado na transmissão de saberes conceituais estabelecidos, não assegura um uso dinâmico e flexível desses conhecimentos fora da sala de aula e, além disso, gera numerosos problemas e dificuldades dentro dela. Com muita frequência há um notório divórcio entre as metas e os motivos do professor e os dos alunos, fazendo com que estes se sintam desconectados e desinteressados, enquanto o professor se sente cada vez mais frustrado. É comum escutar dos professores que cada vez menos alunos os *acompanham*, entre outras coisas, porque possivelmente cada vez é menor o número de alunos que entendem para *onde* vai o professor. (POZO, 2009, p. 251 apud SILVA 2018, p. 70).

As competências específicas de Matemática da BNCC, sinalizam para o desenvolvimento de um aluno que participa diretamente da construção do seu conhecimento, deixando de ser mero expectador e repetidor de ideias, como propõe o modelo tradicional de ensino.

D'Ambrósio (1989) enfatiza que

[...] uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBRÓSIO, 1989, p.15)

O método tradicional ainda é o modelo de ensino mais frequente em nossas salas de aula, porque é mais cômodo para o professor, uma vez que ele passa o

conteúdo no quadro, explica e o aluno ouve, copia e pergunta esporadicamente, dessa forma, o professor não precisa se preocupar em desenvolver ou adotar métodos, estratégias e técnicas diferenciadas que promovam o pensamento, a reflexão, a conclusão e a construção do conhecimento por parte do aluno, uma vez que nesse processo habitual a principal operação do pensamento é a memorização

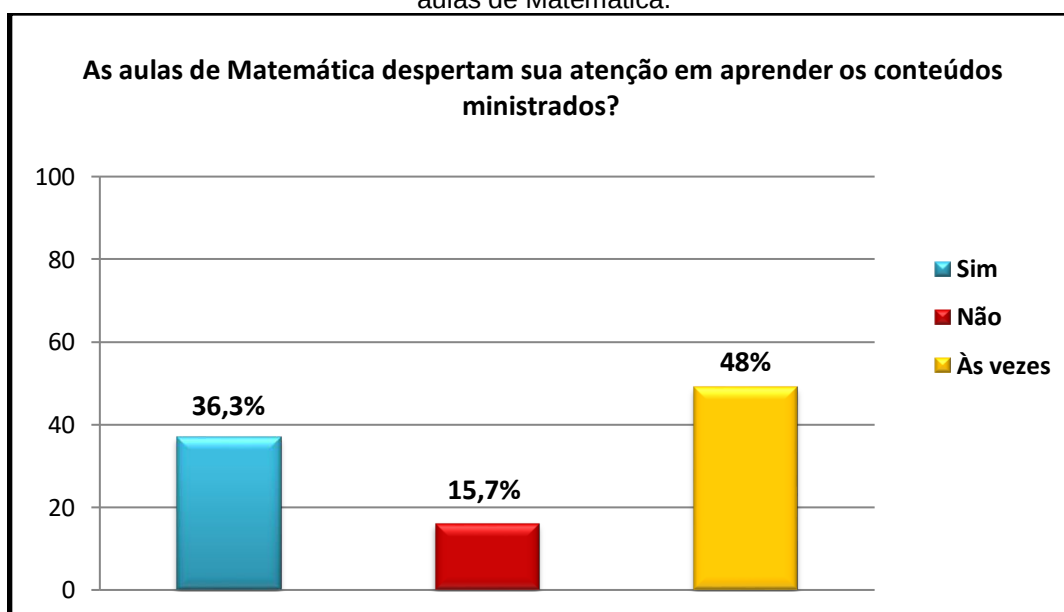
De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica. (BRASIL, 2006, p. 69-70).

A forma como o professor aborda o conteúdo influencia diretamente no sucesso da transmissão do conhecimento, pois "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção". (FREIRE, 1996, p. 26).

Os dados do próximo gráfico versam sobre a eficácia da metodologia utilizada nas aulas de matemática, no que tange a sua atratividade.

Gráfico 3 – Percentual de alunos que têm sua atenção e interesse em aprender despertado pelas aulas de Matemática.



Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

Os dados acima nos chamam a atenção, pois indicam que somente 36,3% dos estudantes têm sua atenção e interesse despertados pelas aulas de matemática. Freire (1996, p. 26) lembra que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção”.

Fonseca (2008) reforça que:

A aprendizagem é inerente ao homem, contudo só é efetivada quando se necessita ou se quer aprender. No ato de aprender, o aluno não pode ser um simples espectador, ele é o ator principal e portando sua participação na aula é indispensável. Deve ouvir, falar, debater, perguntar. Precisa receber estímulos que o levem ao pensar, ao refletir, ao descobrir, a ligar o que aprende ao que já sabe e à sua vida, a perceber a importância do saber. (FONSECA, 2008, p. 12)

Como afirmamos anteriormente, na maioria das aulas, o professor de Matemática utiliza o método tradicional, que segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, é o modelo historicamente mais presente em nossas salas de aula de Matemática, que “apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, [...] por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações”. (BRASIL, 2006, p. 80).

As metodologias predominantes nas aulas do professor de Matemática das turmas pesquisadas fazem parte da corrente de ensino tradicional, que dificultam o entendimento das explicações, não despertam o interesse dos alunos em aprender o conteúdo exposto, impossibilitando a construção de um estudante protagonista na construção do seu conhecimento. Como o método tradicional de ensino torna o aluno um sujeito passivo, mero repetidor de informações, é impossível que o estudante torne-se um sujeito crítico, criativo, autônomo e responsável.

A BNCC assegura que

Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, abrindo-se criativamente para o novo. (BRASIL, 2018, p. 463).

As ideias apresentadas sobre a eficácia do método tradicional de ensino foram confirmadas pelas respostas dos alunos a pergunta: você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados na sala de aula com seu dia a dia? 33,3% dos entrevistados responderam que sim, o que nos remete a seguinte reflexão: como a escola vai garantir as aprendizagens que possibilitam a leitura da realidade, tornando o educando apto para enfrentar novos desafios da contemporaneidade e capaz de tomar decisões éticas e fundamentadas, se o professor não consegue promover um ensino significativo que proporcione ao estudante a competência de relacionar os conteúdos da escola com as situações do seu dia a dia?

Os dados da nossa pesquisa concordam com os obtidos por Silva (2018), que ao verificar a capacidade dos alunos relacionarem os conteúdos matemáticos dados em sala com seu cotidiano constatou que a maioria dos entrevistados (71,8% da amostra) às vezes conseguem fazer essa relação.

A aplicação dos aprendizados em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercícios: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de análise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo, mas a falta delas, em Matemática, chama a atenção. (MICOTTI, 1999, p.154 apud SILVA, 2018, p. 74).

O processo de ensino e aprendizagem exige muito mais que a simples memorização ou a resolução mecânica de uma lista de exercícios, que não traz nenhuma relação com a vida do aluno, ele reque o desenvolvimeto de raciocínio, capacidade de análise e abstração e a construção de um conhecimento que torne o estudante um ser crítico e participativo na sociedade.

A nossa pesquisa revelou ainda, que o modo como o professor costuma fazer os alunos praticarem o conteúdo de Bijeção de Função é a utilização da lista de exercícios (69,3%) e os exercícios do livro didático (23,1%). Esse resultado está de acordo com o que foi encontrado no estudo realizado por Silva (2018), onde 76,5% dos alunos entrevistados informaram que para fixação do conteúdo função afim os professores apresentam uma lista de exercícios.

d) Avaliação

A avaliação de aprendizagem é um mecanismo diagnóstico de registro, análise e acompanhamento dos alunos, que orienta e organiza o trabalho pedagógico, promovendo uma reflexão produtiva no processo de ensino e aprendizagem e, por conseguinte a aprendizagem e a formação integral do estudante.

Neste sentido, a “avaliação de aprendizagem não fica restrita à prova ou outro instrumento que cobra apreensão dos conteúdos e o estrito domínio cognitivo com vistas à promoção do estudante em níveis ou séries” (MACHADO; SILVA; SOUZA, 2016, p. 217). Fernandes e Freitas (2008) reforçam que

A avaliação é uma atividade orientada para o futuro. Avalia-se para tentar manter ou melhorar nossa atuação futura. Essa é a base da distinção entre medir e avaliar. Medir refere-se ao presente e ao passado e visa obter informações a respeito do progresso efetuado pelos estudantes. Avaliar refere-se à reflexão sobre as informações obtidas com vistas a planejar o futuro. (FERNANDES; FREITAS, 2008, p. 19).

Desta forma, a avaliação deixa de ser apenas um instrumento de “medir conhecimento”, classificar e punir alunos, oferecendo um diagnóstico dos conhecimentos, competências e habilidades que os alunos conseguiram desenvolver, tornando-se uma ferramenta poderosa que articula uma reflexão de todo o trabalho pedagógico possibilitando o reajuste e se necessário a reformulação do planejamento curricular.

A tabela seguinte apresenta o percentual de alunos que já ficaram de dependência em Matemática ou outra disciplina.

Tabela 3 – Alunos que já ficaram de dependência

Você já ficou de dependência em Matemática?	Nº de alunos	%
Não	72	68,6
Sim	33	31,4
Total	105	100

Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

A tabela 3 destaca que uma quantidade considerável dos alunos (31,4%) já ficou de dependência em uma ou mais disciplinas, tendo que cursá-la(s) em uma série anterior a que ele está estudando. Esses dados estão bem próximos dos encontrados na pesquisa de Silva (2018), que constatou que 25,9% dos estudantes entrevistados já haviam ficado de dependência em algum momento.

A Matemática continua sendo vista como a grande vilã, ou seja, a disciplina que mais reprova os alunos, uma vez que 37,9% dos alunos pesquisados responderam que já ficaram, em algum momento de sua vida escolar, de dependência em nesta disciplina. É importante destacar que nossa pesquisa revelou que 20,7% dos entrevistados afirmaram ter ficando de dependência em mais de uma disciplina.

A pesquisa de Silva (2018) destacou que 72,7% dos estudantes das séries regulares já ficaram. A nossa pesquisa aponta para uma acentuada redução desse índice, que caiu quase pela metade. Esse fato só não é mais animador porque dos 20,7% dos estudantes que ficaram de dependência em mais de uma disciplina, a metade deles (50%) afirmou ter ficado também em Matemática.

Os alunos foram questionados sobre o sentimento que eles têm diante de uma avaliação de Matemática e, apesar de 43% desses estudantes mostrarem-se tranquilos diante da aplicação de uma avaliação de Matemática, a grande maioria demonstra certo desconforto, uma vez que 10,6% ficam com medo, 36,5% preocupados, 7,7% com raiva e 3,9% com calafrios.

As informações apresentadas na tabela a seguir, que possibilitam detectar o tipo de verificação de aprendizagem utilizado por esses docentes.

Tabela 4 – Instrumentos de Avaliação Utilizados pelo professor de Matemática

INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO	%
Provas/Simulados	56,2%
Testes	29,6%
Seminários	1,9%
Pesquisas	0
Projetos	0,9%
Outros	12,4

Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

A tabela 4 indica que o instrumento de avaliação mais utilizado ainda são provas/simulados (56,2%), seguido de testes (29,6%). Entre os alunos que responderam outros (12,4%), a grande maioria (38,5%) afirmou que o professor de Matemática utiliza Atividades em Classe como instrumento de avaliação de aprendizagem, evidenciando fortes características do método tradicional na verificação de aprendizagem

Segundo Peres (2016, p. 140), o objetivo da avaliação é diagnosticar a eficácia dos objetivos planejados, detectando os conhecimentos, habilidades e aptidões desenvolvidos pelos alunos, possibilitando o ajuste ou, se necessário a reformulação do planejamento curricular.

e) Grau de dificuldades dos estudantes em relação à aprendizagem de Bijeção de Função

Nesta parte da pesquisa o aluno foi instruído a responder com Sim ou Não, a pergunta: Você lembra de ter estudado? Em caso afirmativo, o estudante indicaria para o grau de dificuldade que teve, com MF (Muito Fácil), F (Fácil), R (Regular), D (Difícil) ou MD (Muito Difícil).

Quadro 2 – Quadro de Dificuldades em Relação à Bijeção de Função

CONTEÚDO	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
1. Definição de Função	70,59%	29,41%	11,76%	32,35%	45,59%	8,82%	1,47%
2. Domínio de uma Função.	72,55%	27,45%	11,43%	31,43%	47,14%	8,57%	1,43%
3. Contradomínio de uma Função	62,75%	37,25%	12,07%	48,28%	48,28%	1,72%	0%
4. Imagem de uma Função	68,63%	31,37%	16,67%	45,45%	34,85%	1,52%	1,52%
5. Cálculo da Imagem de um elemento	50,98%	49,02%	8,89%	24,44%	55,56%	6,67%	4,44%
6. Reconhecer o gráfico de uma Função	33,33%	66,67%	20,69%	24,14%	44,83%	10,34%	0%
7. Função Injetora	47,06%	52,94%	10,64%	38,30%	40,43%	6,38%	4,26%
8. Reconhecer o gráfico de uma Função Injetora	43,14%	56,86%	13,95%	37,21%	41,86%	6,98%	0%
9. Função Sobrejetora	43,14%	56,86%	9,52%	42,86%	38,1%	4,76%	4,76%
10. Reconhecer o gráfico de uma Função Sobrejetora	40,2%	59,8%	10,64%	16,00%	47,5%	7,5%	0%
11. Função Bijetora	47,06%	52,94%	12,77%	53,19%	27,66%	4,26%	2,13%
12. Reconhecer o gráfico de uma Função Bijetora	47,06%	52,94%	15,22%	39,13%	34,78%	8,7%	2,17%
13. Aplicação da Função Bijetora	46,08%	53,92%	13,64%	43,18%	36,36%	4,55%	2,27%

Fonte: Pesquisa de Campo (2019).

O quadro 2 evidencia que a maioria dos alunos responderam que lembram de ter estudado os cinco primeiros conteúdos apresentados: Definição de Função (70,59%), Domínio de uma Função (72,55%), . Contradomínio de uma Função (62,75%), Imagem de uma Função (68,63%) e Cálculo da Imagem de um elemento (50,98%).

A partir da questão 6, notamos o percentual das respostas **Não**, supera o percentual das respostas **Sim**. É interessante lembrar que o aluno pode ter se cansado, ao responder um grande número de perguntas do nosso instrumento de pesquisa, fazendo com que a maioria dos estudantes marcasse a alternativa Não, uma vez que ao optar por essa resposta o aluno não precisaria indicar o grau de dificuldades apresentado por esse conteúdo. Mas mesmo que esse fato tivesse sido confirmado, não invalidariam os resultados obtidos, uma vez que, de acordo com o quadro, uma parte considerável da nossa amostra, respondeu a nossa pesquisa com bastante compromisso e seriedade.

A análise do quadro 2 nos permite concluir que maioria dos estudantes não se lembra de haver estudado alguns conceitos básicos de Função e principalmente o conteúdo Bijeção de Função. Esse fato aponta para a necessidade de um modelo de ensino onde o professor é mediador entre o conteúdo matemático e a aprendizagem do aluno, buscando meios para promover uma aprendizagem significativa, para que o aluno não esqueça amanhã o conteúdo que está estudando hoje.

Os conteúdos que os alunos afirmaram ter maior dificuldade são: Reconhecer o gráfico de uma Função Par (10,34%) e Reconhecer o gráfico de uma Função Ímpar (12,2% entre Difícil e Muito Difícil). De acordo com Pinto (2014) “muitos alunos finalizam o Ensino Médio sem saber interpretar gráficos, não compreendendo que objeto eles representam, ou que situações modelam, que informações podem ser extraídas deles, ou que situação-problema nos permitem resolver”. (PINTO, 2014, 2-3).

Essa situação sinaliza para uma mudança de postura do professor, buscando metodologias e estratégias que possibilite a construção de um conhecimento significativo.

Aprender de forma significativa é provocar desafios sobre o que já se sabe, reconstruindo os conhecimentos, ampliando-os e tornando-os mais sólidos. Quanto mais firme e consistente for um conceito, maior possibilidade ele tem de servir como base para novas aprendizagens. Quanto mais sabemos, mais temos condições para aprender. (FONSECA, 2008, p. 29)

A maioria dos entrevistados que consideraram como Fácil ou Regular o grau de dificuldades apresentados por eles ao estudar esses conteúdos, apresentaram baixo rendimento no Teste de verificação de Aprendizagem de Função com ênfase em Bijeção de Função. Esse teste foi composto por 10 (dez) questões distribuídas entre questões objetivas e subjetivas. Todas as questões foram tabuladas com os parâmetros: Não Respondida, Errada, Parcialmente Correta, Correta, exceto a

questão 5, que indagava se aluno conhecia alguma aplicação da Função Bijetora? Qual (is)? E por isso foi tabulada de forma diferente das demais.

Quadro 3 - Resultados do Teste de verificação de aprendizagem de Bijeção e Paridade de Função

COMANDO DA QUESTÃO OU HABILIDADE COBRADA NA QUESTÃO	Não Respondeu	Errada	Parcialmente Correta	Correta
1. Determinar o domínio, o contradomínio e a imagem da função por meio do diagrama de Venn	86,7%	2,8%	8,6%	1,9%
2. Definição de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.	52,4%	4,8%	40,9%	1,9%
3. O que é função bijetora?	91,4%	2,9%	0	5,7%
4. Contextualização de função bijetora	92,5%	3,8%	1%	0
6. Identificação de uma função injetora, sobrejetora e bijetora por meio do diagrama de Venn.	84,7%	12,4%	2,9%	0
7. Identificação da paridade de função por meio do diagrama de Venn.	92,4%	2,8%	4,8%	0
8. Explique a diferença entre função par e função ímpar.	98,1%	1,9%	0	0
9. Definição de paridade de função por meio de sua lei de formação.	94,3%	1,9%	3,8%	0
10 - Identificação da paridade de função por meio do gráfico	97,1%	2,9%	0	0

Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

A questão 5 aferia se o aluno conhece alguma aplicação da Função Bijetora. 87,6% dos alunos não responderam essa pergunta, 11,4% afirmaram não conhecer e 1% responderam que conhecem alguma aplicação para a função Bijetora, no entanto quando foi solicitado que indicasse a aplicação o aluno não respondeu.

A análise do quadro 3 nos permite afirmar que a maioria dos alunos do 2º Ano do Ensino Médio, não desenvolveu as habilidades e competências relativas ao conhecimento básico de Função, Bijeção e Paridade de Função; e que boa parte deles não estudaram Bijeção de Função.

f) Considerações

O objeto Função é trabalhado a partir do Ensino Fundamental e segue durante o Ensino Médio e até mesmo no Ensino Superior, por ser de fundamental importância no estudo da Matemática e de outros campos do conhecimento, contudo os alunos apresentam uma acentuada deficiência em relação aos conceitos e linguagens desse conteúdo. Por que esse conteúdo é pouco compreendido pelos estudantes, mesmo sendo estudado durante tanto tempo?

Na busca da resposta para esse questionamento, realizamos uma revisão literária sobre o assunto, que resultou em outras inquietações: Qual é o motivo do baixo desempenho dos estudantes nas avaliações internas e externas? Como esses conteúdos estão sendo trabalhados pelos professores na ótica dos estudantes do 2º Ano do Ensino Médio?

Isso nos motivou a realizar um levantamento diagnóstico para compreender o Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção na Visão dos Estudantes do 2º Ano do Ensino Médio.

Por meio da análise dos dados obtidos nas pesquisas bibliográfica e de campo, compreendemos que o professor necessita de referenciais que possibilite analisar e interpretar o que acontece na sala de aula, adotando uma prática reflexiva que resultará na construção de conhecimento e êxito no árduo ofício de ensinar.

A pesquisa revelou que a maioria dos alunos pesquisados não recebem ajuda nas atividades de casa, o que exerce grande influência no insucesso escolar dos discentes, uma vez que a participação ativa da família, auxiliando o estudante na resolução das atividades de casa, bem como o estabelecimento de uma rotina de estudos de Matemática fora do ambiente escolar, culminará na criação de um vínculo com a escola, inserindo o aluno e a sua família no processo de ensino e aprendizagem, tornando a construção do conhecimento mais eficaz e prazerosa.

O currículo é outro fator ponderante, uma vez que ele é o caminho percorrido, ou a percorrer que envolve de forma abrangente, dinâmico e existencial, tudo aquilo que promove e facilita a construção do saber do aluno. Ao analisar as respostas dos estudantes evidenciam a predominância do método tradicional de ensino, muito recorrente por sua comodidade para os docentes, mas que resulta em prejuízos ao desenvolvimento de competências e habilidades por parte dos alunos, que

demonstraram pouco conhecimento em relação ao conteúdo abordado quando submetidos ao Teste de Verificação de Aprendizagem.

Percebemos que os alunos possuem um tímido interesse em aprender Matemática, mas esse anseio vem sendo aos poucos podado pela forma como os fatores anteriormente mencionados, têm atuado no processo de construção de conhecimento desses discentes.

Portanto, para que o Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função tenha sucesso, é necessário que o professor de Matemática compreenda que o planejamento e a avaliação constituem uma parte inseparável e fundamental na sua atuação, promovendo análise e reflexão da prática pedagógica, bem como a busca de um currículo e de novas metodologias de ensino que possibilite ao aluno compreender a importância de aprender o conteúdo, atuando diretamente na construção do conhecimento e por conseguinte, torne-se um sujeito crítico, criativo, autônomo e responsável.

3.5 Tendências da Educação Matemática

Nesta parte do trabalho discorreremos sobre o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas como Ponto de Partida que são as metodologias de ensino que fundamentaram a construção nossa Sequência Didática.

3.5.1 Ensino por Atividades Experimentais

Nesta seção abordaremos o ensino por atividades experimentais, tendo como ponto de partida a origem do ensino por atividades. Em seguida discorreremos sobre os dois tipos básicos de atividade e o modo como cada uma delas deve ser planejada e desenvolvida.

3.5.1.1 Origem do Ensino por Atividades

O Ensino por Atividades teve origem no ensino por descoberta (SÁ, 2019, p. 12). Esse tipo de aprendizagem foi proposto pelo movimento da Escola Nova e defendido por estudiosos como Jerome Bruner, Vygotsky e John Dewey, que destacavam a importância da atividade no processo de aprendizagem. (CÁLCIZ, 2011, p. 5).

Para Bruner, segundo Cálciz (2011, p. 5), é possível pensar em três tipos de descobrimento: **indutivo**, **dedutivo** e o **transdutivo**.

O descobrimento indutivo realizado por meio do levantamento e a reordenação de dados para chegar a uma nova categoria, conceito ou generalização.

O descobrimento dedutivo ocorre por meio da combinação de ideias gerais com o objetivo de chegar a enunciados específicos, como na construção de um silogismo.

O descobrimento transdutivo ocorre quando o indivíduo relaciona ou compara dois elementos particulares e observa que são similares em um ou dois aspectos.

No Brasil o ensino por descoberta foi concebido por Hennig em 1986. Ele associou três técnicas a essa metodologia: **redescoberta**, **problema** e **projeto** e afirma que ensino por descoberta apresenta as seguintes vantagens: aprender por descoberta é aprender a aprender, é automotivador e autogratificante, aumenta a capacidade de pensar e de raciocinar, facilita a transferência e memorização. (SÁ, 2019, p. 12-13).

O Ensino por Atividades “é uma prática metodológica que proporciona ao aluno construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios” (SÁ, 2009, p. 14). Essa abordagem metodológica de ensino viabiliza o protagonismo do estudante na construção do saber, uma vez que ele é conduzido pelo professor por meio de um processo de colaboração até descobrir o conteúdo abordado.

Segundo Sá (2019) O ensino por atividades apresenta as seguintes características:

- 1) É diretivo
- 2) Tem compromisso com o conteúdo;
- 3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
- 4) É estruturado
- 5) É sequencial
- 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
- 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
- 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
- 9) Não dispensa a participação do professor
- 10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos.
- 11) É iterativo entre estudantes e professor. (SÁ, 2019, p. 16-17)

Dessa forma, o Ensino de Matemática por Atividade é uma metodologia capaz de promover um ensino dinâmico, envolvente e participativo, onde os conteúdos propostos são descobertos pelo próprio aluno durante o processo de aprendizagem tendo o professor apenas como orientador, possibilitando a construção da autonomia do aluno, que encontra leis gerais e generalizações sem o auxílio direto do professor, construindo seu conhecimento por meio de observações e descobertas.

Sá (2009) corrobora com essa ideia ao afirmar que

A proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado a partir da elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Cabe, porém, ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno (SÁ, 2009, p.18).

No método tradicional de ensino o professor apresenta conceitos e definição, seguidos de exemplos e exercícios sem aplicação ou relação com o cotidiano do aluno, que de forma passiva, copia e reproduz os conhecimentos escritos no quadro. Por outro lado, o Ensino por Atividades parte de uma atividade com perguntas que objetivam instigar e nortear o discente a encontrar regularidades e por meio de discussão chegar à sua resolução, construindo assim o seu conhecimento por meio da descoberta, ou mesmo da redescoberta, através de leis gerais ou generalizações.

Sá (2009) destaca alguns cuidados no planejamento, execução e desenvolvimento das atividades utilizadas nesta metodologia:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
- As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
- As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
- De acordo com o modelo proposto por Dockweiler (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (SÁ, 2009, p.18).

As atividades aplicadas devem apresentar orientações claras e bem definidas, organizando a construção das noções matemáticas em três fases: experiência, comunicação oral das ideias e representação simbólica das noções construídas, prevendo momento de socialização das informações e experiências entre os alunos.

O autor ressalta ainda que para efetivar a construção gradual dos conceitos matemáticos, essas atividades devem ser apresentadas sequencialmente de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração; e quanto ao objetivo pode ser realizado por dois tipos básicos de atividade de: **conceituação** ou **redescoberta**, onde a atividade de conceituação tem por objetivo conduzir o estudante, por meio da percepção da ocorrência de um determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático, promover a construção da definição desse objeto matemático.

A atividade de redescoberta objetiva "levar o estudante ao descobrimento de uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática", correspondendo ao momento de exploração do objeto, a qual antecede a demonstração do resultado, não se limitando simplesmente na demonstração de um resultado matemático recorrente do processo. Por meio dela, o aluno descobre uma relação/propriedade, percebendo regularidades nos resultados, sendo conduzido a uma demonstração do objeto matemático estudado.

Dessa forma o que diferencia esses dois tipos de atividades é que na Atividade de Conceituação a construção do conhecimento ocorre durante a definição do objeto matemático, enquanto que na Atividade por Redescoberta, essa construção é decorrente da descoberta das relações/propriedade observadas durante a exploração do objeto matemático.

Quanto ao modo de desenvolvimento o ensino de matemática por atividades pode ser por **demonstração** ou **experimental**, na primeira o professor realiza as ações, os alunos registram os resultados e o objetivo da atividade é alcançado por meio da discussão desses resultados. Já a atividade experimental é elaborada pelo professor e executada pelos alunos, podendo ser utilizadas para conceituação ou descoberta.

3.5.1.2 Organização de uma Atividade de Conceituação ou Redescoberta

Uma Atividade de Conceituação ou de Redescoberta pode ser organizada, didaticamente, em seis momentos: **organização**, **apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização**. O quadro a seguir apresenta cada momento dessa atividade com a descrição detalhada de como cada um deles deve ser desenvolvido.

Quadro 4 - Momentos de ensino por atividades experimentais

Momento	O que será feito?	Como será feito?
1º	Organização	Organizar a turma, preferencialmente, em equipes com no máximo 4 alunos e no mínimo 2. É importante que o professor dirija as ações e oriente, sem imposição, a formação das equipes, demonstrando segurança e evitando desperdício de tempo nessa etapa de organização
2º	Apresentação da Atividade	O professor distribuirá todo o material necessário para a realização da atividade incluindo o roteiro da mesma, impresso ou disponibilizado no quadro, conforme as condições estruturais da escola. A organização do material em kits facilita a distribuição e economiza tempo.
3º	Execução da Atividade	Cada equipe realizará os procedimentos estabelecidos para a atividade: manipulação dos materiais, realização de medidas e/ou cálculo, comparação e/ou observação. O professor deve "supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar nas dúvidas, quando solicitado ou perceber dificuldade de execução".
4º	Registro	sistematização das informações na pesquisa científica e o registro das informações obtidas durante a execução dos procedimentos. O professor deve supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar dirimindo as eventuais dúvidas que possam ocorrer durante o processo".
5º	Análise	cada equipe, por meio da análise das informações registradas, deve perceber as características do objeto matemático que a atividade objetiva conceituar ou definir. Caso alguma equipe não consiga perceber a relação válida, por meio das informações registradas, o professor deve auxiliar os membros dessa equipe direcionando a eles perguntas reflexivas que os faça perceber a relação desejada.
6º	Institucionalização	O professor solicitará que um representante de cada equipe, anote no quadro a(s) observação(ões) elaborada(s) pela equipe, e após a análise dessas, o professor apresentará o conceito ou definição na forma padrão.

Fonte: Adaptado de Sá (2019, p. 18-21)

Ao discorrer sobre o ensino por atividades, Sá (2019) destaca que no início é muito raro os estudantes apresentarem observações que se aproxime do conceito do

objeto matemático apresentado, contudo o professor deve analisar as observações elaboradas por cada equipe, analisar e destacar as características desejadas do objeto e somente após esse processo, apresentar o conceito ou definição na forma padrão.

Corrêa (2019) ressalta que

"O professor deverá ainda, chamar a atenção da turma para as características que compõem uma conclusão, e finalmente, elaborar juntamente com a turma uma que permita a alguém que não participou da atividade entender a relação/propriedade estabelecida, e ainda, se possível, representar esta conclusão também com representações visuais ou símbolos matemáticos. A essa conclusão elaborada pelo professor em conjunto com a turma será denominada conclusão da turma, que representa o término da institucionalização e consequentemente o final dos momentos do ensino por atividade". (CORRÊA, 2019, p. 142).

Dessa forma evidencia-se a importância da valorização das respostas dos estudantes que colaboram de forma direta e positiva na construção da conclusão da turma, que será orientada pelo professor.

O Ensino Por Atividades cobra a construção de textos conclusivos, e por terem pouca experiência com esse tipo de atividade, os estudantes demonstraram dificuldades, registrando a relação obtida no momento da análise no lugar do texto conclusivo, além de gastar muito tempo na realização da mesma. Esse fato não deve ser motivo de preocupação, pois o professor pode direcionar algumas perguntas à turma, promovendo reflexão e discussão que possibilite a elaboração de uma conclusão mais adequada para a atividade, além disso as pesquisas de Corrêa (2019) e Lopes (2015) confirmam o que havia sido afirmado por Sá (1999), que o tempo gasto nestas atividades tende a diminuir a medida que vão sendo desenvolvidas atividades de mesma natureza.

3.5.1.3 O Planejamento de uma Atividade de Conceituação

O quadro a seguir apresenta de forma ordenada e detalhada cada momento ou etapa do planejamento de uma atividade de conceituação:

Quadro 5 - Organização do planejamento de uma Atividade de Conceituação

(Continua)

Ordem	Momento	Como será desenvolvido?
1º	Determinação	Seleção da definição ou conceito que será apresentado aos estudantes por meio da atividade a ser elaborada. A definição ou conceito deve ser registrado para que não sofra alterações quando apresentado à turma.

(Conclusão)

2º	Construção do objetivo	Elaboração do objetivo da atividade que será apresentada aos estudantes. O objetivo deve ser único e não deve apresentar, de forma explícita, o conceito que será construído com a realização da atividade.
3º	Elaboração do procedimento	Seleção do caminho ou conjunto de ações que possibilita ao estudante, após uma análise dos resultados obtidos perceber as características do objeto que a atividade tem objetivo de conceituar ou definir.
4º	Seleção do material	Escolha e Listagem de todos os materiais que cada equipe necessitará para realização da atividade.
5º	Elaboração do espaço de registro	Elaboração de um campo ou espaço, na atividade, para registrar todos os aspectos que se deseja levar em consideração, e até mesmo os que não pertencem ao objeto em questão, porque às vezes é necessário recorrer à outra ideia para chegar ao conceito ou definição do objeto estudado.
6º	Previsão das observações	Previsão possíveis observações válidas e inválidas que podem surgir a partir da análise do espaço de registro da atividade. Pode surgir, também, uma observação válida e não prevista pelo professor.
7º	Previsão da institucionalização	Previsão do procedimento para apresentar o conceito que deseja alcançar com a atividade, determinando a forma como o trabalho será conduzido diante das observações
8º	Elaboração do roteiro	construção de um roteiro para a atividade, contendo Título, Objetivo, Material, Procedimento, espaço de registro, espaço de observação e espaço de conclusão. Não é recomendável inserir linhas no espaço da observação uma vez que isso inibe o desenvolvimento da autonomia dos participantes.
9º	Verificação	Realização da atividade seguindo o roteiro e verificando se o procedimento e os materiais previstos para a atividade podem conduzir à observação das características desejadas do objeto a ser apresentado. Se algum procedimento está inadequado deverá ser reformulado e caso se perceba a inutilidade ou falta de algum material o mesmo deverá ser excluído ou inserido de acordo com a validação realizada pelo professor.
10º	Finalização do roteiro	Esse momento ocorre após a obtenção de todas as informações produzidas e validadas durante a verificação do roteiro da atividade.

Fonte: Adaptado de Sá (2019, p. 21-25)

3.5.1.4 O Ensino por Atividades Experimentais e a nossa pesquisa

As evidências certificam que o Ensino por Atividades tem a potencialidade de fazer com que o estudante tome parte ativa na construção do seu conhecimento, deixando sua passividade para tornar-se protagonista nesse processo tornando o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico, eficaz e significativo.

Neste contexto de Ensino por Atividades e dos momentos que o constituem, elaboramos uma sequência de atividades objetivando desenvolver o conteúdo Função com ênfase na Bijeção de Função e contribuir com o desenvolvimento dessa temática, na sala de aula, favorecendo a construção do conhecimento pelo aluno, de modo que o mesmo desenvolva seu protagonismo na construção do seu conhecimento, de modo que o professor possa promover e perceber novas possibilidades de um processo efetivo e significativo de ensino e aprendizagem do objeto matemático da nossa pesquisa.

3.5.2 Resolução de Problemas como Ponto de Partida

A resolução de problemas é uma das tendências mais importantes no ensino de Matemática, pois ela apresenta uma especificidade dessa área, uma vez que a história e a evolução da Matemática sempre tiveram como ponto de partida a busca de soluções para problemas.

Conforme Sá (2004, p. 11) em 1980 o "National Council of Teachers of Mathematics" (Conselho Nacional de Professores de Matemática/Estados Unidos) - NCTM - recomendou que a resolução de problemas fosse a grande ênfase do ensino de Matemática. O autor enfatiza ainda que "nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS) a resolução de problemas é destacada nos objetivos da Matemática no ensino fundamental e como recurso de ensino". (SÁ, 2004, p. 11).

Para Toledo (2010), um problema matemático é qualquer situação que requer uma descoberta de informações matemáticas, antes desconhecidas para aquela pessoa que está tentando resolvê-la, sendo também, o desenvolvimento de um determinado resultado matemático. (TOLEDO, 2010 apud MIRANDA, 2015, p. 19).

"A resolução de problemas é uma atividade inerente à vida, pois cada dia temos que enfrentar situações novas e que as soluções não estão imediatamente à mão". (SÁ, 2004, p. 17)

Ernest (1996, p.30) corrobora com essa ideia ao afirmar que:

"resolver um problema é encontrar, por meios apropriados um caminho onde nenhum é conhecido à partida, encontrar o caminho para sair de uma dificuldade, encontrar o caminho para contornar um obstáculo, atingir um fim desejado que não é imediatamente atingível"

A utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino objetiva o desenvolvimento intelectual do aluno. Pozzo (1998) corrobora com essa ideia ao afirmar que "[...] quando um aluno ou qualquer pessoa enfrenta uma tarefa do tipo que denominamos *problema*, precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos" (POZZO, 1998, p. 19)

De acordo com os PCNs

[...] conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto de resolução de problemas. O desenvolvimento de processo de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experimentação em resolução de problemas, e o trabalho de ensino de matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. (BRASIL, 1999, p. 207-208)

Esse documento destaca a necessidade da utilização de metodologias capazes de promover um aprendizado ativo e interativo, de modo que o estudante, ao enfrentar situações-problema, torne-se capaz de desenvolver estratégias, planejar etapas, obter e verificar a solução para o problema proposto.

De acordo com Miranda (2015, p. 14) a utilização da Resolução de Problemas é o caminho para superar o desafio de estabelecer relações da Matemática com o cotidiano dos estudantes, despertando nesses o interesse em aprendê-la de forma significativa, por meio de atividades motivadoras e criativas.

"Quando os professores de matemática ensinam através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente". (ONUCHIC, 1999, p. 208)

Neste sentido a autora apresenta a ideia do construtivismo, apresentando uma relação de dependência entre a compreensão matemática e a capacidade de resolver problemas.

A autora defende ainda que "[...] o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema; [...] que a Resolução de Problema não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para aprendizagem" (ONUCHIC, 1999, p. 215)

Magarinus (2013, p. 29) ressalta que

"A metodologia de resolver problemas prevê muito mais que apenas levar o aluno a encontrar soluções. O importante, nesse processo, é o caminho percorrido até chegar a solução de um problema, pois é neste momento que muitos conceitos matemáticos poderão ser explorados e novos saberes constituídos".

De acordo com Mendonça (1999, p. 16-17, apud, SÁ, 2009, p. 10) a abordagem da Resolução de Problemas é realizada a partir de três concepções:

- Como Objetivo, onde o problema é utilizado para ensinar a resolver problemas.
- Como Processo, onde analisa-se as estratégias dos alunos.
- Como Ponto de Partida, "os problemas são usados como recurso pedagógico para iniciar o processo de construção de um dado conhecimento específico"

Na última concepção o problema é o ponto de partida do processo de construção do conhecimento matemático, sendo o elemento formador desse processo, a metodologia utilizada para formar conceitos.

Na Resolução de Problemas como Ponto de Partida "o desenvolvimento do ensino é iniciado pela apresentação de um problema que permitirá desencadear o processo de aprendizagem, culminando na sistematização de conhecimentos matemáticos previamente determinados pelo professor". (MENDONÇA, 1999 apud SÁ, 2004, p. 15).

Conforme Polya (1977, apud SÁ, 2009, p. 11) a resolução de um problema perpassa pelas seguintes fases: **(a) compreensão do problema**, onde o resolvidor procura entender o enunciado e as condições apresentadas nos problema, identificando claramente a pergunta a ser respondida; **(b) estabelecimento de um plano**, fase em que o resolvidor identifica uma conexão entre os dados do problema e a pergunta a ser respondida, construindo assim, um caminho que le à solução; **(c) execução do plano**, nessa fase o plano é colocado em prática, analisando cada passo dado em busca da resolução; e **(d) retrospecto**, faz em que o resolvidor deve verificar se a solução obtida satisfaz as condições e a pergunta do problema.

Sá (2009, p. 15) enfatiza que

a construção natural do conhecimento matemático quase sempre é consequência da tentativa de resolver um problema, onde normalmente são identificados invariantes que posteriormente são estudadas suas propriedades e finalmente dão origem à definição de uma operação ou estrutura matemática.

A História da Matemática evidencia que a construção do conhecimento matemático é resultante dessa tentativa de resolver um problema, sendo esta o

fundamento da "concepção de resolução de problemas como ponto de partida, cujo objetivo é partindo de um problema culminar numa sistematização de conceitos e operações da matemática". (SÁ, 2009, p. 15)

Sá (2009) apresenta algumas recomendações para a elaboração de aulas na perspectiva da Resolução de Problemas como Ponto de Partida:

1. Não tente fazer uma aula desse modo de maneira improvisada, pois sua operacionalização não é corriqueira e, dessa forma, a chance de facassar é muito grande.

2. Determine qual é o problema mais simples e interessante para turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução. O problema selecionado deve ter um enunciado simples e ser significativo para os alunos, uma vez que o objetivo é sistematizar um assunto a partir de um problema e não testar o domínio do assunto.

3. Descubra um processo de resolver o problema sem o uso da operação.

Obtenha soluções manipulativas ou com o uso de outros conceitos já conhecidos. Uma boa fonte de informação sobre essas soluções é a História da Matemática.

4. Proponha a situação-problema em sala e disponibilize um pouco de tempo para turma pensar numa solução.

O problema deve ser disponibilizado de forma escrita, e todos os alunos devem acessá-lo simultaneamente, assim todos terão o mesmo tempo para pensar numa solução.

5. Solicite que a turma apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem.

É comum que os alunos não consigam chegar à solução do problema em pouco tempo, haja visto que a solução criativa que o professor conhece é fruto de muito trabalho de outras pessoas em outras épocas. O mais importante é que ele tenha tempo suficiente para ler, compreender e tentar resolver o problema.

6. Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma.

Um aluno ou o professor apresentará a solução do problema para toda a turma, por meio de um registro escrito e detalhado, o permitirá a evidencia dos invariantes que emergem do processo de resolução do problema.

7. Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema.

Após a resolução do problema proposto, analise e identifique junto com a turma o resultado que será sempre presente na resolução de um problema similar ao que acabou de ser resolvido.

8. Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado.

Como resolver esse problema sem realizar todos esses cálculos ou procedimentos?

9. Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo trabalhar.

O professor apresentará formalmente e por escrito a definição da operação, conceito, propriedade ou estrutura matemática que planejou trabalhar. É importante destacar que como o nome padronizado é fruto de um longo processo histórico, é quase impossível o aluno enunciá-lo.

10. Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Apresente a solução do problema utilizando o conceito que foi sistematizado para destacar a importância e as vantagens de se conhecer tal conteúdo. Se possível, fale sobre o desenvolvimento histórico do assunto, isso ajudará os alunos a compreenderem o processo de construção do conhecimento matemático sem ter que refazer todos os passos dados pelos estudiosos que contribuíram para formalização do conceito.

11. Proponha outras questões envolvendo o assunto sistematizado.

Para que os alunos interiorize o conteúdo trabalhado utilizando-o de maneira operacional na resolução de outras situações-problema que envolvam tal conteúdo em condições diferentes da questão inicial, é interessante que o professor proponha na forma de questões as propriedades mais relevantes do assunto.

A utilização da Resolução de Problemas como Ponto de Partida no processo de ensino e aprendizagem remonta, de forma simplificada, todo o processo de criação e construção do conhecimento matemático, desafiando o aluno a buscar a solução para o problema proposto, de modo que o mesmo passe a ser protagonista na construção do seu conhecimento, fazendo que a aula seja mais dinâmica, atrativa e produtiva. Tudo isso justifica a utilização dessa metodologia de ensino em nossa Sequência Didática.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Nesta Seção apresentamos a Sequência Didática com sugestão para seu desenvolvimento, discorremos sobre as atividades, com suas respectivas análises a priori seguidas das questões de aprofundamento, bem como o questionário sócioeducacional, que visa construir o perfil dos discentes que participarão da pesquisa, o pré-teste e o pós-teste que serão aplicados para verificar o nível de conhecimento que os discentes possuem antes e depois do processo de experimentação.

4.1 Descrição da Sequência Didática

A nossa Sequência Didática é composta por atividades embasadas no Ensino por Atividades Experimentais e na Resolução de Problemas como Ponto de Partida, pois acreditamos que essas metodologias possibilitam a construção de um conhecimento sólido e significativo da Bijeção de Função, uma vez que nestas o discente passa a ser protagonista no processo educativo.

Ela é constituída por 17 (dezesete) atividades didáticas que envolvem o ensino por atividades no contexto da Função com ênfase na Bijeção de Função e sua aplicabilidade na comparação da quantidade de elementos ou cardinalidade de conjuntos finitos e infinitos, seguindo a seguinte seqüenciação de tópicos desse tema: Definição de Função, Imagem de uma função, Imagem e contradomínio de uma função, Domínio de uma função, Função injetora, Função sobrejetora, Função bijetora, Cardinalidade de conjuntos infinitos, Comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos, Conjuntos Enumeráveis.

Destacamos que a construção da Sequência Didática que apresentamos a seguir foi fundamentada nos resultados obtidos nas análises prévias constituída pelas aspectos históricos, matemáticos e curriculares da Bijeção de Função, revisão literária e análise de livros didáticos sobre o objeto da pesquisa: fundamentação teórica e um estudo sobre o Processo de Ensino e Aprendizagem de Bijeção de Função na visão dos Estudantes.

Com a realização das atividades e da resolução das questões de aprofundamento que compõem nossa Sequência Didática, objetivamos desenvolver as competências e habilidades, além de aprofundar as aprendizagens relacionadas

ao conteúdo estudado. A seguir apresentamos as atividades que compõem sequência didática construída, seguidas das questões de aprofundamento.

Destacamos que algumas questões das atividades e do pré e pós teste foram retirados de exames de Enem, vestibulares, concursos e livros didáticos, tendo suas fontes indicadas neste trabalho, mas omitidas nas atividades e testes propostos aos alunos, para não fazê-los desistir de resolver a questão por julgar que elas apresentam um grau de dificuldades muito elevado.

4.2 Atividades que serão Desenvolvidas e Análise a Priori de cada Atividade

A seguir apresentamos de forma detalhada cada atividade que integra a Sequência Didática (SD), que foi aplicada após uma minuciosa verificação das possíveis dificuldades e obstáculos que podem surgir, no momento em que os alunos se depararem com cada atividade proposta. A SD para o ensino e aprendizagem de Função, com ênfase na Bijeção de Função será dividida em duas seções: Seções de Aprendizagem e Seções de Fixação, assim como suas respectivas análises a Priori.

4.2.1 Atividade 01

ATIVIDADE 01

Título: Função

Objetivo: Definir função

Material: Roteiro da atividade, quadro de relações, caneta, lápis e papel.

Procedimento:

Observe o Quadro de Relações e:

- Identifique por **F** as relações em que para cada elemento do conjunto A (conjunto de partida), existe um único elemento correspondente em B (conjunto de chegada);
- Identifique por **NF** as relações em que exista pelo menos um elemento do conjunto A que não possui elemento correspondente em B ou que possua mais de um elemento correspondente em B.

A partir das informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Relação	Todo elemento do conjunto A possui um único elemento correspondente no conjunto B?	
	Sim	Não
1		

2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação

--

Análise *a priori* da Atividade 01

Efetivamos a análise a priori da atividade 01 fundamentados nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento organizar a turma em equipes com no máximo 4 alunos e no mínimo 2. Em seguida, o professor apresenta a atividade e distribui a Atividade 01 e o Quadro de Relações.

