UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

FRANCISCO JOSÉ ZANINI

ANIMAÇÕES E JOGOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.
A dissertação está disponível em <https://repositorio.unipampa.edu.br/jspui/handle/riu/6146>.
Orientador: Prof. Vitalino Cesca Filho

Caçapava do Sul
2024

Sumário

1 O QUE ESPERAR DESTE RECURSO EDUCACIONAL?

O recurso educacional aqui apresentado constitui-se do presente documento orientador e do web site “Animações e Jogos em análise Combinatória”, desenvolvido pelo autor e disponível no endereço:

<https://sites.google.com/view/analisecombinatoria/principal>

As animações e jogos (ou histórias interativas) disponibilizados no site foram produzidas no ambiente Scratch visando auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, melhorar o desempenho dos estudantes e professores em relação ao tema e desenvolver o raciocínio combinatório através de diferentes tipos de problemas da área (em especial, Arranjo, Combinação e Permutação). São enfatizados os princípios multiplicativo e aditivo, como estratégia de resolução, e a árvore de possibilidades, como estratégia de resolução e representação gráfica. O site foi elaborado com o intuito de incentivar o uso de tecnologias digitais por professores, além de explorar potencialidades do ambiente de programação Scratch e formas de integrá-lo às aulas de Matemática.

Acredita-se que as histórias interativas possam instigar o interesse do aluno, por estarem inseridas no mundo digital, despertando a curiosidade e aumentando a motivação e criatividade do aluno nas aulas de Combinatória. Ainda, em relação ao processo de ensino e aprendizagem, entende-se que para o desenvolvimento do raciocínio combinatório é importante trabalhar com diferentes tipos de problemas, diversas estratégias e diferentes representações. Foram propostas oito histórias interativas que exploram diferentes tipos de problemas de Combinatória, utilizando os princípios aditivo e multiplicativo e, sempre que possível, auxiliados pela representação da árvore de possibilidades. Destaca-se que algumas das atividades propostas foram inspiradas em problemas apresentados pela OBMEP e pelo ENEM (provas de importância e abrangência nacional).

Mais explicações sobre os conceitos citados acima será encontrado na sequência da leitura, assim como orientações sobre as atividades encontradas no site.

O Capítulo 2 destina-se a apresentar o site desenvolvido e a plataforma utilizada - Scratch. A compreensão do funcionamento do Scratch não é necessária para a utilização do site. Porém, o professor poderá explorar mais a fundo suas funcionalidades a partir desta apresentação.

No Capítulo 3, o leitor encontrará alguns detalhamentos sobre o ensino de Análise Combinatória. São identificadas habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, relacionadas ao tema. Neste capítulo é também apresentada uma divisão em diferentes tipos de problemas de combinatória, com explicações.

No Capítulo 4 são apresentados conceitos de Análise Combinatória, que são utilizados e apresentados no site. Neste capítulo, o leitor encontrará formalizações e exemplos resolvidos.

O Capítulo 5 contém uma descrição das histórias interativas presentes no site. São relacionados, para cada história interativa, os tipos de problemas trabalhados, as estratégias de resolução utilizadas, a representação fornecida e as habilidades da BNCC relacionadas. Em algumas situações, a resolução do problema é feita em mais detalhes.

O leitor interessado em um estudo mais completo está convidado a ler e estudar a Dissertação de Mestrado[1] a partir da qual foi desenvolvido o presente recurso.

[1] <https://repositorio.unipampa.edu.br/jspui/handle/riu/6146>

2 EXPLICAÇÃO SOBRE O SITE E SCRATCH

As histórias interativas foram produzidas no ambiente de programação Scratch, enfatizando estratégias de resolução de problemas combinatórios a partir dos princípios multiplicativo e aditivo, bem como da árvore de possibilidades. Para organização dessas histórias interativas, utilizando tecnologias digitais, optou-se por elaborar um site para a sua hospedagem.

O Google Sites é uma plataforma estruturada para criação de wikis[1] e páginas da Web, que é disponibilizado gratuitamente pelo Google. Nessa plataforma foi desenvolvido o site "Animações e Jogos em análise Combinatória" (Figura 1) para hospedar as histórias interativas criadas no Scratch.

Figura 1 – Página do site "Animações e Jogos em análise Combinatória"

Fonte: O autor, 2025.

O Google Sites permite que sejam incorporados, à estrutura do site, recursos desenvolvidos em outras plataformas como, por exemplo, Scratch *online*. Deste modo, é possível distribuir as atividades, ao longo de uma página web.

O Scratch é uma linguagem de programação baseada em blocos. É desenvolvido e mantido pela Equipe Scratch no grupo Lifelong Kindergarten Group no Media Laboratory do Massachusetts Institute of Technology (MIT).

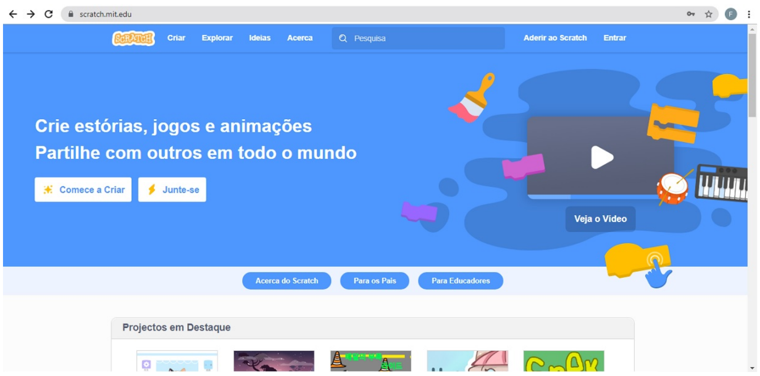
Segundo Zoppo (2017, p. 67), o Scratch é acessível a um público inexperiente em linguagens de programação, e erros de sintaxe são difíceis de acontecer, pois é mais intuitivo, uma vez que a comunicação entre quem está programando e o computador se dá por meio de soltar e arrastar blocos como um encaixe de peças. É gratuito e pode ser utilizado diretamente no navegador, a partir de seu web site. Funciona na maioria dos navegadores, em computadores e dispositivos móveis. O Scratch possui também uma versão offline, na qual se pode criar e visualizar projetos (atividades desenvolvidas no Scratch) quando não houver conexão com a Internet, necessitando apenas descarregar e instalar o aplicativo Scratch no dispositivo. Não é

[1] Um wiki é um site projetado para que grupos de pessoas capturem e compartilhem ideias rapidamente.

necessário nenhum tipo de licença para utilizar o Scratch. Inclusive, o site incentiva o fomento a criatividade, compartilhando livremente código, arte, música e outros trabalhos. Essas características permitem, ao professor e aos alunos, criar suas próprias histórias interativas, animações e jogos, para as diferentes áreas do conhecimento.

O site do Scratch[2] (Figura 2) disponibiliza, dentre outras informações, vários tutoriais que auxiliam no entendimento dos comandos.

Figura 2 – Página principal do Scratch



Fonte: O autor, 2025.

Após realizar o login no site, é disponibilizado a cada usuário, um espaço para criação (Scratch online) e armazenamento de projetos construídos. Ainda, permite a consulta/remixagem[3] de projetos existentes, contribuindo para uma melhor compreensão dos recursos disponíveis no ambiente.

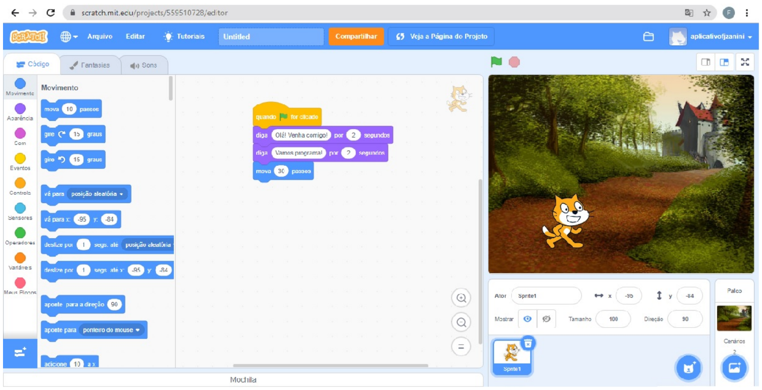
Os projetos podem ser executados imediatamente na bandeira verde ou acessados através do link do projeto. Quando clica-se no link do projeto, abre-se uma nova janela diretamente no site do Scratch, onde encontra-se o botão "Ver interior"que está no canto superior direito. Clicando nesse botão, tem-se acesso aos comandos do projeto. Neste sentido, pode-se ver e aprender os comandos para reproduzi-los em um novo projeto, ou ainda, alterar os comandos e testar os resultados, porém, essas alterações não podem ser salvas. No botão em formato de globo que fica no canto superior esquerdo pode-se trocar o idioma dos comandos.