No terceiro momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá escrever no Quadro de Relações, **F** para as relações em que para cada elemento do conjunto A (conjunto de partida), existe um único elemento correspondente em B (conjunto de chegada) ou **NF** nas relações onde esse fato não ocorre, e de posse dessas informações, efetuar o preenchimento do quadro que compõe esta atividade. O professor deve estar atento para auxiliar as equipes, sanando dúvidas, dificuldades e, a seguir, orientá-los na efetivação do registro, por meio do preenchimento do quadro de observação.

Nossa hipótese é de que, neste momento os discentes terão pouca dificuldade no desenvolvimento desta atividade, mesmo considerando o fato de que será a

primeira vez que muitos ou até mesmo todos estão inseridos neste tipo de tarefa, que envolve a observação de um quadro de relações e a observação das características apresentadas por elas, e por meio dessas observações seja capaz de preencher o quadro assinalando sim ou não, para posteriormente deduzir a definição de função, mas a maioria deles não apresentará a definição correta de função. Esse fato é confirmado por Sá (2019) ao destacar que no início é muito raro os estudantes apresentarem observações que se aproximem do conceito do objeto matemático apresentado.

No 5º momento, cada equipe realiza a análise das informações registradas, percebendo as características do objeto matemático que a atividade objetiva conceituar ou definir, devendo ser auxiliada pelo professor, por meio de perguntas reflexivas que possibilite perceber a relação desejada; em seguida temos o último momento, o da institucionalização, quando o docente realiza a socialização das observações dos estudantes, e com base nessas informações, formaliza a definição de Função.

4.2.2. Atividade 02

ATIVIDADE 02

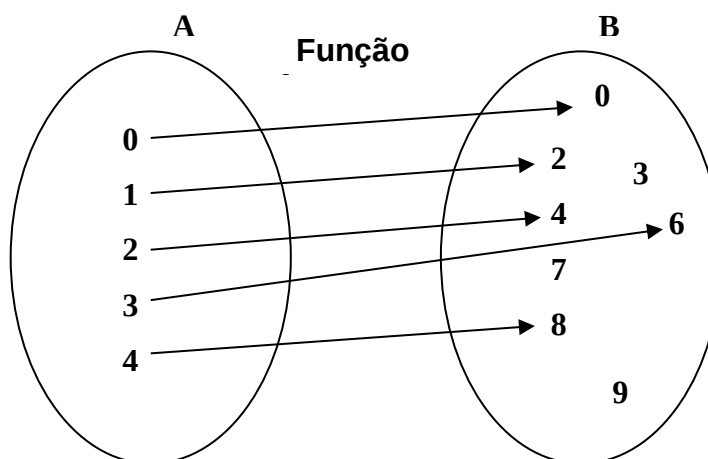
Título: Imagem de uma função

Objetivo: Identificar a imagem de uma função.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e papel.

Procedimento:

A relação seguinte, representa a função f , que relaciona os elementos do conjunto A com os elementos do conjunto B. Com base nessas informações responda as perguntas a seguir:



QUESTÕES

- 1) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 1 do conjunto A ?
- 2) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 2 do conjunto A ?
- 3) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 3 do conjunto A ?
- 4) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 4 do conjunto A ?
- 5) Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 0 do conjunto A ?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é o elemento do conjunto B que corresponde ao elemento 1? Equivale a perguntar: Na função f qual é a imagem de 1?

- 6) Na função f qual é a imagem de 2?
- 7) Na função f qual é a imagem de 3?
- 8) Na função f qual é a imagem de 4?
- 9) Na função f qual é a imagem de 0?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é a imagem de 1? É representada por $f(1)$

10) Determine:

- | | |
|-------------|----------------------------|
| a) $f(2) =$ | e) $f(4) + f(3) =$ |
| b) $f(3) =$ | f) $f(5) - f(4) =$ |
| c) $f(4) =$ | g) $[f(3)]^2 + [f(4)]^2 =$ |
| d) $f(0) =$ | h) $f(2) + f(3) + f(0) =$ |

Observação:

Análise a priori da Atividade 02

A análise a priori da atividade 02 também se fundamenta nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organizar a turma em equipes, as mesmas que já foram formadas por ocasião da atividade 1, a seguir ele apresenta a atividade 2 e distribui uma cópia dessa para cada dupla.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá observar a função de A em B , representada pelo diagrama de setas (ou diagrama de Venn), e com base nessas observações e nos dois quadros explicativos, que se encontram respectivamente após as questões 5 e 9, responder de 10 questões que compõem a atividade. Nesta etapa os grupos devem contar, quando necessário, com o auxílio do professor para sanar dúvidas e dificuldades, direcionando os estudantes ao momento seguinte, onde eles devem efetuar o registro, por meio do preenchimento do quadro de observação, utilizando as respostas das questões e as informações dos quadros explicativos.

Nossa hipótese é de que, neste momento os discentes apresentarão um pouco de dificuldade no início do desenvolvimento dessa atividade, por não estarem familiarizado com o diagrama de setas (ou diagrama de Venn), mas com a experiência adquirida após a formalização do conceito de função, da atividade 01, e a orientação do professor para que eles discutam entre os componentes da equipe, eles terão um pouco mais de facilidade para executar essa tarefa e desenvolver a habilidade de identificar a imagem de uma função representada pelo diagrama de setas (ou diagrama de Venn). Esperamos que as orientações apresentadas nos quadros ao longo dessa atividade, direcione e promova reflexão e discussão resultando em aprendizagem, fazendo com que o educando descubra-se como protagonista na construção do seu conhecimento e descubram que os elementos que recebem setas são denominados imagem dos elementos de onde saem essas setas. Acreditamos que a princípio eles demonstrarão dificuldades em relação à simbologia apresentada na questão 10, mas logo irão superá-las.

Após o registro das observações, o docente orientará os estudantes a socializar suas observações e a partir daí o professor formalizará o modo prático de identificar

a imagem de um elemento de uma função, tomando como base as próprias observações que os discentes encontraram.

4.2.3 Atividade 03

ATIVIDADE 03

Título: Imagem e Contradomínio de uma função

Objetivo: Conceituar conjunto imagem e contradomínio de uma função.

Material: Roteiro de atividade, Quadro de Funções 1, lápis ou caneta e papel.

Procedimento:

- Observe o quadro de Funções 1
- Com as informações obtidas responda as questões a seguir:

QUESTÕES

1. Na função 1 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A ?
2. Na função 3 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A ?
3. Na função 4 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A ?
4. Na função 5 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A ?
5. Na função 12 qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A ?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é o conjunto dos elementos do conjunto B que são imagem de algum elemento do conjunto A ? Equivale a pergunta: Qual é o conjunto imagem da função f ? O conjunto imagem da função f é representado por $Im(f)$.

7. Qual é o conjunto imagem da função 3 ?
8. Qual é o conjunto imagem da função 4 ?
9. Qual é o conjunto imagem da função 5 ?
- 10 Qual é o conjunto imagem da função 12 ?
- 11 O que é conjunto imagem de uma função?
12. Na função 1 qual é o conjunto de chegada das flechas?
13. Na função 3 qual é o conjunto de chegada das flechas?
14. Na função 4 qual é o conjunto de chegada das flechas?
- 15 Na função 5 qual é o conjunto que contém a imagem dessa função?
16. Qual é o conjunto que contém a imagem da função 12?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é o conjunto de chegada das flechas? Ou qual é o conjunto que contém a imagem da função f ? Equivale a pergunta: Qual é o contradomínio da função f ? O contradomínio da função f é representado por $CD(f)$.

17. Qual é o contradomínio da função 1?
18. Qual é o contradomínio da função 3?
19. Qual é o contradomínio da função 4?
20. Qual é o contradomínio da função 12?
21. O que é o contradomínio de uma função?

Análise *a priori* da Atividade 03

Para análise *a priori* da atividade 03 vamos descrever os momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organizar a turma em equipes, as mesmas que já foram formadas por ocasião da atividade, a seguir ele apresenta a atividade 3 e distribui para cada equipe, uma cópia do roteiro de atividades e uma do Quadro de Funções 1; No 3º momento ocorre a execução da atividade, na qual os estudantes devem observar o Quadro de Funções 1, e seguindo o comando de cada questão, responder a atividade que tem por objetivo conceituar o conjunto imagem e o conjunto contradomínio de uma função. As questões de 1 a 11 e o quadro informativo que sucede a questão 5 induz o estudante ao conceito de conjunto imagem, as questões restantes e o outro quadro informativo conduz o estudante ao conceito de contradomínio.

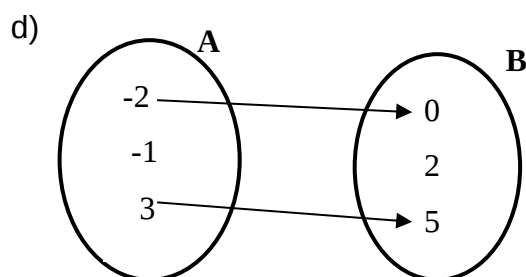
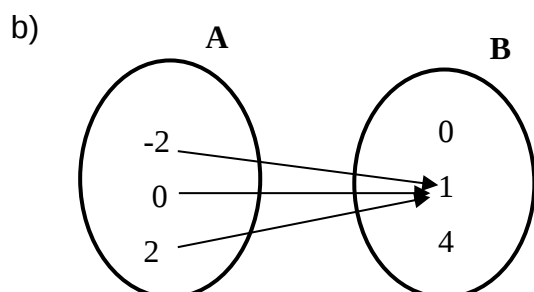
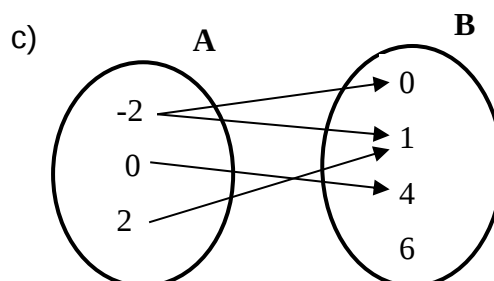
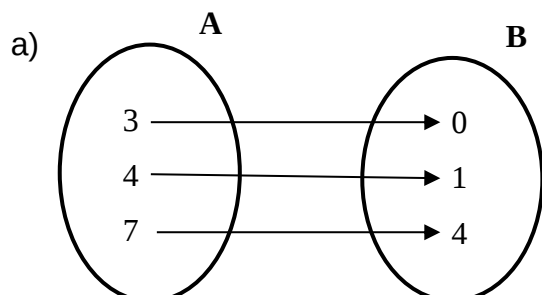
Nossa hipótese é que discentes irão executar com êxito essa atividade, por estarem familiarizados com esse modelo de tarefa. Acreditamos que as orientações apresentadas nos dois quadros informativos, somados à intervenção "indireta" do professor, que jamais deve apresentar a resposta pronta, e a discussão com os outros componentes da equipe promovam uma aprendizagem eficaz. Os alunos poderão apresentar desânimo em relação à grande quantidade de questões aqui propostas, mas dependendo da forma como essas questões serão apresentadas aos discentes, as mesmas podem resultar em algo prazeroso e desafiador. As experiências obtidas na atividade anterior servirão de base para realização desta, contribuirão para o êxito no seu respectivo desenvolvimento.

Destacamos que durante a execução da atividade, o professor deve estar atento para auxiliar os discentes, sempre que necessário, a efetuar o registro das respostas das questões, principalmente as questões 11 e 21, onde eles devem escrever, respectivamente, o conceito de imagem e contradomínio de uma função.

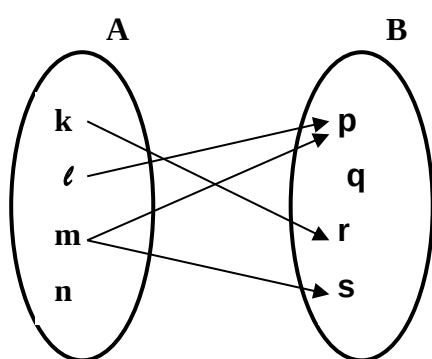
No momento seguinte, o professor solicitará que um representante de cada equipe apresente o conceito de imagem e contradomínio de uma função e, logo em seguida, ele apresentará aos estudantes a formalização da imagem e contradomínio de uma função.

4.2.4 Questões de Aprofundamento das Atividades 01, 02 e 03

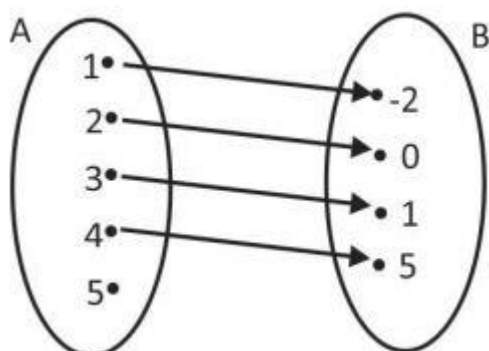
1. Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo, define ou não uma função de A em B. Justifique a sua resposta.



2. O que é necessário fazer para que o diagrama abaixo represente uma função de A em B?



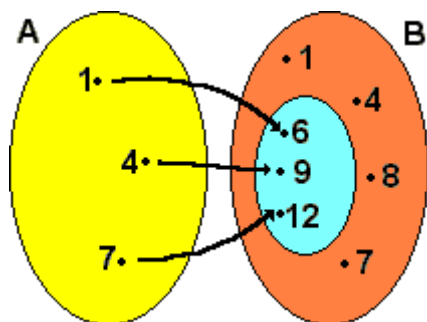
3. (FBR-CEPEL-2014) No figura a seguir está evidenciada, através de setas, uma relação entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B.



A respeito desta relação é correto afirmar que:

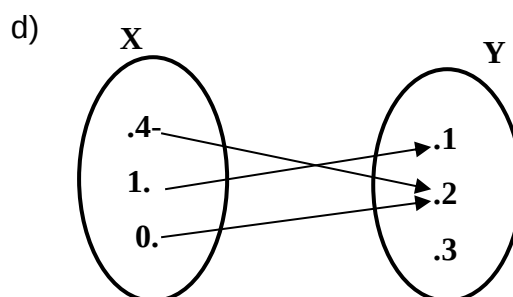
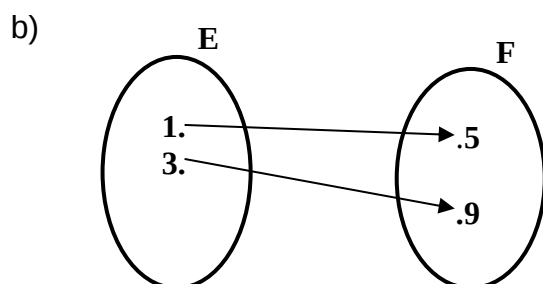
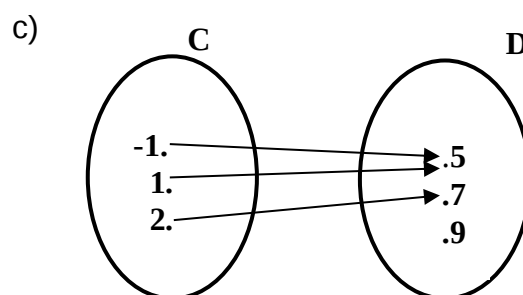
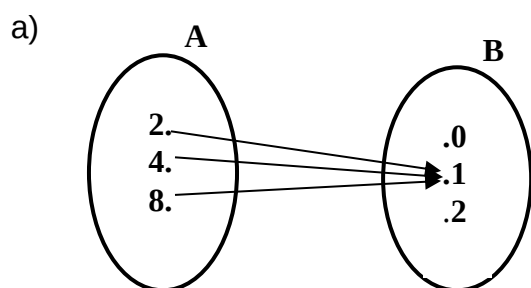
- A) é uma função que não é injetora nem sobrejetora. D) não é uma função.
 B) é uma função injetora, mas não sobrejetora. E) é uma função bijetora.
 C) é uma função sobrejetora, mas não injetora.

4. O esquema a seguir, representa uma função de “A” em “B”.



- a) Qual é a imagem do elemento 1? d) Determine o valor de $f(7) - f(4)$.
 b) Qual é a imagem do elemento 4? e) Quanto vale $f(1) + f(7)$?
 c) qual é o elemento do conjunto A que tem como imagem o elemento 12 do conjunto B? f) Qual é o valor de $\frac{f(1)+f(4)}{3}$?

5. Determine o conjunto imagem de cada função a seguir:

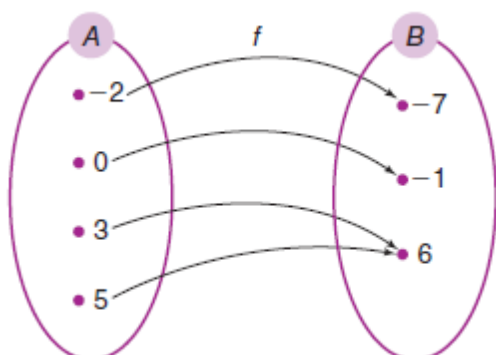


6. Julgue em verdadeira (V) ou falsa (F) cada proposição a seguir, reescrevendo as proposições falsas de modo que elas passem a ser verdadeiras:

- () Na função $f: A \rightarrow B$, a imagem da função f é um subconjunto do conjunto B .
- () O contradomínio de uma função é o conjunto de todos os resultados que se relacionam a algum elemento do domínio.
- () A imagem de uma função é o conjunto numérico com todos os valores que podem ser relacionados a algum elemento do domínio.
- () Uma função pode ter o conjunto imagem igual ao contradomínio.

7. Seja a função $f(x) = 2x - 1$, com domínio $Dm = \{1, 2, 3\}$ e o contradomínio composto pelos números naturais ímpares compreendidos entre 0 e 10. Represente o conjunto imagem da função f .

8. (PAIVA-2010) O diagrama abaixo representa uma função $f: A \rightarrow B$.



Calcule:

a) $f(-2)$

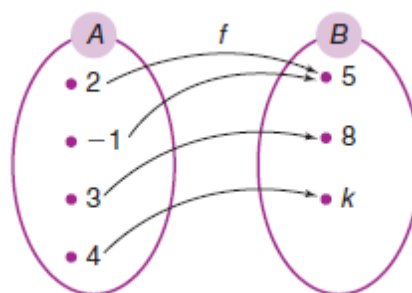
b) $f(0)$

c) $f(3) + f(5)$

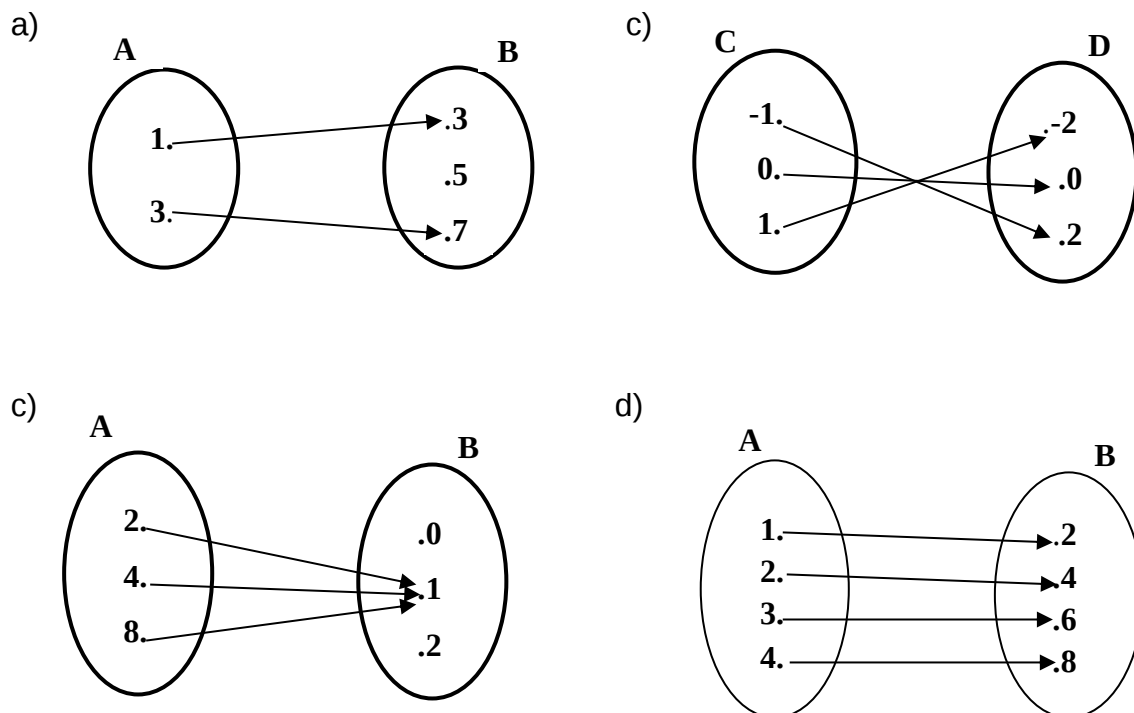
9. (PAIVA-2010) O diagrama ao lado representa uma função $f: A \rightarrow B$, sendo k uma constante real.

Determine o número k , sabendo que

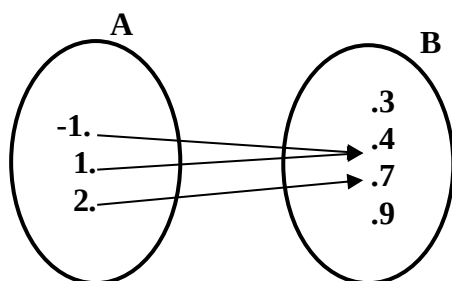
$$\frac{f(2)}{f(4) - f(3)} = f(-1).$$



10. Indique o contradomínio $CD(f)$ e o conjunto imagem $Im(f)$ de cada função a seguir:



11. Com base no diagrama a seguir, que representa a função $f: A \rightarrow B$, julgue em CERTA (C) ou ERRADA (E) cada uma das seguintes afirmações, fazendo as devidas correções nas afirmações erradas:

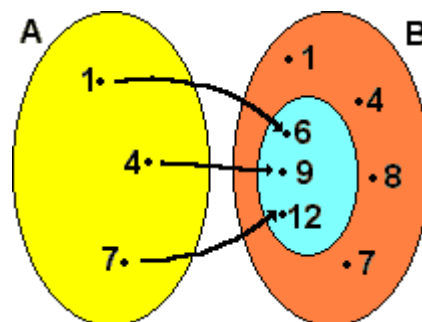


- () 2 é a imagem de 7.
- () 4 é a imagem de -1 e 1.
- () O contradomínio da função $f: A \rightarrow B$ é o conjunto A.
- () A imagem da função $f: A \rightarrow B$ é o conjunto $Im(f) = \{4, 7\}$.
- () A imagem de uma função $f: A \rightarrow B$ é representada por todos os elementos do contradomínio.
- () A imagem é um subconjunto do contradomínio.

12. O esquema ao lado representa a função de A em B .

Com base nesse esquema, responda:

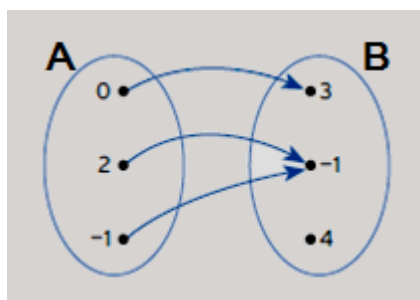
a) O que representa o conjunto destacado de azul?



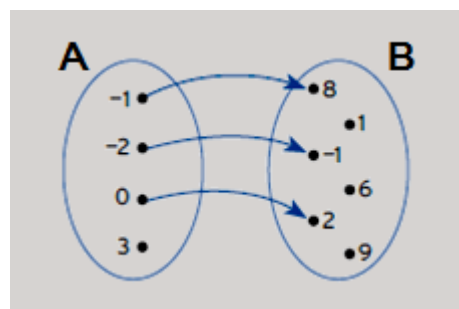
b) A parte laranja junto com a parte azul do esquema representa o domínio ou o contradomínio da função? Justifique a sua resposta.

13. Identifique o conjunto contradomínio e o conjunto imagem de cada função representada a seguir:

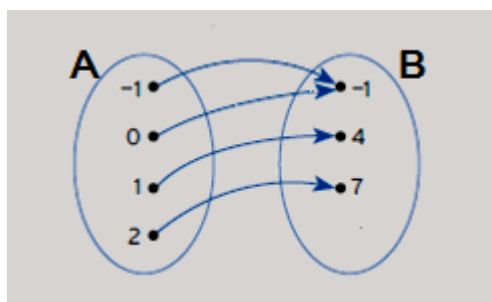
a)



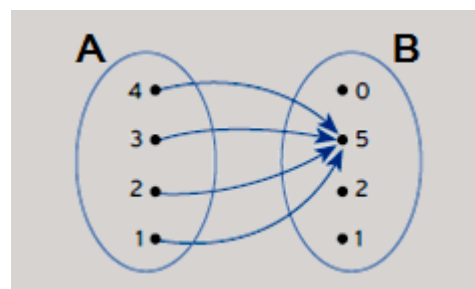
d)



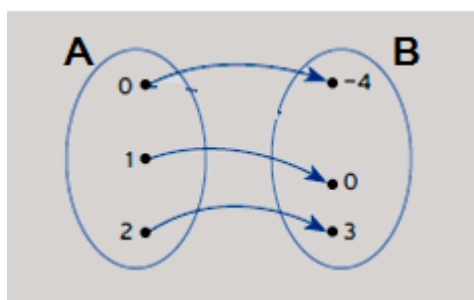
b)



e)



c)



14. (IEZZI-2016) Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\}$ e $f: A \rightarrow B$ é definida pela lei $y = 2x + 1$, quantos são os elementos de B que não pertencem ao conjunto imagem?

15. (IEZZI-2016) Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = -x$. Qual é o conjunto imagem de f ?

16. Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Em cada caso a seguir determine o contradomínio e o conjunto imagem de f :

a) $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 1$

b) $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 2x - 1$

17. (IEZZI-2016) Sejam $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}$. responda:

a) A lei que associa cada elemento de A ao seu sucessor em B define uma função? Por que?

b) A lei que associa cada elemento de A ao seu quadrado em B define uma função? Por que?

4.2.5 Atividade 04

ATIVIDADE 04

Título: Domínio de uma função

Objetivo: Conceituar conjunto domínio de uma função.

Material: Quadro de Funções 1, roteiro de atividade, lápis ou caneta e papel.

Procedimento

- Observe o Quadro de Funções 1;
- Com as informações obtidas responda as questões a seguir:

QUESTÕES

1. Na função 1 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B ?

2. Na função 5 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B ?
3. Na função 8 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B ?
4. Na função 10 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B ?
5. Na função 11 qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B ?

Em Matemática a pergunta: Na função f qual é o conjunto dos elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente em B ? Equivale a pergunta: Qual é o domínio da função f ? O domínio da função f é representado por $D(f)$.

- | | |
|----------------------------------|---|
| 6. Qual é o domínio da função 1? | 9. Qual é o domínio da função 10? |
| 7. Qual é o domínio da função 5? | 10. Qual é o domínio da função 11? |
| 8. Qual é o domínio da função 8? | 11. O que é domínio de uma função de A em B ? |

Análise a priori da Atividade 04

A análise a priori desta atividade 04, assim como as anteriores, está embasada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

Quanto ao 1º momento, o professor organizar a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da atividade 01, e no momento seguinte apresenta e distribui a Atividade 04 e o Quadro de Funções 1, direcionando os alunos ao 3º momento,

oportunizando a execução da atividade, onde cada equipe observará o Quadro de Funções 1 e, com base nas informações obtidas, seguindo o comando de cada questão resolverá a atividade.

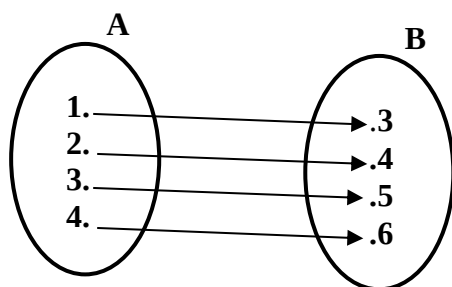
Nossa hipótese é de que, os alunos não terão dificuldades para efetuar a resolução da Atividade 04, pois seu processo de resolução é semelhante ao utilizado nas atividades anteriores, além das experiências obtidas com as outras atividades.

Após o registro das resoluções das questões que compõem a Atividade 04, o professor deverá convidar um aluno de cada equipe para socializar a resposta da questão 11 e, depois que todos aqueles que desejarem, tiverem compartilhado a sua resposta, o docente, com base nessas informações, formaliza o conceito do conjunto domínio de uma função e propõe as Questões de Aprofundamento a seguir, com o objetivo de fixar melhor o conteúdo estudado.

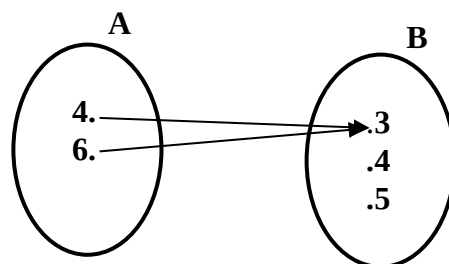
4.2.6. Questões de Aprofundamento da Atividade 04 - Domínio de uma Função

1. Determine o domínio de cada uma das funções f de A em B a seguir:

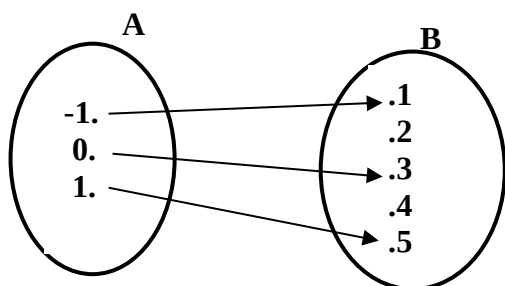
a)



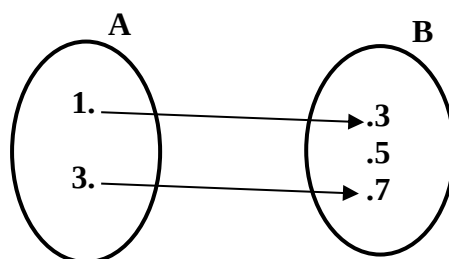
d)



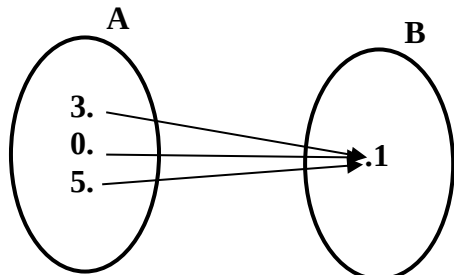
b)



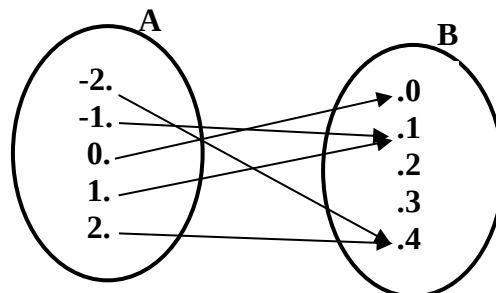
e)



c)



f)



2. De acordo com as respostas obtidas na questão anterior, qual é o domínio da função $f: A \rightarrow B$ (f de A em B)?

3. Na função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 5$, o domínio dessa função, também conhecido como conjunto de partida é o conjunto de todos os valores que podem substituir a variável x nesta função. Desse modo, podemos concluir que o domínio da função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é

- A) o conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros. D) o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais.
 B) o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais. E) formado por todos os valores de $f(x)$.
 C) obtido multiplicando os elementos dos conjuntos $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{R}$.

4. A tabela a seguir apresenta a nota de cinco alunos em uma prova de Matemática:

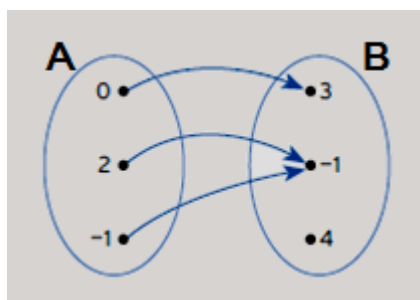
NOME	Ana	Beatriz	Caio	Daniel	Ellen
NOTA	8,5	10	10	9	6

Considerando uma função f que associa o nome de cada aluno à respectiva nota, determine:

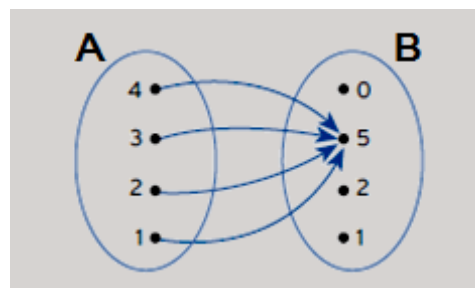
- a) Qual é o domínio da função f ?
 b) Há alguns elementos do domínio que têm a mesma imagem. Quais são esses elementos.

5. Dada a função $f: A \rightarrow B$, determine o domínio de cada função, representada a seguir:

a)



c)



4.2.7 Atividade 05

ATIVIDADE 05

Título: Função Injetora

Objetivo: Definir Função Injetora;

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 1, caneta ou lápis.

Procedimento:

Observe o Quadro de Funções 1 e:

- Identifique por **I** as funções que não existem elementos distintos do domínio com a mesma imagem;
- Identifique por **NI** as funções que existem os elementos distintos do domínio com a mesma imagem.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Função	Existem elementos distintos do domínio com a mesma imagem?	
	Sim	Não
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

Definição

--

Análise a priori da Atividade 05

A análise a priori desta atividade 05, também está fundamentada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 05 e o Quadro de Funções 1.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá analisar o Quadro de Funções 1, escrevendo I para aquelas onde não há elementos distintos do domínio que tenham a mesma imagem e NI para as funções em que elementos distintos do domínio possuem a mesma imagem e, em seguida, devem preencher o quadro da Atividade 05, com base nas informações obtidas.

Nossa hipótese é que os estudantes não apresentarão dificuldades no desenvolvimento desta atividade, devido a experiência obtida nas atividades anteriores, mas se surgirem dúvidas, estas poderão ser sanadas por meio de ponderações com base em perguntas direcionadas à turma, levando-os a refletir sobre o significado de I e NI e sua relação com as respostas registradas no quadro da Atividade 05, acarretando no desenvolvimento da capacidade de análise desses educandos, o que facilitará a execução das atividades posteriores.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que os discentes notarão as características da Função Injetora, preenchendo assim os quadros de observação e definição. Nossa hipótese é de que, com o auxílio do professor, a maioria das equipes cheguem a conclusão de que: Função Injetora é aquela em que elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes no contradomínio. Nossa hipótese é que nesse momento eles conseguirão construir o conceito de Função Injetora.

Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e definição e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a formalização da definição de Função Injetora, representando-a também por meio de desenho e simbologia.

4.2.8. Atividade 06

ATIVIDADE 06

Título: Função Sobrejetora

Objetivo: Definir Função Sobrejetora

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 1, caneta, lápis e papel.

Procedimento:

- Observe o Quadro de Funções 1;
- Identifique por **S** cada função em que todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir

Função	Todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio?	
	Sim	Não
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:**Conclusão:****Análise a priori da Atividade 06**

A análise a priori desta atividade 06, também está fundamentada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 06 e o Quadro de Funções 1.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá analisar o Quadro de Funções 1, identificando por **S** cada função em que todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio e, em seguida, devem preencher o quadro da Atividade 06, com base nas informações obtidas. O objetivo dessa atividade é propiciar aos educandos subsídios para definir função sobrejetora, reconhecendo sua característica peculiar.

A nossa hipótese é que os alunos apresentarão pouca dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução da atividade anterior.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que os discentes terão certa dificuldade ao escrever a conclusão dessa atividade, o que pode ser resolvido mediante ponderações do professor que pode solicitar aos alunos para comparar a imagem ($Im(f)$) e o contradomínio ($C(f)$) de cada função. Nesta etapa, a nossa hipótese é que a conclusão dos discentes se aproximem ao máximo

da definição de que uma Função Sobrejetora possui imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, $Im(f) = C(f)$.

Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e definição e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a formalização da definição de Função Sobrejetora, representando-a também por meio de desenho e simbologia.

4.2.9. Atividade 07

ATIVIDADE 07

Título: Função Bijetora

Objetivo: Definir Função Bijetora.

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 2, caneta ou lápis.

Procedimento:

- Observe cada um dos diagramas do Quadro de Funções 2;
- Identifique por **I** as funções injetoras;
- Identifique por **S** as funções sobrejetoras.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Função	A função é injetora?		A função é sobrejetora?	
	Sim	Não	Sim	Não
K				
L				
M				
N				
P				
Q				
R				
S				
T				
V				
W				
Z				

Observação:**Definição:****Análise a priori da Atividade 07**

A análise a priori desta atividade 07, também está pautada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 07 e o Quadro de Funções 2.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá observar os diagramas de setas do Quadro de Funções 2, identificando por **I** as funções injetoras e por **S**, as sobrejetoras e, em seguida, devem preencher o quadro da Atividade 07, com base nas informações obtidas. O objetivo dessa atividade é fazer com que os estudantes percebam que existem funções que são simultaneamente injetora e sobrejetora, propiciando subsídios para definir Função Bijetora.

A nossa hipótese é que os alunos apresentarão pouca dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução da atividade anterior e as experiências adquiridas.

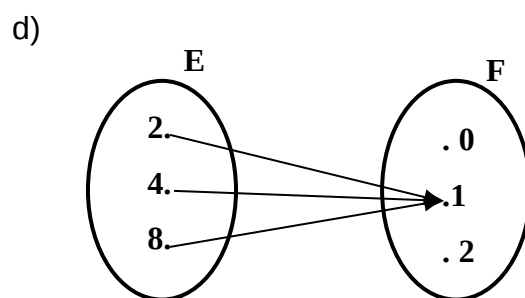
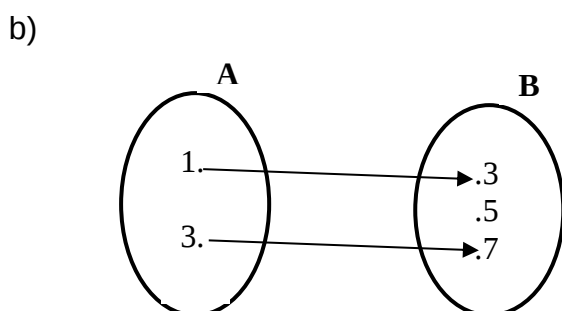
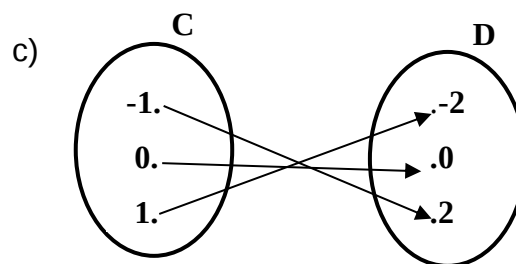
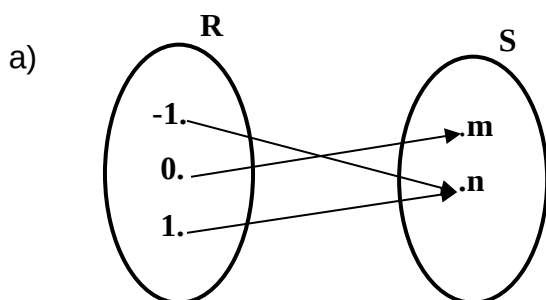
Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que após o preenchimento do quadro eles notarão que existem funções que são simultaneamente injetora e sobrejetora, no entanto sentirão dificuldade em definir esse tipo de função como bijetora, mas essa dificuldade será superada por meio de ponderações do professor, pautadas em perguntas direcionadas à turma (como, por

exemplo, "qual é o significado do prefixo BI?"), no intuito de promover reflexão, discussão e a construção da definição de que Função Bijetora é aquela que é simultaneamente injetora e sobrejetora.

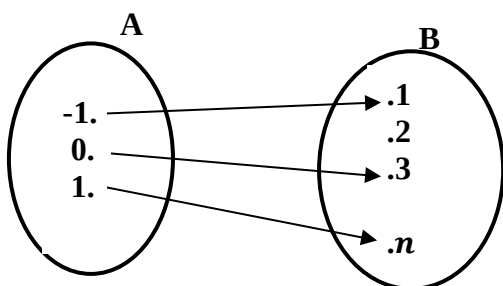
Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e definição e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a formalização da definição de Função Bijetora, representando-a também por meio de desenho e simbologia.

4.2.10 Questões de Aprofundamento das Atividades 05, 06 e 07

1. Verifique em cada caso a seguir se o esquema representa uma função injetora, justificando a sua resposta.

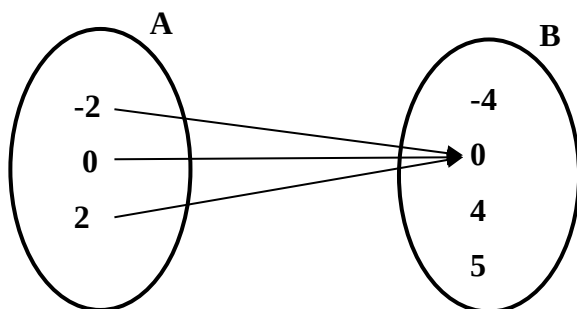


2. A função $f: A \rightarrow B$, representada pelo esquema a seguir é injetora.



Dessa forma, podemos afirmar que o valor de n não pode ser igual a 1, nem igual a 3, ou seja, $n \neq 1$ e $n \neq 3$. Por quê?

3. Explique o que é necessário fazer para que a função de A em B representada pelo esquema abaixo, seja uma função injetora.



4. Considere três funções f , g e h , tais que:

- A função f atribui a cada pessoa do mundo, a sua idade;
- A função g atribui a cada país, a sua capital;
- A função h atribui a cada número natural, o seu dobro.

Qual (is) dessas funções é (são) injetora(s)? Justifique a sua resposta.

5. (IAUPE/CEP-2017) Considere três funções f , g e h , tais que:

- A função f atribui a cada pessoa do Brasil a sua altura;
- A função g atribui a Estado uma bandeira.
- A função h atribui a cada número natural, o seu triplo.

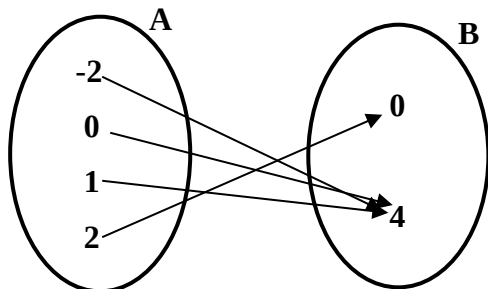
Podemos afirmar que, das funções dadas, são (é) injetoras (a):

- A) f , g e h C) g e h E) nenhuma delas
B) f e h D) apenas h

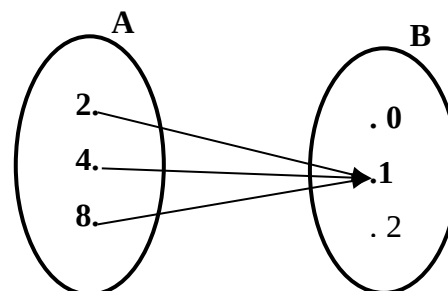
6. (PAIVA-2010 - Adaptada) Em uma biblioteca, todos os livros são catalogados pelo título, além de outros identificadores, e há títulos com mais de um exemplar. Considerando a função f que tem como domínio o conjunto de todos os exemplares da biblioteca e como contradomínio o conjunto dos títulos dos livros catalogados biblioteca, é correto afirmar que f é uma função injetora? Por quê?

7. Verifique em cada situação a seguir se a função de A em B , representada pelo esquema, define ou não uma função sobrejetora. Justifique a sua resposta.

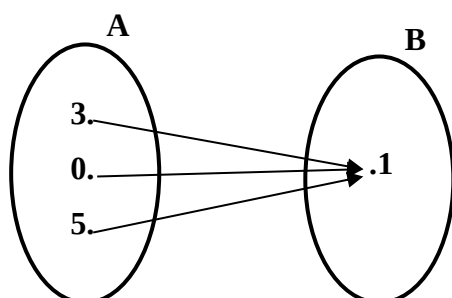
a)



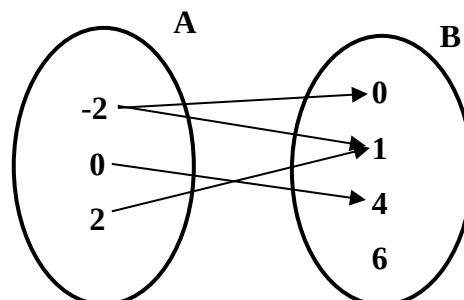
c)



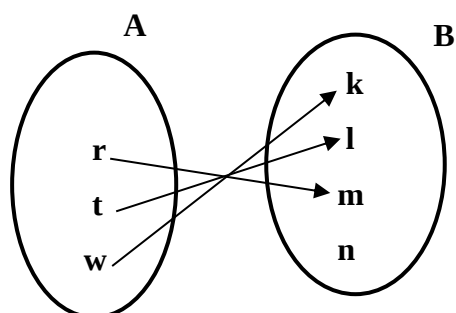
b)



d)



8. Explique o que é necessário fazer para que a função representada pelo esquema seguinte seja uma função sobrejetora.



9. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

A função definida $f: A \rightarrow B$, por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetora? Por quê?

10. Julgue cada proposição a seguir em VERDADEIRA ou FALSA, escrevendo a afirmação correta para cada proposição falsa:

a) Uma função é dita sobrejetora quando o seu contradomínio é igual à sua imagem.

- b) Uma função não pode ser injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.
- c) Em uma função sobrejetora o domínio e o contradomínio são iguais.

11. A respeito da função sobrejetora podemos afirmar corretamente que

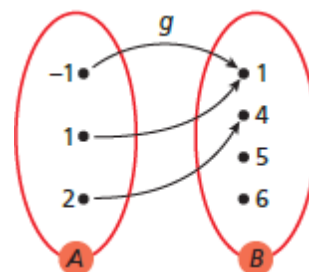
- A) cada elemento do seu contradomínio está associado a um único elemento do seu contradomínio.
- B) toda função sobrejetora é também injetora.
- C) uma função é sobrejetora quando o contradomínio e a imagem são iguais.
- D) em toda função sobrejetora a quantidade de elementos do domínio e do contradomínio são sempre iguais.
- E) em um diagrama de uma função sobrejetora, não pode haver duas flechas com extremidades no mesmo ponto do contradomínio.

12. (UFRN) Sejam B o conjunto formado por todos os brasileiros e R o conjunto dos números reais. Se $f: B \rightarrow R$ é a função que associa a cada brasileiro sua altura, medida em centímetros, então f :

- A) é injetora e não é sobrejetora. C) não é injetora e é sobrejetora.
- B) é injetora e é sobrejetora. D) não é injetora e não é sobrejetora.

13. (LEONARDO-2016) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é sempre sobrejetora? Justifique sua resposta.

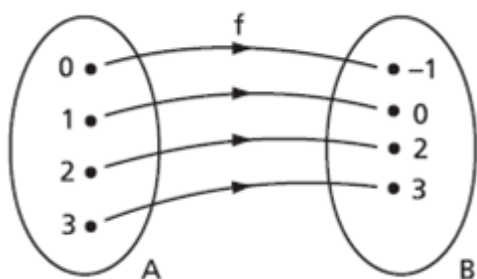
14. (LEONARDO-2016) A função $g: A \rightarrow B$ é sobrejetora? É injetora? Justifique sua resposta.



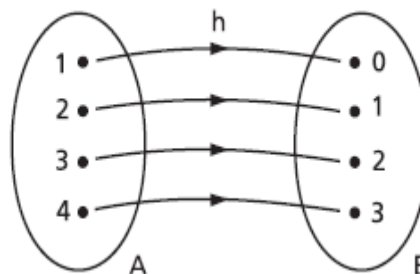
15. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é correto afirmar que a função $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 2$ é uma função sobrejetora? Por quê?

16. Verifique em cada caso a seguir, se a função de A em B é uma função bijetora, justificando sua resposta:

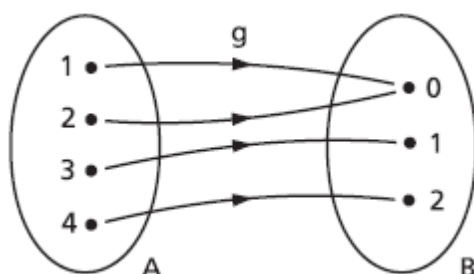
a)



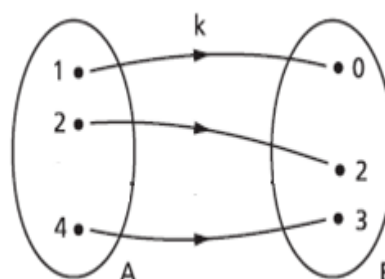
c)



b)



d)



17. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

a) A função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 1$ é bijetora? Por quê?

b) A função definida $f: A \rightarrow B$, por $f(x) = x^2 + 1$ é bijetora? Por quê?

18. Seja M o conjunto formado por todos os maranhenses e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Se $f: M \rightarrow \mathbb{N}$ é a função que associa a cada maranhense sua idade, em anos, então f :

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| A) é injetora, mas não é sobrejetora. | C) não é injetora, nem sobrejetora. |
| B) não é injetora e é sobrejetora. | D) é bijetora. |

19. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x + 1)(x - 3)$. Então:

- | | |
|-----------------------|---|
| A) f é sobrejetora; | D) o conjunto imagem de f possui 3 elementos somente; |
| B) f é injetora; | E) $Im(f) = \{-3, 0, 1, 3\}$ |
| C) f é bijetora; | |

20. Sejam os conjuntos A e B formados, respectivamente, por 5 estados brasileiros e 7 capitais de estados brasileiros, conforme a representação seguinte:

$$A = \{\text{Ceará, Maranhão, Pará, São Paulo, Tocantins}\} \quad B = \{\text{Belém, Curitiba, Fortaleza, Goiânia, Palmas, São Luís, São Paulo}\}$$

A função f que associa a cada estado brasileiro pertencente ao conjunto A uma capital brasileira pertencente ao conjunto B é uma função bijetora? Por quê?

21. Em uma função bijetora $f: A \rightarrow B$, a cada elemento de A corresponde um só elemento de B e vice-versa? Justifique sua resposta.

22. (PAIVA-2010) O Cadastro de Pessoas Físicas ou CPF é o cadastro da Receita Federal brasileira. Nem todas as pessoas são obrigadas a se inscrever no CPF; só têm essa obrigação aquelas com rendimento tributável proveniente de negócios no Brasil, brasileiras ou não, que vivem ou não no Brasil. Cada contribuinte cadastrado recebe um documento chamado de cartão de CPF, ou simplesmente CPF. Esse documento identifica o contribuinte com um número de onze algarismos. Esse número é único para cada contribuinte e não muda, mesmo quando o cartão é perdido. Consideremos o conjunto A , de todos os números de CPFs distribuídos aos cidadãos brasileiros que vivem no Brasil, e o conjunto B , de todos os cidadãos brasileiros que vivem no Brasil. Classifique como injetora, sobrejetora ou bijetora a função $f: A \rightarrow B$ que associa cada CPF a um cidadão brasileiro.



4.2.11 Atividade 08

ATIVIDADE 08

Título: Gráfico de uma Função Injetora

Objetivo: Identificar o gráfico de uma Função Injetora.

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Gráficos, régua, caneta ou lápis, borracha.

Procedimento:

Em cada gráfico do Quadro de Gráficos, trace linhas horizontais (paralelas ao eixo x) e a seguir:

- Identifique por **I** os gráficos que não são "cortados" (interceptados) pela mesma reta mais de uma vez;
- Identifique por **NI** os gráficos que são cortados (interceptados) mais de uma vez pela mesma reta.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Gráfico	O gráfico é "cortado" (interceptado) mais de uma vez por uma mesma reta?	
	Sim	Não
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

Conclusão

Análise *a priori* da Atividade 08

A análise *a priori* desta atividade 08, também está pautada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 08, o Quadro de Gráficos 1 e uma régua. Se considerar mais conveniente, o docente pode solicitar, com antecedência, a régua aos estudantes.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde um dos integrantes da equipe, utilizando a régua e o lápis ou caneta, deverá traçar retas paralelas ao eixo "x", e juntamente com seu grupo, identificar por **I** os gráficos que são "cortados" (interceptados) pela mesma reta somente uma vez e, por **NI** quando a mesma reta cortar o gráfico nenhuma vez ou mais de uma vez. Nesta etapa é importante que o professor esteja atento para explicar, se necessário, o que é reta paralela, além de esclarecer outras dúvidas que possam surgir. Em seguida, com base nas informações obtidas, os alunos devem preencher o quadro assinalando "sim" ou "não" para a pergunta relacionada a cada gráfico do Quadro de Gráficos 1.

A nossa hipótese é que a princípio, os estudantes apresentarão dificuldades, por não estarem familiarizados com esse tipo de atividade, por isso o professor deve auxiliá-los mostrando como traçar uma reta paralela, destacando os pontos em que essa reta toca o gráfico. Após essa intervenção, acreditamos que os discentes preencherão o quadro com facilidade.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que após o preenchimento do quadro eles notarão que cada uma das retas paralelas ao eixo "x" toca o gráfico de uma função injetora em um só ponto e que quando a reta toca o gráfico em mais de um ponto ou nenhuma vez, o gráfico não é de uma função injetora. Nessa etapa a nossa hipótese é de que os estudantes preencherão o quadro de observação com facilidade, mas terão dificuldade em preencher o quadro de conclusão, mas essa dificuldade será superada por meio de ponderações do professor, pautadas em perguntas direcionadas à turma, no intuito de promover reflexão, discussão sobre o comportamento do gráfico de uma função injetora.

Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e conclusão, e após a fala

da última equipe, ele (o professor) realizará a institucionalização do método prático para reconhecimento do gráfico de uma função injetora.

4.2.12 Atividade 09

ATIVIDADE 09

Título: Gráfico de uma Função Sobrejetora

Objetivo: Identificar o gráfico de uma Função Sobrejetora

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Gráficos, régua, caneta ou lápis, borracha

Procedimento:

Em cada gráfico do Quadro de Gráficos, trace linhas horizontais (paralelas ao eixo x) e a seguir:

- Identifique por **S** os gráficos que são "cortados" (interceptados) pela mesma reta mais de uma vez;
- Identifique por **NS** os gráficos que não são cortados (interceptados) mais de uma vez pela mesma reta.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Gráfico	O gráfico é "cortado" (interceptado) mais de uma vez por uma mesma reta?	
	Sim	Não
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Observação:**Conclusão****Análise a priori da Atividade 09**

A análise a priori desta atividade 09, também está pautada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 09, o Quadro de Gráficos 1 e uma régua. Se considerar mais conveniente, o docente pode solicitar, com antecedência, a régua aos estudantes.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde um dos integrantes da equipe, utilizando a régua e o lápis ou caneta, deverá traçar linhas horizontais, ou seja, retas paralelas ao eixo "x", e juntamente com seu grupo, Identificar por **S** os gráficos que são "cortados" (interceptados) pela mesma reta uma ou mais vezes, e por **NS** quando não são cortados (interceptados) por pelo menos uma dessas retas e, de posse dessas informações, preencher o quadro da Atividade 09.

A nossa hipótese é que os estudantes realizarão essa atividade com mais facilidade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução da atividade anterior, e notarão que **S** está relacionada a função sobrejetora.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que após as ponderações do professor, o preenchimento do quadro solicitado e a

discussão em grupo, possibilitará que eles percebam as características do gráfico de uma função sobrejetora. Nessa etapa, nossa hipótese é que após o preenchimento do quadro de observação os discentes chegarão à conclusão bem próxima de que o gráfico de uma função sobrejetora é cortado mais de uma vez por qualquer reta paralela ao eixo "x" e que pertença ao contradomínio da função.

Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e conclusão, e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a institucionalização do método prático para reconhecimento do gráfico de uma função sobrejetora.

4.2.13 Atividade 10

ATIVIDADE 10

Título: Gráfico de uma Função Bijetora

Objetivo: Identificar o gráfico de uma Função Bijetora

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Gráficos, régua, caneta ou lápis, borracha

Procedimento:

Em cada gráfico do Quadro de Gráficos, trace linhas horizontais (paralelas ao eixo x) e a seguir:

- Identifique por **B** os gráficos que são "cortados" (intersectados) uma única vez pela mesma reta;
- Identifique por **NB** os gráficos que não são cortados (intersectados) ou são cortados mais de uma vez pela mesma reta.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Gráfico	Cada reta "corta" (intersecta) o gráfico uma única vez?	
	Sim	Não
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

8		
9		
10		
11		
12		

Observação:

--

Conclusão

--

Análise a priori da Atividade 10

A análise a priori desta atividade 10, também está fundamentada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 10, o Quadro de Gráficos 1 e uma régua. Se considerar mais conveniente, o docente pode solicitar, com antecedência, a régua aos estudantes.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde um dos integrantes da equipe, utilizando a régua e o lápis ou caneta, deverá traçar linhas horizontais, ou seja, retas paralelas ao eixo "x", e juntamente com seu grupo, identificar por **B** os gráficos que são "cortados" (interceptados) uma única vez pela mesma reta, e por **NB** quando isso não ocorrer; e de posse dessas informações, preencher o quadro da Atividade 10.

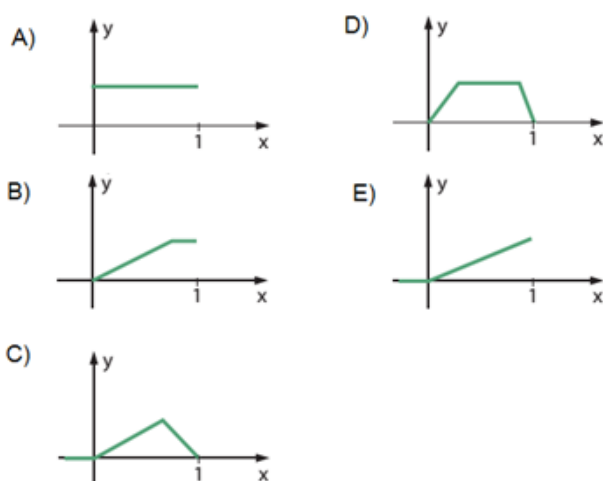
A nossa hipótese é que os estudantes realizarão essa atividade com mais facilidade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução das duas atividades anteriores, e notarão que **B** está relacionada a função bijetora.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que após as ponderações do professor, o preenchimento do quadro solicitado e a discussão em grupo, possibilitará que eles percebam as características do gráfico de uma função bijetora. Nessa etapa, nossa hipótese é que os estudantes não terão dificuldade na execução do preenchimento do quadro de observação e da definição, desenvolvendo a habilidade de reconhecer o gráfico de uma função bijetora.

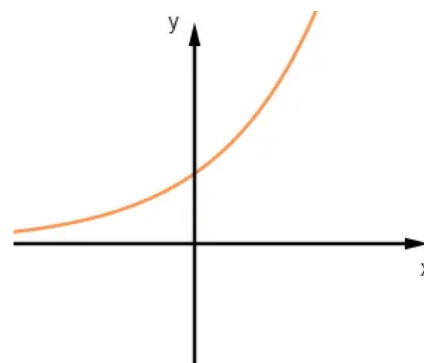
Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e conclusão, e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a institucionalização do método prático para reconhecimento do gráfico de uma função bijetora.

4.2.14 Questões de Aprofundamento das Atividades 08, 09 e 10

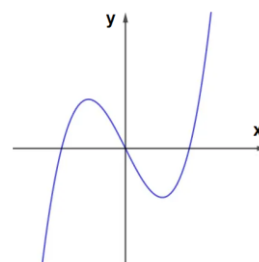
1. (UNIFESP) Há funções $y = f(x)$ que possuem a seguinte propriedade: “a valores distintos de x correspondem valores distintos de y ”. Tais funções são chamadas injetoras. Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem a seguir, é injetora?



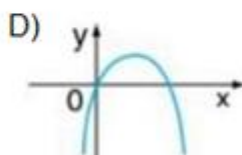
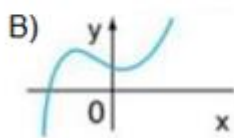
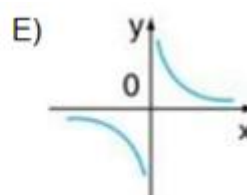
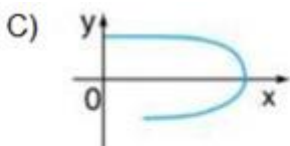
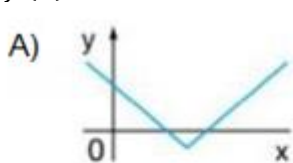
2. O gráfico ao lado representa a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Essa função é injetora? Justifique a sua resposta.



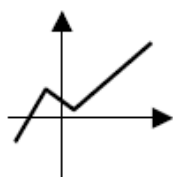
3. O gráfico ao lado representa a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x$. Essa função é injetora, sobrejetora ou bijetora? Por quê?



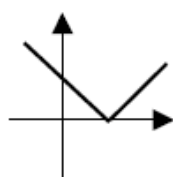
4. (UFPE) Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora $y = f(x)$?



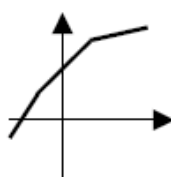
5. (EEAR-2018) Considere os gráficos.



Função I



Função II



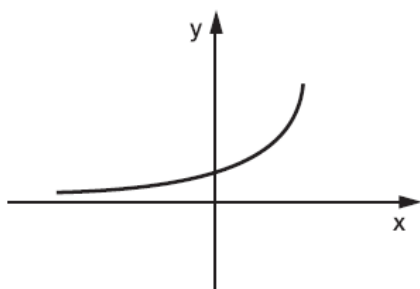
Função III

É(são) injetora(s) a(s) função(ões)

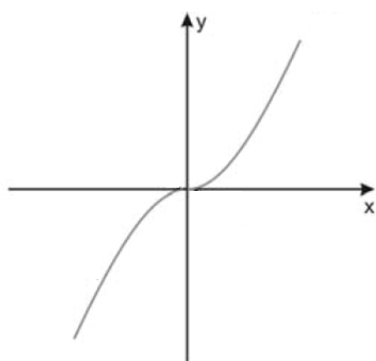
- A) I e III, apenas C) I, apenas
B) III, apenas D) I, II e III

6. Verifique se cada função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir representa uma função bijetora. Justifique a sua resposta.

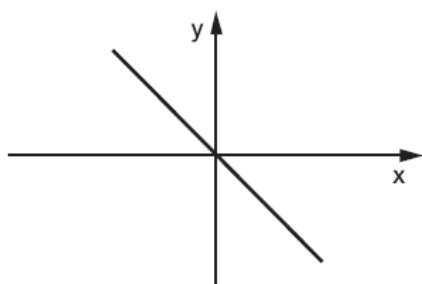
a)



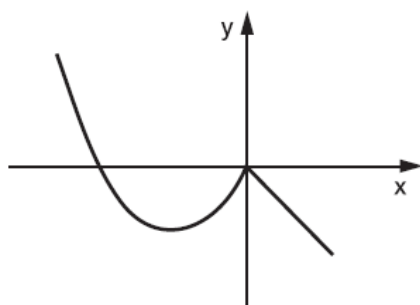
b)



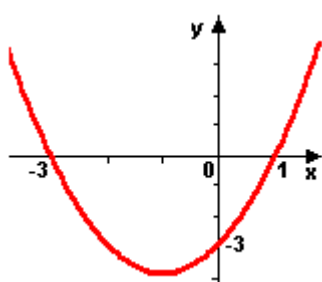
c)



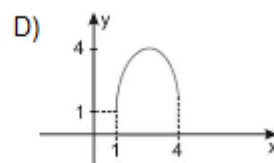
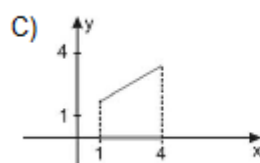
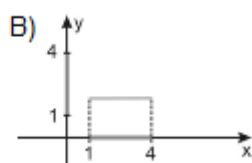
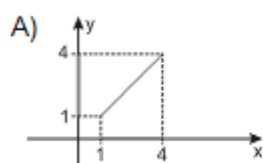
d)



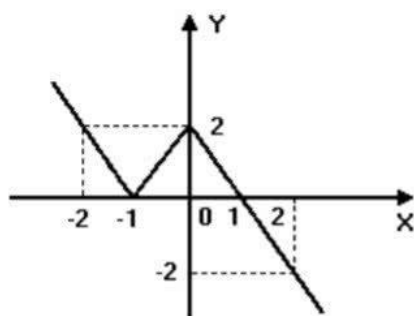
7. A curva abaixo é o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Essa função é bijetora? Por quê?



8. As funções a seguir, definidas pelos gráficos, têm domínio $A = [1, 4]$ e contradomínio $B = [1, 4]$. Qual deles representa uma função bijetora?

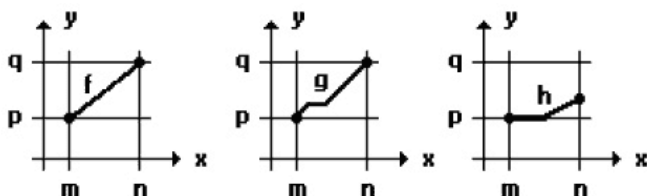


9. (PUCCAMP-SP) Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pelo gráfico a seguir. É correto afirmar que:



- A) f é sobrejetora e não injetora.
- B) f é bijetora.
- C) $f(x) = f(-x)$ para todo x real.
- D) $f(x) > 0$ para todo x real.
- E) o conjunto imagem de f é $]-\infty; 2]$

10. (UFF) Considere as funções f , g e h , todas definidas em $[m, n]$ com imagens em $[p, q]$ representadas através dos gráficos a seguir.



- A) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.
- B) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
- C) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.
- D) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.
- E) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

4.2.15. Atividade 11

ATIVIDADE 11

Título: Cardinalidade do Domínio e do Contradomínio de uma Função Bijetora

Objetivo: Descobrir a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma função bijetora.

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Funções 2, caneta ou lápis.

Procedimento:

- Observe cada um dos diagramas do Quadro de Funções 2;
- Identifique aquelas que são bijetoras.

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

Função	A função é bijetora?		A quantidade de elementos do domínio(cardinalidade) e do contradomínio é igual?	
	Sim	Não	Sim	Não
K				
L				
M				
N				
P				
Q				
R				
S				
T				
V				
W				
Z				

Observação:

Conclusão:

Análise *a priori* da Atividade 11

A análise *a priori* desta atividade 11, também está fundamentada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 11 e o Quadro de Funções 2.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá observar os diagramas de setas do Quadro de Funções 2 e identificar aqueles que representam uma função bijetora e, em seguida, com base nas informações obtidas, devem preencher o quadro da Atividade 11, marcando sim ou não para cada pergunta. O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno compreenda que quando uma função é bijetora, seu domínio e o contradomínio possuem a mesma cardinalidade, ou seja, a mesma quantidade de elementos.

A nossa hipótese é que os alunos não apresentarão dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução da atividade anterior.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que os discentes não terão dificuldade para escrever a conclusão dessa atividade, uma vez que após identificar as funções bijetoras, no Quadro de Funções 2 e preencher o quadro da Atividade 11, eles perceberão que em todas as funções bijetoras a quantidade de elementos do domínio e do contradomínio é igual.

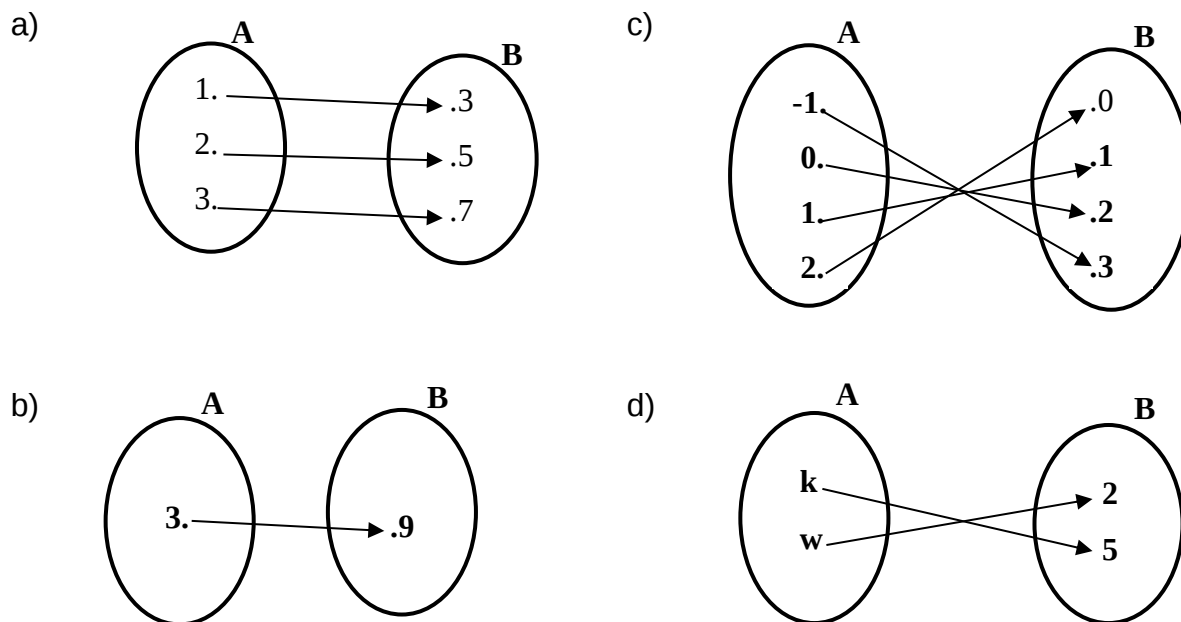
Nesta etapa, a nossa hipótese é que devido às experiências adquiridas nas atividades anteriores, os alunos não terão dificuldades no desenvolvimento dessa atividade, chegando facilmente ao objetivo da mesma.

Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e definição e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a formalização da definição de que em toda função bijetora o domínio e o contradomínio possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos.

4.2.16 Questões de Aprofundamento da Atividade 11

1. A quantidade de elementos que um conjunto A possui é denominada cardinalidade do conjunto A , sendo simbolizada por $\#A$.

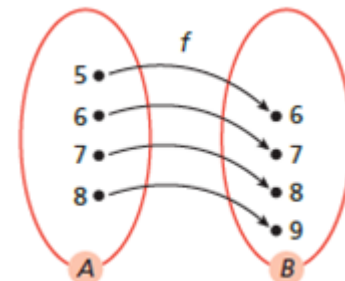
Compare a cardinalidade do domínio ($\#A$) e do contradomínio ($\#B$) de cada uma das seguintes funções:



2. Na questão anterior todas as funções são bijetoras. Qual é a relação existente entre a bijeção de dois conjuntos e a cardinalidade desses conjuntos?

3. O diagrama ao lado representa a função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 1$, ou seja, que associa a cada elemento do conjunto A o seu sucessor no conjunto B .

a) compare a cardinalidade (a quantidade de elementos) dos conjuntos A e B .



b) essa função é bijetora? Por quê?

c) o que podemos afirmar em relação à cardinalidade de dois conjuntos quando entre eles há uma bijeção?

d) se esses conjuntos fossem infinitos qual seria a imagem do elemento 100? E do elemento n ?

e) Se é possível estabelecer uma bijeção entre dois conjuntos infinitos é correto afirmar que eles possuem a mesma quantidade de elementos? Justifique a sua resposta.

4. É possível estabelecer uma relação que leva cada um dos elementos do conjunto $\mathbb{Z}$ a um único elemento de $\mathbb{N}$? Cite outros conjuntos em que essa relação com o conjunto $\mathbb{N}$ pode ser estabelecida.

4.2.17 Atividade 12

ATIVIDADE 12

Problema 1: Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares?

Análise a priori da Atividade 12

A análise a priori desta atividade 12, está fundamentada nos momentos de ensino da Resolução de Problemas como Ponto de Partida recomendados por Sá (2009), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

Momento da apresentação

Nesse momento o professor organizará a turma em duplas, entregando para cada uma delas uma folha de papel sulfite com o problema previamente selecionado pelo docente. Essa folha de papel deve ser colocada com o verso para cima, de modo que os alunos não possam ler o problema até que todos eles o recebam e sejam autorizados pelo professor a desvirar a folha e efetuar a leitura do problema a seguir:

Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares?

Momento de resolução

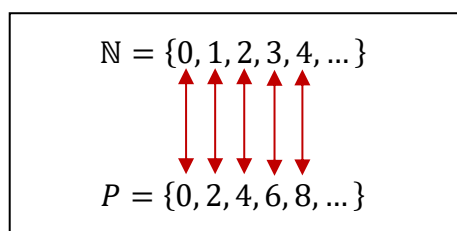
Após a leitura do problema, que também pode ser realizada pelo professor, será estipulado um tempo de 20 minutos para a resolução do problema por parte dos alunos.

Embora existam algumas maneiras distintas de obter a resolução do problema acima, acreditamos que os alunos serão conduzidos ao erro por utilizarem o senso comum de que o todo é sempre maior do que a parte. Neste sentido, a maioria ou todos eles afirmarão que como o conjunto dos números naturais pares é uma parte

dos números naturais (que também é composto pelos números naturais ímpares), o conjunto dos números naturais possui mais elementos, o que vai gerar uma boa discussão, favorecendo a introdução e o desenvolvimento da aplicação da bijeção de função na comparação de conjuntos infinitos.

Vejamos algumas das maneiras distintas de resolver o problema acima.

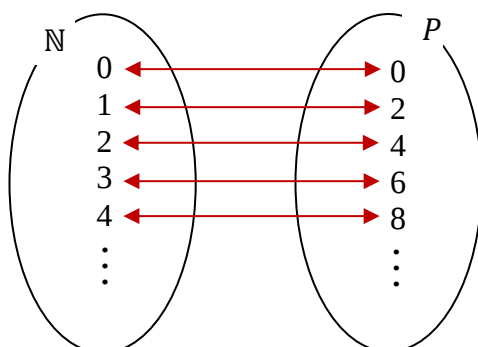
Solução 1: Utilizando a representação dos dois conjuntos por enumeração e verificar que há uma bijeção entre eles.



Ao representar o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números naturais pares, colocando esse último abaixo do primeiro, o professor utilizará a seta indicada na figura, mostrando que cada elemento do conjunto dos números naturais possui um único elemento correspondente no conjunto dos números naturais pares, em seguida ele perguntará aos alunos: e o elemento n do conjunto dos naturais, qual é o seu elemento correspondente no conjunto dos números naturais pares? Esse questionamento fará com que os alunos percebam que cada elemento do primeiro conjunto possui correspondência com o seu dobro, chegando fácil à resposta: $2n$.

A seguir o professor apresentará uma segunda solução para o problema utilizando o diagrama de Venn, da seguinte forma:

Solução 2: Utilizando o Diagrama de Venn fazendo cada elemento do conjunto dos naturais corresponder a um elemento do conjunto dos números naturais pares.



Ao Representar os dois conjuntos por meio do Diagrama de Venn e demonstrar que cada elemento do conjunto dos naturais possui um elemento correspondente no conjunto dos naturais pares, e dessa forma concluir que os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, embora o senso comum "afirme" o contrário.

Momento da análise

O momento da análise será desenvolvido mediante a verificação de que há uma correspondência "um a um" entre os elementos dos dois conjuntos, e dessa forma, mesmo sendo P um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$, temos uma correspondência biunívoca, ou seja, uma função bijetora, pois a função $f: \mathbb{N} \rightarrow P$, definida por $f(n) = 2n$ faz corresponder cada elemento de $\mathbb{N}$ a um elemento distinto de P , então o número de elementos do conjunto $\mathbb{N}$ é igual ao número de elementos do conjunto P . Portanto os dois conjuntos, mesmo sendo infinitos, possuem a mesma quantidade de elementos.

Essa conclusão mostra que para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos (mesma cardinalidade), basta verificar se existe uma bijeção entre eles.

Sistematização

Neste momento o professor apresentará a definição que utiliza a bijeção para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, que é invariante na resolução do problema proposto.

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma quantidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f: A \rightarrow B$. Caso contrário eles não possuem a mesma quantidade de elementos.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Após a apresentação da definição o professor apresentará a interpretação do problema inicial demonstrando que a utilização da definição acima facilita a resolução do problema proposto, sendo eficaz para verificar se dois conjuntos possuem ou não a mesma quantidade de elementos, ou seja, se eles são equipotentes.

Outras questões envolvendo o assunto sistematizado

Considerando que já estará estabelecido que dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos quando existe uma bijeção entre eles, resta dar continuidade ao estudo do assunto. Para tanto o professor deverá propor novas situações-problema para desenvolver a habilidade de resolver problemas que envolvam a comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos. Neste momento as recomendações encontradas em Sá (2005) e Sá (2006) são válidas.

Questões envolvendo a sistematização do assunto**4.2.18 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 12**

1. Quem possui mais elementos o conjunto dos dias da semana ou o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?
2. Entre os conjuntos dos números naturais e os números naturais múltiplos de 5 quem tem mais elementos? Justifique a sua resposta
3. Onde há mais números no conjunto dos números naturais ou no conjunto dos números quadrados perfeitos?
4. Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais ímpares?
5. Entre os conjuntos dos números naturais e os números múltiplos de três quem tem mais elementos?
6. Quem possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros estritamente positivos?
7. Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros estritamente negativos?
8. Quem possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros não negativos?

4.2.19 Atividade 13

ATIVIDADE 13

Problema 2: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros?

Análise a priori da Atividade 13

A análise a priori desta atividade 12, está fundamentada nos momentos de ensino da Resolução de Problemas como Ponto de Partida recomendados por Sá (2009), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

Momento da apresentação

O professor organizará a turma em duplas, entregando uma cópia do problema para cada uma delas e, em seguida realizará, com a turma, a leitura do problema a seguir:

Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros?

Momento de resolução

Após a leitura do problema, que também pode ser realizada pelo professor, será estipulado um tempo de 20 minutos para os alunos efetivarem a resolução do problema.

Considerando a experiência que os discentes adquiriram por meio da apresentação da solução do problema 1, que possui semelhança com esse problema, e das questões envolvendo a sistematização do assunto, acreditamos que algumas duplas apresentarão a solução para esse problema.

O professor deve solicitar as duplas para não socializarem a solução do problema com os outros estudantes até o momento oportuno que será indicado por ele. Dessa forma quem conseguiu chegar à solução correta, deverá aguardar os demais terminarem ou até o fim dos 20 minutos.

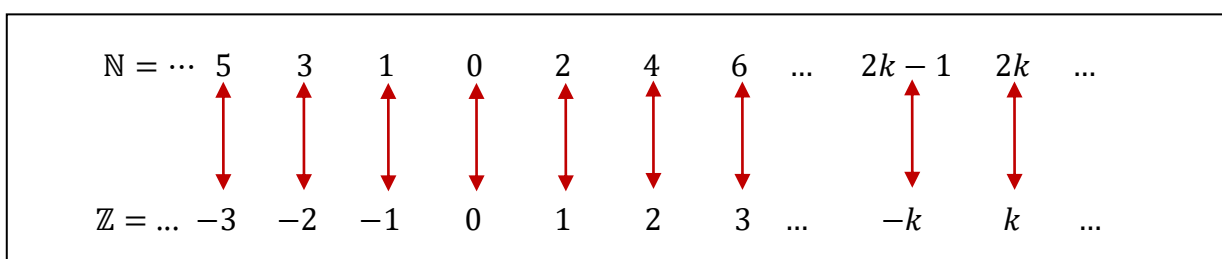
Ao término dos 20 minutos estipulados para a resolução do problema, o professor pedirá uma dupla vá até o quadro e apresente a sua solução para o

problema em pauta, analisando e discutindo com a turma cada etapa da resolução do problema, verificando assim se a solução apresentada pela dupla está correta.

Após a apresentação da primeira dupla, caso outras tenham obtido uma solução diferente para o problema, o professor pedirá que algumas delas apresente a sua solução. Não havendo, o próprio docente apresentará uma solução diferente para o problema, embora tenha a mesma resposta.

Vejamos algumas das maneiras distintas de resolver o problema 3.

Solução 1: Utilizando a representação dos dois conjuntos por enumeração e verificar que há uma bijeção entre eles.

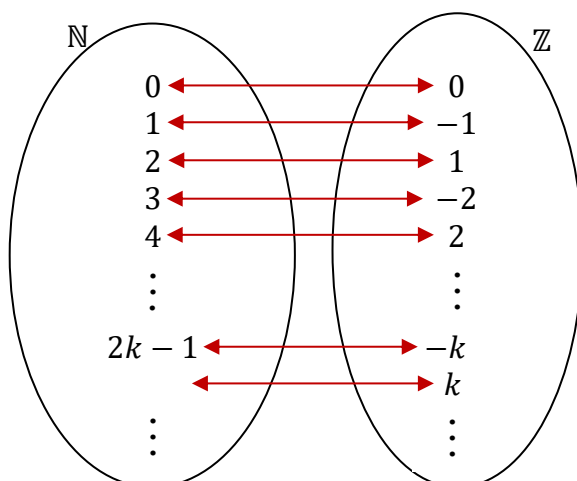


Ao representar o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros, o professor demonstrará que existe uma relação que associa a cada número natural par um número inteiro que corresponde à sua metade, e cada número natural ímpar está associado a um número inteiro igual ao oposto ou simétrico do número inteiro correspondente ao seu sucessor.

Dessa forma ao demonstrar que há uma bijeção entre os dois conjuntos, o professor pode concluir que eles possuem a mesma quantidade de elementos.

A seguir o professor apresentará uma segunda solução para o problema utilizando o digrama de Venn, da seguinte forma:

Solução 2: Utilizando o Diagrama de Venn fazendo cada elemento do conjunto dos naturais corresponder a um elemento do conjunto dos números inteiros.



Ao Representar os dois conjuntos por meio do Diagrama de Venn e demonstrar que cada elemento do conjunto dos naturais possui um elemento correspondente no conjunto dos inteiros, e dessa forma concluir que os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, embora o senso comum "afirme" o contrário.

Momento da análise

O momento da análise será desenvolvido mediante a verificação de que há uma correspondência "um a um" entre os elementos dos dois conjuntos, e dessa forma, mesmo sendo $\mathbb{N}$ um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$, temos uma correspondência biunívoca, ou seja, uma função bijetora, pois a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(n) =$

$$\begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{faz corresponder cada elemento de } \mathbb{N} \text{ a um elemento distinto}$$

de $\mathbb{Z}$, então o número de elementos do conjunto $\mathbb{N}$ é igual ao número de elementos do conjunto $\mathbb{Z}$. Portanto, os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos.

Desse modo o professor confirma a ideia de que se existe uma bijeção entre dois conjuntos eles possuem a mesma quantidade de elementos (mesma cardinalidade).

Sistematização

Neste momento o professor apresentará a definição que utiliza a bijeção para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, que é invariante na resolução do problema proposto.

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma quantidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f: A \rightarrow B$. Caso contrário eles não possuem a mesma quantidade de elementos.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Após a apresentação da definição o professor apresentará a interpretação do problema inicial demonstrando que a utilização da definição acima facilita a resolução do problema proposto, sendo eficaz para verificar se dois conjuntos possuem ou não a mesma quantidade de elementos, ou seja, se eles são equipotentes.

Outras questões envolvendo o assunto sistematizado

Considerando que já estará estabelecido que dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos quando existe uma bijeção entre eles, resta dar continuidade ao estudo do assunto. Para tanto o professor deverá propor novas situações-problema para desenvolver a habilidade de resolver problemas que envolvam a comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos. Neste momento as recomendações encontradas em Sá (2005) e Sá (2006) são válidas.

Questões envolvendo a sistematização do assunto

4.2.20 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 13

1. Quem possui mais elementos o conjunto dos números naturais ímpares ou o conjunto dos números inteiros?
2. Onde há mais pontos no conjunto dos pontos de um segmento de 1m ou no conjunto dos pontos de um segmento de 10m?
3. Onde há mais pontos no conjunto dos pontos de uma circunferência de raio 2 cm ou no conjunto dos pontos de uma circunferência de raio 10 cm?
4. Qual conjunto possui a maior quantidade de elementos: o conjunto dos números inteiros não negativos ou o conjunto dos números inteiros?
5. Que conjunto possui a maior quantidade de elementos: o conjunto dos números inteiros negativos ou o conjunto dos números inteiros?

4.2.21 Atividade 14

ATIVIDADE 14

Problema 3: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais?

Análise a priori da Atividade 14

A análise a priori desta atividade 14, está fundamentada nos momentos de ensino da Resolução de Problemas como Ponto de Partida recomendados por Sá (2009), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

Momento da apresentação

O professor organizará a turma em duplas, entregando uma cópia do problema para cada uma delas e, em seguida realizará, com a turma, a leitura do problema a seguir:

Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais?

Momento de resolução

Ao concluir a leitura do problema, o professor informará que os alunos terão 25 minutos para apresentar a solução do problema.

Mesmo com a experiência que os discentes adquiriram por meio da apresentação da solução dos problemas anteriores, que possui um pouco de semelhança com esse problema, e das questões envolvendo a sistematização do assunto, acreditamos que a maioria das duplas não apresentará a solução para esse problema.

Caso uma ou mais duplas consigam chegar a uma solução do problema, o professor deverá convidá-los a ir até o quadro apresentar essa resolução e explicar o raciocínio utilizado em cada etapa da resolução do problema.

Se ao término dos 25 minutos estipulados para a resolução do problema, nenhuma dupla tenha solucionado o problema em pauta, o professor apresentará algumas maneiras distintas de resolver o problema.

Vejamos algumas das maneiras distintas de resolver o problema 4:

Solução 1: Demonstrando que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Demonstração:

Seja a seguinte partição do conjunto dos números racionais:

$$Q = Q_-^* \cup \{0\} \cup Q_+^* .$$

Como a função $f: Q_+^* \rightarrow Q_-^*$, dada por $f\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si é bijetora, então fica provado que Q_+^* e Q_-^* são equipotentes.

Seja a função $f: Q_+^* \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$, com p e q primos entre si

Se $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n}$, então $(p, q) = (m, n)$. Logo $p = m$ e $q = n$.

Portanto, f é injetora.

Como a imagem de toda função injetora é equipotente a seu domínio. Então, $f: (Q_+^*)$ é equipotente a Q_+^* e está contido em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é equipotente. E já que Q_+^* é infinito, pois $\mathbb{N} \subset Q_+^*$. Então temos que $f: (Q_+^*)$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é enumerável.

Logo, Q_+^* é enumerável.

$Q_-^* \cup Q_+^*$ é enumerável, pois Q_-^* é equipotente a Q_+^* .

Portanto, $Q = Q_-^* \cup \{0\} \cup Q_+^*$ é enumerável.

Como o conjunto Q dos racionais é enumerável e todo conjunto enumerável possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, o professor prova que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros possuem a mesma quantidade de elementos.

A seguir o professor apresentará uma segunda solução para o problema utilizando "O passeio de Cantor":

Solução 2: Utilizando a demonstração clássica conhecida como "O passeio de Cantor"

George Cator provou, por meio de uma demonstração clássica, que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Nessa demonstração ele conseguiu listar, de forma ordenada, todas as frações positivas (incluindo as frações equivalentes como $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$), por meio de uma tabela onde na i -ésima linha ele escreveu as frações com numerador i e na j -ésima coluna as frações com denominador j , ou seja, na 1ª linha da tabela estão todas as frações positivas cujo numerador é 1 e 3ª coluna estão todas as frações positivas com denominador 3, de acordo com a figura a seguir:

	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Em seguida ele enumerou todos os quadradinhos dessa tabela infinita com os números naturais "passeando" num zig-zague, conforme a figura seguinte:

	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{1}{1}$ ①	$\frac{1}{2}$ ②	$\frac{1}{3}$ ⑥	$\frac{1}{4}$ ⑦	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
2	$\frac{2}{1}$ ③	$\frac{2}{2}$ ⑤	$\frac{2}{3}$ ⑧	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	...
3	$\frac{3}{1}$ ④	$\frac{3}{2}$ ⑨	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	...
4	$\frac{4}{1}$ ⑩	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
⋮	⋮ ⑪	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Desse modo ele observou que temos uma correspondência bijetora entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadradinhos, da tabela, que contém os números racionais positivos. Assim, ele concluiu que o conjunto dos números racionais positivos possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, ou seja, o conjunto dos números racionais positivos é enumerável.

O conjunto dos números naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais e mesmo assim os dois possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos. Concluindo que nesse caso a parte não é menor que o todo, mas se o conjunto é finito a parte é sempre menor que o todo.

A tabela infinita que Cantor construiu estabelece uma função sobrejetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$ tal que: $f(1) = \frac{1}{1}$, $f(2) = \frac{2}{1}$, $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{1}{3}$, ...

Como $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável e $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$ é sobrejetiva, segue que o conjunto $\mathbb{Q}_+$ também é enumerável.

De modo semelhante podemos provar que o conjunto $\mathbb{Q}_-$ dos números racionais negativos é enumerável.

Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ e a união entre conjuntos enumeráveis é enumerável, podemos concluir que o conjunto dos números racionais é enumerável, isto é, ele possui a mesma quantidade de elementos do conjunto dos números naturais

Momento da análise

O momento da análise será desenvolvido mediante a verificação de que há uma correspondência "um a um" entre os elementos dos dois conjuntos, e dessa forma, mesmo sendo $\mathbb{N}$ um subconjunto próprio de $\mathbb{Q}$, temos uma correspondência biunívoca, ou seja, uma função bijetora, pois em cada quadradinho que contém um número racional foi enumerado com um número natural a linha em zigue-zague faz corresponder cada elemento de $\mathbb{N}$ a um elemento distinto de $\mathbb{Q}$, então o número de elementos do conjunto $\mathbb{N}$ é igual ao número de elementos do conjunto $\mathbb{Q}$. Portanto os dois conjuntos, possuem a mesma quantidade de elementos.

Desse modo o professor confirma a ideia de que se existe uma bijeção entre dois conjuntos eles possuem a mesma quantidade de elementos (mesma cardinalidade).

Sistematização

Nesse momento o professor reforçará a importância da utilização do conceito de bijeção para verificar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, que é invariante na resolução do problema proposto.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Uma vez que o professor já apresentou a definição de função bijetora, e sua utilização para facilitar a resolução de problemas que envolvem a comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos finitos ou infinitos, nesta etapa do trabalho ele deverá mostrar a eficácia desse mecanismo na resolução de problemas semelhantes a esse.

Outras questões envolvendo o assunto sistematizado

Como já ficou estabelecido que dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos quando existe uma bijeção entre eles, o professor pode apresentar a definição de conjunto enumerável e, em seguida, dar continuidade ao estudo do assunto. Desse modo, nesse momento o discente deve propor novos problemas para sistematizar o assunto.

Questões envolvendo a sistematização do assunto

4.2.22 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 14

1. Qual intervalo possui maior quantidade de elementos: $[0, 1]$ ou $]0, 1[$?
2. Dizemos que dois intervalos são equipotentes quando eles possuem a mesma quantidade de elementos. O intervalo $[0, 1]$ é equipotente ao intervalo $]0, 1[$?
3. Qual conjunto possui mais elementos: o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números reais que estão entre 0 e 1?
4. Qual conjunto possui a maior quantidade de elementos: o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ou o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$?
5. O axioma grego que afirma que "o todo é sempre maior que as partes" está correto? Por quê?
6. Em matemática dizemos que dois conjuntos são equipotentes quando possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos. Nestas condições é correto afirmar que os conjuntos dos números naturais é equipotente ao conjunto dos números inteiros e ao dos racionais? Justifique a sua resposta

4.2.23 Atividade 15

ATIVIDADE 15

Título: A cardinalidade dos intervalos reais

Objetivo: Descobrir uma relação entre a cardinalidade dos intervalos de números reais

Material: Roteiro da atividade, Quadro de Intervalos Reais, caneta ou lápis

Procedimento:

- Observe o Quadro de Intervalos Reais, indicando por **B** as relações, entre os intervalos reais, que representam uma função bijetora e por **NB** aquelas que não representam;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Conjuntos	A relação de A em B é uma função bijetora?	
	Sim	Não
$A = [0, 1]$ e $B =]0, 1[$		
$A = [0, 1]$ e $B = [0, 1[$		
$A = [0, 1]$ e $B =]0, 1]$		
$A = [0, 1]$ e $B = [0, 1]$		
$A =]0, 1[$ e $B = [0, 1[$		
$A = [0, 1]$ e $B = [-1, 1]$		

Observação:

Conclusão

Análise *a priori* da Atividade 15

A análise *a priori* desta atividade 15, está embasada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 15 e o Quadro de Relações de Intervalos reais, que tem por objetivo descobrir a relação entre os intervalos de números reais e concluir que todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá analisar o Quadro de Relações de Intervalos reais, escrevendo **B** para aquelas onde existe uma função bijetora que relaciona os elementos do primeiro intervalo com os do segundo intervalo e, em seguida, devem preencher o quadro da Atividade 15, com base nas informações obtidas.