Na tela do Scratch (Figura 3), tem-se, à direita, a visualização de como está o seu projeto e, abaixo, os atores que podem ser acrescentados ou excluídos. Na faixa do meio do Scratch ficam os comandos do ator selecionado onde é possível modificar ou arrastar novos comandos que ficam disponíveis no lado esquerdo da tela na aba código. No lado esquerdo também está a aba fantasia no qual pode-se modificar a aparência dos atores e a aba som em que o ruído ou som dos atores podem ser alterados.

[2] <http://scratch.mit.edu>

[3] Segundo os desenvolvedores, a ideia de remixagem está ligada a dado um projeto já construído, importá-lo para seu espaço de armazenamento e, então, aperfeiçoá-lo.

Figura 3 – Página de um projeto do Scratch



Fonte: O autor, 2025.

Considerando as características de livre acesso apontadas acima, optou-se por utilizar o site e o Scratch como ferramentas para a criação de histórias interativas a serem apresentadas e disponibilizadas na Educação Básica. Espera-se que professores e alunos, de diferentes lugares do país, possam utilizar o site para retomar e ampliar conceitos relacionados a Combinatória e ao uso de tecnológicas digitais no processo de ensino e aprendizagem, em especial, da Matemática.

3 PARÂMETROS PARA O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

O ensino da Combinatória é sugerido nos PCN do Ensino Médio (BRASIL, 1999, p. 45), porque

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) identifica-se, para as diferentes etapas da Educação Básica, sete habilidades relacionadas ao objeto de conhecimento “Problemas de Contagem” (Quadro 1).

Quadro 1 – Habilidades Combinatória

EF04MA08	Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
EF05MA09	Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
EF08MA03	Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
EM14MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT511	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: (BRASIL, 2018)

É recomendado que o ensino de Combinatória potencialize a utilização de diferentes estratégias na resolução dos diferentes tipos de problemas, evitando-se, assim, a simples aplicação de fórmulas. Essas ideias são corroboradas pelos Guias do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD para o Ensino Médio (BRASIL, 2011, p. 29; BRASIL, 2014, p. 92) ao afirmarem que é "prejudicial um ensino que habitue o aluno a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso somente de fórmulas".

As recomendações, das propostas curriculares, são para não deixar de lado a estratégia de resolução baseada nos princípios multiplicativo e aditivo. Pois, o princípio multiplicativo, pode ser mobilizado na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios (produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações) e ser base da construção de procedimentos formais da Análise Combinatória (fórmulas). O princípio multiplicativo pode, também, em algumas situações, ser combinado ao princípio aditivo, constituindo-se assim mais uma ferramenta para a resolução de problemas (LIMA, 2015).

Os Quadros 2 e 3 apresentam exemplos dos diferentes tipos de problemas combinatórios, com ou sem condição, resolvidos por meio do princípio multiplicativo, bem como destacam os invariantes operatórios para cada um desses problemas.

Quadro 2 – Tipos de Problemas de Combinatória - p.1

Tipo	**Problema**	**Representação**	**Invariantes**
Produto Cartesiano	Joaquim foi à livraria comprar seu material escolar. Para montar seu kit a livraria lhe ofereceu: 3 modelos de caderno, 4 modelos de lápis, 8 modelos de borracha e 2 modelos de caneta azul. De quantas formas diferentes Joaquim pode montar seu kit?	$3 \times 4 \times 8 \times 2$ Quantidade de modelos possíveis (QMP) de cadernos $\times$ QMP de lápis $\times$ QMP de borracha $\times$ QMP de canetas.	- Dados dois (ou mais) conjuntos distintos (com n e com p elementos), esses serão combinados para formar um novo conjunto. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.
Arranjo	Na final do campeonato de judô, 5 meninas estão disputando os 3 primeiros lugares do torneio. De quantas formas diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	$5 \times 4 \times 3$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 1º lugar $\times$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 2º lugar $\times$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 3º lugar.	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$. - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Permutação	De quantos modos distintos 5 pessoas podem se posicionar em um banco de 5 lugares?	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 1ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 2ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 3ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 4ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 5ª posição.	- Todos os n elementos do conjunto serão usados. - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Fonte: Adaptado de Pessoa e Borba (2009) e Lima (2015).