Nossa hipótese é que a princípio os estudantes apresentarão um pouco de dificuldades no desenvolvimento desta atividade, no entanto estas poderão ser sanadas por meio de ponderações com base em perguntas direcionadas à turma, levando-os a refletir sobre os conceitos de intervalos reais e função bijetora, acarretando no desenvolvimento da capacidade de análise desses educandos, o que facilitará a execução das atividades posteriores.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que os discentes notarão que, em todos os casos analisados, existe uma função bijetora que relaciona os intervalos reais, preenchendo assim os quadros de observação e conclusão. Nossa hipótese é de que, com o auxílio do professor, a maioria das equipes concluirão que todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos.

Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e conclusão e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a formalização da conclusão de que todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos, representando-a também por meio de desenho e simbologia.

4.2.24 Atividade 16

ATIVIDADE 16

Título: Comparando a cardinalidade de um intervalo de números reais e a cardinalidade do conjunto dos números reais

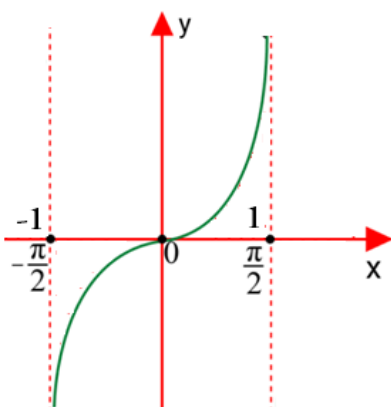
Objetivo: Descobrir a relação entre a cardinalidade de um intervalo de números reais e a cardinalidade do conjunto dos números reais

Material: Roteiro da atividade, régua, caneta ou lápis, borracha

Procedimento:

O gráfico a seguir representa a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Utilizando a régua e o lápis, trace retas paralelas ao eixo x e que passem pelos pontos do contradomínio.



Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

	Sim	Não
Cada uma das retas traçadas cortam um elemento diferente do contradomínio?		
O conjunto imagem é igual ao contradomínio da função?		
A função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetora?		

Observação:

Conclusão

--

Análise a priori da Atividade 16

A análise a priori desta atividade 16, também está fundamentada nos momentos de ensino por atividades experimentais descritos por Sá (2019), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

No 1º momento o professor organiza a turma com as mesmas equipes formadas por ocasião da Atividade 01 e, no momento seguinte, apresenta e distribui a Atividade 16 e uma régua.

No 3º momento ocorre a execução da atividade, onde cada equipe deverá escolher um representante para traçar várias retas paralelas ao eixo "x" e, em seguida, preencher o quadro da Atividade 16, marcando sim ou não para cada pergunta. O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno compreenda que existe uma função bijetora que relaciona o intervalo de números reais e o conjunto dos números reais, concluindo que eles possuem a mesma cardinalidade.

A nossa hipótese é que os alunos não apresentarão dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, considerando a experiência adquirida por eles na resolução das atividades anteriores, que possuem um processo de execução semelhante a esta.

Durante a análise das informações registradas (5º momento), acreditamos que os discentes perceberão que existe uma função bijetora que relaciona o intervalo de números reais $[0, 1]$ e o conjunto dos números reais, chegando a conclusão de que eles possuem a mesma cardinalidade, ou seja, a mesma quantidade de elementos.

Nesta etapa, a nossa hipótese é que com o conhecimento adquirido na atividade anterior, onde os estudantes descobriram que todos os intervalos de números reais possuem a mesma cardinalidade, somado a ponderação do professor, os alunos não terão dificuldades em concluir que todo e qualquer intervalo real e o conjunto dos números reais possuem a mesma cardinalidade, ou seja, a mesma quantidade de elementos.

Quanto ao 6º momento, o da institucionalização, cabe ao docente solicitar que um componente de cada equipe socialize sua observação e definição e após a fala da última equipe, ele (o professor) realizará a formalização da conclusão de todo e qualquer intervalo real possui a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos do conjunto dos números reais, representando esse fato por meio desenho e simbologia.

4.2.25 Atividade 17

ATIVIDADE 17

Problema 4: Existe infinito maior que o outro?

Análise a priori da Atividade 17

A análise a priori desta atividade 17, está fundamentada nos momentos de ensino da Resolução de Problemas como Ponto de Partida recomendados por Sá (2009), destacando nossa hipótese acerca das expectativas que temos sobre as atitudes do professor e estudantes durante a realização desta atividade.

Momento da apresentação

Sugerimos que o professor organize a turma em duplas e antes de distribuir uma cópia do problema para cada dupla, solicitar aos estudantes que só iniciem a resolução do problema após a autorização do professor, que fará a leitura do mesmo com a turma.

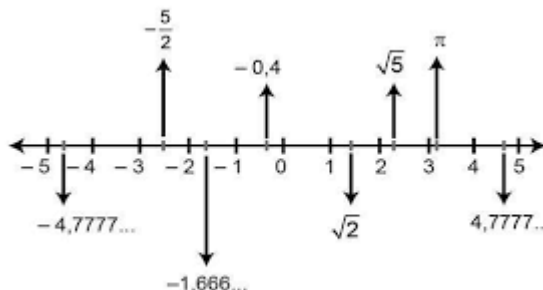
Existe infinito maior que o outro?

Momento de resolução

Após a leitura do problema, o professor comunicará que as duplas dispõem de um tempo de 25 minutos para efetuar a resolução do problema. Acreditamos que por se tratar de um problema com elevado grau de dificuldade, os alunos não conseguirão apresentar a solução correta para esse problema, no entanto a discussão de ideias e a apresentação das estratégias utilizadas por cada dupla, bem como a construção de cada etapa da solução do problema propiciará um ambiente favorável à construção de novos conhecimentos, sobretudo a compreensão de que existe infinito maior que o outro.

Solução:

Para resolver esse problema utilizaremos o método de redução ao absurdo. Quando tentamos representar todos os números reais em uma reta numérica, percebemos que é impossível listar todos eles:



Por que é impossível representar todos os números reais em uma reta numérica? Existe uma bijeção $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ ou o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais é não enumerável?

Para facilitar a nossa compreensão, suponhamos que é possível listar todos os números reais (na forma decimal) compreendidos entre 0 e 1 e que além disso sejam formados somente pelos algarismos 0 e 1, destacando na nossa lista o 1º algarismo após a vírgula, do 1º número; o 2º algarismo após a vírgula, do 2º número e assim sucessivamente, conforme destacamos a seguir:

$$1^{\circ} \rightarrow 0, \mathbf{1}1111111 \dots$$

$$2^{\circ} \rightarrow 0,0\mathbf{1}010101 \dots$$

$$3^{\circ} \rightarrow 0,10\mathbf{0}11001 \dots$$

$$4^{\circ} \rightarrow 0,110\mathbf{1}1011 \dots$$

$$5^{\circ} \rightarrow 0,0010\mathbf{0}100 \dots$$

$$6^{\circ} \rightarrow 0,11011\mathbf{1}01 \dots$$

$$7^{\circ} \rightarrow 0,000100\mathbf{0}1 \dots$$

$$8^{\circ} \rightarrow 0,1110111\mathbf{0} \dots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

A partir desses algarismos obtemos o número **0, 11010100 ...**

Trocando a posição dos algarismos **0** e **1** que se encontram após a vírgula, surge um novo número: **0,00101011 ...** que é um número real compreendido entre 0 e 1 e formado somente pelos algarismos 0 e 1, mas que com certeza não aparece na

nossa lista anterior, uma vez que seu primeiro dígito é diferente do algarismo da primeira posição da diagonal, tendo também sua segunda casa decimal diferente do algarismo que ocupa a segunda posição da diagonal e assim por diante.

Assim, o número **0,00101011 ...** não pode ser nenhum número da nossa lista, mas nossa lista tinha todos os números reais que atendiam as condições estabelecidas, o que é um absurdo!

Isso ocorreu porque supomos que o conjunto dos números reais é enumerável, o que leva ao absurdo do número está e, ao mesmo tempo, não está numa lista.

Logo o conjunto dos números reais não pode ser enumerado, isto é, o conjunto dos números reais, que é infinito, possui mais elementos que o conjunto dos números naturais, que também é infinito, portanto, está provado que existe infinito maior que o outro.

Momento da análise

O momento da análise será desenvolvido mediante a verificação, por meio do método de redução ao absurdo, de que o conjunto dos números reais é um conjunto não enumerável, por isso apresenta cardinalidade maior que a dos números naturais e que, dessa forma, não existe uma correspondência "um a um" entre os elementos dos dois conjuntos. Demonstrando ainda que existe infinito maior que o outro.

Sistematização

Neste momento o professor apresentará a resolução do problema, provando que o conjunto dos números reais possui mais elementos que o conjunto dos números naturais, apresentando aos estudantes uma nova de técnica de comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos, além de ampliar a visão deles acerca do infinito.

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma quantidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f: A \rightarrow B$. Caso contrário eles não possuem a mesma quantidade de elementos.

Solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

Após o momento da sistematização, o professor apresenta a interpretação do problema inicial demonstrando que a utilização da definição acima facilita a resolução

do problema proposto, sendo eficaz para verificar se dois conjuntos possuem ou não a mesma quantidade de elementos, comparando assim a cardinalidade desses conjuntos ou intervalos.

Outras questões envolvendo o assunto sistematizado

Em seguida o professor dará continuidade ao estudo do assunto, propondo novas situações-problema para desenvolver a habilidade de resolver problemas que envolvam a comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos.

Questões envolvendo a sistematização do assunto

4.2.26 Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 17

- 1.** Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números reais ou o intervalo real $[0, 1]$?
- 2.** Considere o conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Existem mais números racionais ou irracionais?
- 3.** Dados o conjunto dos números reais entre 0 e 1, ou seja, $]0, 1[$ e o conjunto dos números reais entre 0 e 100, isto é, $]0, 100[$. Qual deles possui mais elementos?
- 4.** Dados o conjunto dos números reais entre 0 e 1, ou seja, $]0, 1[$ e o conjunto dos números reais maiores que 0, isto é, $]0, \infty [$. Qual deles possui mais elementos?

4.3 Pré-teste e Pós-testes

Nesta parte do trabalho apresentamos o teste diagnóstico constituído por 13 questões, que foi aplicado como o Pré-teste e o Pós-teste, com o objetivo de verificar o desempenho dos estudantes na resolução de questões sobre Função com ênfase na Bijeção de Função e comparar o nível de conhecimento dos alunos antes e após a aplicação da Sequência Didática, permitindo detectar se houve ou não evolução ou desenvolvimento da aprendizagem.

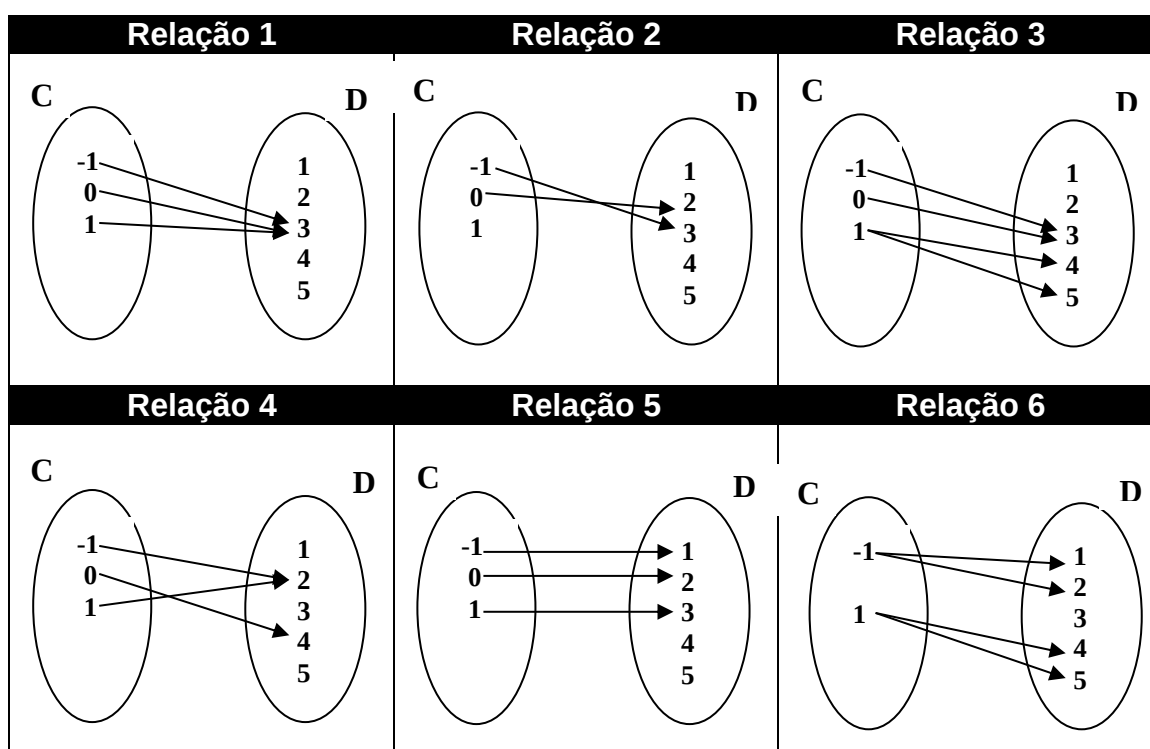
PRÉ-TESTE e PÓS-TESTE

Objetivo: Avaliar o desempenho dos alunos em questões envolvendo Função e Bijeção de Função.

Material: Folha contendo as questões, papel, caneta ou lápis e borracha.

Procedimentos: Entregar para cada aluno uma cópia do teste e solicitar que resolvam.

1. Os diagramas a seguir representam relações que associam elementos do conjunto C a elementos de D , ou seja, $R: C \rightarrow D$.



a) Dentre as relações anteriormente representadas pelos diagramas, quais representam uma função $f: C \rightarrow D$? Justifique a sua resposta.

Resposta esperada: Relações 1, 4 e 5. Cada elemento do conjunto C possui uma, e uma só imagem no conjunto D .

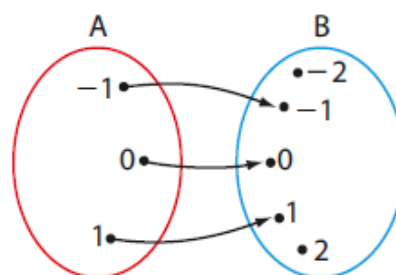
b) quais das relações representadas pelos diagramas acima não representa uma função? Por quê?

Resposta esperada: Relações 2, 3 e 6. Na relação 2 existe um elemento que não possui imagem, e nas relações 3 e 6 existem elementos que possuem mais de uma imagem.

2. O esquema ao lado representa a função de

A em B , denominada $f: A \rightarrow B$.

Identifique o conjunto domínio, o contradomínio e o conjunto imagem dessa função.

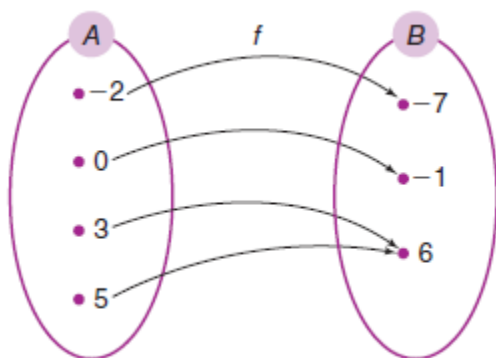


Respostas esperadas:

$$D(f) = A = \{-1, 0, 1\}, CD(f) = B = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ e } Im = \{-1, 0, 1\}$$

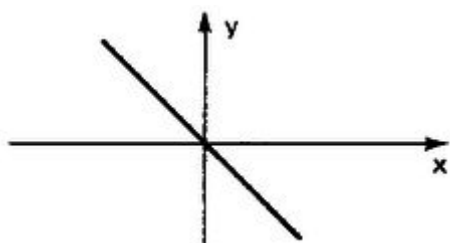
$$Dm(f) = A = \{-1, 0, 1\}, Cd(f) = B = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ e } Im = \{-1, 0, 1\}$$

3. O diagrama a seguir representa a função $f: A \rightarrow B$. A função f é bijetora? Por quê?



Respostas esperadas: Não. Pois a função não é injetora; Não. Porque a quantidade de elementos do conjunto A é maior que a quantidade de elementos do conjunto B .

4. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, representada pelo gráfico a seguir é injetora, sobrejetora ou bijetora? Justifique a sua resposta.



Resposta esperada: Bijetora. Porque é injetora e sobrejetora; Porque cada reta paralela ao eixo x toca o gráfico da função em um único ponto.

5. Yasmin construiu uma função $g: F \rightarrow N$, que tem como domínio o conjunto $F = \{\text{UXI, AÇAI, PITAYA, BACURI, CACAU}\}$ e como contradomínio conjunto $N = \{3, 4, 5, 6\}$.

Nessa função f , ela associa cada elemento do conjunto A , a um número do conjunto N , que corresponde ao número de letras que forma o nome de cada elemento do domínio.

Nestas condições, a função g , idealizada por Yasmin, é bijetora? Por quê?

Respostas esperadas:

Não. Porque a função não é injetora.

Não. Pois há elementos do conjunto F que possuem a mesma imagem.

Não. Porque os elementos PITAYA e BACURI do conjunto F possuem a mesma imagem no conjunto N .

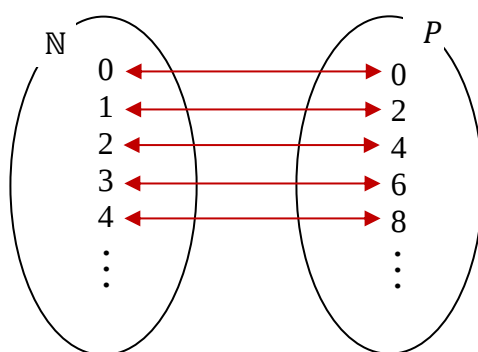
Não. Porque a quantidade de elementos dos dois conjuntos é diferente.

6. Quem possui a maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares? Justifique sua resposta.

Respostas esperadas:

Os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, pois existe uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow P$, definida por $f(x) = 2x$, que é bijetora.

$\# \mathbb{N} = \# P$. Pois existe uma função bijetora que associa a cada número natural um número igual ao seu dobro como representado no esquema de setas a seguir:



7. Onde há mais números no conjunto dos números naturais ou no conjunto dos números inteiros? Justifique a sua resposta.

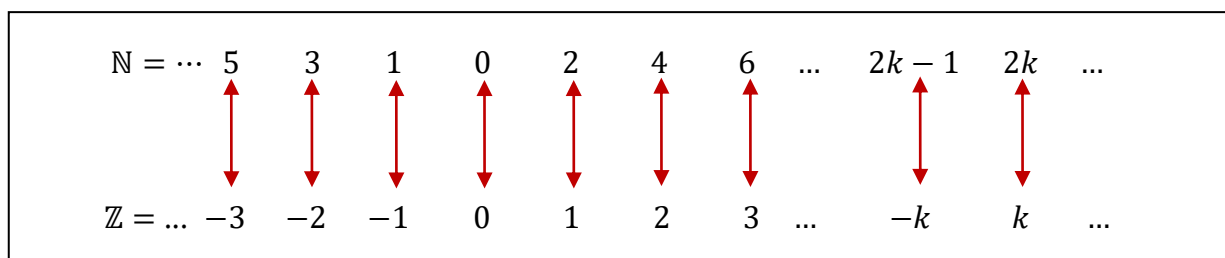
Respostas esperadas:

Nenhum deles. Pois o conjunto dos números inteiros é enumerável, isto é, possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais.

Os dois possuem a mesma quantidade de números. Porque existe uma função

$$\text{bijetora } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ definida por } f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Os dois possuem a mesma quantidade de elementos, pois existe uma bijeção entre os dois conjuntos:



8. Onde há mais números no conjunto dos números naturais ou no conjunto dos números racionais? Justifique a sua resposta.

Respostas esperadas:

Nenhum deles. Pois o conjunto dos números racionais é enumerável, isto é, possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais.

Os dois possuem a mesma quantidade de números. Porque existe uma função bijetora $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, demonstrada no quadro seguinte:

	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{1}{1}$ ①	$\frac{1}{2}$ ②	$\frac{1}{3}$ ⑥	$\frac{1}{4}$ ⑦	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
2	$\frac{2}{1}$ ③	$\frac{2}{2}$ ⑤	$\frac{2}{3}$ ⑧	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	...
3	$\frac{3}{1}$ ④	$\frac{3}{2}$ ⑨	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	...
4	$\frac{4}{1}$ ⑩	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
⋮	⋮ ⑪	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

9. Onde há mais números no conjunto dos números naturais ou no conjunto dos números reais? Justifique a sua resposta.

Resposta esperada:

O conjunto dos números reais, pois ele não é enumerável, isto é, possui cardinalidade (número de elementos) maior que a dos números naturais.

10. Dentre os intervalos reais $[-1, 1]$ e $[-10, 10]$, qual possui a maior quantidade de elementos? Justifique a sua resposta.

Resposta esperada: Os dois possuem a mesma quantidade de elementos. Porque todos os intervalos reais são equipotentes.

11. Onde existem mais números, no conjunto dos números naturais ou no intervalo de números reais $] -1, 1[$? Por quê?

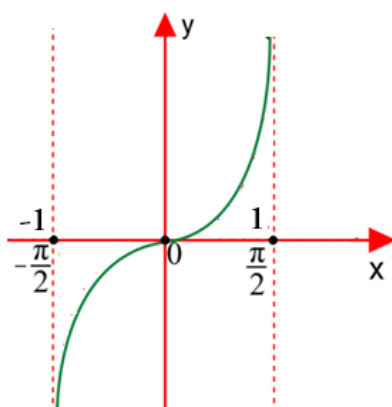
Resposta esperada: No intervalo de números reais $] -1, 1[$. Porque todo intervalo real possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais cuja cardinalidade é maior que a do conjunto dos números naturais.

$$\#] -1, 1[= \#\mathbb{R} > \#N$$

12. Quem possui mais elementos: o conjunto dos números reais ou o intervalo dos números reais compreendidos entre 0 e 1? Por quê?

Resposta esperada: Os dois possuem a mesma quantidade de elementos. Porque todo intervalo real possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais.

Os dois possuem a mesma quantidade de elementos. Pois analisando o gráfico da função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \tan x$, percebemos que ela é bijetora:



13. O todo é sempre maior que as partes? Justifique a sua resposta.

Resposta esperada: Não. Porque o conjunto dos números naturais pares é uma parte do conjunto dos números naturais, mas ambos possuem a mesma quantidade de elementos, pois existe uma bijeção entre eles, que associa a cada número natural uma imagem igual ao seu dobro.

Não. Porque: $P \subset \mathbb{N}$, mas existe uma função $f: P \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = 2x$ que é bijetora, portanto, $\#P = \#\mathbb{N}$.

Análise a priori do pré-teste e do pós-teste

O conhecimento adquirido por meio da nossa revisão de estudos sobre o ensino de bijeção de função possibilitou elencar hipóteses sobre o desempenho dos alunos no pré-teste.

Nossa hipótese é que no pré-teste, os estudantes apresentarão uma grande dificuldade diante da resolução da maioria das questões, sobretudo aquelas que exigem uma justificativa e/ou não estão de acordo com o senso comum, como por exemplo, as que versam sobre a comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos. Considerando que muitos deles desconhecem o conceito, a representação gráfica e a aplicação da bijeção de função, acreditamos que no geral, os estudantes terão um baixo rendimento no pré-teste.

Durante a aplicação da experimentação, que está fundamentada no Ensino por Atividades Experimentais e na Resolução de Problemas como Ponto de Partida, o aluno será instigado a observar, identificar características, refletir, discutir e buscar soluções para questões e problemas, realizar socialização das suas descobertas, tornando-se protagonista na construção do conhecimento dos conteúdos anteriormente citados e que após a formalização e representação desses por meio de texto, desenho e simbologia, o objeto matemática será fixado, resultando assim na construção do conhecimento. Após essa etapa, a nossa hipótese é que o desempenho dos discentes no pós-teste será bem superior ao rendimento obtido no pré-teste.

Por meio do cruzamento e análise dos dados coletados através do pré-teste e do pós-teste, verificaremos se as hipóteses aqui elencadas serão validadas ou não, possibilitando diagnosticar se a aplicação da sequência didática influenciou diretamente na construção do conhecimento, melhorando o desempenho dos estudantes no pós-teste.

5 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção discorreremos sobre a experimentação, que é a terceira etapa de uma pesquisa pautada na metodologia da Engenharia Didática. Nela apresentamos informações sobre a escola e os sujeitos da pesquisa, a aplicação da Sequência Didática, o cronograma da experimentação, bem como a descrição detalhada da aplicação em sala de aula da sequência didática planejada para alcançar os objetivos propostos nesse trabalho.

Nossa pesquisa foi realizada em uma escola pública da rede estadual de ensino, no município de Imperatriz, no Estado do Maranhão.

O nosso primeiro contato com a escola ocorreu no primeiro semestre de 2022, por meio de uma conversa com a equipe gestora e pedagógica. Na oportunidade apresentamos o objetivo, caracterização e justificativa da pesquisa, termos de consentimento livre e esclarecido, além dos questionário, testes e atividades que seriam propostos, por meio de um curso de Matemática, ofertado no auditório da escola, no turno vespertino, aos alunos do 1º Ano do Ensino Médio, do turno matutino, que poderiam realizar sua matrícula presencialmente ou por meio do google forms.

Apesar da divulgação realizada de sala em sala, a procura foi pequena, por isso abrimos inscrição para uma turma do 3º Ano. Assim, a nossa amostra foi constituída por 10 alunos, sendo 5 alunos do 1º Ano e 5 do 3º Ano, que posteriormente foram organizados em 5 duplas formadas por eles mesmos.

A experimentação da nossa pesquisa foi desenvolvida por meio da aplicação do pré-teste, pós-teste, atividades da sequência didática e das questões de aprofundamento. As informações foram obtidas por meio de gravação de toda os encontros, anotações no diário de campo, preenchimento das fichas de acompanhamentos de autoria de Sá (2019) e as resoluções e registros das atividades.

O processo de experimentação foi dividido em 7 encontros, que conforme Pais (2002), serão denominado sessões de ensino, uma vez que seu caráter específico diferem das aulas comuns e do processo corriqueiro de sala de aula. A seguir apresentamos o quadro de atividades desenvolvidas, destacamos a sequência ordenada de cada sessão de ensino, com suas respectivas atividades, e período de realização:

Quadro 6 - Atividades Desenvolvidas

DATA	SESSÃO	ATIVIDADE DESENVOLVIDA
10/06/2022	Diagnóstico Inicial	Questionário socioeconômico / TCLE Pré-Teste
14/06/2022	1ª	Atividade 01 - Definição de uma Função
		Atividade 02 - Imagem de uma função
		Atividade 03 - Imagem e Contradomínio de uma função
		Questões de Aprofundamento das Atividades 01, 02 e 03
		Atividade 04 - Domínio de uma função
		Questões de Aprofundamento da Atividade 04
17/06/2022	2ª	Atividade 05 - Função Injetora
		Atividade 06 - Função Sobrejetora
		Atividade 07 - Função Bijetora
		Questões de Aprofundamento das Atividades 05, 06 e 07
21/06/2022	3ª	Atividade 08 - Gráfico de uma Função Injetora
		Atividade 09 - Gráfico de uma Função Sobrejetora
		Atividade 10 - Gráfico de uma Função Bijetora
		Questões de Aprofundamento das Atividades 08, 09 e 10
		Atividade 11 - Cardinalidade do Domínio e do Contradomínio de uma Função Bijetora
		Questões de Aprofundamento da Atividade 11
24/06/2022	4ª	Atividade 12/Problema 1
		Questões envolvendo a sistematização da relação entre bijeção e cardinalidade de conjuntos
		Atividade 13/Problema 2
		Questões envolvendo a sistematização da definição de conjuntos enumeráveis
		Atividade 14/Problema 3
		Questões envolvendo a sistematização da definição de conjuntos enumeráveis
28/06/2022	5ª	Atividade 15 - A Cardinalidade dos intervalos Reais
		Atividade 16 - Comparando a cardinalidade de intervalos reais com a cardinalidade do conjunto dos números reais
		Atividade 17/Problema 4
		Questões envolvendo a sistematização do assunto da Atividade 17
01/07/2022	Diagnóstico Final	Apresentação do video OS INFINITOS DE CANTOR
		Pós-teste

Fonte: Pesquisa de Campo, 2022.

No tópico a seguir descrevemos, de forma detalhada, o desenvolvimento da nossa primeira sessão de ensino, composta pela aplicação do Questionário Sócioeconômico e do Pré-teste, destacando que a análise das respostas desses instrumentos embasou a construção o perfil dos estudantes participantes.

5.1 Diagnóstico Inicial

A primeira etapa da nossa experimentação ocorreu no dia 10 de junho de 2022, no auditório da escola. Inicialmente nos apresentamos e solicitamos aos discentes participantes que se apresentassem aos demais, em seguida, esclarecemos que o curso que estavam realizando tratava-se também uma pesquisa sobre o ensino de matemática, informando o nome da instituição, o programa ao qual estamos vinculado e o objetivo do estudo, destacando a relevância e a seriedade da nossa pesquisa, sobretudo a importância da participação dos estudantes para efetivação do processo.

Depois de nos certificarmos que todos compreenderam e que estavam dispostos a contribuir com conosco, explicamos e distribuímos a autorização de participação da pesquisa, denominada Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), reforçando que precisariam levar o documento e trazê-lo no próximo encontro, devidamente assinado pelo responsável dos participantes menor de idade.

A seguir informamos aos estudantes que eles reponderiam dois questionários, o primeiro com informações de cunho sócioeconômico, com destaque para vida escolar e a relação do aluno com a Matemática; e o outro seria um teste para avaliar os conhecimentos prévios desses discentes acerca do conteúdo abordado em nossa pesquisa. Foi solicitado a todos que respondessem todas as questões da forma que julgasse correta, utilizando somente lápis, borracha e caneta esferográfica azul ou preta.

O questionário socioeconômico foi efetivado de 15h15min às 15h25min, já o teste (pré-teste) ocorreu no horário de 15h30min às 17h02min (aproximadamente 1h30min). A seguir apresentaremos os resultados do questionário socioeconômico sobre o perfil dos discentes participantes do experimento realizado.

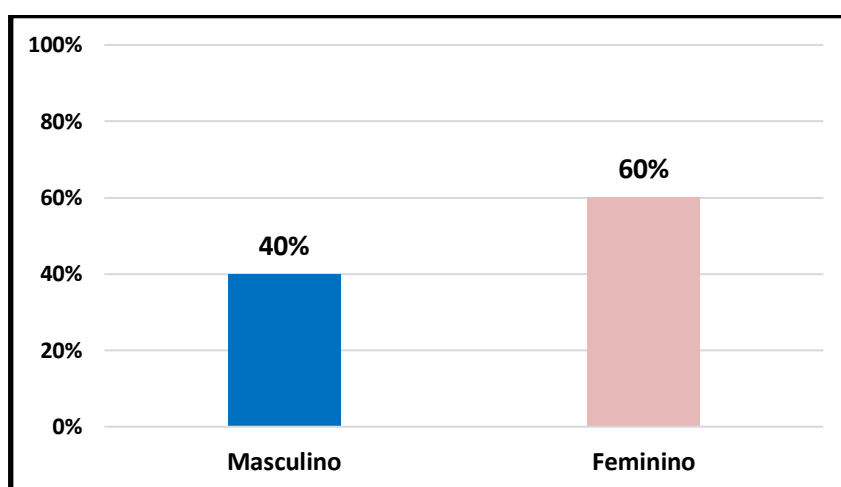
5.1.1 Perfil dos estudantes

O perfil dos estudantes foi construído com base nos dados coletados, por meio das respostas de um questionário impresso com questões de cunho sócioeconômico,

ênfatizando a vida escolar, hábitos de estudo e a relação do discente com a Matemática.

Nesta parte do trabalho, apresentamos os dados coletados, relacionando-os com os perfis encontrados nas pesquisas de Tourão (2020) e Brayner Júnior (2021), que também investigam estudantes do ensino médio. Como ponto de partida, apresentamos os dados referentes ao gênero dos discentes, utilizando o gráfico seguinte:

Gráfico 4: Distribuição dos estudantes por gênero

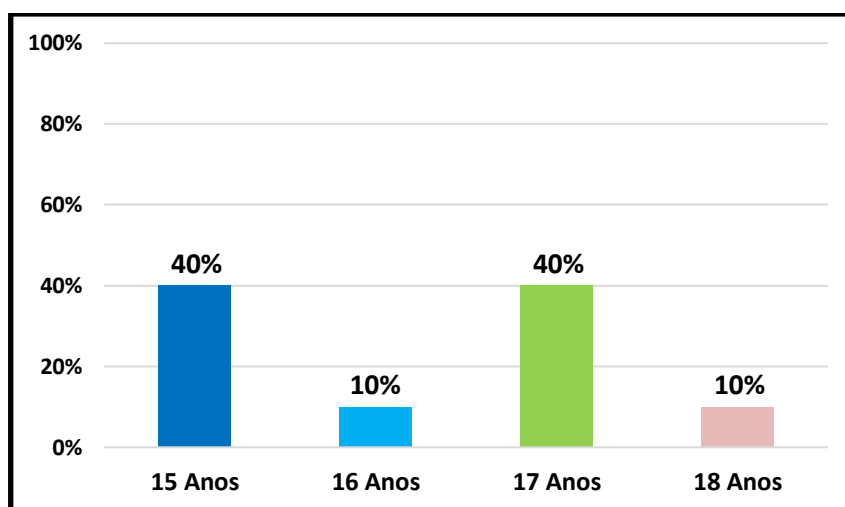


Fonte: Experimentação, 2022.

O gráfico anterior destaca que a quantidade de estudantes do sexo feminino (60%) é superior a quantidade de discentes do sexo masculino (40%). Esses dados estão de acordo com a pesquisa de Tourão (2020, p. 116) que realizou uma investigação com 27 estudantes, dentre esses 56% eram do sexo feminino e 44%, masculino.

Os resultados obtidos na pesquisa de Brayner Júnior (2021, p. 173) também aponta para uma predominância do sexo feminino (70%) em relação ao sexo masculino (30%), apresentando percentuais próximos dos índices apresentados em nosso estudo.

Em relação às idades dos discentes pesquisados construímos o gráfico a seguir:

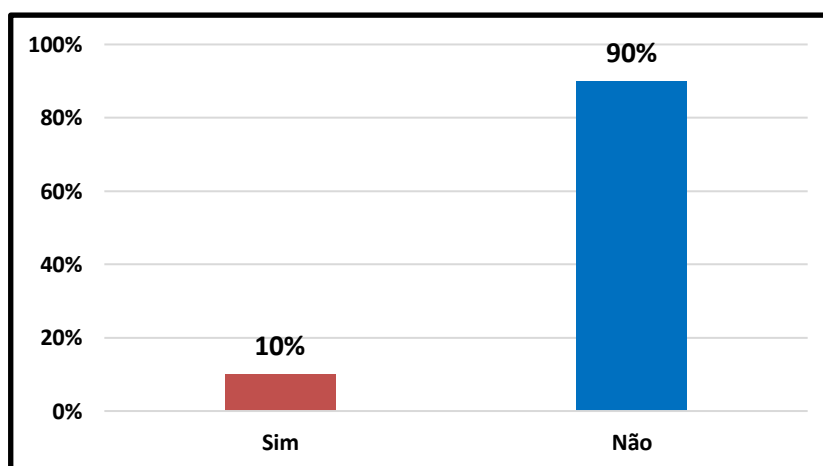
Gráfico 5: Distribuição dos estudantes por idade

Fonte: Experimentação, 2022.

O gráfico indica que a maioria os estudantes pesquisados (90%) possuíam entre 15 e 17 anos de idade, o que nos permite concluir a maioria deles estão dentro dos padrões de idade recomendados pelo Ministério da Educação (MEC) para cursar o Ensino Médio que é de 15 a 17 anos.

Considerando que 50% da nossa amostra é constituída por alunos do 3º ano do Ensino Médio, podemos afirmar que esses dados estão de acordo com os encontrados na pesquisa de Brayner Júnior (2021, p. 174), onde a maioria dos estudantes (60%) possuía 17 anos; concordando também com o trabalho de Tourão (2020, p.117), que evidenciou que a maioria dos estudantes (96%) possuíam idades entre 15 e 18 anos.

Com os dados obtidos nas respostas concernentes à dependência dos alunos em Matemática efetivamos a construção do seguinte gráfico:

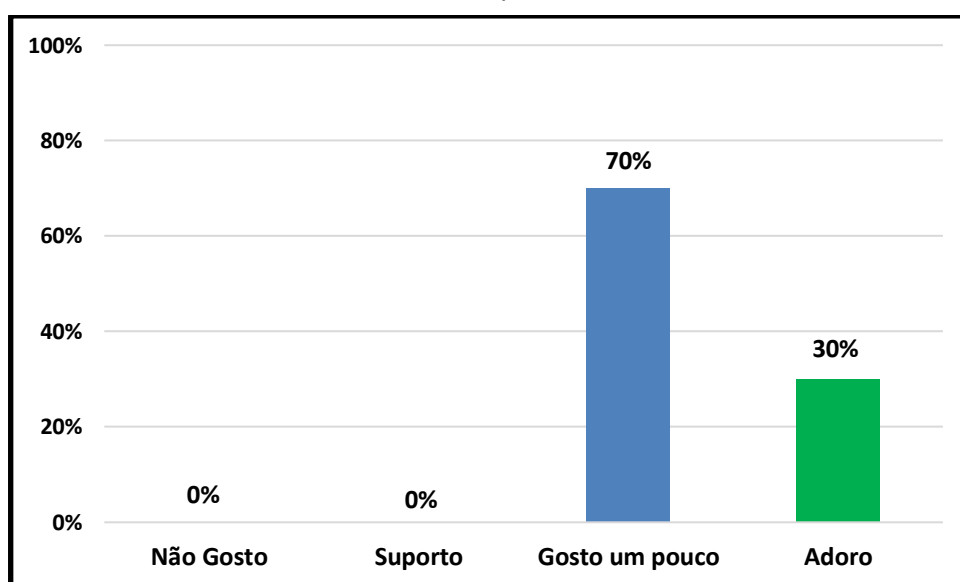
Gráfico 6: Dependência em Matemática

Fonte: Experimentação, 2022.

A análise das respostas dos discentes indica que 90% dos estudantes nunca ficaram de dependência em Matemática. Nossos resultados concordam com as pesquisas de Brayner Júnior (2021, p. 175) e Tourão (2020, p.118) que apontam, respectivamente que, 70% e, 89% dos entrevistados jamais ficaram de dependência nessa disciplina.

Os alunos também responderam uma pergunta que objetivava verificar o seu gosto pela matemática, isto é, o nível de afinidade que eles têm com esta disciplina. Com base nos dados coletados construímos o gráfico seguinte:

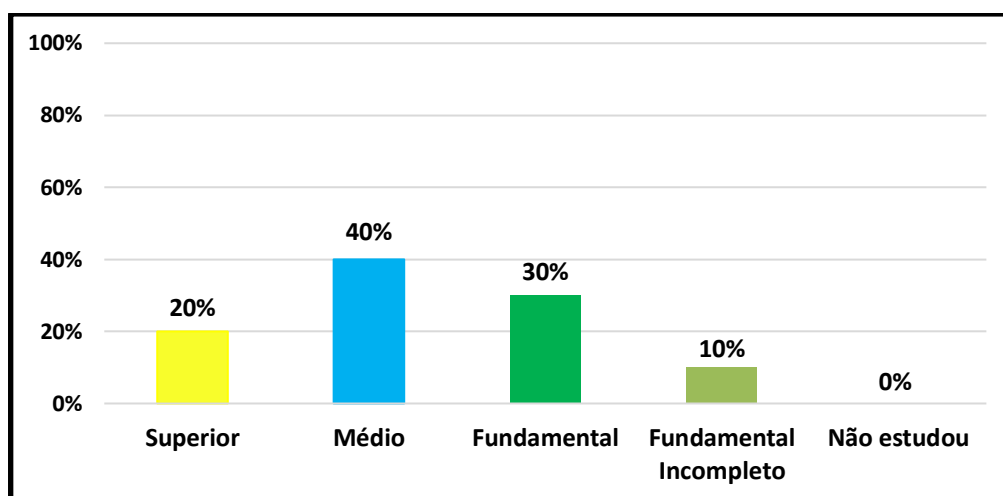
Gráfico 7: Gosto pela Matemática



Fonte: Experimentação, 2022.

De acordo com o gráfico todos os estudantes que compõem a amostra da nossa pesquisa (100%) tem afinidade com a Matemática, pois observamos que 70% gostam um pouco e 30% responderam que adora. O trabalho de Brayner Júnior (2021, p. 176) apontou que a maioria dos estudantes (80%) apresentam afinidade com a disciplina, esse resultado é reforçado pela pesquisa de Tourão (2020, p.119) onde 78% dos discentes afirmaram ter gosto pela Matemática.

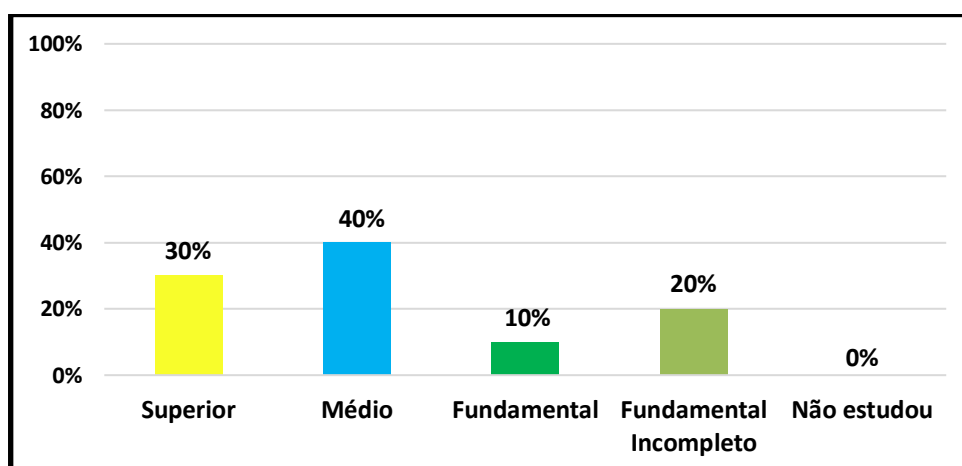
A construção do gráfico a seguir foi pautada nas respostas dos discentes à pergunta sobre o grau de escolaridade do responsável masculino:

Gráfico 8: Escolaridade do responsável masculino

Fonte: Experimentação, 2022.

O gráfico revela que todos os responsáveis masculino estudaram, a maioria possui o ensino médio, 20% deles possuem nível superior, 20% possuem o ensino fundamental e apenas 10% não concluíram o ensino fundamental.

Esses resultados diferem um pouco dos obtidos na pesquisa de Brayner Júnior (2021, p. 176), na qual nenhum dos responsáveis masculino possuíam ensino superior (0%), 60% possuem o ensino médio e 20% não concluíram o nível fundamental. No entanto, eles se aproximam dos resultados obtidos no trabalho de Tourão (2020, p. 120) onde 26% (7 alunos) dos estudantes responderam que seu responsável masculino possui nível superior e 33% concluíram o ensino médio.

Gráfico 9: Escolaridade do Responsável Feminino

Fonte: Experimentação, 2022.

Quanto à escolaridade do responsável feminino, constatamos que 30% delas possuem nível superior, a maioria (40%) concluíram o ensino médio, 10% tem o ensino fundamental e que 20% dos estudantes afirmaram que o responsável feminino não concluiu o ensino fundamental e que todas estudaram.

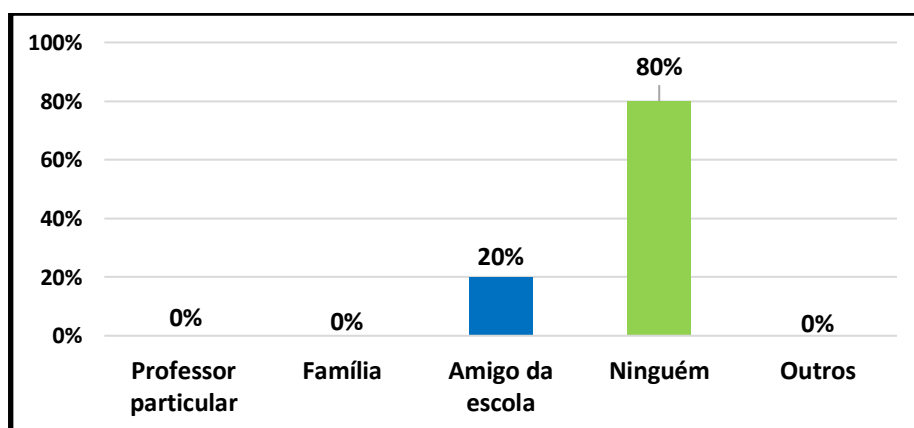
Nossos resultados diferem em partes daqueles obtidos na pesquisa de Brayner Júnior (2021, p. 177), quanto a escolaridade do responsável feminino, pois a mesma apontou que nenhum deles (0%) possuía nível superior, 70% tinham o ensino médio, no entanto os resultados são iguais quando tratamos do percentual de responsáveis feminino com ensino fundamental completo (10%), fundamental incompleto (20%) e daquelas que não estudaram (0%).

O estudo de Tourão (2020, p. 121) também diverge dos nossos resultados, pois ele aponta que dos responsáveis feminino 11% possuem ensino superior, 63% concluíram o ensino médio, 11% tem o ensino fundamental completo, 15% não completaram o ensino fundamental e todas elas estudaram.

Em relação à escolaridade do responsável feminino, verificamos que 11% (3 alunos) dos discentes possuem mães com nível superior e que 63% (17 alunos) com ensino médio completo, 11% (3 alunos) têm mães com o ensino fundamental completo, 15% (4 alunos) com fundamental incompleto, enquanto que nenhum dos pesquisados tem responsável feminino que não estudaram. Esses resultados demonstram que as mulheres têm buscado a conclusão de seus estudos até o ensino médio.

Por meio do questionário perguntamos aos estudantes quem lhes auxiliava nas tarefas de Matemática e, a partir das respostas obtidas construímos o seguinte gráfico:

Gráfico 10: Ajuda nas tarefas de matemática

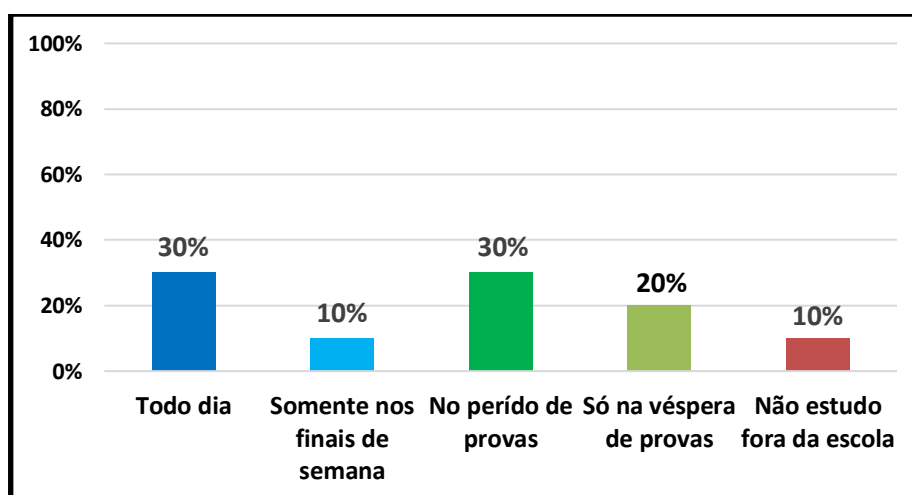


Fonte: Experimentação, 2022.

Os dados do gráfico indicam que nenhum dos discentes entrevistados recebem auxílio da família nem de professor particular, nas atividades de Matemática. 20% deles recebem ajuda dos amigos e a maioria (80%) não recebem ajuda de ninguém. Esses resultados concordam com as investigações de Brayner Júnior (2021, p. 178) e Tourão (2020, p. 122), porque ambas apontam que a maioria dos alunos não contam com o auxílio de ninguém nas tarefas de Matemática, com percentuais de 70% e 56%, respectivamente.

No questionário perguntamos aos estudantes sobre sua frequência do estudo de matemática fora do ambiente escolar, e embasado nas respostas obtidas construímos o gráfico a seguir:

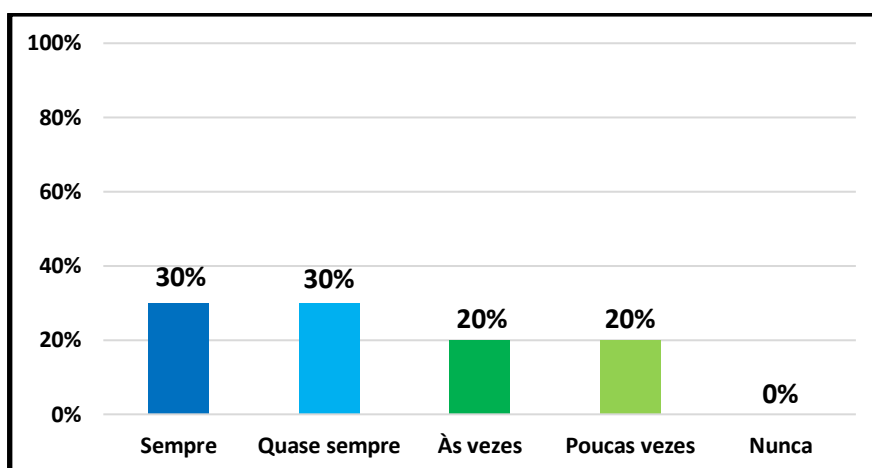
Gráfico 11: Estudo de Matemática Fora da Escola



Fonte: Experimentação, 2022.

Os dados apresentados pelo gráfico revelam que 30% dos discentes estudam Matemática todo dia e que o mesmo percentual (30%) só estudam no período de provas, 20% estudam somente na véspera de provas, 10% estudam só nos finais de semana e, por fim, 10% deles afirmam que não estudam fora do ambiente escolar. Esses dados diferem dos obtidos no trabalho de Brayner Júnior (2021, p. 179), onde 50% dos estudantes estudam somente nos finais de semana e também na pesquisa de Tourão (2020, p. 123), que apontam que nenhum dos estudantes tem o hábito de estudar todo dia, e que a maioria dos entrevistados (44%) estudam somente no período de provas.

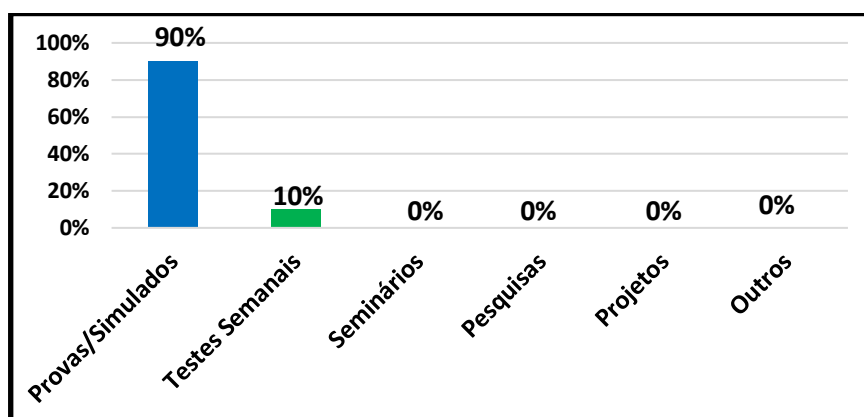
O gráfico a seguir apresenta os dados relativos ao entendimento das explicações dadas pelo professor, aos alunos, durante as aulas de Matemática:

Gráfico 12: Entendimento nas aulas de Matemática

Fonte: Experimentação, 2022

O gráfico indica que a maioria dos estudantes conseguem compreender as explicações dadas pelo professor de Matemática, pois 30% deles afirmaram que sempre compreendem o conteúdo explicado e 30% quase sempre conseguem entender. Esses dados diferem um pouco dos obtidos no trabalho de Brayner Júnior (2021, p. 179), onde 10% dos estudantes responderam que sempre entendem e 30% quase sempre entendem os conteúdos, bem como da pesquisa de Tourão (2020, p. 124), onde a maioria dos discentes (48%) quase sempre conseguem compreender e nenhum deles afirma que sempre consegue entender as explicações do professor durante as aulas de Matemática.

Com o objetivo de identificar a metodologia de avaliação em Matemática adotada, perguntamos aos estudantes sobre as formas de avaliação utilizadas pelo professor. A partir das respostas obtidas elaboramos o gráfico a seguir:

Gráfico 13: Formas de Avaliação em Matemática

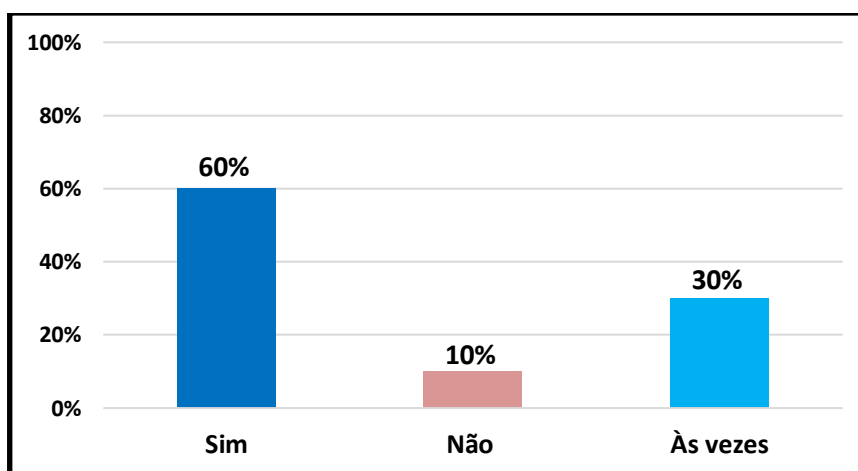
Fonte: Experimentação, 2022

De acordo com os dados do gráfico, a maioria dos estudantes (90%) responderam que são avaliados em Matemática por meio de provas/simulados, e o restante (10%) através de testes semanais, evidenciando que os professores de Matemática utilizam a avaliação pertinente à metodologia tradicional de ensino que, conforme Brayner Júnior (2021, p. 180), “não tem sido significativa para os estudantes como forma de serem examinados quanto sua aprendizagem”.

Esses resultados divergem da investigação de Brayner Júnior (2021, p. 180), onde 40% dos pesquisados responderam que são submetidos a avaliações do tipo provas/simulado e a grande maioria (50%) são avaliados por meio de testes semanais, no entanto corroboram com a pesquisa de Tourão (2020, p. 125), que aponta que 81% dos discentes são submetidos a provas/simulados e 11% a testes semanais.

Em nossa pesquisa indagamos aos discentes se as aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados. Para analisar os resultados elaboramos, por meio das respostas coletadas, o gráfico a seguir:

Gráfico 14: Interesse nas aulas de Matemática



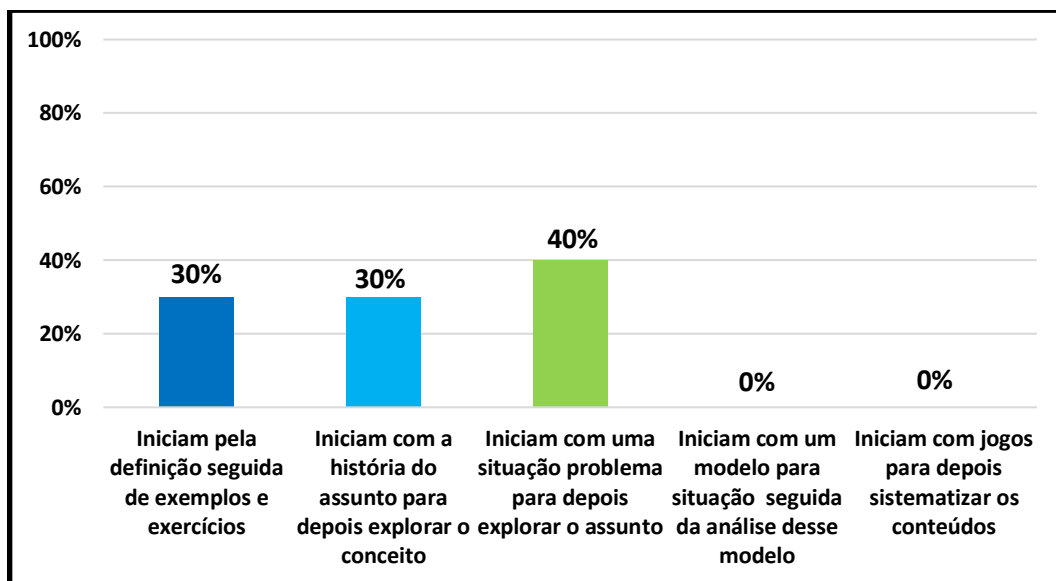
Fonte: Experimentação, 2022

O gráfico revela que a maioria dos estudantes (60%) tem seu interesse despertado nas aulas de Matemática. Eles se aproximam dos resultados obtidos nos trabalhos de Brayner Júnior (2021, p. 181), no qual 50% dos entrevistados apresentam interesse em aprender os conteúdos ministrados, mas divergem do estudo de Tourão (2020, p.126), onde a maioria das aulas de matemática nem sempre conseguem despertar o interesse dos discentes pesquisados com um total de 74%, podendo ser

um reflexo da metodologia utilizada pelo docente durante a abordagem dos conteúdos.

Com o objetivo de identificar a metodologia de ensino adotada pelo professor de Matemática, questionamos aos estudantes entrevistados sobre como ocorreu a maioria das aulas de Matemática e, a partir das respostas obtidas construímos o seguinte gráfico:

Gráfico 15: A maioria das Aulas de Matemática



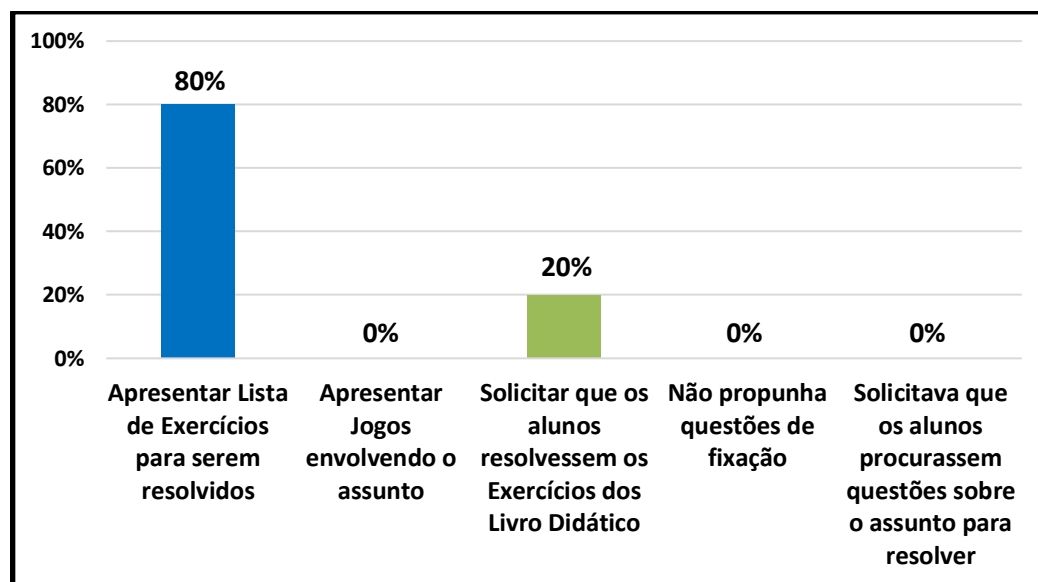
Fonte: Experimentação, 2022

De acordo com o gráfico anterior, a maioria dos discentes pesquisados (40%) afirmaram que a maioria das aulas de Matemática iniciam com uma situação problema para depois explorar o assunto, 30% iniciam pela definição seguida de exemplos e exercícios e os 30% restantes, indicam que as aulas iniciam com a história do assunto para depois explorar o conteúdo. Do exposto, podemos inferir que o professor de Matemática dessas turmas utiliza uma metodologia de ensino diversificada.

Os resultados obtidos em nossa pesquisa diferem daqueles verificados no trabalho de Brayner Júnior (2021, p. 182), uma vez que a maioria dos estudantes pesquisados (80%) responderam que as aulas de Matemática iniciam pela definição seguida de exemplos e exercícios, o que representa forte indício do método tradicional de ensino. No entanto, a pesquisa de Tourão (2020, p. 127), 70% dos discentes pesquisados afirmaram que as aulas iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto, o que se aproxima dos resultados da nossa pesquisa.

A última pergunta do questionário tinha como objetivo verificar a metodologia utilizada pelo professor de Matemática para que os alunos praticassem os conteúdos. Com base nas respostas coletadas esboçamos o gráfico apresentado a seguir:

Gráfico 16: Formas usadas pelo professor para praticar conteúdo



Fonte: Experimentação, 2022

A partir do gráfico verificamos que 80% dos estudantes responderam que, com o objetivo de fazer com que os alunos pratiquem o conteúdo abordado, o professor apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos e os 20% restante, indicaram que o professor costumava solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático. De acordo com as respostas dos discentes, o professor não apresentava jogos, não propunha exercícios de fixação, nem solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

Estes resultados se equipara aos obtidos nas pesquisa de Brayner Júnior (2021, p. 183), onde 80% dos discentes responderam que para praticar o conteúdo, o professor apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos, diferindo apenas o fato de que 10% afirmaram que o professor costumava solicitar aos alunos que resolvessem os exercícios do livro didático em 10% responderam que o docente solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

5.1.2. Sobre a aplicação do Pré-teste

A aplicação do Pré-teste também ocorreu no dia 10 de junho de 2022, logo após nos certificarmos de que todos os alunos haviam concluído a resolução do questionário sócioeconômico. Dessa forma, informamos aos dez estudantes, participantes da pesquisa, que eles resolveriam o pré-teste, com o intuito de verificar seus conhecimentos prévios sobre Bijeção de Função e comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos.

Na oportunidade solicitamos que os alunos lessem cada questão com muita atenção, orientando-os a ficarem tranquilos e tentarem resolver o máximo de questões, deixando em branco aquelas que não soubessem responder. A maioria dos alunos demonstraram muita dificuldade na resolução do pré-teste, afirmando que jamais haviam estudado o conteúdo, outros disseram que tinham estudado o assunto, mas tinham esquecido completamente. Objetivando evidenciar as perguntas mais recorrentes de alguns estudantes durante o pré-teste, construímos o seguinte quadro com a transcrição das falas de alguns deles:

Quadro 7: Perguntas dos Estudantes durante o Pré-Teste

Estudante	Perguntas Feitas
E2	Professor essa prova está muito difícil. Eu não sei de nada, estou com muita dificuldade, não sei o que é função bijetora. Não vou conseguir responder, vou deixar a maioria sem responder. O senhor pode ajudar? Posso deixar essas questões sem resposta?
E3	Professor como faço a questão 5? Tem muitas questões que não vou conseguir responder. Pode mesmo deixar questão em branco?
E5	O que é função bijetora? Acho que não dou conta de responder.
E7	Não lembro nada desse assunto. Tem coisa aqui que ainda não estudei. Posso deixar questões sem responder?

Fonte: Experimentação, 2022.

As perguntas apresentadas no quadro anterior revelam que os estudantes não estudaram o conteúdo, outros viram o conteúdo em sala de aula também tiveram muita dificuldade em responder as questões, e por isso concluíram o pré-teste em

aproximadamente 1 hora e 10 minutos, uma vez que a maioria deles realizou o teste no intervalo de 15 horas e 40 minutos às 16 horas e 50 minutos.

Destacamos que os resultados obtidos por meio do pré-teste serão apresentados e analisados na seção que aborda a análise *a posteriori* e validação da nossa pesquisa.

Após a conclusão das atividades descritas anteriormente, agradecemos a participação dos estudantes, destacando que esta é essencial para o desenvolvimento da nossa pesquisa e, em seguida relembramos a data do próximo encontro, solicitando aos discentes que não esquecessem de trazer o TECLE devidamente assinado por um responsável ou pelo próprio aluno (caso seja maior de idade), a fim de efetivar sua participação na pesquisa.

5.2. Primeira Sessão de Ensino

A nossa primeira sessão de ensino ocorreu no dia 14 de junho de 2022. Após agradecermos a presença dos 10 (dez) estudantes, solicitamos que eles se organizassem em duplas, informando que as 5 (cinco) duplas formadas se manteriam durante todas as etapas do estudo.

Os discentes iniciaram a resolução da Atividade 1 às 15 horas e 5 minutos e finalizaram às 15 horas e 25 minutos, gastando 20 minutos para concluir a atividade. Eles tiveram um pouco de dificuldade, devido a falta de familiaridade com esse tipo de atividade. O estudante E6 chamou o professor e perguntou: “é para colocar F ou NF no Quadro de Relações ou na Atividade 1? Aproveitamos a oportunidade para explicar a todos, que deveriam colocar F ou NF no Quadro de Relações, mas convém destacar que a maioria dos alunos compreenderam o comando da atividade.

Durante a execução da atividade o estudante E4 disse: “já sei, F significa função e NF, não função”. Após a realização dos procedimentos descritos na atividade, os discentes preencheram o quadro de observação com a definição de Função, que serão apresentadas com suas respectivas análises no quadro a seguir:

Quadro 8: Observações dos grupos na Atividade 1

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação Que todos os elementos do conjunto A tem que estarem ligados ao B para serem função	Observação e parcialmente válida sobre a definição de Função.
Grupo 02: E3 e E4	Observação Função é quando cada elemento do conjunto A existe um único elemento correspondente em B	Observação válida sobre a definição de Função.
Grupo 03: E5 e E6	Observação NF = Não é função F = Função Do é função que não todo elemento do conjunto A possui um único elemento correspondente no conjunto B. Que não haver um elemento ^{de um} com de do conjunto A com nenhum ou mais correspondente no conjunto B não é função.	Observação válida sobre a definição de Função.
Grupo 04: E7 e E8	Observação NF = Não função F = Função Função é quando a algum número do classe A tem uma ligação na classe B; Não função é quando não tem ligação de A a B, e quando A tem ligação ou mais na B.	Observação válida sobre a definição de Função.
Grupo 05: E9 e E10	Observação função é a relação de $A \rightarrow B$ onde cada elemento de A possui uma imagem no B.	Observação válida sobre a definição de Função.

Fonte: Experimentação, 2022

Com base nas respostas dos estudantes, construímos o quadro seguinte, que apresenta o percentual das observações que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 9: Análises das conclusões dos grupos na atividade 1

OBSERVAÇÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	4	80
Parcialmente Válidas	1	20
Inválidas	0	0
Total	5	100

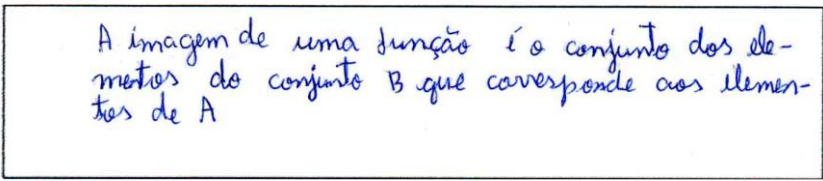
Fonte: Experimentação, 2022

Os dados dos dois quadros anteriores revelam que os estudantes conseguiram superar as dificuldades que encontraram ao iniciar a realização da atividade 1, uma vez que a maioria dos grupos (80%) conseguiram elaborar uma observação apresentado uma definição de Função, que classificamos como válida e um grupo (20%) registrou uma definição parcialmente válida, o que evidencia que todos os estudantes compreenderam o procedimento descrito na atividade.

Imediatamente após a conclusão da atividade 1, iniciamos a realização da atividade 2, que tinha por objetivo identificar a imagem de uma função. No início os discentes sentiram um pouco de dificuldade, mas logo conseguiram superá-la, ao perceberem sua semelhança com a atividade anterior, concluindo a atividade 2 em aproximadamente 20 minutos, com início às 14 horas e 25 minutos e término às 14 horas e 45 minutos.

No quadro a seguir apresentamos as anotações dos discentes referentes às observações sobre a atividade 2 e, além disso, as análises de suas respostas.

Quadro 10: Observações dos grupos na Atividade 2

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: 	Observação válida sobre a imagem de um elemento de uma função.

Grupo 02: E3 e E4	Observação:	Observação válida sobre a imagem de um elemento de uma função.
Grupo 03: E5 e E6	Observação:	Observação válida sobre a imagem de um elemento de uma função.
Grupo 04: E7 e E8	Observação:	Observação inválida sobre a imagem de um elemento de uma função.
Grupo 05: E9 e E1	Observação:	Observação inválida sobre a definição de conjunto imagem de uma função.

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro a seguir foi elaborado com base nas respostas dadas pelos estudantes, ele expressa o percentual das observações que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 11: Análises das observações dos grupos na atividade 2

OBSERVAÇÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	3	60
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	2	40
Total	5	100

Fonte: Experimentação, 2022.

Ao observar as análises das observações dos grupos, notamos que os estudantes tiveram grande dificuldade em escrever uma observação mais elaborada da definição do conjunto imagem de uma função, essa dificuldade pode estar relacionada com a falta de experiência dos discentes com atividades desse tipo.

O percentual de respostas válidas nos permite afirmar que os alunos compreenderam e executaram de forma satisfatória os procedimentos da atividade 2.

Após a conclusão dessa atividade, distribuimos a atividade 3, que tinha como objetivo definir o conjunto imagem e o contradomínio de uma função. Neste sentido, ao observar o quadro de funções, o estudante obtinha informações que somadas as contidas em dois quadros informativos, lhes permitiram construir a definição de conjunto imagem (na questão 11) e contradomínio de uma função (na questão 21).

Os discentes não demonstraram dificuldade na realização dessa atividade, resolveram rapidamente toda as questões, alcançando o objetivo de construir a definição do conjunto imagem e contradomínio de uma função. Essa tarefa foi concluída em cerca de 22 (vinte e dois) minutos, com início às 15 horas e 47 e término às 16 horas e 09 minutos. Durante a realização da atividade 3 o estudante E7 disse: “as questões dão dicas para resolvermos as outras”.

Diante das respostas dos estudantes na resolução da atividade, sobretudo as questões 11 e 21, que apresentam, respectivamente, as definições de conjunto imagem e contradomínio de uma função, elaboramos o quadro a seguir já com as devidas análises.

Quadro 12: Conclusões dos grupos na Atividade 3

GRUPOS	CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	11 O que é conjunto imagem de uma função? <i>conjunto formado pelos elementos do conjunto B que correspondem a algum elemento do conjunto A</i> 21. O que é o contradomínio de uma função? <i>não todos os elementos do conjunto B</i>	Definições válidas sobre o conjunto imagem e o contradomínio de uma função.
Grupo 02: E3 e E4	11 O que é conjunto imagem de uma função? <i>$f(x) = y$ é o elemento do conjunto B que tem relação de com um elemento do conjunto A</i> 21. O que é o contradomínio de uma função? <i>é o conjunto onde as flechas estão chegando.</i>	Definições válidas sobre o conjunto imagem e o contradomínio de uma função.
Grupo 03: E5 e E6	11 O que é conjunto imagem de uma função? <i>Não todos os elementos do grupo B correspondem aos elementos do grupo A</i> 21. O que é o contradomínio de uma função? <i>é conjunto de chegadas das flechas</i>	Definições válidas sobre o conjunto imagem e o contradomínio de uma função.
Grupo 04: E7 e E8	11 O que é conjunto imagem de uma função? <i>Todos os elementos do grupo B correspondente ao grupo A</i> 21. O que é o contradomínio de uma função? <i>Conjunto de chegada das flechas</i>	Definições válidas sobre o conjunto imagem e o contradomínio de uma função.

Grupo 05: E9 e E10	11 O que é conjunto imagem de uma função? <i>São todos os elementos do conjunto B, que corresponde ao conjunto A.</i> 21. O que é o contradomínio de uma função? <i>São todos os elementos do conjunto B</i>	Definições válidas sobre o conjunto imagem e o contradomínio de uma função.
--------------------	--	---

Fonte: Experimentação, 2021.

As respostas dos estudantes possibilitou a elaboração do quadro a seguir onde destacamos o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 13: Análises das conclusões dos grupos na atividade 3

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	5	100
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	0	0
Total	5	100

Fonte: Experimentação, 2022.

Mediante as informações do quadro 13 podemos afirmar que os discentes compreenderam bem o procedimento da atividade 3, respondendo a mesma com muita facilidade e com ótimo desempenho. Acreditamos que esse sucesso deve-se à experiência adquirida pelos alunos por meio da resolução das atividades anteriores, que adotam a mesma metodologia utilizada nesta.

Assim que o último grupo concluiu e entregou a atividade 3, os estudantes iniciaram a resolução da atividade 4, onde cada dupla ao observar o quadro de funções 1 obteria as informações necessárias para resolver 11 questões, relacionando suas respostas com a dica do quadro informativo, com o objetivo de construir o conceito de domínio de uma função, que foi registrado na questão 11 da referida atividade.

Assim como na atividade anterior, os alunos resolvera a atividade 4 com extrema facilidade, efetivando a sua conclusão em 17 (dezessete) minutos, começando às 16 horas e 10 minutos e terminando às 16 horas e 27 minutos.

No quadro a seguir, apresentamos as análises das respostas que grupos registraram na questão 11 da atividade 4, onde eles apresentam a definição de domínio de uma função de A em B .

Quadro 14: Conclusões dos grupos na Atividade 4

GRUPOS	CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	11. O que é domínio de uma função de A em B? São os elementos do conjunto A	Conclusão válida sobre a definição de domínio de uma função.
Grupo 02: E3 e E4	11. O que é domínio de uma função de A em B? É o conjunto onde a seta inicia	Conclusão válida sobre a definição de domínio de uma função.
Grupo 03: E5 e E6	11. O que é domínio de uma função de A em B? O elemento do conjunto A que tem correspondência no conjunto B.	Conclusão válida sobre a definição de domínio de uma função.
Grupo 04: E7 e E8	11. O que é domínio de uma função de A em B? São os elementos do conjunto A que tem um elemento correspondente no conjunto B	Conclusão válida sobre a definição de domínio de uma função.

Grupo 05: E9 e E10	11. O que é domínio de uma função de A em B? São todos os números do conjunto A que estão representados conjunto B.	Conclusão válida sobre a definição de domínio de uma função.
--------------------	---	--

Fonte: Experimentação, 2022.

Conforme as respostas dadas pelos estudantes, elaboramos o quadro a seguir que expressa o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 15: Análises das conclusões dos grupos na atividade 4

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	5	100
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	0	0
Total	5	100

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro anterior revela que todos os discentes apresentaram corretamente a definição de domínio de uma função. Acreditamos que o sucesso dessa atividade deve-se à semelhança do processo de resolução entre essa e as atividades anteriores, bem como as experiências adquiridas por meio da resolução destas.

Após a conclusão dessa atividade, solicitamos que um representante de cada grupo apresentasse a sua resposta registrada na questão 11 e, com base nessa socialização, construímos a resposta da turma, sugerindo que todos realizassem a anotação dessa definição. Às 16 horas e 28 minutos informamos aos discentes que teríamos um intervalo de 15 minutos para tomar água e descansar um pouco.

Depois dessa pausa, os alunos retornaram e receberam uma lista com as questões de aprofundamento das atividades 1, 2 e 3, no intuito de aprimorar os conhecimentos adquiridos. Eles resolveram as questões de aprofundamento sem

grandes dificuldades, em aproximadamente 50 (cinquenta) minutos, começando às 16 horas e 45 minutos e terminando às 17 horas e 35 minutos.

Por fim encerramos a nossa primeira sessão de ensino, agradecendo a participação de todos os discentes envolvidos em nosso estudo, reforçando a importância da mesma para a nossa pesquisa e solicitando a confirmação da presença todos os discentes no próximo encontro. Na subseção a seguir apresentamos a segunda sessão de ensino.

5.3. Segunda Sessão de Ensino

A segunda sessão de ensino ocorreu no dia 17 de junho de 2022 no turno vespertino, iniciando às 15 horas, quando recebemos e realizamos o acolhimento dos estudantes nos certificando que todos estavam presentes. Em seguida aproveitamos a oportunidade para conversar e reforçar a importância da participação deles para efetivação da nossa pesquisa, logo depois realizamos a correção de algumas questões de aprofundamento das atividades 1, 2 e 3.

Após nos certificarmos de que todos haviam compreendido as questões resolvidas e comentadas nesse primeiro momento, distribuimos a atividade 5 que versava sobre Função Injetora, e tinha como objetivo definir Função Injetora. Os estudantes compreenderam bem o procedimento e não tiveram dificuldades na resolução da atividade. Acreditamos que tudo é resultado da experiência adquirida nas atividades desenvolvidas na primeira seção de ensino.

A realização dessa atividade levou cerca de 15 (quinze) minutos, sendo iniciada às 15 horas e 30 minutos e concluída às 15 horas e 45 minutos. Os discentes demonstraram muito interesse e empenho ao resolver essa atividade. O estudante E1 perguntou: “o que significa I e NI?”. O estudante E4 respondeu: “I é função injetora e NI é não injetora”. Logo após essa resposta, todos voltaram novamente sua atenção para a atividade e iniciaram o preenchimento dos quadros de observação e de conclusão que estão registrados juntamente com suas análises no quadro a seguir:

Quadro 16: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 5

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: Obs: o NI, são os elementos que tem no conjunto A e no conjunto B, e o indetificado por I, são os elementos que não possui a mesma imagem. Definição função injetora é quando possui a imagem diferentes no contra domínio.	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de função injetora.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: Quando a função é injetora (i) não existe elementos distintos com a mesma imagem Definição Função injetora é quando elementos diferentes do domínio possui imagens diferentes no contradomínio	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de função injetora.
Grupo 03: A5 e A6	Observação: I = Injetora NI = não Injetora Definição Função Injetora é aquela em que os elementos distintos do grupo A (domínio) não tem a mesma imagem no grupo B (contradomínio)	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de função injetora.
Grupo 04: A7 e A8	Observação: I = É quando nenhum do conjunto A não tem a mesma imagem no conjunto B NI = É quando nenhum do conjunto A tem a mesma imagem no conjunto B Definição Função injetora é quando o GPA não tem a mesma imagem de B	Observação e Conclusão parcialmente válidas sobre a definição de função injetora

Grupo 05:A9 e A10	Observação: Ni = Representar a mesma imagem i = números diferentes e imagem diferentes Definição Ni = são as funções que existem os elementos distintos do domínio com a mesma imagem. i = as funções que não existem elementos distintos do domínio com a mesma imagem.	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de função injetora.
-------------------	--	--

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir das respostas dos grupos, elaboramos o quadro a seguir que apresenta o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 17: Análises das conclusões dos grupos na atividade 5

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	4	80
Parcialmente Válidas	1	20
Inválidas	0	0
Total	5	100

Fonte: Experimentação, 2022.

Conforme o quadro anterior, os estudantes não tiveram dificuldade na realização da atividade 5, devido as experiências adquiridas nas atividades anteriores, que como havíamos previsto, facilitaram a percepção das regularidades existentes e a construção da definição de Função Injetora.

Logo em seguida, os estudantes iniciaram o desenvolvimento da atividade 6, que tinha por objetivo definir Função Sobrejetora. Essa atividade possuía um procedimento semelhante ao utilizado na anterior, o que facilitou a identificação da regularidade necessária para a elaboração das observações e conclusão, de modo que os alunos não tiveram dificuldade na realização da atividade, que foi concluída em aproximadamente 12 (doze) minutos, iniciando às 15 horas e 47 minutos e terminando às 15 horas e 59 minutos.

No quadro seguinte apresentamos as observações conclusões dos estudantes com suas respectivas análises:

Quadro 18: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 6

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: Obs: Que a letra S é utilizado por aqueles que possui uma imagem. Definição função sobrejetora: é quando é contra domínio e possui a imagem iguais.	Observação e Conclusão parcialmente válidas sobre a definição de Função Sobrejetora.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: Sobrejetora (S) é quando todo elemento do conjunto domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio Definição Quando a função é sobrejetora imagem e contra domínio são iguais	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de Função Sobrejetora.
Grupo 03: E5 e E6	Observação: $S =$ Sobrejetora Definição A função é sobrejetora quando todos os elementos do conjunto do grupo A tem uma imagem pelo menos uma imagem no grupo B	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de Função Sobrejetora.

Grupo 04: E7 e E8	Observação: S= função sobrejetora. Definição função sobrejetora: é quando todos os elementos do contra domínio tem ligação com o domínio.	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de Função Sobrejetora.
Grupo 05: E9 e E10	Observação: todo contradomínio tem pelo menos um elemento e um domínio. Sobrejetora Definição Todo contradomínio tem pelo menos um elemento e um domínio.	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de Função Sobrejetora

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir das conclusões dos alunos, constuímos o quadro a seguir com o percentual daquelas que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 19: Análises das conclusões dos grupos na atividade 6

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	4	80
Parcialmente Válidas	1	20
Inválidas	0	0
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2021.

Os resultados das análises para as observações e conclusões evidenciam que os discentes desenvolveram a atividade com muita facilidade, devido as experiências adquiridas nas atividades anteriores possibilitando aos estudantes, identificar as características de uma Função Sobrejetora, construindo assim sua definição.

Para o desenvolvimento da atividade 7, cujo objetivo era definir Função Bijetora, os estudantes precisaram seguir um roteiro semelhante aos utilizados nas atividades anteriores, o que facilitou o seu desenvolvimento. O preenchimento do quadro e a elaboração da observação e da conclusão, transcorreram de forma bem rápida e os estudantes, embasados nas atividades anteriores, conseguiram completá-la em cerca de 10 (dez) minutos, iniciando às 16 horas e finalizando às 16 horas e 10 minutos.

A seguir apresentamos um quadro que foi construído a partir dos registros nos quadros de observações e conclusões da atividade 7, bem como as análises de suas respostas.

Quadro 20: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 7

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: Juntas funções que não injetora e sobjetora, tornando elas Bijetoras. Definição Se torna Bijetora quando as funções se tornam (juntas) injetora e sobjetora.	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de Função Bijetora.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: Definição Bijetora é quando a função é injetora e sobjetora.	Observação não realizada. Conclusão válida sobre a definição de Função Bijetora.

Grupo 03: E5 e E6	Observação: $I =$ função injetora $S =$ função sobrejetora Definição OK função é bijetora quando ela for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de Função Bijetora.
Grupo 04: E7 e E8	Observação: $I =$ Injetora $S =$ Sobrejetora Definição Função bijetora é quando uma função sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.	Observação e Conclusão válidas sobre a definição de Função Bijetora.
Grupo 05: E9 e E10	Observação: Que uma função pode ser sobrejetora e injetora Definição $S = E$ quando tem cada um no seu cada um $I = E$ quando os números são diferentes nos dois conjuntos	Observação válida e Conclusão inválida sobre a definição de Função Bijetora.

Fonte: Experimentação, 2022.

Conforme as respostas dadas pelos estudantes, elaboramos o quadro a seguir que expressa o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 21: Análises das conclusões dos grupos na atividade 7

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	4	80
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	1	20
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

As análises para as observações e conclusões e o quadro anterior apontam que a maioria dos estudantes elaboraram conclusões bem próximas daquelas que classificamos como válidas sobre a definição de Função Bijetora. Destacamos ainda que o tempo gasto para a realização das atividades foi diminuindo a medida que o estudo foi avançando, pois as experiências adquiridas nas atividades anteriores e a socialização das respostas realizadas na primeira sessão de ensino possibilitaram aos participantes entender e desenvolver com facilidade a atividade 7.

Para finalizar esta sessão de ensino, entregamos as questões de aprofundamento aos discentes, orientando-os a efetuarem sua resolução baseados em suas conclusões das atividades 5, 6 e 7. Os estudantes não apresentaram dificuldades e conseguiram concluir a atividade em aproximadamente 40 (quarenta) minutos, começando às 16 horas e 15 minutos e concluindo às 16 horas e 55 minutos.

Por fim, agradecemos a participação e elogiamos o ótimo desempenho dos discentes na realização das atividades, explicamos que a experiência adquirida na execução das atividades anteriores, facilitou a resolução das atividades desse encontro e que, conseqüentemente, teriam mais facilidade ainda com as atividades das próximas aulas, e comunicamos que continuaríamos na próxima semana e que eles deveriam trazer régua para utilizarem na realização das atividades da próxima aula.

5.4. Terceira Sessão de Ensino

A terceira sessão de ensino ocorreu no dia 21 de junho de 2022, contando com a participação de todos os estudantes que fazem parte do nosso estudo. Iniciamos o encontro às 14 horas e 5 minutos com o acolhimento dos alunos. Em seguida direcionamos o desenvolvimento da atividade 8, cujo objetivo era identificar o Gráfico

de uma Função Injetora. A atividade foi concluída em aproximadamente 18 minutos, iniciando às 15 horas e 10 minutos e terminando às 15 horas e 28 minutos.

Os estudantes demonstraram muito empenho no desenvolvimento dessa atividade, cujo roteiro os orientavam a utilizar uma régua para traçar retas paralelas ao eixo x de cada gráfico, identificando por I os gráficos que haviam sido “cortados” (interceptados) uma única vez pela mesma reta e, por NI aqueles que foram cortados mais de uma vez pela mesma reta. Logo em seguida, eles preencheram um quadro e, com base nas informações obtidas, escreveram suas observações e conclusão, indicando as características que nos permite identificar o gráfico de uma Função Injetora.

No início da atividade 8, os alunos tiveram muita dificuldade, pois não sabiam trabalhar com gráfico, o que foi evidenciado nas falas do estudante E5, que perguntou: “o que é reta paralela?” e do estudante E7: “nunca consegui aprender gráficos”. Após esclarecermos as dúvidas os discentes retornaram à resolução.

Em seguida, o estudante E1 perguntou: “o que significa I? O que é NI? Imediatamente o estudante E9 respondeu: “I significa injetora e NI é não injetora”. Após essa contribuição, e discussão em grupo, o estudante E1 afirmou que “todos os gráficos cortados uma única vez são injetoras”. Dessa forma, os demais grupos também escreveram suas observações e conclusões.

A partir dos registros das observações e conclusões dos grupos relacionados às características do gráfico de uma Função Injetora, elaboramos o seguinte quadro, com a análise das respostas dadas pelos estudantes:

Quadro 22: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 8

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: (I) INJETORAS (NI) NÃO INJETORAS Conclusão: QUE TODOS OS GRÁFICOS CORTADOS UMA ÚNICA VEZ SÃO INJETORES	Observação e Conclusão válidas sobre as características do gráfico de uma função injetora.

Grupo 02: E3 e E4	Observação: I é o gráfico da função Injetora e cortada uma vez Conclusão: o gráfico da função Injetora e cortada uma vez	Observação e Conclusão válidas sobre as características do gráfico de uma função injetora.
Grupo 03: E5 e E6	Observação: I = injetora NI = não injetora Conclusão: Para se função ser injetora deve "cortar" o gráfico somente uma vez	Observação e Conclusão válidas sobre as características do gráfico de uma função injetora.
Grupo 04: E7 e E8	Observação: I = injetora NI = não injetora Conclusão: Um gráfico não é injetora quando uma reta trunca apenas uma vez no gráfico. E não é não injetora quando uma reta trunca mais de uma vez ou nenhuma vez no gráfico.	Observação e Conclusão válidas sobre as características do gráfico de uma função injetora.
Grupo 05: A9 e A10	Observação: algumas que são I também podem ser NI I = injetora NI = não injetora Conclusão: se trunca mais de uma vez na linha e NI e I são as que trunca mais de uma vez. I = injetora NI = não injetora.	Observação válida e Conclusão inválidas sobre as características do gráfico de uma função injetora.

A seguir, apresentamos um quadro, que elaboramos embasados nas respostas dos estudantes. Nele evidenciamos o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 23: Análises das conclusões dos grupos na atividade 8

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	4	80
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	1	20
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro aponta que a maioria dos grupos (80%) conseguiram identificar as características do gráfico de uma Função Injetora, que era o objetivo dessa atividade. Para concluir essa atividade, solicitamos aos grupos que apresentassem suas conclusões e, a partir dessas, seguimos para a formalização, solicitando que todos tomassem nota.

Dessa forma, concluímos a primeira atividade do dia, e orientamos os alunos para a resolução da atividade 9, que tinha por objetivo identificar o gráfico de uma Função Sobrejetora. Os estudantes desenvolveram essa atividade com facilidade, em decorrência da experiência obtida na resolução da atividade anterior que possuía um procedimento semelhante ao utilizado nesta, que foi concluída em cerca de 12 minutos, sendo iniciada às 15 horas e 30 minutos, e terminada às 15 horas e 42 minutos.

A seguir apresentamos um quadro que construímos por meio dos registros realizados pelos grupos, nos quadros de observação e conclusão, e suas respectivas análises.

Quadro 24: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 9

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: (S)=SOBREJETORA (NS)=NÃO SOBREJETORA Definição FUNÇÃO SOBREJETORA QUANDO O GRÁFICO É CORTADO PELA MESMA RETA UMA OU MAIS VEZES	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função Sobrejetora.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: TODA RETA PARALELA AO EIXO X 'CORTA' PELO MENOS UM PONTO DO CONTRADOMÍNIO Definição O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO SOBREJETORA É "CORTADO" PELO MENOS UMA VEZ, EM SEU CONTRADOMÍNIO, POR RETAS PARALELAS AO EIXO X.	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função Sobrejetora.
Grupo 03: E5 e E6	Observação: S=superjetora NS= não superjetora Definição É vai ser função superjetora quando a reta cortar o gráfico uma ou mais vezes.	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função Sobrejetora.

Grupo 04: E7 e E8	Observação: S = subjetora NS = não subjetora Definição só é subjetora se o reto cruza o gráfico uma ou mais de uma vez. só é não subjetora quando o reto na cruza o gráfico.	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função Sobrejetora.
Grupo 05: E9 e E10	Observação: S = a Subjetora NS = a não subjetora Definição se os linhas trincarem uma que foi está no gráfico mais de uma vez e se trincarem nenhuma vez por uma ou mais retas são NS S = subjetora NS = não subjetora	Observação e Conclusão parcialmente válidas para as características do Gráfico de uma Função Sobrejetora.

Fonte: Experimentação, 2022.

O seguinte quadro apresenta o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 25: Análises das conclusões dos grupos na atividade 9

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	10	100
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	0	0
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

Mediante as respostas apresentadas pelos discentes e os dados do quadro anterior, podemos afirmar que o objetivo da atividade 9 foi alcançado, isto é, os estudantes conseguiram identificar o gráfico de uma Função Sobrejetora. Dessa

forma, pedimos que um participante de cada grupo apresentasse sua resposta e, assim, pautado nessas, seguimos para a formalização.

Ao término desta atividade, os discentes iniciaram a resolução da atividade 10, que tinha por objetivo identificar o gráfico de uma Função Bijetora, conseguindo executá-la com facilidade, uma vez que ela seguia o mesmo procedimento das duas atividades anteriores. A atividade foi realizada em aproximadamente 10 minutos, sendo iniciada às 15 horas e 45 minutos, e concluída às 15 horas e 55 minutos.

O quadro a seguir foi elaborado com base nas observações e conclusões, descritas pelos participantes, onde apresentamos as respostas dasdas pelos grupos, bem como suas respectivas análises.

Quadro 26: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 10

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: (B)= BIJETORA (NB)= NÃO BIJETORA Definição FUNÇÃO BIJETORA É QUANDO O GRÁFICO É CORTA DO UMA ÚNICA VEZ PELA MESMA RETA	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função bijetora.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: B.e.o gráfico que são cortado pelo mesmo uma vez (Bijetora) Definição	Observação e Conclusão inválidas para as características do Gráfico de uma Função bijetora.

Grupo 03: E5 e E6	B = bijetora NB = não bijetora Definição A função f é bijetora quando a reta corta o gráfico uma única vez.	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função bijetora.
Grupo 04: E7 e E8	B = Bijetora NB = não Bijetora Definição Bijetora é quando a reta toca no gráfico uma única vez. Não bijetora	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função bijetora.
Grupo 05: E9 e E10	Observação: B = Bijetora NB = não Bijetora Definição Os gráficos cortados por uma única vez pela mesma reta é B, e por NB os gráficos cortados mais de uma vez pela mesma reta, ou por nenhuma. B = Bijetora NB = não Bijetora	Observação e Conclusão válidas para as características do Gráfico de uma Função bijetora.

Fonte: Experimentação, 2022.

Pautados nas respostas dadas pelos estudantes, construímos o quadro seguinte, destacando o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 27: Análises das conclusões dos grupos na atividade 10

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	4	80
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	1	20
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

As informações do quadro 27 revelam que a maioria dos grupos (80%) apresentaram respostas válidas, demonstrando reconhecer as características do gráfico de uma Função Bijetora, que era o objetivo da atividade 10.