Quadro 3 – Tipos de Problemas de Combinatória - p.2

Tipo	Problema	Representação	Invariantes
Combinação	Um técnico tem que escolher, dentre 12 atletas, 5 para compor a equipe titular de um time de basquete. Qual o total de possibilidades que o técnico tem para montar sua equipe?	$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times \times 2 \times 1}$ Quantidade de escolhas para o 1º atleta × quantidade de escolhas para o 2º atleta × quantidade de escolhas para o 3º atleta × quantidade de escolhas para o 4º atleta × quantidade de escolhas para o 5º atleta. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 5 atletas.	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$. - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.
Arranjo Condicional	Ana, Júlia, Marcos, Pedro e Laís estão participando de uma corrida. De quantos modos diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados se Julia sempre chegar em primeiro lugar?	$1 \times 4 \times 3$ 1º lugar ocupado por Júlia × quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar × quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar.	—
Combinação Condicional	Marta precisa escolher entre seus 8 amigos (Tiago, Simone, Daniele, Jéssica, Pedro, Amanda, Rafael e Felipe), 4 para ir ao cinema com ela. De quantas formas diferentes Marta pode escolher esses quatro amigos desde que Jéssica sempre esteja entre os escolhidos?	$\frac{1 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times \times 2 \times 1}$ 1º lugar ocupado por Jéssica × quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar × quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar × quantidade de participantes que podem ocupar o 4º lugar. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 4 amigos.	—

Fonte: Adaptado de Pessoa e Borba (2009) e Lima (2015).

É possível observar, nos exemplos apresentados nos Quadros 2 e 3, que todas as resoluções foram elaboradas com base no princípio multiplicativo. Contudo, para resolução de alguns problemas de combinatória, como já mencionado, é necessário combinar o princípio multiplicativo com o aditivo (Quadro 4).

Quadro 4 – Problema de Combinatória Resolvido por meio dos Princípios Aditivo e Multiplicativo

Quantos números pares com quatro algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$*?*	Primeiro fixa-se os números pares, iniciando pelo zero na casa das unidades: - Para o primeiro algarismo, cinco possibilidades, já que o zero já foi escolhido; - Para o segundo algarismo, quatro possibilidades; - Para o terceiro algarismo, três possibilidades. Tem-se assim $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ possibilidades, com o número par terminado por zero. Fixando, agora, o algarismo dois na casa das unidades: - Para o primeiro algarismo, quatro possibilidades, já que o dois já foi escolhido e não se pode ter zero na casa das unidades de milhar; - Para o segundo algarismo, quatro possibilidades; - Para o terceiro algarismo, três possibilidades. Tem-se assim $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades, com o número par terminando pelo algarismo 2. Para os números terminados em seis e oito, segue-se o mesmo raciocínio de quando o algarismo dois ocupou a casa das unidades. Tem-se assim para o número par com final seis $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades. E, para o número par com final oito $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades. Por fim, soma-se o total de possibilidades individuais: $60 + 48 + 48 + 48 = 204$ números pares que podem ser formados.

Fonte: (LIMA, 2015).

4 BASE TEÓRICA DOS CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA APRESENTADOS NO SITE

A seguir são apresentadas as definições, teoremas e exemplos referentes à Análise Combinatória, baseado no livro de Lipschutz e Lipson (2004), a fim de permitir que se explore de forma adequada as histórias interativas.

Morgado et al. (1991) definem Análise Combinatória como sendo a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Em outras palavras, pode-se definir a Análise Combinatória como sendo a parte da Matemática que trata de problemas onde sujeitos, seres, objetos, elementos alfa-numéricos ou outros elementos se relacionam em uma determinada regra, ordem, sequência, ou outra relação exigida.

Duas definições iniciais importantes no estudo de análise combinatória são *experimento* e *evento*. Assim, define-se *experimento*, ao organizar ou relacionar elementos de acordo com uma regra. Definimos espaço amostral (S), como o conjunto de todos os resultados possíveis de um dado experimento. *Evento* é definido como qualquer subconjunto de resultados desse experimento.

Os problemas de Combinatória podem ser resolvidos enumerando os elementos do espaço amostral ou do evento solicitado de acordo com o experimento, como será exposto nos dois exemplos seguintes, mas os elementos desse conjunto podem ser mais facilmente obtidos pelo uso dos princípios aditivo e multiplicativo e da árvore de possibilidades ou diagrama de árvore, que serão abordados posteriormente.

No que segue, utilizar-se-á $n(S)$ para denotar o número de elementos de um conjuntos S. Para consolidar as definições apresentada, considere o primeiro exemplo.

Exemplo 1 *Duas moedas são lançadas simultaneamente, quantas são as possibilidades de que ambas caiam com a mesma face para cima?*

Neste exemplo o experimento é o lançamento das duas moedas. Assim, o espaço amostral ou evento total é dado pelo conjunto

$$S = \{KK, KC, CK, CC\},$$

representando cara por K e coroa por C. No entanto o foco desse problema em particular é o evento em que ambas as moedas tenham a mesma face voltada para cima. Este evento é representado pelo conjunto

$$EQ = \{KK, CC\},$$

assim são duas as possibilidade de que as moedas caiam com a mesma face para cima.

Observa-se que esse problema foi resolvido apenas com a enumeração dos elementos procurados. Vejamos outro exemplo para firmar as definições.

Exemplo 2 *No intervalo das aulas, um grupo de seis amigos formado por João, André, Felipe, Carla, Paula e Beatriz, resolveu jogar uma partida de truco, para isso resolveram formar duplas. Sabendo que João foi o primeiro a poder escolher seu parceiro, responda:*
(a) quantas são as possíveis duplas que João pode formar?
(b) quantas são as possíveis duplas que João pode formar com uma menina?

O experimento é a formação de duplas entre os amigos do conjunto

$$\{\text{João (J), André (A), Felipe (F), Carla (C), Paula (P), Beatriz (B)}\}.$$

As pessoas serão representadas pela letra inicial dos seus nomes, o que simplifica muito na hora de trabalhar com as opções possíveis.

O espaço amostral das duplas formadas é

$$S = \{JA,\ JF,\ JC,\ JP,\ JB,\ AF,\ AC,\ AP,\ AB,\ FC,\ FP,\ FB,\ CP,\ CB,\ PB\}. \quad (4.1)$$

Na representação na Equação (4.1), a letra inicial dos meninos foi representada em azul, enquanto das meninas foi representado em vermelho.

Neste exemplo, há dois eventos:

(a) o evento E_1 que considera as duplas formadas por João é

$$E_1 = \{JA,\ JF,\ JC,\ JP,\ JB\},$$

assim o número de possíveis duplas formadas por João é $n(E_1) = 5$.

(b) o evento E_2 que considera as duplas formadas por João e uma menina é

$$E_2 = \{JC,\ JP,\ JB\},$$

assim o número de possíveis duplas formadas por João e uma menina é $n(E_2) = 3$.

Observa-se que estes exemplos foram resolvidos explicitando os conjuntos que representam os eventos de interesse e contando seu elementos.

Em problemas com maior número de elementos torna-se dispendioso e às vezes, inviável a enumeração de todos os elementos do evento. Por isso, torna-se mais viável a estimativa desse total através dos princípios básicos que a análise combinatória possui: princípio aditivo e princípio multiplicativo, que serão apresentados a seguir.

4.1 Princípio Aditivo

O princípio aditivo, também conhecido como princípio da regra da soma, é utilizado quando dois ou mais eventos não podem ocorrer simultaneamente ou, em outras palavras, são mutuamente exclusivos.

Inicialmente, considera-se dois eventos A e B mutuamente exclusivos, e suponha que o evento A possa ocorrer de m maneiras distintas (m resultados) e o evento B ocorra de n maneiras distintas (n resultados). Então o evento A ou o evento B podem ocorrer de $m + n$ maneiras distintas ($m + n$ resultados).

Generalizando, dados os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$, com, respectivamente, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneiras distintas de ocorrer, sendo que cada dois não podem ocorrer simultaneamente, tem-se que existem $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ maneiras distintas de ocorrer algum dos eventos.

O princípio aditivo está intimamente ligado à união de conjuntos disjuntos. Mais especificamente, se $S_1, S_2, \ldots, S_k$ são conjuntos finitos mutuamente disjuntos, então o número de elementos da união destes conjuntos é

$$n(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k) = n(S_1) + n(S_2) + \cdots + n(S_k).$$

Vejamos um exemplo que usa o princípio aditivo.