Após uma pausa de 15 minutos para o intervalo, entregamos, para cada grupo, uma lista de questões de aprofundamento das atividades, destacando que ela deveria ser respondida com base em suas conclusões, efetuadas após a formalização, das atividades 8, 9 e 10 que abordam, respectivamente, as características do gráfico de uma função injetora, sobrejetora e bijetora.

Os discentes não apresentaram dificuldades e concluíram a atividade em cerca de 30 (trinta) minutos, iniciando às 16 horas e 10 minutos e concluindo às 16 horas e 40 minutos.

Para dar prosseguimento ao desenvolvimento dessa sessão de ensino, orientamos os estudantes a desenvolver a atividade 11, que tinha por objetivo descobrir a relação entre cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma função bijetora, e apresentava um procedimento análogo às atividades anteriores, por isso os estudantes não apresentaram dificuldades e concluíram a sua resolução em 12 minutos, começando às 16 horas e 42 minutos e concluindo às 16 horas e 54 minutos.

Ressaltamos que nesta atividade os discentes não tiveram um desempenho tão bom quanto nos anteriores, uma vez que no momento em que os grupos socializaram as suas respostas com os demais, percebemos que foi apresentadas uma quantidade considerável de respostas que julgamos como parcialmente válidas, uma vez que não conseguiram descrever a relação entre a cardinalidade do domínio e o do contradomínio de uma Função Bijetora.

Diante dessa situação, após os outros grupos apresentarem suas respostas, que classificamos como válidas, solicitamos a todos os participantes que analisasse suas respostas e verificando se houve algum erro. Dessa forma, seguimos para a formalização com base nas respostas dadas. Após a conclusão da formalização, perguntamos aos estudantes se todos conseguiram compreender que em toda Função Bijetora o domínio e o contradomínio possuem a mesma cardinalidade, isto é, a mesma quantidade de elementos, e todos responderam que sim.

Através das observações e conclusões descritas pelos estudantes, elaboramos o quadro a seguir, contendo as respostas dadas pelos grupos e suas respectivas análises.

Quadro 28: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 11

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: QUE AS FUNÇÕES BIJEJORAS SÃO AO MESMO TEMPO INJETORA E SOBREJETORA; BIJEJORA SERVE PARA SABER SE A QUANTIDADE DE ELEMENTOS É CD Definição BIJEJORA É INJETORA E SOBREJETORA MAS NÃO PODE DEIXAR UM DOS ELEMENTOS SEM UM DOMÍNIO OU UM DOMÍNIO COM DUAS IMAGENS	Observação e Conclusão parcialmente válidas para a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: Bijetora é quando os elementos do domínio estão ligados uma vez com o contradomínio Definição Se a função é bijetora o domínio e o contradomínio tem a mesma quantidade de elementos	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora.
Grupo 03: E5 e E6	Observação: A função bijetora tem a mesma quantidade de elementos no grupo A e no grupo B Definição A cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma função bijetora se verifica que o domínio e o contradomínio tem a mesma quantidade de elementos.	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora.

Grupo 04: E7 e E8	Observação: NB = Não Bijetora B = Bijetora Definição A função é Bijetora quando o domínio tem imagem do contradomínio	Observação e Conclusão parcialmente válidas para a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora.
Grupo 05: E9 e E10	Observação: B = Bijetora. Definição B = Bijetora. Se a função for B ella tem que ter a mesma cardinalidade do domínio e contradomínio.	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora.

Fonte: Experimentação, 2022.

Com o objetivo de facilitar a análise das apresentadas pelos grupos, na atividade 11, construímos o gráfico a seguir, destacando o percentual das que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 29: Análises das conclusões dos grupos na atividade 11

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	3	60
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	2	40
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro 29 revela que a maioria dos grupos (60%) conseguiram apresentaram uma conclusão válida, descobrindo que a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora são iguais, no entanto, 40% dos grupos apresentaram uma resposta incompleta, que chamamos de parcialmente válida. Acreditamos que esse percentual considerável foi decorrente a pouca discussão em grupo, uma vez que os alunos responderam essa atividade muito rápido.

Para finalizarmos esta sessão de ensino, apresentamos e entregamos aos estudantes uma lista com as questões de aprofundamento, explicando que ela deveria ser respondida com base em suas conclusões da atividade 11 que abordava a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora. Os discentes não apresentaram dificuldades e conseguiram resolver a atividade em aproximadamente 20 (vinte minutos) minutos, começando às 16 horas e 55 minutos e concluindo às 17 horas e 15 minutos.

Por fim, agradecemos a participação de todos e, mais uma vez, elogiamos o desempenho desses na execução das atividades, destacando a experiência adquirida na atividade 10, contribuiu para descobrirem que a cardinalidade (quantidade de elementos) do domínio e do contradomínio de uma Função Bijetora são iguais. Na subseção a seguir apresentamos penúltima sessão de ensino.

5.5. Quarta Sessão de Ensino

A quarta sessão de ensino ocorreu no dia 24 de junho de 2022, tendo início às 15 horas com o acolhimento dos estudantes. Após agradecermos a participação de todos e reiteramos a importância dessa para o desenvolvimento da nossa pesquisa, direcionamos os discentes ao desenvolvimento da atividade 12, que tinha por objetivo comparar a cardinalidade ou quantidade de elementos do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números naturais pares. A metodologia utilizada neste encontro foi Problemas Como Ponto de Partida.

A atividade 12 era constituída do problema 1, impresso em folha de papel sulfite. Entregamos um cópia do problema para cada grupo, orientando que a folha só deveria ser desvirada após a autorização do professor, para que todos tivessem acesso simultâneo ao problema.

Após a apresentação do problema, informamos aos alunos que teriam 20 (vinte) minutos para resolver o problema, no entanto a atividade foi concluída em 8

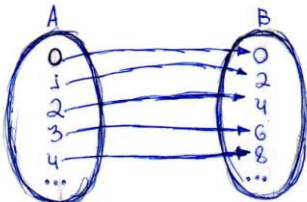
(oito) minutos, sendo iniciada às 15 horas e 20 minutos e terminada às 15 horas e 28 minutos.

Durante a discussão do problema, o estudante E3 disse: “se o conjunto dos números naturais é formado por pares e ímpares, tirando os pares ainda sobram os ímpares. O conjunto dos naturais tem mais elementos”. O estudante E5 comentou: “os dois são infinitos”. Depois dessas reflexões, os discentes concluíram e devolveram a atividade.

A partir das respostas registradas pelos discentes, construímos o quadro seguinte, onde descamos a solução de cada dupla com a sua respectiva análise:

Quadro 30: Solução dos grupos registrados na Atividade 12/Problema 1

GRUPOS	SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Problema 1: Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares? O conjunto dos naturais, pois estes contêm os números pares e ímpares que são infinitos	Solução inválidas para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e dos números naturais pares.
Grupo 02: E3 e E4	Problema 1: Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares? R= OS DOIS CONJUNTOS POSSUÍ ELEMENTOS INFINITOS, PORTANTO, OS DOIS POSSUEM A MESMA QUANTIDADE DE ELEMENTOS.	Solução parcialmente válida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e dos números naturais pares.

Grupo 03: E5 e E6	Problema 1: Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares? conjunto dos números naturais, porque tem sempre eles são pares ex. 	Solução inválida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e dos números naturais pares.
Grupo 04: E7 e E8	Problema 1: Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares? Os dois conjuntos tem a mesma quantidade de elementos. 	Solução válidas para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e dos números naturais pares.
Grupo 05: E9 e E10	Problema 1: Qual conjunto possui mais elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares? Os dois, porque os números naturais e os pares, são são infinitamente infinitos. então eles são infinitos.	Solução parcialmente válidas para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e dos números naturais pares.

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro a seguir foi elaborado a partir das respostas dos alunos registradas na atividade 12, e destaca o percentual das soluções que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 31: Análises das soluções dos grupos registradas na Atividade 12/Problema 1

SOLUÇÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	1	20
Parcialmente Válidas	1	20
Inválidas	3	60
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro anterior indica que a maioria dos estudantes (60%) apresentaram uma solução inválida, e o quadro 30 evidencia o que nossa previsão de que a maioria dos discentes seriam conduzidos ao erro pela ideia de que o todo é sempre maior que a sua parte. Destacamos ainda que eles realizaram uma resolução rápida do problema o que também contribuiu com a construção de uma solução inválida. Assim que o último grupo concluiu a resolução do problema 1, solicitamos que um representante de cada dupla registrasse no quadro da sala, a sua solução para o problema proposto. A análise e discussão das respostas apresentadas, possibilitaram aos discentes perceber que há uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros, e concluíram que esses conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos.

Ao apresentarmos a solução sistematizada do assunto, o estudante E5 disse: “eu não duvido mais de nada”. “Nunca pensei que esses dois conjuntos tivessem a mesma quantidade de elementos.

Após esse momento da análise, nós apresentamos a sistematização do conteúdo, utilizando-o para solucionar o problema proposto e, em seguida, orientamos os a anotarem a solução que apresentamos, bem como o conteúdo sistematizado. Logo depois, distribuimos uma lista com problemas que deveriam ser resolvidos com o uso do conteúdo sistematizado. Ela foi concluída em 15 (quinze) minutos, sendo iniciada às 15 horas e 48 minutos, e terminada às 16 horas e 10 minutos.

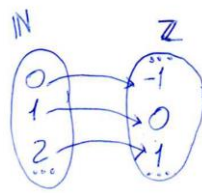
Mediante o término da resolução da lista de problemas, direcionamos os discentes à execução da atividade 13, que tinha por objetivo, comparar a cardinalidade dos conjuntos dos números naturais e dos números inteiros, e foi trabalhada com a mesma metodologia da atividade anterior.

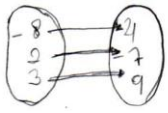
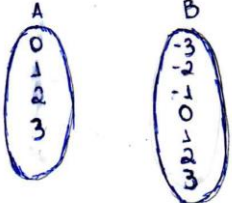
A atividade 13 apresentava o problema 2, que foi resolvido em 5 (cinco) minutos, sendo iniciada às 16 horas e 11 minutos e concluída às 16 horas e 16

minutos. Assim que o professor autorizou a resolução do problema, o estudante E8 perguntou: “os números inteiros tem positivos e negativos”? Ao que o discente E1 respondeu: “sim, e nos naturais não tem negativos, por isso o conjunto dos inteiros tem mais elementos”.

Os alunos compreenderam bem o enunciado do problema, mas efeturam sua resolução de forma precipitada e equivocada, fazendo uso da ideia de que o todo é sempre maior que a parte, como está evidenciado no quadro a seguir, que foi elaborado com base nas respostas registradas, destacando a solução de cada grupo com sua respectiva análise:

Quadro 32: Soluções dos grupos registradas na Atividade 13/Problema 2

GRUPOS	SOLUÇÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Problema 2: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros? O conjunto dos números inteiros, porque neles contém todos os números naturais e outros números, então como os naturais estão dentro dos inteiros, os inteiros tem mais elementos, pois além dos naturais há outros elementos	Solução inválida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros.
Grupo 02: E3 e E4	Problema 2: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros?  ELES POSSUEM A MESMA QUANTIDADE DE ELEMENTO, POIS EXISTE UMA BIJEÇÃO ENTRE $\mathbb{N}$ E $\mathbb{Z}$	Solução válida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros.

Grupo 03: E5 e E6	Problema 2: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros? <i>conjunto dos números inteiros</i> 	Solução inválida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros.
Grupo 04: E7 e E8	Problema 2: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros?  <i>Os números inteiros, pois eles são o dobro dos números naturais.</i>	Solução inválida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros.
Grupo 05: E9 e E10	Problema 2: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros? <i>Os dois possuem a mesma quantidade, pq ambos são os mesmos números e eles são continuamente e por isso infinitos.</i>	Conclusão parcialmente válida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros.

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro a seguir apresenta o percentual das soluções que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas:

Quadro 33: Análises das soluções dos grupos registradas na atividade 13/Problema 2

SOLUÇÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	1	20
Parcialmente Válidas	1	20
Inválidas	3	60
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

As informações dos quadros 31 e 32 destacam que a maioria dos estudantes ainda estavam presos à ideia de que “o todo é sempre maior que a sua parte”, no entanto 20% deles, utilizaram o conceito de bijeção de função para comparar a quantidade de elementos dos conjuntos dos números inteiros e dos números naturais.

Assim como na atividade anterior, solicitamos que um representante de cada grupo registrasse no quadro da sala, a sua solução para o problema proposto. A análise e discussão das respostas apresentadas, possibilitaram aos discentes estabelecer que se existe uma função bijetora que relaciona dois conjuntos, esses possuem a mesma quantidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade.

Ao apresentarmos a solução sistematizada do assunto, o estudante E9 disse: “se tem função bijetora entre dois conjuntos eles possuem quantidades iguais de elementos”. Estudantes E2: “Então eles possuem a mesma quantidade de elementos”. Estudante E4: “Quero ver o que vai ser mostrado aqui”.

Após os momentos da análise e sistematização do conteúdo, solicitamos que os discentes anotasse a solução que apresentamos, bem como o conteúdo sistematizado, e distribuímos uma lista com problemas que deveriam ser resolvidos com o uso do conteúdo sistematizado. Ela foi concluída em 12 (doze) minutos, sendo iniciada às 16 horas e 33 minutos, e terminada às 16 horas e 45 minutos.

Dando continuidade ao estudo, distribuímos e solicitamos aos discentes que resolvesse a atividade 14, cujo objetivo era comparar a cardinalidade dos conjuntos dos números naturais e dos números racionais, utilizando a mesma metodologia das atividades 12 e 13.

Como havíamos previsto, nenhum grupo conseguiu chegar a uma solução válida para o problema da atividade 14, porque ele apresenta uma resolução muito complexa. Os estudantes concluíram a atividade 14 em 6 (seis) minutos, sendo iniciada às 16 horas e 46 minutos e terminada às 16 horas e 52 minutos.

Assim que o professor autorizou a resolução dos problema, os alunos iniciaram as seguintes falas e discussões:

Estudante E10: “o que é um número racional?”. Estudante E6: “o conjunto dos números racionais tem fração e raiz?”. E4: “Ele tem números com fração, com vírgula e até raiz”. E5: “Os dois se originam dos números inteiros”.

Os alunos compreenderam bem o enunciado do problema, mas não conseguiram elaborar uma resolução válida, como veremos no quadro a seguir, que foi construído com base nas respostas registradas, destacando a solução de cada grupo com sua respectiva análise:

Quadro 34: Soluções dos grupos registradas na Atividade 14/Problema 3

GRUPOS	SOLUÇÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Problema 3: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais? O conjunto de números racionais, pois encontramos elementos como, raiz quadrada, positivos e negativos, potências entre outros.	Solução inválida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.
Grupo 02: E3 e E4	Problema 3: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais? R = 0 maior é o conjunto dos números naturais	Solução inválida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.

Grupo 03: E5 e E6	Problema 3: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais? <i>Os dois são iguais pois os números naturais se originam dos números inteiros</i>	Solução parcialmente válida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.
Grupo 04: E7 e E8	Problema 3: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais? <i>Os números racionais, pois os números naturais vai do 0 ao infinito, já os números racionais vai do $-\infty$ ao infinito positivo.</i>	Solução inválida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.
Grupo 05: E9 e E10	Problema 3: Qual conjunto possui maior quantidade de elementos o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números racionais? <i>Os dois são iguais porque todos vêm do número natural.</i>	Solução parcialmente válida para a comparação da cardinalidade do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.

Fonte: Experimentação, 2022.

Mediante as resoluções apresentadas pelos estudantes, elaboramos o quadro a seguir que expressa o percentual das soluções que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 35: Análises das soluções dos grupos apresentadas na atividade 14/Problema 3

SOLUÇÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	0	0
Parcialmente Válidas	2	40
Inválidas	3	60
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

As análises das soluções apresentadas pelas equipes, demonstram que mesmo tendo compreendido o enunciado do problema, nenhum grupo conseguiu construir uma solução válida, sinalizando para a falta de habilidade de realizar demonstrações. No intuito de amenizar essa problemática, solicitamos que um representante de cada dupla apresentasse a sua solução. Em seguida, apresentamos a solução sistematizada do problema, utilizando a História da Matemática para mostrar a forma como essa demonstração e seu conhecimento foi construído, reforçando mais uma vez a relação entre a bijeção e a cardinalidade de conjuntos.

Logo depois, solicitamos que os estudantes resolvessem as questões de sistematização do problema 3, que foi concluída em 20 (vinte) minutos, das 17 horas às 17 horas e 20 minutos. Por fim, agradecemos a participação de todos e convidamos para estarem presentes na aula da próxima semana, obtendo a confirmação de todos os presentes.

5.6. Quinta Sessão de Ensino

A penúltima sessão de ensino ocorreu no dia 28 de junho de 2022, com a presença de todos os estudantes participantes. Após o acolhimento, seguimos para a realização da atividade 15, que tinha por objetivo, descobrir uma relação entre a cardinalidade dos intervalos de números reais. A atividade foi concluída em aproximadamente 10 minutos, iniciando às 15 horas e 20 minutos e terminando às 15 horas e 30 minutos.

Os estudantes demonstraram muito interesse no desenvolvimento dessa atividade, onde eles deveriam observar o quadro de relações de intervalos reais, indicando por B aquelas que representavam uma função bijetora, e por NB, as que não representavam. A seguir preencheram um quadro, cujas informações obtidas

possibilitaram escrever suas observações e conclusão, indicando todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade.

Os discentes não apresentaram um pouco de dificuldades no início do desenvolvimento dessa atividade, mas após as ponderações do professor, que promoveu uma reflexão sobre o conceito de função bijetora e a relação entre a quantidade de elementos do domínio e do contradomínio dessa função, os alunos discutiram em grupo e utilizaram as experiências adquiridas na realização das atividades anteriores, conseguindo alcançar o objetivo da mesma, conforme indica o quadro a seguir, que destaca a análise das observações e conclusões dadas pelos estudantes:

Quadro 36: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 15

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: Existe uma função bijetora entre todos os intervalos reais Conclusão: Que todos os intervalos reais tem a mesma cardinalidade	Observação e Conclusão válidas sobre a relação da cardinalidade dos intervalos de números reais.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: EXISTE UMA FUNÇÃO BIJETORA QUE RELACIONA OS INTERVALOS Conclusão: TODOS OS INTERVALOS REAIS POSSUEM A MESMA CARDINALIDADE.	Observação e Conclusão válidas sobre a relação da cardinalidade dos intervalos de números reais.

Grupo 03: E5 e E6	Observação: Há uma bijeção entre os intervalos reais; B: Bijetora NB: não bijetora Conclusão: Todos intervalos possuem a mesma cardinalidade	Observação e Conclusão válidas sobre a relação da cardinalidade dos intervalos de números reais.
Grupo 04: E7 e E8	Observação: Existe um Bijeção nos intervalos reais Conclusão: Todos os intervalos reais possuem o mesmo cardinalidade	Observação e Conclusão válidas sobre a relação da cardinalidade dos intervalos de números reais.
Grupo 05: A9 e A10	Observação: todas as funções são Bijetoras Conclusão: que o B se sai so uma / todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade	Observação e Conclusão válidas sobre a relação da cardinalidade dos intervalos de números reais.

Fonte: Experimentação, 2022.

A seguir, apresentamos um quadro, que elaboramos mediante as respostas dos estudantes. Nele evidenciamos o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 37: Análises das conclusões dos grupos na atividade 15

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	5	100
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	0	00
Total	5	100

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro mostra que todos os grupos (100%) conseguiram concluir que todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade, o que evidenciou que o objetivo dessa atividade 15 foi alcançado. Para concluir essa atividade, solicitamos aos grupos que apresentassem suas conclusões e, a partir dessas, seguimos para a formalização, solicitando que todos tomassem nota, finalizando essa primeira atividade do dia às 15 horas e 42 minutos.

Dessa forma, orientamos os alunos para a resolução da atividade 16, que tinha por objetivo descobrir a relação entre a cardinalidade de um intervalo de números reais e a cardinalidade do conjunto dos números reais. Por ter um procedimento semelhante ao utilizado nas atividades anteriores, os discentes desenvolveram essa atividade com muita facilidade, que foi concluída em cerca de 8 (oito) minutos, no intervalo das 15 horas e 43 minutos às 15 horas e 51 minutos.

A seguir apresentamos um quadro que construímos por meio dos registros realizados pelos grupos, nos quadros de observação e conclusão, com suas respectivas análises:

Quadro 38: Observações e Conclusões dos grupos na Atividade 16

GRUPOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Observação: existe uma bijecção entre os intervalos reais e o conjunto reais. Conclusão Que a quantidade de elementos dos números reais são iguais	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade de um intervalo real e a cardinalidade do conjunto dos números reais.
Grupo 02: E3 e E4	Observação: SE EXISTE UMA FUNÇÃO BIJETORA ENTRE DOIS CONJUNTOS, ELES POSSUEM A MESMA QUANTIDADE DE ELEMENTOS Conclusão O conjunto dos números reais e o intervalo dos números reais possuem a mesma cardinalidade	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade de um intervalo real e a cardinalidade do conjunto dos números reais.
Grupo 03: E5 e E6	Observação: Há uma função bijetora entre o intervalo real e o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$). Conclusão Observar-se que o intervalo real tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$)	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade de um intervalo real e a cardinalidade do conjunto dos números reais.

Grupo 04: E7 e E8	Observação: Há uma função bijetora entre o intervalo real e o conjunto dos reais. Conclusão Observa-se que o intervalo real tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto dos reais.	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade de um intervalo real e a cardinalidade do conjunto dos números reais.
Grupo 05: E9 e E10	Observação: Existe uma bijeção entre os intervalos reais e o conjunto de números reais. Conclusão Todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade do conjunto de números reais.	Observação e Conclusão válidas para a relação entre a cardinalidade de um intervalo real e a cardinalidade do conjunto dos números reais.

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro a seguir destaca o percentual das conclusões que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas.

Quadro 39: Análises das conclusões dos grupos na atividade 16

CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	5	100
Parcialmente Válidas	0	0
Inválidas	0	00
Total	5	100

Fonte: Experimentação, 2022.

Mediante as respostadas apresentadas pelos discentes e os dados do quadro anterior, podemos afirmar que o objetivo da atividade 16 foi alcançado, isto é, os estudantes conseguiram identificar a relação entre a cardinalidade de um intervalo real e a cardinalidade do conjunto dos números reais. Dessa forma, pedimos que um participante de cada grupo apresentasse sua resposta e, assim, pautado nessas, seguimos para a formalização.

Ao término desta atividade, os discentes iniciaram a resolução da atividade 17, que tinha como objetivo compreender que existe infinito maior que o outro. Essa atividade era composta pelo problema 4: Existe infinito maior que outro? Apresentando um procedimento semelhante ao utilizado nas atividades 12 a 14, ela foi resolvida em aproximadamente de 10 minutos, iniciando às 15 hora e 53 minutos e concluindo às 16 horas e 3 minutos.

Mediante as respostas apresentadas pelos estudantes, construímos o quadro a seguir, destacando as soluções com suas respectivas análises:

Quadro 40: Soluções dos grupos registradas na Atividade 17/Problema 4

GRUPOS	SOLUÇÕES	ANÁLISE
Grupo 01: E1 e E2	Problema 4: Existe infinito maior que o outro? Não, pois eles estão na mesma linha, que vai fazer diferente e o "local" deles como infinito primo, infinito negro, tipos, infinitos de números racionais.	Solução inválida sobre a existência de infinito maior que outro.
Grupo 02: E3 e E4	Problema 4: Existe infinito maior que o outro? SIM	Solução parcialmente válida sobre a existência de infinito maior que outro.

Grupo 03: E5 e E6	Problema 4: Existe infinito maior que o outro? <i>Sim, pois cardinalidade dos números reais é maior que a cardinalidade dos naturais.</i>	Solução válida sobre a existência de infinito maior que outro.
Grupo 04: E7 e E8	Problema 4: Existe infinito maior que o outro? <i>sim, Porque o infinito varia de ao infinito, só que entre cada número, tipo 0,3 tem 0,3 ; 0,333 ; 0,3333... , 0,32 ; 0,322 ; 0,3222... , tornando um infinito mais mais longo que outro infinito.</i>	Solução válida sobre a existência de infinito maior que outro.
Grupo 05: E9 e E10	Problema 4: Existe infinito maior que o outro? <i>Não, porque o infinito já é infinito e não dá pra contar por se infinito.</i>	Solução inválida sobre a existência de infinito maior que outro.

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro a seguir apresenta o percentual das soluções que classificamos como válidas, parcialmente válidas e inválidas:

Quadro 41: Análises das soluções dos grupos registradas na Atividade 17/Problema 4

SOLUÇÕES	FREQUÊNCIA	%
Válidas	2	40
Parcialmente Válidas	1	20
Inválidas	2	40
Total	10	100

Fonte: Experimentação, 2022.

As informações do quadro anterior revelam que 40% dos grupos apresentaram soluções inválidas, e 40% apresentaram uma solução válida para o problema 4, o que está em desacordo com o que havíamos previsto anteriormente, quando afirmamos que os alunos não conseguiriam apresentar a solução correta para esse problema. Acreditamos que as discussões e as reflexões possibilitaram esse percentual de soluções válidas.

Para dar continuidade ao desenvolvimento dessa atividade, solicitamos que cada grupo escolhesse um representante para apresentar a solução do problema. Depois de analisar e discutir cada uma delas, apresentamos uma solução do problema utilizando o método de redução ao absurdo, o que despertou ainda mais a atenção dos discentes, que em seguida foram conduzidos à sistematização, onde apresentamos uma nova de técnica de comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos, provando a existência de um infinito maior que o outro, além de ampliar a visão desses, sobre o infinito.

Logo depois, solicitamos aos alunos que resolvesse as questões envolvendo a sistematização do assunto da atividade 17, a qual eles tiveram pouca dificuldade para desenvolver e concluíram a sua resolução em 22 minutos, iniciando às 16 hora e 20 minutos e terminando às 16 horas e 42 minutos.

Por fim, recebemos as atividades resolvidas e finalizamos o encontro, agradecendo a participação dos estudantes, tecendo elogios ao desempenho destes na execução das atividades e destacando as experiências adquiridas e o conhecimento construído durante o estudo realizado. Pontuamos ainda, que no próximo encontro seria a nossa última aula e que eles seriam submetidos ao teste que mencionamos no primeiro encontro. Na subseção a seguir discorreremos sobre a sexta e última sessão de ensino.

5.7. Sexta Sessão de Ensino

A sexta e última sessão de ensino ocorreu no dia 01 de julho de 2022, com início às 15 horas, quando realizamos o acolhimento dos estudantes, nos certificando de que todos estavam presentes. Agradecemos a participação efetiva de cada discente, elogiando o desempenho e o comprometido com cada atividade da nossa Sequência Didática.

Durante a conversa, perguntamos o que eles acharam do modo com se desenvolveu cada sessão de ensino sobre Bijeção de Função. As respostas foram muito satisfatórias, alguns alunos afirmaram que dessa forma eles conseguiram aprender mais e que assim as aulas eram mais atrativas e produtivas.

A seguir resolvemos e discutimos algumas questões de aprofundamento, aproveitando para esclarecer as dúvidas dos discentes. Às 15 horas e 48 minutos apresentamos o filme OS INFINITOS DE CANTOR, no intuito de reforçar as demonstrações da comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos. O vídeo terminou às 16 horas e 3 minutos.

Para dar continuidade a essa sessão de ensino, orientamos os discentes a iniciarem a resolução do Pós-Teste às 16 horas e 10 minutos. O teste foi concluído em aproximadamente

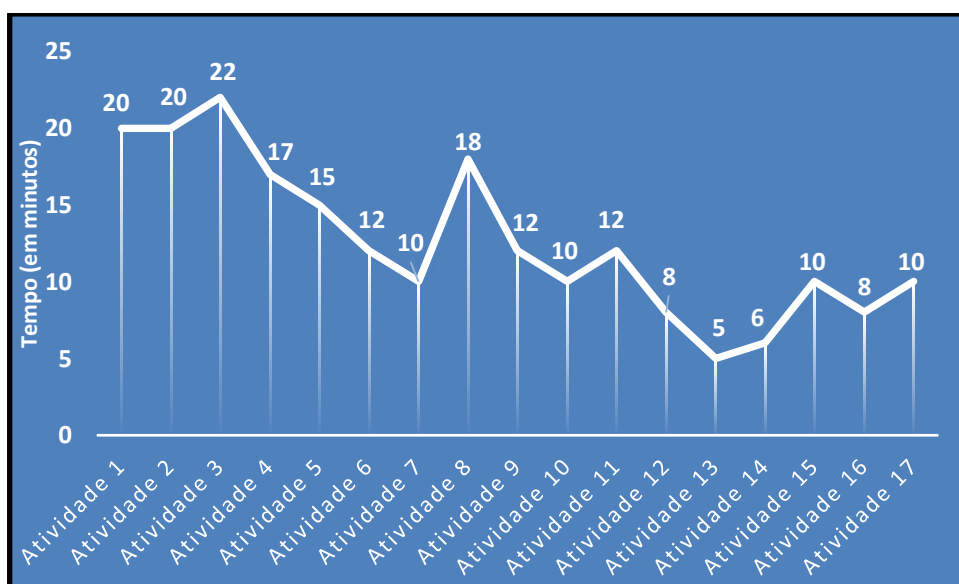
Às 16:10 h os alunos iniciaram a resolução do PÓS-TESTE. Durante a aplicação dessa avaliação os alunos demonstraram muito interesse, fazendo leitura atenta e tentando resolver cada questão.

O primeiro estudante concluiu teste às 17 horas e 5 minutos, gastando 55 minutos para resolver todas as questões e o último discente concluiu a resolução às 17 horas e 45 minutos, levando 1 hora e 35 minutos para concluir a resolução de todo o teste. Dessa forma, finalizamos a última sessão de ensino e o processo de experimentação.

5.8. Considerações acerca da Experimentação

Durante o processo de experimentação, percebemos que as experiências adquiridas em cada atividade, faziam com que os estudantes chegassem cada vez mais rápido na conclusão das atividades propostas, confirmando o que encontramos em Sá (1999, p. 81), ao afirmar que “a experiência tem mostrado que o educando fica mais rápido à medida que as atividades são vencidas e deste modo o maior tempo gasto no início é recompensado posteriormente”.

No gráfico a seguir apresentamos o tempo máximo gasto, pelo último grupo participante da pesquisa, na conclusão de cada atividades, desconsiderando as questões de aprofundamento, que também fazem parte do processo de experimentação.

Gráfico 17: Tempo máximo para efetivação das atividades

Fonte: Experimentação, 2022.

O gráfico destaca que houve uma acentuada queda no tempo gasto pelas equipes para desenvolver as atividades que apresentam um procedimento semelhante ao utilizado nas anteriores, com destaque para as atividades de 1 a 7, bem como as atividades de 8 a 13.

A seguir apresentamos a última etapa do nosso trabalho, denominada análise *a posteriori* e validação da experimentação, donde destacamos as análises dos dados obtidos por meio dos instrumentos de coleta durante a sequência didática e o confronto das análises *a priori* e *a posteriori*.

6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta seção, apresentamos os resultados da análise *a posteriori* e validação da experimentação, analisando os dados que foram obtidos por meio dos instrumentos de coleta aplicados durante a aplicação da sequência didática (questionário sócioeducacional, pré-teste, ficha de observação de aula de redescoberta de autoria de Sá (2019), atividades da sequência didática, questões de aprofundamento e pós-teste) bem como o confronto das análises *a priori* e *a posteriori*, avaliando se o objetivo da nossa pesquisa foi alcançado: verificar as potencialidades de uma sequência didática sobre o ensino e a aprendizagem de Bijeção de Função, pautada no Ensino por Atividades Experimentais e na Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

As análise prévias evidenciaram uma dificuldade de aprendizagem dos alunos em relação ao conceito de Função, definição e representação gráfica de uma Função Bijetora, bem como a sua aplicação na comparação da quantidade de elementos de conjuntos infinitos. Isso serviu de base para elaborarmos uma sequência de atividades que foi desenvolvida em seis encontros denominados seções, objetivando desenvolver minimizar ou até mesmo sanar essas dificuldades, trabalhando esses conteúdos por meio do Ensino por Atividades Experimentais atrelado à Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

A sequência didática trabalhou inicialmente as definições de Função, imagem, contradomínio e domínio de uma função, em seguida a definições de Função injetora, Sobrejetora e Bijetora, para posteriormente trabalharmos a identificação do gráfico dessas funções e, por fim, a comparação da quantidade (ou cardinalidade) de conjuntos infinitos.

A análise das informações obtidas, denominada análise *a posteriori* e validação, foi realizada em três etapas, desenvolvidas minuciosamente ao longo do processo, e ocorreu de forma efetiva com base na investigação da participação dos dez estudantes que compõe a amostra da nossa pesquisa.

Na primeira etapa realizamos a comparação do percentual de questões deixadas em branco (não respondidas), erros e acertos obtidos no pré-teste e pós-teste, tabulando e analisando estatisticamente todos os resultados, por meio de comparações percentuais. Na segunda, utilizamos o coeficiente linear de Pearson para verificar se os fatores externos, isto é, socioeconômicos influenciaram nos

resultados. Na terceira e última etapa, realizamos um teste de hipótese de dados pareados, baseado nas notas dos estudantes, com a finalidade de observar se as conclusões foram favoráveis, possibilitando avaliar se o experimento obteve êxito. Por fim apresentamos o confronto entre as Análises a Priori e a Posteriori das Atividades propostas, efetivando assim a validação da nossa pesquisa.

6.1 Resultados e Análises do Pré-teste e Pós-teste

Vamos iniciar nossas análises, verificando as questões do Pré-Teste e do Pós-Teste, considerando o percentual de acertos, erros e de questões que não foram resolvidas. O quadro a seguir, destaca as características de cada categoria, que será utilizada como base para avaliar as respostas registradas pelos estudantes nos testes.

Quadro 42: Classificação das respostas do Pré-teste e pós-teste

CATEGORIAS	CARACTERÍSTICAS
Acerto	Quando o estudante apresentou uma resolução e o resultado estava correto.
Erro	Quando o estudante apresentou uma resolução e o resultado não estava correto.
Branco	Quando o estudante não apresentou nenhuma resolução

Fonte: Experimentação, 2022.

Com base nessa classificação, elaboramos o quadro a seguir, onde destacamos o percentual de acertos, erros e questões deixadas em branco no pré-teste e pós-teste.

Quadro 43: Desempenho nos Diagnósticos: Pré-Teste e Pós-Teste

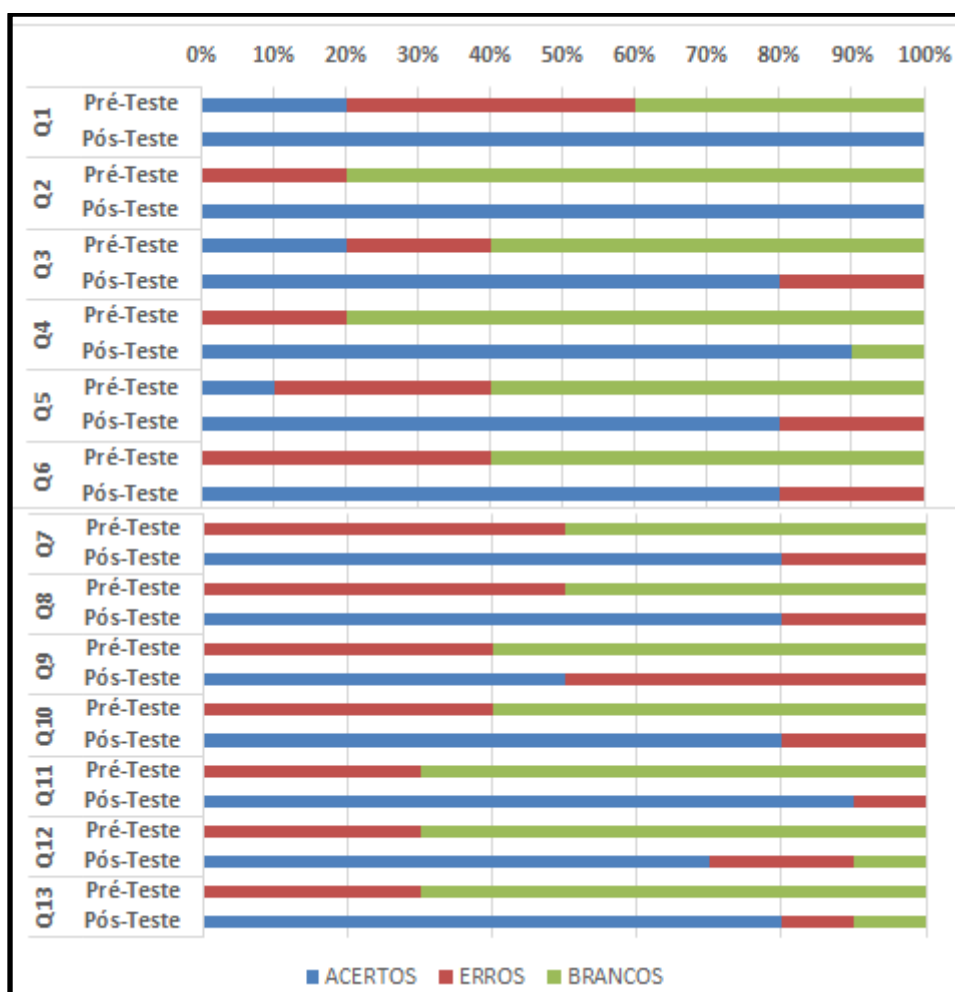
QUESTÃO	ACERTO(%)		ERRO(%)		BRANCO(%)	
	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste
Q1	20%	100%	40%	0%	40%	0%
Q2	0%	100%	20%	0%	80%	0%
Q3	20%	80%	20%	20%	60%	0%
Q4	0%	90%	20%	0%	80%	10%
Q5	10%	80%	30%	20%	60%	0%

Q6	0%	80%	40%	20%	60%	0%
Q7	0%	80%	50%	20%	50%	0%
Q8	0%	80%	50%	20%	50%	0%
Q9	0%	50%	40%	50%	60%	0%
Q10	0	80%	40%	20%	60%	0%
Q11	0	90%	30%	10%	70%	0%
Q12	0%	70%	30%	20%	70%	10%
Q13	0%	80%	30%	10%	70%	10%

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir do dados do quadro elaboramos o gráfico a seguir para termos uma leitura visual do percentual de acertos, erros e questões deixadas em branco no pré-teste e no pós-teste.

Gráfico 18: Desempenho por questão no Pré-teste e Pós-teste



Fonte: Experimentação, 2022.

Os dados do gráfico destacam que somente as questões Q1, Q3 e Q5, apresentam, respectivamente, 20%, 20% e 10% de acerto no Pré-Teste, e uma grande quantidade de questões desse teste foram deixadas em branco, o que evidencia uma grande dificuldade ou falta de conhecimento da definição de Função, Bijeção de Função e sua aplicação na comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos.

De acordo com o gráfico, o percentual de questões deixadas em branco no Pré-Teste em relação ao Pós-Teste, diminuiu significativamente de modo que em 10 (dez) questões do Pós-Teste nenhuma questão foi deixada em branco, e nas questões 12 e 13 o índice de questões em branco caiu de 70% para 10%, na questão 4 essa queda foi de 80% para 10%.

Comparando percentual de acertos do Pré-Teste em relação ao Pós-Teste, constatamos que houve um aumento expressivo, com destaque para as questões 1, 3, 6, 7, 8 e 13 que apresentaram um aumento de 80%. Nas questões 4 e 11 o índice de acerto aumentou de 0 para 90%; e na questão 2 houve 100% de acertos. Ressaltamos que no Pré-Teste, 20% dos discentes erraram a questão 2 e os outros 80% deixaram em branco, desse modo essa foi a questão que apresentou o maior aumento.

Considerando que a maioria dos alunos nem se quer tiveram contato com os conteúdos abordados nos testes e que após a aplicação da sequência didática, conforme o gráfico anterior, a grande maioria deles alcançaram um desempenho superior a 70% de acertos das questões do Pós-Teste, podemos afirmar que houve avanço significativo na aprendizagem desses estudantes, o que está evidenciado no quadro a seguir:

Quadro 44: Desempenho dos estudantes nos testes

(Continua)

ESTUDANTES	ACERTO(%)		ERRO(%)		BRANCO(%)	
	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste
E1	0%	100%	61%	0%	39%	0%
E2	15%	46%	70%	39%	15%	15%
E3	15%	85%	31%	15%	54%	0%
E4	8%	92%	92%	8%	0%	0%

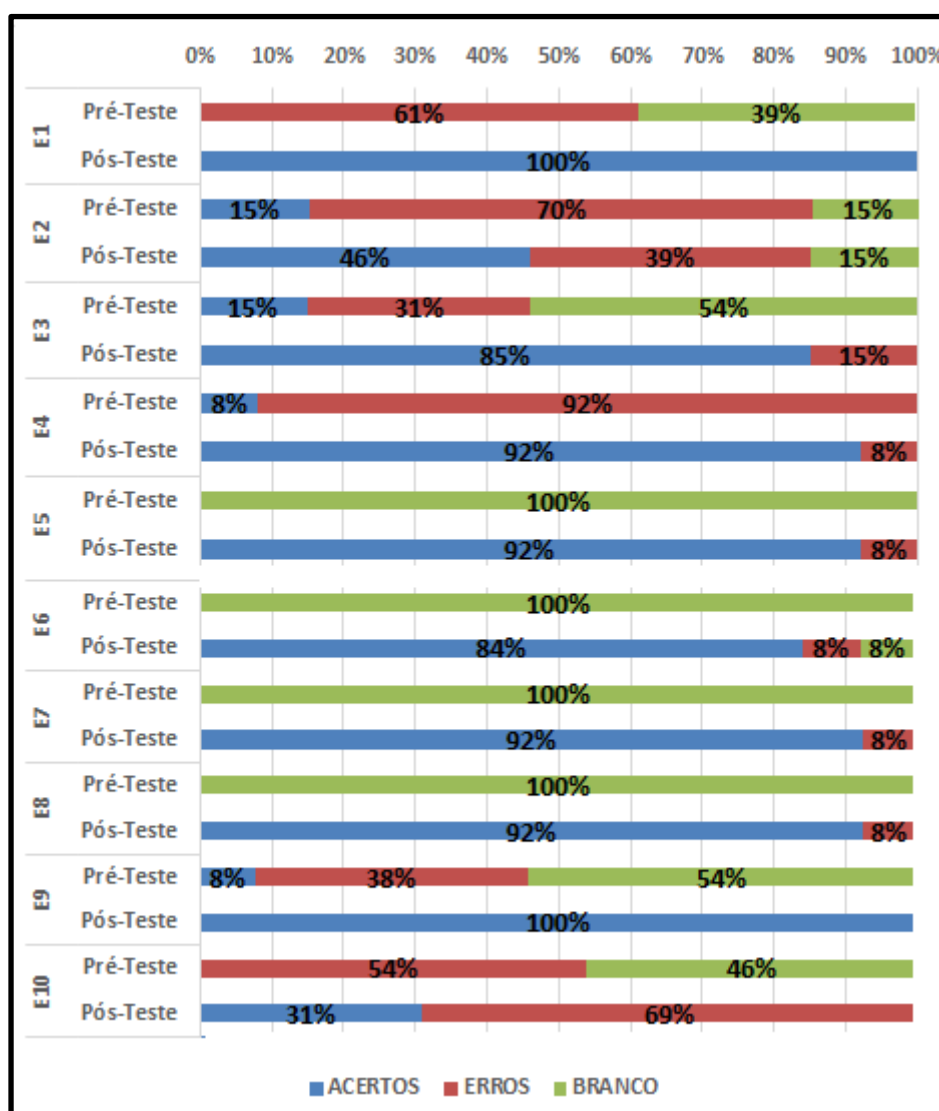
(Conclusão)

E5	0%	92%	0%	8%	100%	0%
E6	0%	84%	0%	8%	100%	8%
E7	0%	92%	0%	0%	100%	8%
E8	0%	92%	0%	8%	100%	0%
E9	8%	100%	38%	0%	54%	0%
E10	0%	31%	54%	69%	46%	0%

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir desses dados construímos o gráfico a seguir, possibilitando uma leitura visual do percentual de acertos, erros e questões deixadas em branco no pré-teste e no pós-teste.

Gráfico 19: Desempenho dos discentes nos testes



Fonte: Experimentação, 2022.

Os resultados apresentados no gráfico indicam que todos os estudantes tiveram avanços muito significativos na aprendizagem, com destaque para os estudantes E5, E6, E7 e E8, que tiveram um rendimento de 0%, no Pré-Teste, demonstrando ter conhecimento insatisfatório acerca do conteúdo abordado no teste, conseguiram atingir um percentual de 92% de acertos no Pós-Teste. Os estudantes E1 e E9, que no Pré-Teste alcançaram um aproveitamento de, respectivamente, 0% e 8%, apresentaram o melhor desempenho em relação aos demais, obtendo 100% de acertos no Pós-Teste.

Destacamos que os discentes E5, E6, E7 e E8, que no Pré-Teste apresentaram todas as questões em branco, resolveram todas as questões do Pós-Teste, apresentando a resolução correta de 92% das questões, o que indica uma ótima evolução na aprendizagem dos conteúdos abordados no teste.

6.2 Correlação entre as notas dos testes e algumas variáveis sócioeconômicas

Nesta subseção procuramos estabelecer a correlação entre as notas obtidas nos testes e algumas variáveis sócioeconômicas dos estudantes. Essas variáveis foram obtidas por meio da aplicação do questionário sócioeconômico, que foi respondido pelos discentes participantes do estudo, durante o diagnóstico inicial do experimento.

Neste sentido, elaboramos quadros com as informações, identificando estudante, nota do Pré-Teste, nota do Pós-Teste por meio da notação (**En**; nota Pré-Teste; nota Pós-Teste).

Quadro 45: Correlação gosto pela matemática e quem ajuda nas tarefas

QUEM LHE AJUDA NAS TAREFAS DE MATEMÁTICA ?	Respostas	GOSTO PELA MATEMÁTICA			
		Não gosto	Suporto	Gosto um Pouco	Adoro
	Professor Particular				
	Pai				
	Mãe				
	Ninguém			(E2; 1,5; 4,6) (E3; 1,5; 8,5)	(E5; 0; 9,2) (E7; 0; 9,2)

				(E4; 0,8; 9,2) (E6; 0; 9,2) (E10; 0; 3,1)	(E9; 0,8; 10,0)
	Amigo(a) da escola			(E1; 0; 10,0) (E8; 0; 9,2)	
	Outros				

Fonte: Experimentação, 2022

O quadro anterior destaca que cinco estudantes (E2, E3, E4, E6 e E10) afirmaram não possuir ninguém que os auxilie nas tarefas de matemática, além de responderem que gostam um pouco de Matemática, contudo obtiveram um bom desempenho no Pós-Teste em comparação com o Pré-Teste. Analisamos que três estudantes (E6, E7 e E9), asseguraram que doram a disciplina e, assim como os anteriores, não recebem ajuda de ninguém nas tarefas de Matemática, e conseguiram uma ótima nota no Pós-Teste.