Exemplo 3 *Joãozinho recebeu sua mesada e com seu dinheiro somente consegue ir ao cinema ou jogar no fliperama por uma hora. No cinema, ele pode escolher entre 4 filmes: Titanic, Avatar, Star Wars e Vingadores, enquanto que no fliperama, ele pode escolher entre 3 jogos: Minecraft, Roblox e Fortnite. Quantas são as maneiras possíveis de Joãozinho escolher ver um filme* ***ou*** *jogar um jogo no fliperama?*

Primeiro, observa-se que ver um filme e ir ao fliperama, neste exemplo, são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, Joãozinho não pode realizar ambas atividades. Desse modo, pode ser usado o princípio aditivo.

O evento *escolher um filme no cinema* é dado pelo conjunto

$$C = \{\text{ Titanic},\ \text{ Avatar},\ \text{Star Wars},\ \text{Vingadores}\},$$

assim um filme pode ser escolhido de 4 maneiras distintas, $n(C) = 4$.

O evento *escolher um jogo no fliperama* é dado pelo conjunto

$$F = \{\text{Minecraft},\ \text{Roblox}, \text{Fortnite}\},$$

assim um jogo no fliperama pode ser escolhido de 3 maneiras distintas, $n(F) = 3$.

Finalmente, Joãozinho pode escolher um filme ou um jogo de

$$n(C \cup F) = n(C) + n(F) = 3 + 4 = 7$$

maneiras diferentes.

4.2 Princípio Multiplicativo

É conhecido também como regra do produto, produto cartesiano ou princípio fundamental da contagem. Utiliza-se este princípio quando dois ou mais eventos ocorrem de forma independente um do outro. Considerando inicialmente dois eventos A e B, e supondo que o Evento A possa ocorrer de m maneiras distintas (m resultados) e o Evento B ocorra de n maneiras distintas (n resultados), então o Evento A e o Evento B podem ocorrer de $m \cdot n$ maneiras ($m \cdot n$ resultados).

Generalizando, dados os Eventos $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$, tendo, respectivamente, n_1, n_2, n_3, $\cdots$, n_k maneiras distintas de ocorrer, então todos os eventos podem ocorrer na ordem $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ maneiras diferentes.

O princípio multiplicativo está associado, em teoria de conjuntos, ao produto cartesiano. Naturalmente, considerando conjuntos finitos $S_1, S_2, \ldots, S_k$, tem-se que

$$n(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k) = n(S_1) \cdot n(S_2) \cdots n(S_k).$$

Além disso, a representação do produto cartesiano de dois (ou mais) conjuntos como pares (ou n-duplas) ordenados é condizente com o princípio multiplicativo.

Baseado no exemplo 3, o exemplo 4 também envolve o cinema e o fliperama, mas o evento considerado é o de realizar ambas atividades, sendo elas independentes. Portanto, será utilizado o princípio multiplicativo.

Exemplo 4 *Joãozinho recebeu sua mesada, e seu dinheiro é suficiente para ir ao cinema e jogar no fliperama por uma hora. No cinema, ele pode escolher entre 4 filmes: Titanic, Avatar, Star Wars e Vingadores, enquanto que no fliperama, ele pode escolher entre 3 jogos: Minecraft, Roblox e Fortnite. Quantas são as maneiras possíveis de Joãozinho escolher um filme* ***e*** *jogar um jogo no fliperama?*

O evento *escolher um filme no cinema* é dado pelo conjunto

$$C = \{\text{Titanic},\ \text{Avatar},\ \text{Star Wars},\ \text{Vingadores}\},$$

e assim, um filme pode ser escolhido de 4 maneiras distintas, $n(C) = 4$.

O evento *escolher um jogo no fliperama* é dado pelo conjunto

$$F = \{\text{Minecraft},\ \text{Roblox},\ \text{Fortnite}\},$$

e assim, um jogo no fliperama pode ser escolhido de 3 maneiras distintas, $n(F) = 3$.

Finalmente, Joãozinho pode escolher um filme e um jogo de

$$n(C \times F) = n(C) \times n(F) = 4 \times 3 = 12$$

maneiras distintas.

Deve-se sempre buscar a correta interpretação do problema, a fim de entender e identificar a quais princípios está associada a questão. Observa-se que nos enunciados dos exemplos 3 e 4, foram destacadas as palavras **ou** e **e**, que dentro do contexto da questão nos leva a associá-las aos princípios aditivo e multiplicativo, respectivamente.