Analisamos ainda que, dois estudantes (E1 e E8), responderam que recebem ajuda dos amigos para resolver as tarefas de Matemática e que gostam um pouco dessa disciplina, alcançaram uma excelente nota no Pós-Teste comparada a nota obtida no Pré-Teste, uma vez que ambos tiraram nota zero no teste inicial, alcançando 9,2 e 10,0, respectivamente, na nota do teste final.

Para prosseguirmos com nossas análises, apresentamos o quadro a seguir que destaca a correlação entre o gosto pela Matemática e frequência do estudo desta fora do ambiente escolar.

Quadro 46: Correlação gosto pela matemática e frequência do estudo desta fora da escola

COM QUE FREQUÊNCIA VOCÊ ESTUDA MATEMÁTICA	Respostas	GOSTO PELA MATEMÁTICA			
		Não gosto	Suporto	Gosto um Pouco	Adoro
	Todo dia			(E6; 0; 9,2)	(E5; 0; 9,2) (E7; 0; 9,2)
	Somente nos finais de semana			(E8; 0; 9,2)	

	No período de Prova			(E2; 1,5; 4,6) (E3; 1,5; 8,5) (E4; 0,8; 9,2) (E10; 0; 3,1)	
	Só na véspera da prova			(E1; 0; 10,0)	
	Não estudo fora da escola				(E9; 0,8; 10,0)

Fonte: Experimentação, 2022

A partir da análise do gráfico anterior, verificamos que um estudante (E9) que disse que adora matemática afirmou que não estuda fora do ambiente escolar, por outro lado um discente (E6) que disse gostar um pouco de matemática, respondeu que estuda essa disciplina todos diariamente, ambos apresentaram uma excelente melhora no Pós-Teste em relação ao Pré-Teste.

Os alunos E1 e E8, que responderam gostar um pouco de matemática, revelaram que estudam, respectivamente, só na véspera da prova e somente nos finais de semana, mas os dois que obtiveram nota zero no Pré-Teste e tiveram um ótimo desempenho no Pós-Teste, de modo que o primeiro alcançou nota 10,0 e o segundo, obteve 9,2.

Destacamos ainda que, os estudantes E2 e E10, que conforme suas resposta, gosta um pouco de matemática e estudam essa disciplina somente no período de provas, apresentaram o menor rendimento se compararmos as notas dos testes inicial e final, no entanto, o estudantes E3 e E4, que assim como os anteriores, gostam um pouco de matemática e só estudam no período de provas, apresentaram um bom desempenho no Pós-Teste em relação ao teste inicial.

Dando continuidade às análises, apresentamos no quadro a seguir, dados referentes à correlação entre o gosto pela matemática e o interesse nas aulas dessa disciplina.

Quadro 47: Correlação gosto pela matemática e o interesse nas aulas

AS AULAS DE MATEMÁTICA DESPERTAM SUA ATENÇÃO EM APRENDER OS CONTEÚDOS MINISTRADOS?	Respostas	GOSTO PELA MATEMÁTICA			
		Não gosto	Suporto	Gosto um Pouco	Adoro
	Sim			(E2; 1,5; 4,6) (E3; 1,5; 8,5) (E6; 0; 9,2) (E8; 0; 9,2)	(E5; 0; 9,2) (E7; 0; 9,2)
	Não			(E1; 0; 10,0)	
	Às vezes			(E4; 0,8; 9,2) (E10; 0; 3,1)	(E9; 0,8; 10,0)

Fonte: Experimentação, 2022

O quadro anterior revela que seis estudantes afirmaram que as aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados, sendo que quatro desses (E2, E3, E6 e E8) disseram gostar um pouco de matemática e os outros dois (E5 e E7), responderam que adoram matemática, apresentaram uma melhora significativa em seu desempenho do teste final em relação ao Pré-Teste, com destaque para os discentes (E5 e E7), que saíram de uma nota zero no teste inicial para nota 9,2 no Pós-Teste.

A análise do gráfico destaca que um aluno (E1), afirmou que as aulas de matemática não despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados, e que gosta um pouco dessa disciplina, obteve o melhor desempenho entre todos os estudantes que participaram do nosso estudo, com nota zero no Pré-Teste e 10,0 (dez) no Pós-Teste.

Quanto aos três discentes que responderam às vezes as aulas de matemática não despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados, dois (E4 e E10) gostam um pouco de matemática e um (E9) que afirmou adorar essa disciplina, apresentaram rendimento satisfatório se comparamos seus resultados obtidos no Pós-Teste em relação ao Pré-Teste. Destacamos que entre esses, o estudante (E10) apresentou o pior rendimento, com zero no primeiro teste e 3,1 no segundo.

6.3 Coeficiente de Correlação Linear de Pearson dos Testes

O coeficiente de correção linear de Pearson é o valor que mede a intensidade da associação linear existente entre duas variáveis. Conforme Ribeiro-Santos (2015, p. 99): “o principal objetivo da análise da correlação linear é medir a intensidade de uma relação linear entre duas variáveis”.

De acordo com Tourão (2020, p. 154), “para analisar a intensidade da associação linear entre duas variáveis estudadas, inicialmente os dados são parametrizados e, em seguida, calculado o coeficiente linear de Pearson (r), pertencente ao intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq r \leq 1$ ”. O tipo de correlação entre as duas variáveis analisadas é definido de acordo o quadro a seguir:

Quadro 48: Classificação da correlação em função de r

Coeficiente da Correlação	Classificação da Correlação
$r = 1$	Perfeita Positiva
$0,8 \leq r < 1$	Forte Positiva
$0,5 \leq r < 0,8$	Moderada Positiva
$0,1 \leq r < 0,5$	Fraca Positiva
$0 < r < 0,1$	Ínfima Positiva
0	Nula
$-0,1 \leq r < 0$	Ínfima Negativa
$-0,5 < r \leq -0,1$	Fraca Negativa
$-0,8 < r \leq -0,5$	Moderada Negativa
$-1 < r \leq -0,8$	Forte Negativa
$r = -1$	Perfeita Negativa

Fonte: Barbetta (2012, p. 258 apud TOURÃO, 2020, p. 154)

O resultado obtido pode ser representado graficamente pelo Digrama de Dispersão, também chamado de “Nuvem de Pontos”, onde as variáveis são representadas por pontos num sistema cartesiano na forma de pares ordenados (x , y), onde x e y representam valores das duas variáveis analisadas. (BARBETTA, 2012, p. 304, apud TOURÃO, 2020, P. 154-155).

Com o objetivo de verificar se as variáveis socioeconômicas afetaram o desempenho dos estudantes nos testes, vamos utilizar o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson (r), que será calculado por meio do Microsoft Office Excel.

Na primeira correlação relacionamos a diferença entre as notas do Pré-Teste e Pós-Teste, com o gosto dos alunos pela matemática. Desse modo, temos:

Quadro 49: Classificação da Correlação de Pearson: Gosto pela Matemática

Você gosta de Matemática?	Parametrização
Não gosto	1
Suporto	2
Gosto um pouco	3
Adoro	4

Fonte: Experimentação, 2022

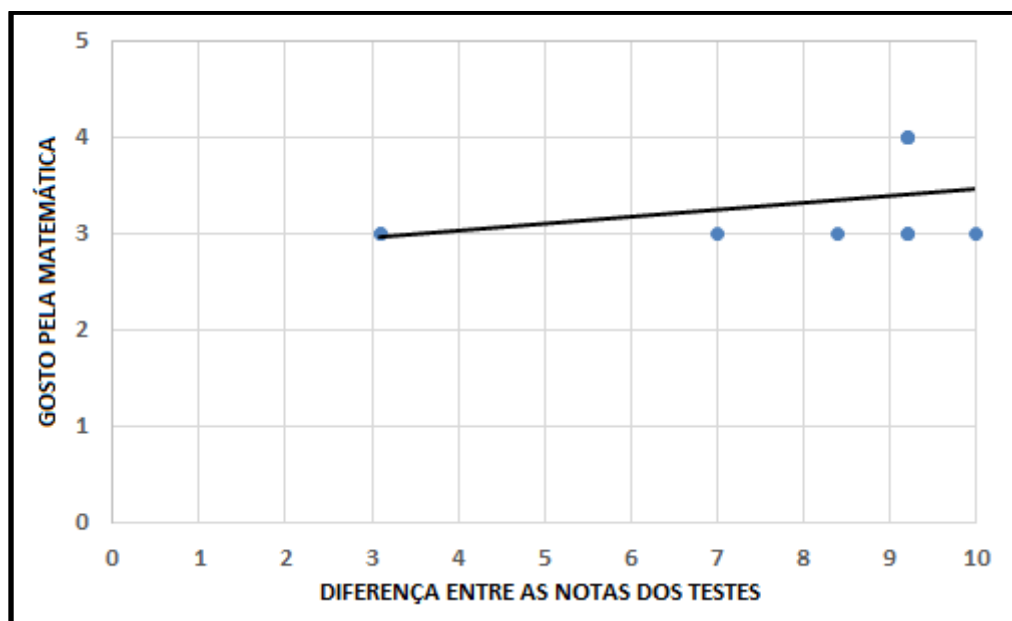
Com base nessa classificação, constituímos o quadro a seguir, apresentando a correlação entre a diferença entre as notas dos testes e o gosto pela matemática:

Quadro 50: Correlação entre a diferença das notas nos testes e Gosto por matemática

ESTUDANTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	GOSTO PELA MATEMÁTICA
E1	0,0	10,0	10,0	3
E2	1,5	4,6	3,1	3
E3	1,5	8,5	7,0	3
E4	0,8	9,2	8,4	3
E5	0,0	9,2	9,2	4
E6	0,0	9,2	9,2	3
E7	0,0	9,2	9,2	4
E8	0,0	9,2	9,2	3
E9	0,8	10,0	9,2	4
E10	0,0	3,1	3,1	3

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir desses dados, elaboramos o gráfico de dispersão a seguir, destacando a relação entre a diferença das notas dos testes e o gosto pela matemática.

Gráfico 20: Dispersão: Gosto pela Matemática

Fonte: Experimentação, 2022.

Para o gráfico de dispersão anterior, o valor do coeficiente linear de Pearson gerado, para a correlação entre a diferença das notas do Pré-teste e o Pós-teste e o gosto pela disciplina matemática, obtivemos $r = 0,385487$, e como este valor está compreendido entre $0,1 \leq r < 0,5$ podemos classificar a correlação como fraca positiva, concluindo, desse modo, que o gosto pela matemática teve pouca influência nos resultados obtidos nos testes. Dando continuidade às nossas análises, vejamos a seguir a correlação existente entre o nível de escolaridade do responsável masculino e a diferença das notas nos testes.

Quadro 51: Classificação da Correlação de Pearson: Escolaridade responsável masculino

Qual a escolaridade do seu responsável masculino?	Parametrização
Não estudou	1
Fundamental incompleto	2
Fundamental	3
Médio	4
Superior	5

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro a seguir, destaca a correlação entre a diferença das notas dos testes e a escolaridade do responsável masculino.

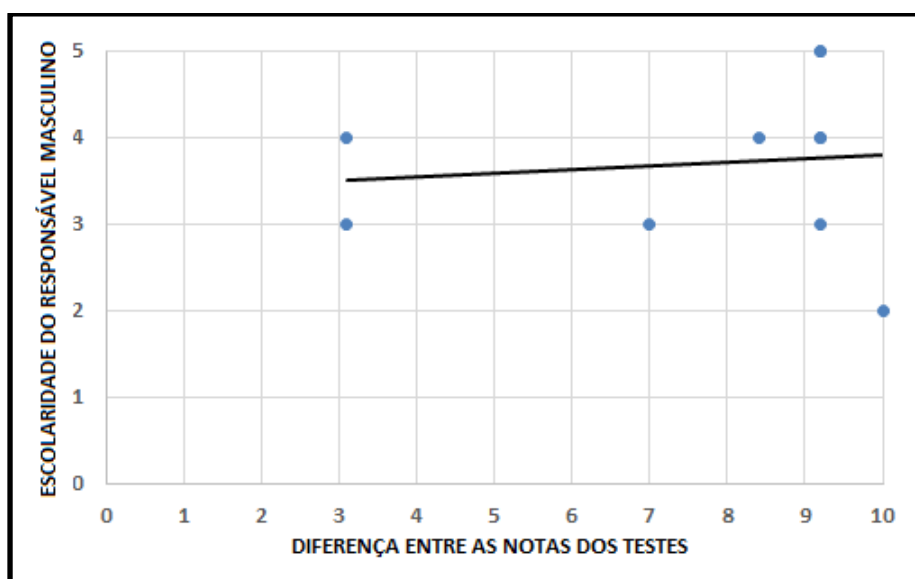
Quadro 52: Correlação entre a diferença das notas e Escolaridade responsável masculino

ESTUDANTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO
E1	0,0	10,0	10,0	2
E2	1,5	4,6	3,1	3
E3	1,5	8,5	7,0	3
E4	0,8	9,2	8,4	4
E5	0,0	9,2	9,2	3
E6	0,0	9,2	9,2	5
E7	0,0	9,2	9,2	5
E8	0,0	9,2	9,2	4
E9	0,8	10,0	9,2	4
E10	0,0	3,1	3,1	4

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir desses dados, elaboramos o gráfico de dispersão a seguir, destacando a relação entre a diferença das notas dos testes e a escolaridade do responsável masculino.

Gráfico 21: Dispersão: Escolaridade responsável masculino



Fonte: Experimentação, 2022.

O resultado para o coeficiente linear de Pearson “ r ”, no que diz respeito à correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e a escolaridade do responsável masculino foi $r = 0,108167$, como este resultado pertence ao intervalo $0,1 \leq r < 0,5$, podemos classificá-la como fraca positiva, concluindo assim que a escolaridade deste responsável não influenciou significativamente nos resultados obtidos nos testes. A seguir realizaremos a análise da correlação entre a escolaridade do responsável feminino e a diferença das notas nos testes.

Quadro 53: Classificação da Correlação de Pearson: Escolaridade responsável feminino

Qual a escolaridade do seu responsável feminino?	Parametrização
Não estudou	1
Fundamental incompleto	2
Fundamental	3
Médio	4
Superior	5

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro a seguir, que expressa a correlação entre a diferença entre as notas dos testes e a escolaridade do responsável feminino.

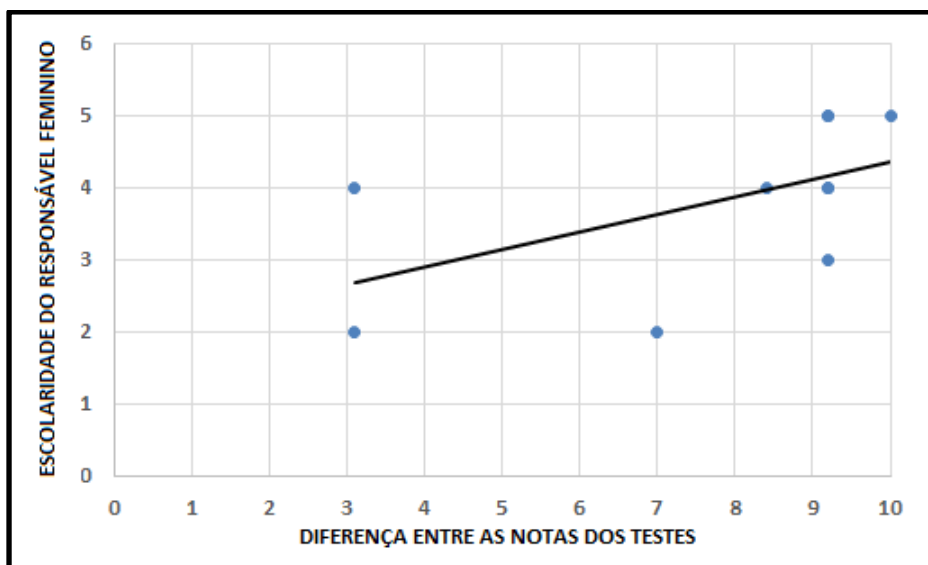
Quadro 54: Correlação entre a diferença das notas e Escolaridade responsável feminino

ESTUDANTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO
E1	0,0	10,0	10,0	5
E2	1,5	4,6	3,1	2
E3	1,5	8,5	7,0	2
E4	0,8	9,2	8,4	4
E5	0,0	9,2	9,2	3
E6	0,0	9,2	9,2	5
E7	0,0	9,2	9,2	5
E8	0,0	9,2	9,2	4
E9	0,8	10,0	9,2	4
E10	0,0	3,1	3,1	4

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir desses dados, elaboramos o gráfico de dispersão a seguir, destacando a relação entre a diferença das notas dos testes e a escolaridade do responsável feminino.

Gráfico 22: Dispersão: Escolaridade responsável feminino



Fonte: Experimentação, 2022.

Quanto ao do coeficiente linear de Pearson “ r ”, gerado para a correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e a escolaridade do responsável feminino encontramos $r = 0,551271$, que pertence ao intervalo $0,5 \leq r < 0,8$. Portanto, podemos classificá-la como Moderada Positiva, concluindo que a escolaridade do responsável feminino teve pouca influência nos resultados obtidos nos testes. Para dar continuidade às análises, vamos realizar correlação entre a frequência do estudo de matemática fora da escola e a diferença das notas nos testes.

Quadro 55: Classificação da Correlação de Pearson: Estudo de Matemática fora da Escola

Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Parametrização
Todo dia	1
Somente nos finais de semana	2
No período de prova	3
Só na véspera de prova	4
Não estudo fora da escola	5

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro seguinte destaca a correlação entre a diferença entre as notas dos testes e o Estudo de Matemática fora da escola.

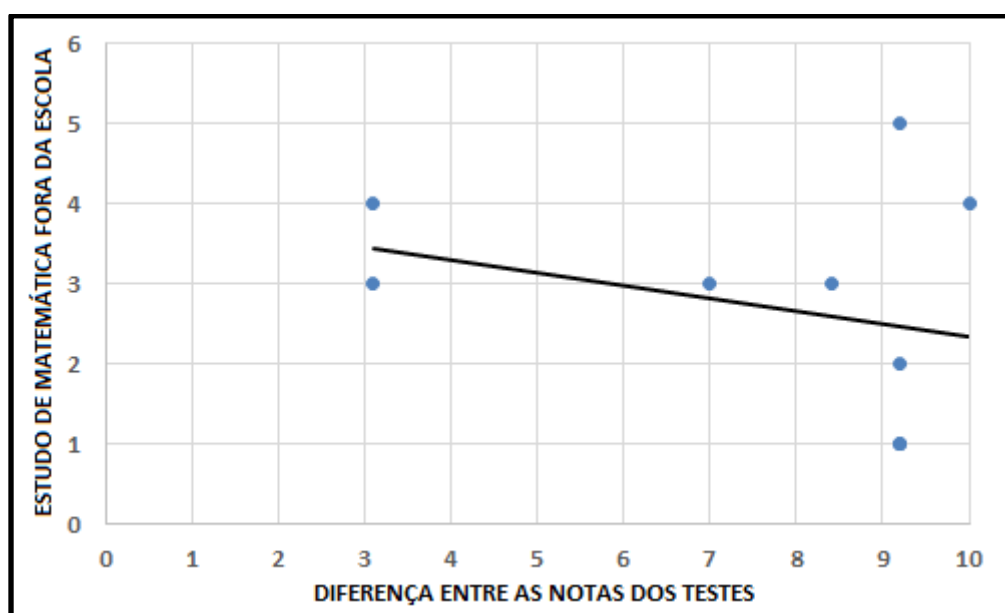
Quadro 56: Correlação entre a diferença das notas e o Estudo de Matemática fora da escola

ESTUDANTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ESTUDO DA MATEMÁTICA FORA DA ESCOLA
E1	0,0	10,0	10,0	4
E2	1,5	4,6	3,1	4
E3	1,5	8,5	7,0	3
E4	0,8	9,2	8,4	3
E5	0,0	9,2	9,2	1
E6	0,0	9,2	9,2	1
E7	0,0	9,2	9,2	1
E8	0,0	9,2	9,2	2
E9	0,8	10,0	9,2	5
E10	0,0	3,1	3,1	3

Fonte: Experimentação, 2022.

A partir desses dados, elaboramos o gráfico de dispersão a seguir, destacando a relação entre a diferença das notas dos testes e o Estudo de Matemática fora da escola.

Gráfico 23: Dispersão: Estudo de Matemática fora da Escola



Fonte: Experimentação, 2022.

O valor do coeficiente linear de Pearson referente ao gráfico de dispersão anterior, que representa a correlação entre a diferença das notas do Pré-teste e o Pós-teste e o gosto pela disciplina matemática, é $r = 0,292404$, que portence ao intervalo $0,1 \leq r < 0,5$. Assim, podemos classificá-la como Fraca Positiva, concluindo que o estudo de Matemática fora da escola não influenciou significativamente nos resultados obtidos nos testes. A seguir realizaremos a análise da correlação entre o Interesse nas aulas de Matemática e a diferença das notas nos testes.

Quadro 57: Classificação da Correlação de Pearson: Interesse nas aulas de Matemática

As aulas de Matemática despertaram o seu interesse em aprender os conteúdos ministrados?	Parametrização
Sim	1
Não	2
Às vezes	3

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro seguinte foi elaborado a partir das informações do quadro anterior, e destaca a correlação entre a diferença entre as notas dos testes e o Interesse nas aulas de Matemática.

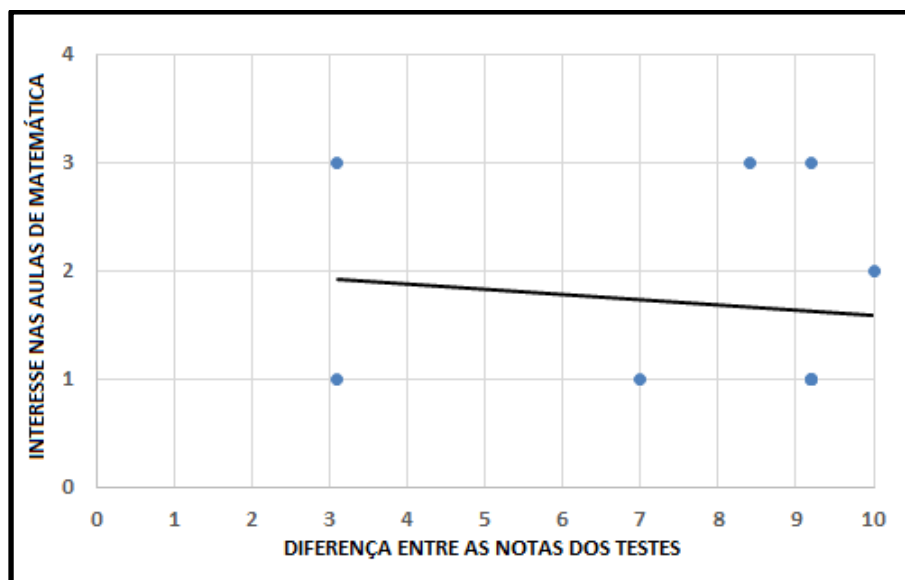
Quadro 58: Correlação entre a diferença das notas e o Interesse nas aulas de Matemática

ESTUDANTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	INTERESSE NAS AULAS DE MATEMÁTICA
E1	0,0	10,0	10,0	2
E2	1,5	4,6	3,1	1
E3	1,5	8,5	7,0	1
E4	0,8	9,2	8,4	3
E5	0,0	9,2	9,2	1
E6	0,0	9,2	9,2	1
E7	0,0	9,2	9,2	1
E8	0,0	9,2	9,2	1
E9	0,8	10,0	9,2	3
E10	0,0	3,1	3,1	3

Fonte: Experimentação, 2022.

O gráfico de dispersão a seguir, destaca a relação entre a diferença das notas dos testes e o Interesse nas aulas de Matemática.

Gráfico 24: Dispersão: Interesse nas aulas de Matemática



Fonte: Experimentação, 2022.

Ao realizarmos esta última correlação, que relaciona diferença das notas do Pré-Teste e Pós- Teste e o Interesse nas aulas de Matemática, calculamos o valor do coeficiente linear de Pearson “ r ” obtendo $r = 0,419524$, que pertence ao intervalo $0,1 \leq r < 0,5$, e dessa forma, podemos classificá-la como Fraca Positiva, concluindo que o Interesse nas aulas de Matemática também teve pouca influência no resultado dos testes realizados.

6.4 Síntese dos Coeficientes de Correlação Linear de Pearson nos Testes

A seguir apresentamos um quadro que sintetiza os resultados obtidos por meio da correlação de Pearson entre os fatores sócio econômicos e os resultados obtidos no Pré-Teste e no Pós-Teste:

Quadro 59: Resultados da correlação linear de Pearson

VARIÁVEL	VALOR DO COEFICIENTE LINEAR DE PEARSON (r)	INTENSIDADE	DIREÇÃO
Gosto pela Matemática	$r = 0,385487$	Fraca Positiva	Positivamente Correlacionadas
Escolaridade responsável masculino	$r = 0,108167$	Fraca Positiva	Positivamente Correlacionadas
Escolaridade responsável feminino	$r = 551271$	Moderada Positiva	Positivamente Correlacionadas
Estudo de Matemática fora da Escola	$r = 0,292404$	Fraca Positiva	Positivamente Correlacionadas
Interesse nas aulas de Matemática	$r = 0,419524$	Fraca Positiva	Positivamente Correlacionadas

Fonte: Experimentação, 2022.

O quadro anterior, que apresenta os resultados obtidos por meio da correlação linear de Pearson, revelou que não foi encontrada nenhuma correlação Forte ou Perfeita, e dessa forma, nenhuma das variáveis sócioeconômicas analisadas, influenciou diretamente no desempenho dos discentes nos testes, o que nos permite concluir que a melhora significativa dos resultados alcançados pelos estudantes no Pós-Teste em relação ao Pré-Teste, está diretamente ligada ao processo de ensino desenvolvido por meio das atividades que compõem a nossa Sequência Didática.

6.5 Teste de Hipóteses

O teste de hipóteses para dados pareados foi realizado com base nas notas alcançadas pelos estudantes no Pré-Teste e Pós-Teste, objetivando verificar se houve conclusões favoráveis, e dessa forma avaliar se o experimento obteve êxito, fundamentando estatisticamente a nossa pesquisa.

A aplicação do teste de hipóteses possibilitou, além da constatação dos resultados alcançados na experimentação, o estabelecimento de parâmetros estatísticos coletados na amostra, que orientou a tomada de decisões.

O teste de hipóteses foi realizado a partir da utilização da equação a seguir:

$$t_{\text{calculado}} = \frac{\bar{X} - \bar{\mu}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Onde:

$\bar{X} \rightarrow$ Média das notas do pré-teste

$\bar{\mu} \rightarrow$ Média das notas do pós-teste

$\sigma \rightarrow$ Desvio padrão da diferença das notas dos testes

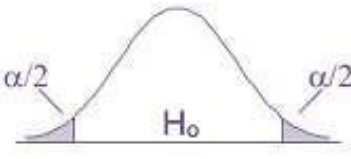
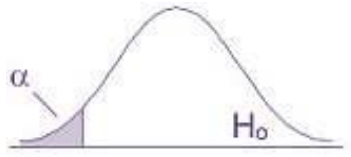
$n \rightarrow$ Número da amostra

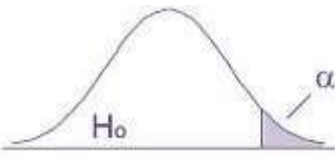
Conforme descrevemos a seguir, o levantamento das hipóteses podem ser:

- 1. Hipótese nula (H_0):** Refere-se a uma afirmação sobre um determinado parâmetro da população, que é presumida como verdadeira, até que seja declarada falsa.
- 2. Hipótese alternativa (H_a):** Corresponde a uma declaração acerca de um parâmetro da população, que será verdadeira se a hipótese nula for falsa.

Conforme o levantamento das hipóteses, há uma forma de representar a aceitação de uma delas e a rejeição da outra, através de uma curva normal, como mostramos a seguir:

Quadro 60: Tipos de Curva Normal

HIPÓTESES	CURVA NORMAL	INTERPRETAÇÃO DA CAUDA
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ (média 1 = média 2)		É um teste bicaudal com regiões de rejeição de H_0 em ambas as caudas
$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ (média 1 $\neq$ média 2)		
$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ (média 1 $\geq$ média 2)		É um teste com cauda a esquerda, que possui região de rejeição de H_0 na cauda da esquerda.
$H_1: \mu_1 < \mu_2$ (média 1 < média 2)		
$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$		

$(\text{média } 1 \leq \text{média } 2)$		É um teste com cauda a direita, que possui região de rejeição de H_0 , na cauda direita.
$H_a: \mu_1 > \mu_2$ $(\text{média } 1 > \text{média } 2)$		

Fonte: Silva (2015, apud BRAYNER JÚNIOR, 2021, p. 261)

6.6 Teste de Hipótese do Experimento

O Teste de Hipótese do Experimento foi realizado, após a análise dos percentuais de acertos, erros e questões em branco registradas pelos estudantes nos testes, objetivando verificar, com embasamento estatístico, se o bom aproveitamento do Pós-Teste é resultante da metodologia de ensino utilizada no experimento, visto que o Teste de Hipótese retrata tanto os conhecimentos prévios dos estudantes quanto os adquiridos durante a realização das atividades da Sequência Didática.

Para realizarmos o Teste de Hipóteses, atribuímos um ponto para cada questão correta, de modo que as notas foram tabuladas de 0 a 13, uma vez que o teste era composto por 13 questões. No quadro a seguir apresentamos as notas obtidas pelos discentes no Pré-Teste e no Pós-Teste, com suas respectivas diferenças:

Quadro 61: Notas conforme os Acertos

ESTUDANTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA
E1	0	13	13
E2	2	6	4
E3	2	11	9
E4	1	12	11
E5	0	12	12
E6	0	11	11
E7	0	12	12
E8	0	12	12
E9	1	13	12
E10	0	4	4

Fonte: Experimentação, 2021

A partir das notas expressas no quadro anterior, realizamos os cálculos da média das notas do pré-teste ($\bar{X}$), média das notas do pós-teste ($\bar{\mu}$), Desvio padrão da diferença das notas dos testes (σ), do número da amostra (n), obtendo:

$$\bar{X} = 0,6; \bar{\mu} = 10,6; \sigma = 3,33; n = 10$$

Em seguida, substituímos cada elemento pelo seu respectivo valor na equação

$$t_{\text{calculado}} = \frac{\bar{X} - \bar{\mu}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \text{ temos:}$$

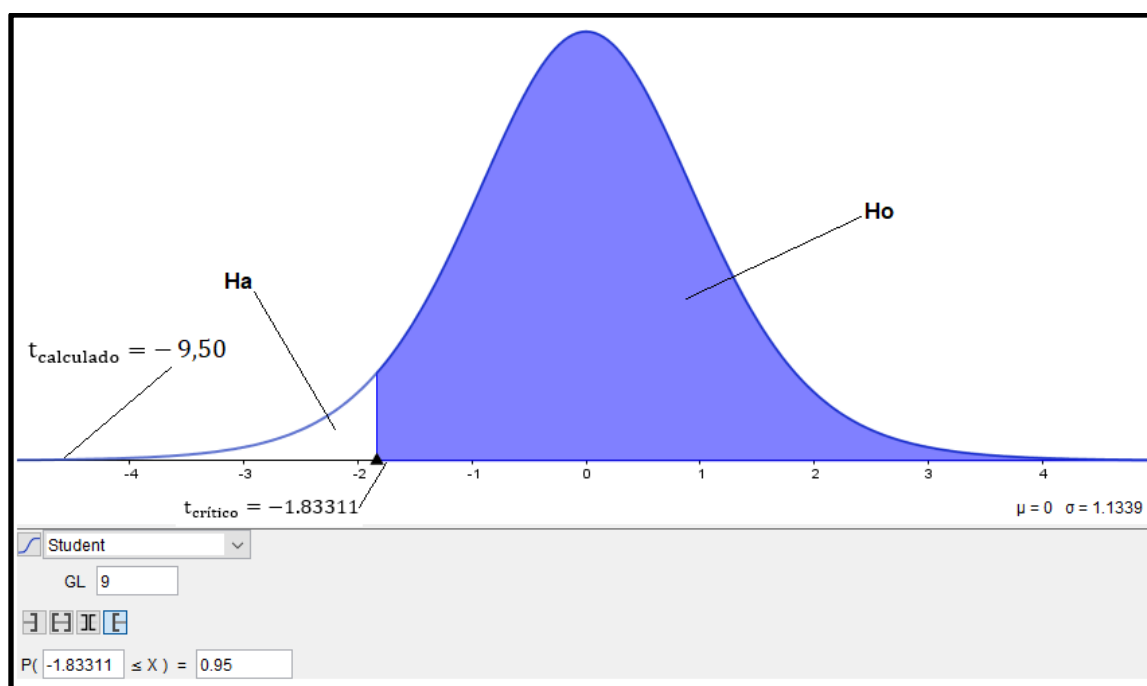
$$t_{\text{calculado}} = \frac{0,6 - 10,6}{\frac{3,33}{\sqrt{10}}} \cong -9,50$$

A seguir, testamos as seguintes hipóteses:

- Hipótese Nula (H_0): $\mu_1 \geq \mu_2$, isto é, a média do Pré-Teste foi maior ou igual à do Pós-Teste;
- Hipótese Alternativa (H_a): $\mu_1 < \mu_2$, isto é, a média do Pré-Teste foi menor que a do Pós-Teste;

Tendo como base o resultado do teste, construímos a curva normal para comparar seus resultados com as hipóteses anteriormente levantadas, conforme o gráfico a seguir:

Gráfico 25: Diagrama t de Student



Fonte: Experimentação, 2022.

No gráfico anterior, o espaço em azul representa a hipótese inicial e como o valor obtido no teste de hipótese foi igual a $-9,50$, implica que este está à esquerda da cauda, isto é, fora do intervalo H_0 . Portanto, devemos rejeitar, com certeza de 95%, a hipótese inicial H_0 , pois $\mu_1 \geq \mu_2$ e aceita-se a hipótese alternativa H_a , comprovando estatisticamente que $\mu_1 < \mu_2$, ou seja, o teste final apresentou estatisticamente melhores resultados que o teste inicial.

6.7 Análise a *posteriori* das atividades propostas

A Sequência Didática foi constituída por 17 atividades envolvendo a definição de Função, Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora, bem como o conceito de domínio, contradomínio e imagem de uma função; a identificação do gráfico de uma Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora, além da aplicação da bijeção de função na comparação de conjuntos infinitos.

A atividade 1 abordou o tema Função, e tinha por objetivo definir função, através da observação de que as relações, que conforme o roteiro dessa atividade, foram identificados por F, cada elemento do conjunto A possui um único elemento correspondente no conjunto B, o que possibilitou o registro da definição de função no quadro de observação.

Devido à falta da experiência com esse tipo de atividade, no início os discentes apresentaram um pouco de dificuldade, no entanto após a intervenção do professor, eles conseguiram preencher os quadros e chegar à definição de função, embora alguns tenham conseguido somente se aproximar da definição que desejávamos alcançar.

A atividade 2 tratava da Imagem de uma função, tendo por objetivo identificá-la, por meio da compreensão e execução do procedimento da atividade, que orientava os estudantes a resolver as questões, realizando a leitura de dois quadros informativos e por meio dos conhecimentos adquiridos conseguiram preencher o quadro de observação com a definição da Imagem de uma função, o que possibilita classificar esse tipo de função. Convém destacar que essa atividade foi resolvida mais rápida, devido a experiência adquirida na atividade anterior.

Na atividade 3, cujo objetivo era conceituar conjunto imagem e contradomínio de uma função. Neste sentido, ao observar o Quadro de Funções 1, resolver as

questões e ler atenciosamente os dois quadros informativos, o aluno conseguiu compreender e construir o conceito de conjunto imagem e do contradomínio de uma função.

A atividade 4, tinha como objetivo conceituar o conjunto domínio de uma função, e seu processo de resolução era semelhante ao da atividade anterior, o que somado à experiência adquirida pelos estudantes na sessão anterior, fez com que eles resolvessem rapidamente essa atividade, alcançando o seu objetivo.

A atividade 5 versava sobre Função Injetora, e tinha como objetivo definir Função Injetora. Os discentes demonstraram muito interesse e empenho ao resolver essa atividade, concluindo a sua resolução com extrema facilidade, devido a experiência adquirida nas atividades desenvolvidas na primeira seção de ensino.

Tudo isso facilitou a percepção das regularidades existentes e a construção da definição de Função Injetora.

A atividade 6 que tinha por objetivo definir Função Sobrejetora, apresentava um procedimento semelhante ao utilizado na anterior, o que facilitou a identificação da regularidade necessária para a elaboração das observações e conclusão, o que facilitou bastante a construção da definição da Função Sobrejetora.

Na atividade 7, cujo objetivo era definir Função Bijetora, os estudantes precisaram seguir um roteiro semelhante aos utilizados nas atividades anteriores, o que facilitou o seu desenvolvimento. O preenchimento do quadro e a elaboração da observação e da conclusão, transcorreram de forma bem rápida e os estudantes, embasados nas atividades anteriores, conseguiram completá-la com sucesso.

Os alunos conseguiram notar que existiam funções que eram injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, mas só conseguiram chegar a definição de Função Bijetora, após refletirem na pergunta do professor: qual é o significado do prefixo BI? Tudo isso fez com que a maioria dos discentes conseguissem elaborar conclusões bem próximas daquelas que classificamos como válidas sobre a definição de Função Bijetora.

Na atividade 8, cujo objetivo era identificar o Gráfico de uma Função Injetora, os estudantes utilizaram uma régua para traçar, em cada gráfico, retas paralelas ao eixo, identificando por I os gráficos que haviam sido “cortados” (intersectados) uma única vez pela mesma reta e, por NI aqueles que foram cortados mais de uma vez pela mesma reta. A partir de suas observações, preencheram um quadro e escreveram suas observações e conclusão, indicando as características que nos

permite identificar o gráfico de uma Função Injetora. No início os estudantes tiveram muita dificuldade para desenvolver essa atividade, pois não sabiam trabalhar com gráfico, e pergutaram: “o que é reta paralela?”. O professor esclareceu a dúvida e explicou o procedimento, de modo que, em seguida, todos os alunos com muito interesse conseguiram concluir a atividade.

A atividade 9, que tinha por objetivo identificar o gráfico de uma Função Sobrejetora, e apresentava um procedimento semelhante ao utilizado na atividade anterior, o que facilitou a efetivação da sua resolução, devido a experiência adquirida com a resolução da atividade 8.

A atividade 10, que tinha por objetivo identificar o gráfico de uma Função Bijetora e também apresentava um procedimento semelhante ao das atividades anteriores, foi executada com facilidade pelos estudantes, devido a experiência adquirida por meio das atividades anteriores.

Na atividade 11, cujo objetivo era descobrir a relação entre a cardinalidade do domínio e do contradomínio de uma função bijetora, os os estudantes não apresentaram dificuldades no seu desenvolvimento, efetivando rapidamente sua resolução, pois ela apresentava um procedimento análogo às atividades anteriores. Mais uma vez atribuímos o sucesso dessa atividade, à experiência que os alunos adquiriram nas tarefas anteriores.

A atividade 12 era constituída pelo problema 1, e tinha por objetivo comparar a cardinalidade ou quantidade de elementos dos conjuntos dos números naturais e dos números naturais pares, sendo trabalhado por meio da Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

Depois que todos receberam uma cópia do do problema, que foi impresso em folha de papel sulfite, sua leitura foi realizada em grupo e, em seguida, o professor informou que os alunos que teriam 20 (vinte) minutos para resolver o problema, no entanto a atividade foi concluída em apenas 8 (oito) minutos.

A maioria dos estudantes apresentaram uma solução inválida, pois foram conduzidos ao erro pela ideia de que o todo é sempre maior que a sua parte.

A atividade 13 era constituída pelo Problema 2, que tinha por objetivo comparar a quantidade de elementos dos conjuntos dos números naturais e o dos números inteiros, apresentava a mesma metodologia e um processo de resolução semelhante ao utilizado na atividade anterior, o que facilitou a sua resolução. O problema foi resolvido em 5 (cinco) minutos, e maioria dos alunos apresentaram uma resolução

incorreta para o problema, fazendo uso da ideia de que “o todo é sempre maior que a parte”.

Na atividade 14, que era formada pelo Problema 3, objetivando comparar a cardinalidade dos conjuntos dos números naturais e dos números racionais, descobrindo que ambos possuem a mesma quantidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade. Por apresentar um processo de resolução semelhante ao utilizado nas atividades 12 e 13, o problema foi resolvido muito rápido, no entanto nenhum grupo conseguiu chegar a uma solução válida para o problema, porque ele apresenta uma resolução muito complexa, além da falta de habilidade de realizar demonstrações.

A atividade 15, que tinha por objetivo descobrir uma relação entre a cardinalidade dos intervalos de números reais, foi trabalhada por meio de Atividades Experimentais. Seu processo de resolução orientava que os discentes deveriam observar o quadro de de relações de intervalos reais, indicando por B aquelas que representavam uma função bijetora, e por NB, as que não representavam. Em seguida, após preencher um quadro com as informações obtidas, escrever suas observações e conclusão.

Os discentes não tiveram dificuldades no desenvolvimento dessa atividade e todos conseguiram alcançar o objetivo da mesma, devido seu processo de resolução e as experiências adquiridas na realização das atividades anteriores.

A atividade 16, que tinha por objetivo descobrir a relação entre a cardinalidade de um intervalo de números reais e a cardinalidade do conjunto dos números reais, apresentava um procedimento semelhante ao utilizado nas atividades anteriores, dessa forma os discentes desenvolveram essa atividade com muita facilidade, alcançando o objetivo da mesma.

Na atividade 17, que tinha como objetivo compreender que existe infinito maior que o outro, a metodologia utilizada foi a Resolução de Problema como Ponto de partida, com um processo de resolução semelhante ao que foi utilizado nas atividades 12 a 14. Os estudantes conseguiram concluí-la em aproximadamente 10 minutos, e 40% dos grupos apresentaram soluções válidas para o problema. Acreditamos que as experiências adquiridas por meio de discussões e reflexões de problemas anteriores, possibilitaram esse percentual de soluções válidas.

A seguir realizaremos o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades que compõem as sessões de ensino que propomos na sequência didática na fase da experimentação.

6.8 Confronto entre as Análises a Priori e a Posteriori das Atividades

Com o objetivo de validar nossa Sequência Didática, apresentaremos a seguir um quadro comparativo da análise *a priori*, ou seja, o que esperávamos com as nossas atividades de ensino e da análise *a posteriori*, isto é, o que aconteceu durante essas atividades aplicadas durante a experimentação. Destacamos que classificamos como validação “Positiva”, aquela em que ocorreu o que esperávamos, e como “Negativa”, se não ocorreu conforme havíamos previsto.

Quadro 62: Confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades

ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	Nº	ANÁLISE A PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
	01	Nossa hipótese é de que os discentes terão pouca dificuldade no desenvolvimento desta atividade, mesmo considerando a falta de experiência da maioria dos alunos com esse tipo de tarefa, que envolve a observação das características de relações entre conjuntos, e com base nas informações obtidas, preencher um quadro, cuja análise possibilita deduzir a definição de função, mas a maioria deles não apresentará a definição correta de função.	Inicialmente os discentes tiveram um pouco de dificuldade, devido a falta de familiaridade com esse tipo de atividade, mas posteriormente eles conseguiram concluir a atividade, com o preenchimento do quadro de observação, registrando nele a definição de Função, que em sua maioria foi classificada como válida, embora alguns tenham conseguido somente se aproximar da definição esperada.	Positiva
		Nossa hipótese é que a princípio os discentes apresentarão um pouco de	No início os discentes sentiram um pouco de dificuldade, pela falta de	

	02	dificuldade, por não estarem familiarizado com o diagrama de setas (ou diagrama de Venn), mas com a experiência adquirida após a formalização do conceito de função, da atividade 01, a orientação do professor e a discussão em grupo, eles terão um pouco mais de facilidade para executar essa tarefa e desenvolver a habilidade de identificar a imagem de uma função.	experiência com o diagrama de setas, mas logo conseguiram superá-la, ao perceberem sua semelhança com a atividade anterior, conseguiram identificar a imagem de uma função. Acreditamos que o sucesso dessa atividade está relacionado a orientação do professor, a discussão em grupo e a experiência adquirida na resolução da atividade anterior.	Positiva
--	-----------	---	---	----------

	03	Nossa hipótese é que os discentes irão executar essa atividade com pouca dificuldade e com êxito, por estarem familiarizados com esse modelo de tarefa. Acreditamos que as orientações apresentadas nos dois quadros informativos, somados à intervenção "indireta" do professor, a discussão em grupo e as experiências adquiridas nas atividades anteriores promovam uma aprendizagem eficaz.	Os discentes não demonstraram dificuldade na realização dessa atividade, e conseguiram resolvê-la rapidamente, alcançando o objetivo de construir a definição do conjunto imagem e contradomínio de uma função. Acreditamos que esse sucesso deve-se à experiência adquirida pelos alunos por meio da resolução das atividades anteriores, que adotam a mesma metodologia utilizada nesta.	Positiva
	04	Os alunos não terão dificuldades para efetuar a resolução da Atividade 04, pois seu processo de resolução é semelhante ao utilizado nas atividades anteriores, além das experiências obtidas com as outras atividades. Acreditamos que a resolução desta atividade, pautada na observação do quadro informativo e na discussão em grupo, os discentes consigam, com	Os alunos resolveram a Atividade 04 com muita facilidade, efetivando sua resolução em um tempo menor em relação às atividades anteriores. Destacamos que todos os discentes apresentaram corretamente a definição de domínio de uma função. Atribuímos esse sucesso a semelhança de resolução entre essa e as atividades anteriores, bem como as experiências adquiridas	Positiva

		um pouco de dificuldades, construir o conceito de conjunto domínio de uma função.	por meio da resolução destas.	
	05	Os estudantes não apresentarão dificuldades no desenvolvimento desta atividade, devido a experiência obtida nas atividades anteriores, mas se surgirem dúvidas, estas poderão ser sanadas por meio de ponderações que gerem reflexão e discussão em grupo, o que facilitará a execução da atividade.	Os alunos compreenderam bem o procedimento e não tiveram dificuldades na resolução da atividade. Acreditamos que tudo é resultado da experiência adquirida nas atividades desenvolvidas na primeira seção de ensino.	Positiva
	06	A nossa hipótese é que os alunos apresentarão pouca dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução da atividade anterior. Acreditamos que os discentes terão certa dificuldade ao escrever a conclusão dessa atividade, o que pode ser resolvido mediante ponderações do professor que pode solicitar aos alunos para comparar a	Os estudantes não apresentaram dificuldades na execução dessa atividade, pois ela possuía um procedimento semelhante ao utilizado na anterior, o que facilitou a identificação da regularidade necessária para a elaboração das observações e conclusão, possibilitando aos estudantes, identificar as características de uma Função Sobrejetora, construindo assim sua definição. Destacamos	Positiva

		imagem ($Im(f)$) e o contradomínio ($C(f)$) de cada função. Nesta etapa, a nossa hipótese é que a conclusão dos discentes se aproximem ao máximo da definição de Função Sobrejetora.	que os discentes se aproximaram bastante da definição de uma Função Sobrejetora.	
	07	A nossa hipótese é que os alunos não terão dificuldade para desenvolver essa atividade, considerando que seu processo de resolução é semelhante ao da atividade anterior e as experiências adquiridas. Acreditamos que mesmo percebendo que existem funções que são simultaneamente injetora e sobrejetora, os discentes sentirão dificuldade em definir esse tipo de função como bijetora, mas essa dificuldade será superada por meio de ponderações do professor, fazendo-os refletir no significado do prefixo BI.	Os estudantes desenvolveram a atividade com facilidade, efetivando sua conclusão em tempo hábil, comparado com o tempo de resolução da atividade anterior. Após discussão em grupo e auxílio do professor, por meio de perguntas que promoveram reflexão, a maioria dos estudantes conseguiram elaborar conclusões bem próximas daquelas que classificamos como válidas sobre a definição de Função Bijetora.	Positiva
		A princípio, os estudantes apresentarão dificuldades, por não estarem familiarizados com esse	No início os alunos tiveram muita dificuldade, pois não sabiam trabalhar com gráfico, e alguns não	

	08	tipo de atividade, mas após a intervenção e ponderações do professor, explicando o que são retas paralelas destacando os pontos em que essa reta toca o gráfico, acreditamos que os discentes conseguirão preencher os quadros de observação e conclusão, apresentando as característica do gráfico de uma Função Injetora.	sabiam o que são retas paralelas. Após a explicação do professor, a maioria dos estudantes conseguiram identificar as caracterísiticas do gráfico de uma Função Injetora	Positiva
	09	A nossa hipótese é que os estudantes realizarão essa atividade com mais facilidade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução da atividade anterior. Acreditamos que após as ponderações do professor e a discussão em grupo, os alunos identificarão as características do gráfico de função sobrejetora.	Os estudantes resolveram essa atividade com facilidade, em decorrência da experiência obtida na resolução da atividade anterior que possuía um procedimento semelhante ao utilizado nesta	Positiva
	10	A nossa hipótese é que os estudantes realizarão essa atividade com facilidade, considerando que sua execução é semelhante ao processo de resolução das	Os alunos conseguiram executar essa atividade com facilidade, uma vez que ela seguia o mesmo procedimento das duas atividades anteriores.	Positiva

		duas atividades anteriores, e notarão que B está relacionada a função bijetora, reconhecendo as características do gráfico dessa função.		
	11	A nossa hipótese é que os alunos não apresentarão dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, devido às experiências adquiridas nas atividades anteriores e a semelhança do processo de resolução dessa atividade com a anterior, chegando facilmente ao objetivo de perceber que em todas as funções bijetoras a quantidade de elementos do domínio e do contradomínio é igual.	Os estudantes não apresentaram dificuldades no desenvolvimento dessa atividade, pois ela apresentava um procedimento análogo às atividades anteriores. Mais uma vez atribuímos o sucesso dessa atividade, à experiência que os alunos adquiriram nas tarefas anteriores.	Positiva
	12	Acreditamos que os alunos serão conduzidos ao erro por utilizarem o senso comum de que o todo é sempre maior do que a parte. Neste sentido, a maioria ou todos eles afirmarão que como o conjunto dos números naturais pares é uma parte dos números naturais,	A maioria dos estudantes apresentaram uma solução inválida para o problema, pois foram induzidos ao erro pela ideia de que o todo é sempre maior que a sua parte.	Positiva

		então o conjunto dos números naturais possui mais elementos		
	13	Acreditamos que algumas duplas apresentarão a solução correta para esse problema, devido a experiência que os discentes adquiriram por meio da apresentação da solução do problema 1, que possui semelhança com esse problema, e das questões envolvendo a sistematização do assunto.	A maioria dos estudantes apresentaram uma solução inválida, pois foram conduzidos ao erro pela ideia de que o todo é sempre maior que a sua parte. No entanto, 20% deles, utilizaram o conceito de bijeção de função concluindo que a quantidade de elementos dos conjuntos dos números inteiros é igual a dos números naturais.	Positiva
	14	A nossa hipótese é que a maioria dos discentes não apresentará uma solução correta para esse problema, devido a complexidade de sua resolução. Mesmo considerando a experiência adquiridas com a resolução dos e a sua semelhança com os problemas anteriores.	A resolução da atividade foi efetivada muito rápida, pois seu processo de resolução era semelhante ao utilizado nas atividades 12 e 13, mas nenhum grupo conseguiu chegar a uma solução válida para o problema, porque ele apresenta uma resolução muito complexa.	Positiva
		Nossa hipótese é que a princípio os estudantes apresentarão um pouco de dificuldades no desenvolvimento desta	Os discentes tiveram um pouco de dificuldade no início do desenvolvimento dessa atividade, mas as ponderações do professor,	

	15	atividade, que poderão ser sanadas por meio das ponderações do professor, com questionamentos que promovam reflexão e discussão entre os grupos, possibilitando que a maioria dos grupos concluam que todos os intervalos reais possuem a mesma cardinalidade, ou seja, a mesma quantidade de elementos.	promovendo reflexão e discussão em grupo, acerca do conceito de Função Bijetora e a relação entre a quantidade de elementos do domínio e do contradomínio dessa função, que somadas às experiências adquiridas na realização das atividades anteriores, cujo processo de resolução eram semelhantes ao utilizado nessa atividade, fizeram com que todos os grupos conseguiram alcançar o objetivo da mesma	Positiva
	16	A nossa hipótese é que os alunos não apresentarão dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, considerando a experiência adquirida por eles na resolução das atividades anteriores, que possuem um processo de execução semelhante a esta. Acreditamos que os discentes perceberão que existe uma função bijetora que relaciona o intervalo de números reais $[0, 1]$ e o	Os discentes responderam essa atividade com muita facilidade. Atribuímos esse sucesso as experiências adquiridas na resolução das atividades anteriores que apresentavam um procedimento de resolução semelhante ao utilizado nessa atividade. Dessa forma, os alunos conseguiram aplicar a bijeção de conjuntos para concluir que todo intervalo real possui a mesma	Positiva

		conjunto dos números reais, chegando a conclusão de que eles possuem a mesma cardinalidade, ou seja, a mesma quantidade de elementos.	cardinalidade do conjunto dos números reais.	
	17	Acreditamos que devido a experiência adquirida na resolução de problemas anteriores, envolvendo a comparação da cardianalidade de conjuntos numéricos, alguns estudantes conseguirão resolver corretamente o problema. concluindo que existe infinito maior que o outro.	Uma quantidade considerável de estudantes (40%) apresentaram uma solução válida para o problema 4. Acreditamos que as experiências adquiridas na resolução de problemas anteriores, que geraram as discussões e as reflexões, possibilitaram esse percentual de soluções válidas.	Positiva

Fonte: Experimentação, 2022.

Com base nas informações apresentadas no quadro anterior, podemos observar que, comparando as análises a priori e a posteriori, verificamos que ocorreu o que havíamos previsto em nossa experimentação, resultando consequente em validações positivas. A seguir, apresentamos as considerações finais de nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino da comparação de conjuntos infinitos por meio de atividades experimentais sobre a participação nas aulas, à construção de conceito e o desempenho dos alunos na resolução de questões que abordam o assunto e sua aplicação. Buscando alcançar esse objetivo adotamos a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Dessa forma, nosso trabalho foi organizado em quatro etapas: análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Em nossas análises prévias sobre o ensino de Função realizamos um levantamento dos aspectos históricos, matemáticos e curriculares, além de uma revisão literária, consulta aos estudantes sobre o ensino e aprendizagem do tema, e um estudo das tendências da Educação Matemática, onde destacamos o Ensino por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas como Ponto de Partida.

Os aspectos históricos das Funções evidenciaram a importância da História da Matemática como metodologia de ensino, os aspectos curriculares sinalizam para a necessidade da utilização de novas metodologias que tenham o aluno como protagonista na construção do seu conhecimento, bem como de modelos que lhe permita interpretar e investigar em Matemática e, dessa forma, continuar aprendendo.

A revisão literária possibilitou a construção de um panorama que facilitou a compreensão do assunto, promovendo o norteamento da pesquisa. E por fim, a consulta realizada junto aos estudantes sobre o ensino e aprendizagem do tema, revelou que os discentes têm muita dificuldade em aprender os conteúdos que envolvem Função, sobretudo sua representação gráfica, porque conforme a pesquisa, a metodologia de ensino de matemática mais utilizado é a tradicional, na qual o professor apresenta conceito, exemplos e, em seguida, propõe uma lista de exercícios.

Na segunda etapa da nossa pesquisa, concepção e análise *a priori*, apresentamos as atividades que integraram a nossa Sequência Didática e, a partir das análises prévias de cada uma delas, levantamos hipóteses do que pudesse ocorrer durante a aplicação das atividades, destacando as dificuldades que poderiam surgir e o modo como cada uma delas poderia ser sanada, e durante a aplicação da Sequência Didática foi constatado que essas hipóteses estavam corretas.

Na etapa da experimentação, descrevemos como ocorreu a aplicação da nossa Sequência Didática, constituída por 17 (dezesete) atividades, que foram desenvolvidas em seis encontros, denominados sessão de ensino. A priori, realizamos o diagnóstico inicial, através da aplicação do questionário socioeconômico, que embasou a construção do perfil desses estudantes, e do Pré-Teste, composto por treze questões sobre Função com ênfase na Função Bijetora e sua aplicação na comparação da cardinalidade ou quantidade de elementos de conjuntos infinitos. Destacamos que Nenhum dos estudantes conseguiu efetuar a resolução de todas as questões do Pré-Teste, o que evidenciou uma acentuada dificuldade em relação à temática do nosso trabalho.

No último encontro apresentamos o vídeo Os Infinitos de Cantor e, em seguida, aplicamos o Pós-Teste, com o objetivo de verificar os avanços alcançados pelos discentes na aprendizagem dos conteúdos abordados em nossa pesquisa.

Na última etapa da pesquisa, a análise *a posteriori* e validação, realizamos a análise estatística dos resultados do experimento, confrontando as análises *a priori* e *a posteriori* de cada atividade que compõe a Sequência Didática, bem como os o desempenho dos estudantes no Pré-Teste e Pós-Teste, o que possibilitou verificar se houve uma melhoria significativa na aprendizagem dos alunos e se esse sucesso deve-se a metodologia utilizada no desenvolvimento dessa Sequência Didática.

Nesse sentido, as correlações presentes na seção da análise *a posteriori*, indicaram que os fatores socioeconômicos não influenciaram nos resultados do pós-teste, visto que o gosto pela matemática, a escolaridade dos responsáveis, a frequência de estudos de matemática fora da escola e o interesse nas aulas da referida disciplina não apontaram nenhuma correlação perfeita ou forte que influenciasse significativamente nos resultados alcançados pelos participantes da pesquisa. Assim, podemos considerar que a metodologia adotada para nosso trabalho contribuiu de forma significativa para o sucesso da experimentação.

O Teste de Hipótese, mostrou que as notas do Pós-teste apresentaram melhoras bem significativas em relação as notas do Pré-teste, o que nos permite atribuir esse bom desempenho à metodologia de ensino adotada, e que nossa sequência didática foi bem-sucedida, em relação ao conteúdo estudado.

Diante de tudo o que foi exposto anteriormente, podemos afirmar que o objetivo da nossa pesquisa foi alcançado, uma vez que a nossa sequência didática obteve

êxito em proporcionar a participação e o avanço na aprendizagem dos discentes sobre Bijeção de Função e sua aplicação na comparação de conjuntos infinitos.

O sucesso alcançado por meio da aplicação da noosa Sequência Didática evidencia que ela pode auxiliar a prática docente, sendo utilizada para o ensino da comparação de conjuntos infinitos, bem como outros conhecimentos relacionados a este, tais como função com ênfase na função bijetora. Dessa forma, o conjunto de atividades aqui apresentadas constitui o Produto Educacional intitulado: O Ensino da Comparação de Conjuntos Infinitos por meio de Atividades Experimentais, que pode auxiliar na prática de ensino de Matemática no Ensino Básico.

Esperamos que nossa investigação possa contribuir com trabalhos de outros pesquisadores da área de Educação Matemática, além de ser uma ferramenta que auxilie na prática docente de Matemática, contribuindo significativamente com o processo de ensino e aprendizagem de Função com ênfase na Bijeção de Função e sua aplicação na comparação de conjuntos infinitos, promovendo o protagonismo do estudante na construção do seu conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Conjuntos**. 19ª ed. Nobel: São Paulo, 1980.

ALMOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd In REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V 3, p.62-77, UFSC: 2008

ARTIGUE, Michelle. Ingénierie Didactique. In: **Recherches en didactique des mathématiques**. Vol. 9/3, 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage editions, 1988.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ÁVILA, Geraldo. **Introdução às funções e derivadas**. São Paulo: Atual, 1994.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 16. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BORGES, Bruno Andrade. **O infinito na matemática**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 89 f. Universidade de São Paulo - USP, São Carlos, 2015.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Versão final Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e B. Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996**.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais 2** ed Rio de Janeiro: DP&A, 2000a

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares . Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

BRAYNER JÚNIOR, Carlos Alberto Martinho. **Ensino de Equações Trigonométricas por Atividades Experimentais**. 2021, 304f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática**. 1991. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo.

BUENO, Rafael Winicius da Silva; VIALI, Lori. A construção histórica do conceito de função. In **Educação Matemática em Revista** - EMR-RS - Ano 10 - 2009 - n. 10, v. 1 - p. 37-47.

CALCAGNI, Fabiana Gouveia. **A tarefa de casa como ferramenta capaz de colaborar com a autorregulação do aluno**. Universidade Estadual de Londrina: Londrina, 2012.

CÁLCIZ, Alejandra Baro. Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. **Innovación y Experiencias Educativas**. n. 40, p.1-11, março de 2011, Granada.

CARVALHO, Maria Eulina Pessoa de; NASCIMENTO, Conceição dos S; PAIVA, Clotilde de. O lugar do dever de casa na sala de aula. **Rev. Olhar de Professor**, ano/vol. 9, número 002. 2006. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa – Brasil. pp. 341 – 357.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temático: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM-PA, 2017.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho. **O ensino de análise combinatoria no ensino médio por atividades**. 2019. 352 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

CORREIA, João Nazareno Pantoja. **O Ensino de Poliedros por Atividades**. 2019. 346 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. n 2. Brasília. 1989. P. 15-19.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas-SP: Papirus, 2003.

DANTAS, Iago de Andrade. **Cardinalidade dos conjuntos infinitos: Uma abordagem para o ensino básico**. 2021, 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2021.

DOURADO, Thiago Augusto S. Uma brevíssima história dos infinitos infinitos. In: **Gazeta de matemática**. Ano 76. n. 177, p. 40-47. Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2015.

ECHEVERRÍA, Maria del Puy Pérez; POZO, Juan Ignacio. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender in: POZO Juan Ignacio (org.), **A Solução de Problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.). **Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados**. Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática, 1996. p. 25-47.

ESPÍRITO SANTO, Andressa do. **Conjuntos infinitos e funções bijetivas: uma abordagem na educação básica**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 63 f. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, PR, 2019.

FERNANDES, Cláudia de Oliveira; FREITAS, Luis Carlos de. **Indagações sobre currículo: currículo e avaliação**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

FONSECA, Regina Célia Veiga da. **Metodologia do Trabalho Científico**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2007.

FONSECA, Tânica Maria de Moura. **Ensinar-Aprender: Pensando a prática pedagógica**. Universidade Estadual de Ponta Grossa/SEDUC-PR: Ponta Grossa-PR, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1782-6.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2019.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura).

GONÇALVES, Mirian Buss; GONÇALVES, Daniel. **Elementos da Análise**. - 2 ed. - Florianópolis: UFSC, 2012.

GUIMARÃES, Rita Santos. **Atividades para aprendizagem do conceito matemático de função**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). 201 f. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2010.

IEZZI, Gelson. [et al]. **Matemática ciências e aplicações: Ensino Médio, vol 1**, 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções** - 9. ed. - São Paulo: Atual, 2013.

IFRAH, Georges. **Os números: história de uma grande invenção**. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra; revisão técnica Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. - 11 ed. - São Paulo: Globo, 2005.

KIELING, Gilmar Alexandre. **Uma proposta pedagógica para o ensino de funções através de materiais manipuláveis**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 188 f. Universidade Estadual de Maringá - UEM, Maringá, PR, 2019.

LEONARDO, Fábio Martins de (Org.). **Conexões com a Matemática**. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 14ª Edição. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, Elon Lages. et al. **A matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. vol 1. 8ª ed. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**: volume 1: funções de uma variável. 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Revista Abakós**. Belo Horizonte (MG): Ed. PUC Minas, 2013.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática**: Uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática**: Uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197-208.

MACHADO, Ilma Ferreira; SILVA, Rose Márcia da; SOUZA, Maria de Lourdes Jorge de Souza. Avaliação de aprendizagem nos contornos do currículo integrado no ensino médio. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 36, n. 99, p. 207-221, maio-ago., 2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v36n99/1678-7110-ccedes-36-99-00207.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2019.

MACIEL, Paulo Roberto Castor. **A construção do conceito de função através da história da matemática**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). 107 fls - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca- CEFET/RJ. Rio de Janeiro, 2011.

MAGARINUS, Renata. **Uma proposta para o ensino de função através da utilização de objetos de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 99 fls. Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Santa Maria, RS, 2013.

MELLO, Guiomar Namó de. **Currículo da Educação Básica no Brasil: Concepções e políticas**. São Paulo: USP, 2014.

MELO, Alex Gonçalves de. **Modelagem matemática no estudo das funções afim quadrática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). 67 f. Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Maceió, 2017.

MIRANDA, Ana Sofia Macedo Szczepaniak. **Resolução de problemas como metodologia de ensino**: uma análise das repercussões de uma formação continuada. 2015, 116. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). PUCRS, Fac. de Física, Porto Alegre, 2015.

NERI, Cassio Moreira; CABRAL, Marco Aurélio Palumbo. **Curso de Análise Real**. 2. ed. UFRJ: Rio de Janeiro, 2011.

ONUICH, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In.: **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org). São Paulo: Ed. UNESP, 1999, p. 199-220.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. vol. 1. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

PERES, Elisandra de Souza. **Currículo e emancipação**: uma articulação possível? Tese (Doutorado em Educação). 380 f. Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC: Florianópolis, SC, 2016.

PINTO, Carolina Freire. **Dissertações brasileiras sobre o ensino de função afim, a partir da implementação de sequências didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012**: questões para formação de professores e para pesquisa.. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). 79f . UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2014.

RIBEIRO-SANTOS, Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho. **Probabilidade e Estatística**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A.,2015.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. A engenharia didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos. In: MARCONDES, Maria Inês; OLIVEIRA, Ivanilde A.; TEIXEIRA, Elizabeth. (Org.). **Abordagens teóricas e construções metodológicas na pesquisa em educação**. Belém: EDUEPA, 2011, p. 145-160.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Isaac Dayan Bastos da. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. **Traços**. Belém, v. 6, n.11, p. 123-140, 2003.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades**. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I).

SÁ, Pedro Franco de. O Que é Resolução de Problemas, afinal?. **Revista Trilhas (UNAMA)** , Belém, v. 5, n.2, p. 11-17, 2004.

SÁ, Pedro Franco. A resolução de problemas como ponto de partida nas aulas de matemática. **Revista Trilhas (UNAMA)** , v. 11, p. 7-24, 2009.

SANTANA, Grace Alioska. **Infinitos, Contínuo e Escolha**: Teoria dos Conjuntos. Orientador: Prof. Dr. Daniel Vendruscolo. 2010. 40 f. Monografia (Graduação em Matemática). Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, São Carlos, SP, 2010.

SANTOS, Cristiane do Socorro Ferreira dos. **Ensino das funções afim e quadrática por atividades**. 2013. 312 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2013.

SILVA, Benino Sebastião da. **A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções**. 2017, 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

SILVA, Diego Cunha da. **O ensino de Função Afim por Atividades**: experiência em uma escola pública do Estado do Pará. 2018, 212 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

TOURÃO, Benedito Junior Corrêa. **O Ensino de Prismas por Atividades**. 2020. 215 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

VOSGERAU, Dilmeire Sant'Anna Ramos; ROMANOWSKI, Joana Paulin. Estudos de revisão: implicações conceituais e metodológicas. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 14, n. 41, p. 165-189, jan./abr. 2014.

ZUFFI, Edna maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Hipátia**. (IFSP). v. 1, n. 1, p. 1-10, Campos do Jordão, SP, 2016.

APÊNDICE

APÊNDICE A - PERFIL DISCENTE: QUESTIONÁRIO SOCIOEDUCACIONAL



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PERFIL DISCENTE: QUESTIONÁRIO SOCIOEDUCACIONAL

Prezado(a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

- 1- **Idade:** _____ anos 2- **Gênero:** ☐ Masculino ☐ Feminino 3- **Série/Ano** _____
- 4- **Tipo de escola que estuda?** ☐ Municipal ☐ Estadual ☐ Conveniada ☐ Outra
- 5- **Você já ficou em dependência?** ☐ Não ☐ Sim. Em quais disciplinas? _____
- 6- **Você gosta de Matemática?** ☐ Não gosto ☐ Suporto ☐ Gosto um pouco ☐ Adoro
- 7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**
☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou
- 8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**
☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou
- 9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**
☐ Professor particular ☐ Família ☐ Ninguém ☐ Outros. Quem? _____
- 10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**
☐ Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐ No período de prova ☐ Só na véspera da prova
☐ Não estudo fora da escola.
- 11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?**
☐ Sempre ☐ Quase sempre ☐ Às vezes ☐ Poucas vezes ☐ Nunca
- 12- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**
☐ sim ☐ não ☐ às vezes
- 13- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?** ☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes
- 14- **Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?**
☐ Contente ☐ Tranquilo ☐ com Medo ☐ Preocupado ☐ com Raiva ☐ com Calafrios
- 15- **Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**
☐ Provas/simulado ☐ Testes semanais ☐ Seminários ☐ Pesquisas ☐ Projetos
☐ Outros. Quais? _____
- 16- **Você já estudou Função Bijetora?** ☐ Sim ☐ Não **Quando?** _____

17- Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo Função Bijetora?

☐ Sim ☐ Não

18- Quando você estudou Função Bijetora a maioria das aulas:

- ☐ Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
☐ Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
☐ Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
☐ Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
☐ Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

19- Para praticar o conteúdo de Função Bijetora:

- ☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
☐ Apresentar jogos envolvendo o assunto;
☐ Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
☐ Não propunha questões de fixação;
☐ Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

29- Com base na sua experiência quando você estudou Função com ênfase em Função Bijetora, preencha o quadro a seguir.

(MF: Muito Fácil; F: Fácil; R: Regular; D: Difícil; MD: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
1. Definição de Função							
2. Domínio de uma função							
3. Contradomínio de uma função							
4. Imagem de uma função							
5. Identificação da imagem de um elemento							
6. Cálculo da imagem de um elemento							
7. Reconhecer o gráfico de uma Função							
8. Função Injetora							
9. Reconhecer o gráfico de uma Função Injetora							
10. Função Sobrejetora							
11. Reconhecer o gráfico de uma Função Sobrejetora							
12. Função Bijetora							
13. Reconhecer o gráfico de uma Função Bijetora							
14. Aplicação da Função Bijetora							
15. Cardinalidade de um conjunto							

APÊNDICE B - Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE)



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O Ensino de Bijeção de Função por Atividades, sob a responsabilidade do orientador **Pedro Franco de Sá** e orientando **Euvaldo Soares da Silva**, vinculados à Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa pretendemos aplicar uma sequência didática para verificar os efeitos desta no **Ensino de Bijeção** a partir do desenvolvimento dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da mesma, participar dos testes e das atividades propostas.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre **O Ensino de Bijeção de Função por Atividades Experimentais**.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Pedro Franco de Sá e orientando Euvaldo Soares da Silva** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501.

Belém, ____ de _____ 2022.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____

aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa

APÊNDICE C - Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE) para o responsável do aluno menor de 18 anos



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O Ensino de Bijeção de Função por Atividades Experimentais, sob a responsabilidade do orientador **Pedro Franco de Sá** e orientando **Euvaldo Soares da Silva**, vinculados à Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa pretendemos aplicar uma sequência didática para verificar os efeitos desta no **Ensino de Bijeção** a partir do desenvolvimento dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da mesma, participar dos testes e das atividades propostas.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre **O Ensino de Bijeção de Função por Atividades Experimentais**.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Pedro Franco de Sá e orientando Euvaldo Soares da Silva** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501.

Belém, ____ de _____ de 2022.

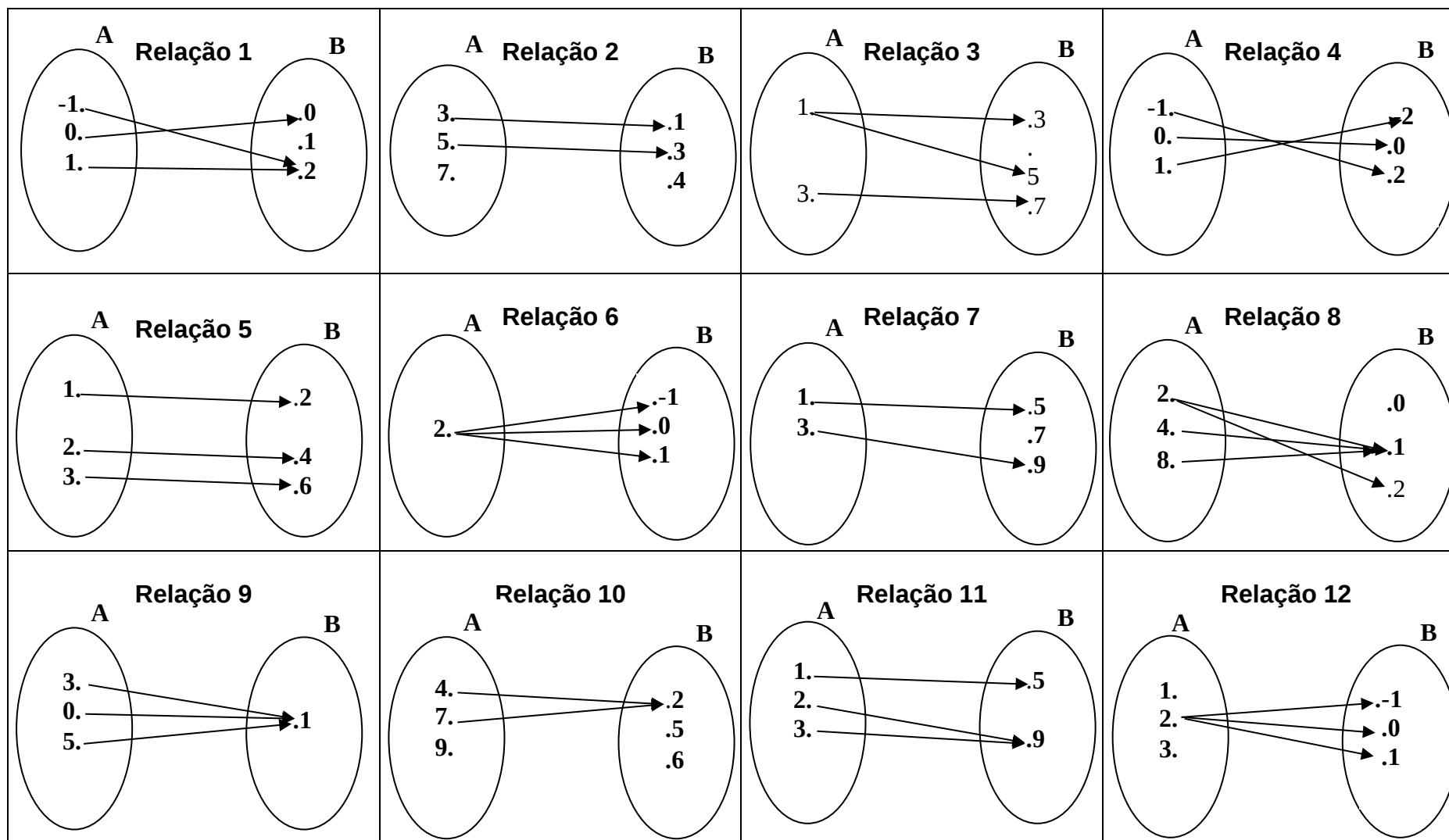
Assinatura do pesquisador

Eu, _____ autorizo
que meu/minha filho(a) _____

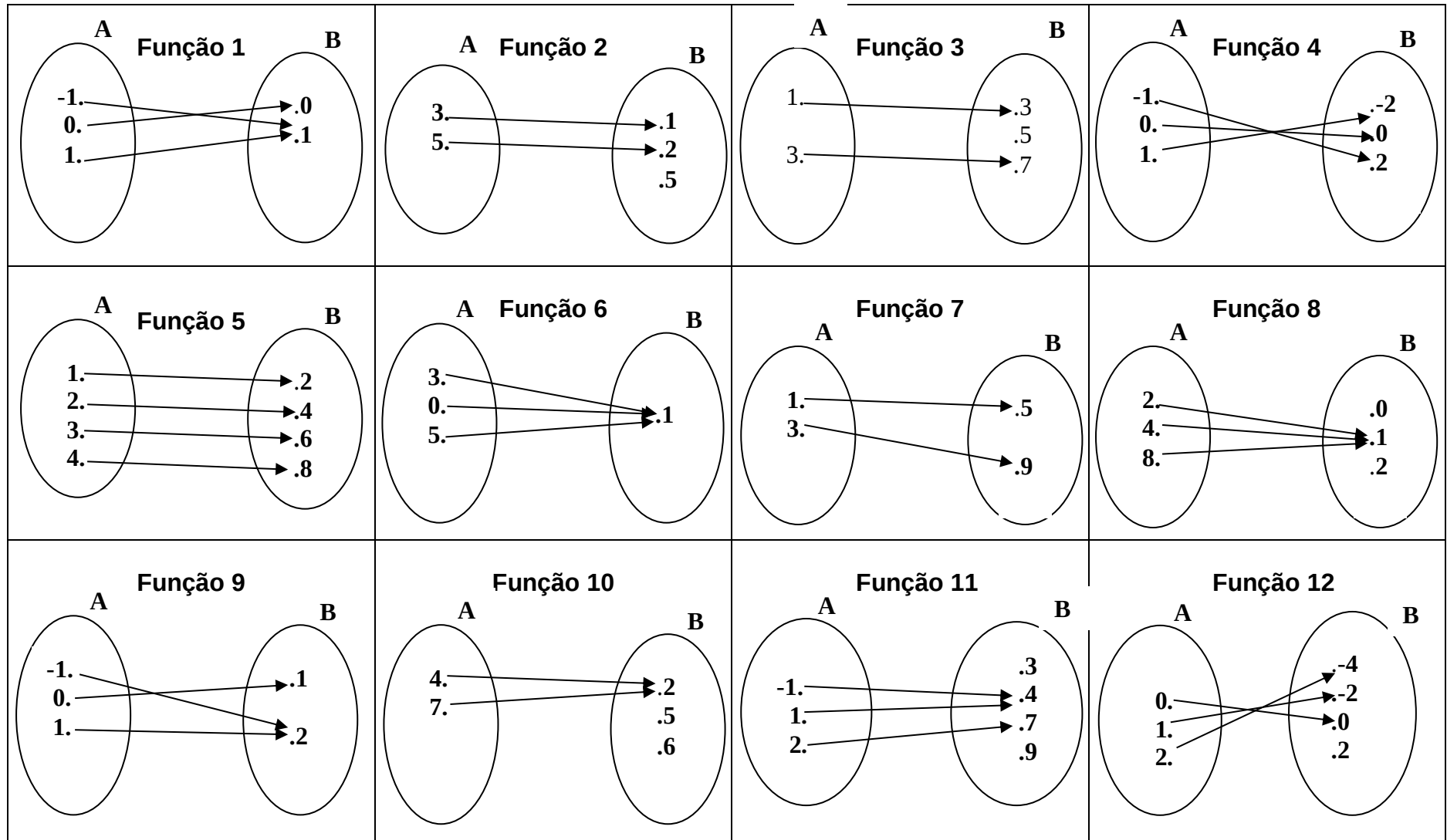
participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

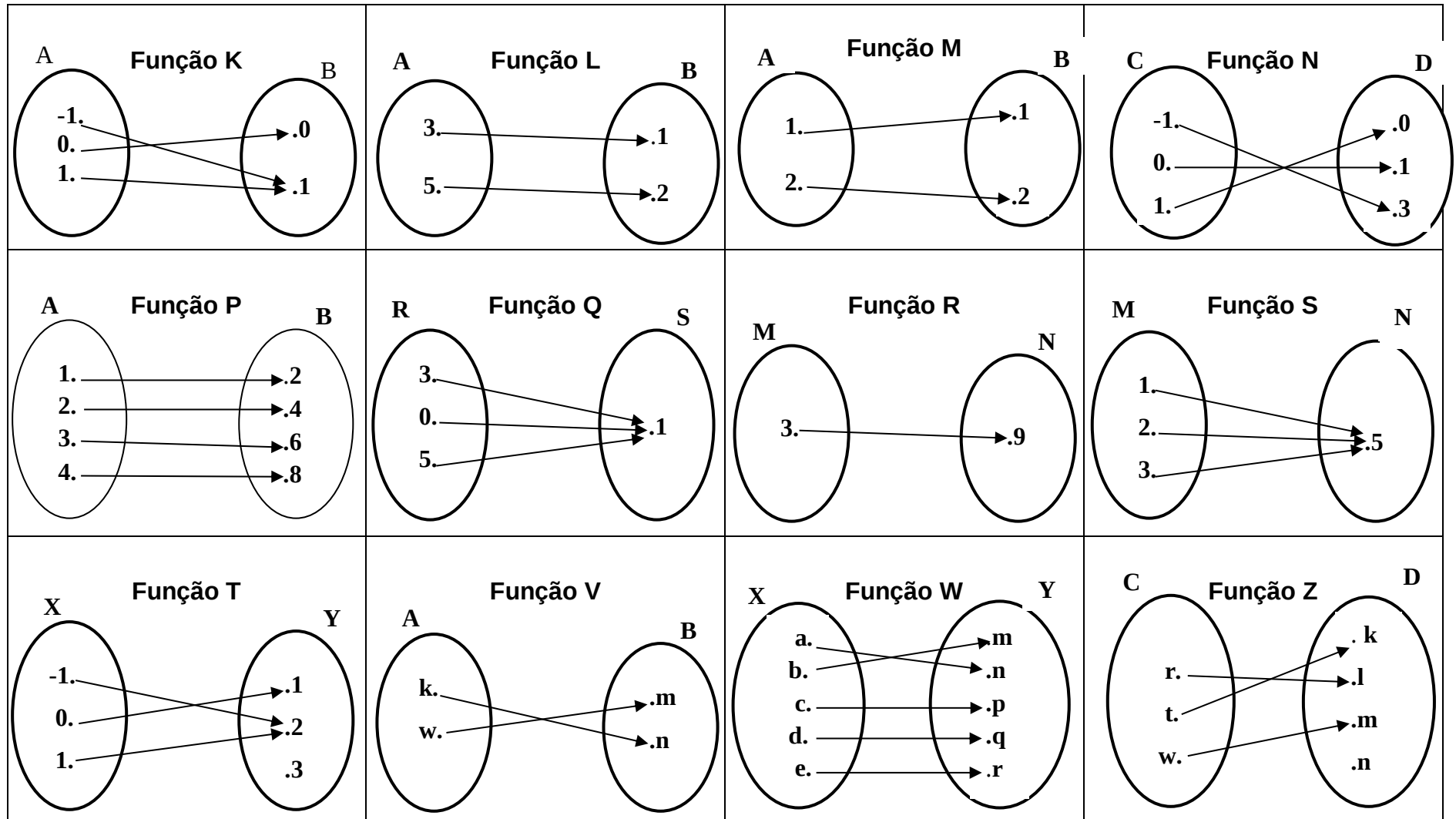
APÊNDICE D - QUADRO DE RELAÇÕES



APÊNDICE E - QUADRO DE FUNÇÕES 1



APÊNDICE F - QUADRO DE FUNÇÕES 2



APÊNDICE G - QUADRO DE GRÁFICOS

QUADRO DE GRÁFICOS

(Continua)

Gráfico 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Gráfico 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Gráfico 3 $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 4]$
Gráfico 4 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Gráfico 5 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	Gráfico 6 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(Conclusão)

Gráfico 7

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

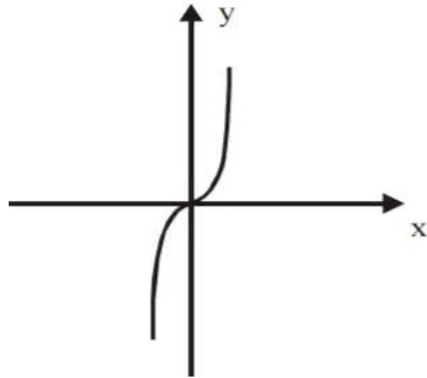


Gráfico 8

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

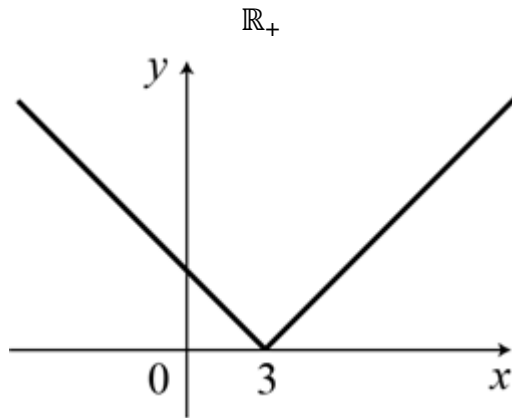


Gráfico 9

$$f: [-5, 10] \rightarrow [-1, 8]$$

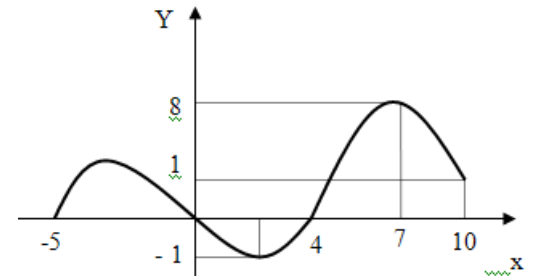


Gráfico 10

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

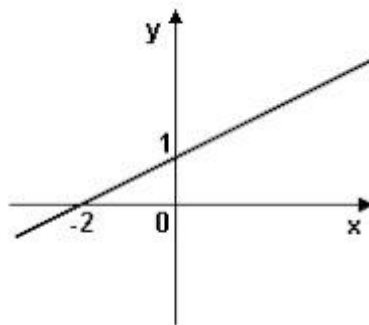


Gráfico 11

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

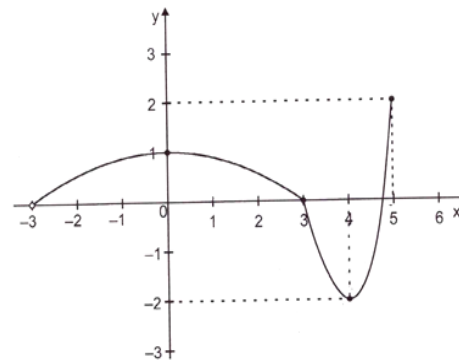
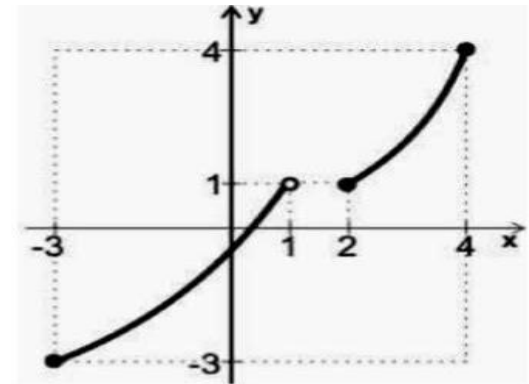


Gráfico 12

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



ANEXOS

ANEXO 1 – FICHA DE OBSERVAÇÃO DE AULA DE REDESCOBERTA

Nome do Professor: _____ Nome o observador: _____

Data: ____/____/____ Ano: ____ Atividade: _____

Horário: Início: ____h Término: ____h Quantidade de alunos da turma: ____ Quantidade de grupos formados: ____

Objetivo da atividade: _____

MOMENTOS	DOCENTE	GRUPO											
Organização	Dirigiu as ações? () sim () em partes () não	Grupos	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	
	Orientou a formação das equipes? () sim () em parte () não		Os componentes foram receptivos?										
	Demonstrou ter planejado a atividade? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()		
	Evitou que os alunos desperdiçassem tempo com ações alheias á organização da turma? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Desperdiçou tempo com ações alheias à organização?										
	Foi objetivo? () sim () em parte () não		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()		
	Mostrou entusiasmo? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	O grupo foi formado espontaneamente?										
	Obs:		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
		Obs.:											
Apresentação	Distribuiu o material necessário? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Mostrou estar atento às orientações do professor?										
	Mostrou estar motivado? () sim () em parte () não		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Mostrou segurança? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Mostrou-se motivado?										
	Obs.:		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
		Sim Em partes Não	Demonstrou ter entendido a proposta da atividade?										
			() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
		Obs.:											

MOMENTOS	DOCENTE	GRUPO										
Execução	Deu liberdade para a equipe trabalhar livremente? () sim () em partes () não	Grupos Pergunta	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
	Mostrou dinamismo através da interação dos componentes?											
	Supervisionou o desenvolvimento das ações? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Tirou dúvidas quando solicitado ou ao perceber as dificuldades? () sim () em parte () não											
	Orientou com clareza e precisão sem constrangimento? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Conseguiu seguir as instruções previstas no roteiro com facilidade?									
	() () ()		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()		
	Motivou os alunos? () sim () em parte () não											
	Mostrou segurança? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Ficou trabalhando, fazendo a atividade, juntos?									
	() () ()		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Obs.:	Sim Em parte Não	Solicitou orientação do professor?									
() () ()	() () ()		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()		
Sistematização	Supervisionou e auxiliou o grupo quando solicitado ou quando percebeu necessidade? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Conseguiu registrar as informações produzidas durante a execução com facilidade?									
	() () ()		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()		
	Mostrou estar motivado? () sim () Em parte () não											
	Demonstrou segurança? () sim () Em parte () não	Sim Em partes Não	Necessitou ou solicitou orientação para o registro das informações produzidas?									
	() () ()		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
Obs.:	Obs.:											

MOMENTOS	DOCENTE	DISCENTES											
Análise	Supervisionou fazendo perguntas para o grupo? () sim () em partes () não	Grupos	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	
	Orientou através de questionamentos para a descoberta da relação? () sim () em parte () não	Pergunta	Descobriu uma relação válida a partir das análises das informações registradas?										
	Motivou os grupos? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Demonstrou segurança? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Sentiu-se a vontade para solicitar orientação?										
	Demonstrou motivação? () sim () em parte () não		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Obs.:	Sim Em parte Não	Apresentou motivação para a análise?										
			() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
		Sim Em parte Não	Registrou na ficha sua conclusão?										
() () ()			() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
Institucionalização	Disponibilizou o espaço no quadro à elaboração das considerações finais? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Registrou sua conclusão no quadro?										
	() () ()		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()		
	Mostrou estar motivado para os registros no quadro pelos alunos? () sim () em parte () não	Sim Em parte Não	Mostrou-se motivado para o registro no quadro?										
	Mostrou segurança para o registro no quadro pelos alunos? () sim () em parte () não		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Fez questionamentos que orientasse a elaboração de um texto adequado? () sim () em parte () não		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Elaborou conjuntamente com a turma a conclusão da turma? () sim () em parte () não	Sim Em partes Não	Elaborou uma conclusão no formato adequado?										
	Deixou claro que a atividade realizada não é uma demonstração do resultado obtido? () sim () em parte () não		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
	Apresentou uma formula para expressar a conclusão da atividade? () sim () em parte () não		() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	
Propôs atividade de aprofundamento? () sim () em parte () não	Obs.:												

ANEXO 2 – PERFIL DISCENTE: QUESTIONÁRIO SÓCIOECONÔMICO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno(a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade:** _____ anos 2- **Gênero:** ☐ Masculino ☐ Feminino 3- **Série:** _____ Ano 4- **Tipo de escola que estuda?** ☐ Municipal ☐ Estadual ☐ Conveniada

5- **Você já ficou em dependência?** ☐ Não ☐ Sim. Em quais disciplinas?

6- **Você gosta de Matemática?** ☐ Não gosto ☐ Suporto ☐ Gosto um pouco ☐ Adoro

7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**

☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou

8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**

☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou

9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**

☐ Professor particular ☐ Pai ☐ Mãe ☐ Amigo da escola ☐ Namorado(a) ☐ Ninguém

☐ Outros. Quem? _____

10 - **Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**

☐ Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐ No período de prova ☐ Só na véspera da prova

☐ Não estudo fora da escola.

11 - **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?**

☐ Sempre ☐ Quase sempre ☐ Às vezes ☐ Poucas vezes ☐ Nunca

12 - **Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**

☐ Provas/simulado ☐ Testes semanais ☐ Seminários ☐ Pesquisas ☐ Projetos ☐ Outros. Quais?

13- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**

☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes

14- **A maioria das suas aulas de matemática:**

- ☐ Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
- ☐ Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
- ☐ Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
- ☐ Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
- ☐ Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

15- **Para praticar o conteúdo de matemática seu professor costumava:**

- ☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
- ☐ Apresentar jogos envolvendo o assunto;
- ☐ Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
- ☐ Não propunha questões de fixação;
- ☐ Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br