O exemplo 5 é uma questão da prova da OBMEP[1] (2008, nível 1, fase 1, nº 18).

Exemplo 5 *(OBMEP, 2008) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?*

Neste exemplo, usa-se o princípio multiplicativo, pois *vestir uma camisa* é um evento independente de *vestir uma calça*.

O evento *vestir uma camisa* é dado pelo conjunto

$$\begin{aligned} C_{am} = \{&\text{camisa preta manga curta},\ \text{camisa preta manga longa}, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{camisa azul},\ \text{camisa cinza},\ \text{camisa branca}\} \end{aligned}$$

e assim uma camisa pode ser vestida de $n(C_{am}) = 5$ maneiras distintas.

O evento *vestir uma calça* é dado pelo conjunto

$$C_{al} = \{\text{calça preta},\ \text{calça azul},\ \text{calça verde},\ \text{calça marrom}\}$$

e assim uma calça pode ser vestida de $n(C_{al}) = 4$ maneiras distintas.

Portanto, Fábio pode vestir uma camisa e uma calça de

$$n(C_{am} \times C_{al}) = n(C_{am}) \times n(C_{al}) = 5 \times 4 = 20$$

maneiras diferentes.

Para finalizar, devem-se avaliar a restrição imposta nessa questão: "De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?". Como devem ser consideradas somente as opções de cores distintas, então, para resolver esse problema, deve-se subtrair, do total de possibilidades encontradas acima, as opções de camisa e calça com a mesma cor. Isso ocorre com a camisa preta manga curta e calça preta, outra vez com camisa preta manga comprida e calça preta e uma última vez com camisa azul e calça azul, ou seja, há 3 maneiras de Fábio se vestir com cores iguais.

Portanto, Fábio tem $20 - 3 = 17$ opções para se vestir com cores distintas. Observa-se que nesta última etapa, utilizou-se o princípio aditivo, mesmo que de maneira implícita.

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

4.3 Representações

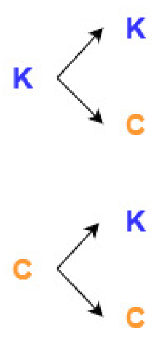
A árvore de possibilidades (ou diagrama de árvore) é uma representação simbólica que possibilita a “compreensão de diferentes relações combinatórias, sendo possível, assim, trabalhar os variados tipos de problemas combinatórios, observando-se as semelhanças e diferenças entre eles” (AZEVEDO; BORBA, 2013, p. 39). Portanto, a árvore de possibilidades, também conhecida como diagrama de árvore é uma representação da ramificação de todos os possíveis resultados de um experimento. Com ela, simplifica-se essa representação utilizando elementos alfanuméricos ou outros símbolos para indicar os sujeitos, seres ou objetos do evento, onde de cada um desses elementos emerge um novo ramo para cada uma das possibilidades seguintes, permitindo indicar todas as possibilidades e evitar repetir os elementos. Em uma árvore de possibilidades, a sequência dos elementos é representada ou interligada por setas ou segmentos.

A seguir será construída a árvore de possibilidades do Exemplo 1, onde os eventos poderiam ser representados assim:

Moeda1	——	**Moeda2**
Cara	——	Cara
Cara	——	Coroa
Coroa	——	Cara
Coroa	——	Coroa

Em um diagrama de árvore pode-se trocar coroa pela letra C e cara pela letra K, e assim representá-lo como Figura 4:

Figura 4 – Árvore de possibilidades do Exemplo 1



Fonte: O autor, 2025

As árvores de possibilidades (Figura 4) e os demais diagramas que serão mostrados na sequência foram construídos com a ajuda do aplicativo Draw.io[2]. Este aplicativo, que pode ser utilizado diretamente do navegador web, possibilita o desenvolvimento de diversos tipos de diagramas, incluindo os usados em análise combinatória.

[2] Disponível no site <https://app.diagrams.net>

No Exemplo 4, tem-se o evento *escolher um filme no cinema* que é dado pelo conjunto

$$C = \{\text{Titanic},\ \text{Avatar},\ \text{Star Wars},\ \text{Vingadores}\}$$

e o evento *escolher um jogo no fliperama* que é dado pelo conjunto

$$F = \{\text{Minecraft},\ \text{Roblox},\ \text{Fortnite}\},$$

assim, gerando a seguinte representação:

Cinema		**Fliperama**
Titanic	$\longrightarrow$	Minecraft
Titanic	$\longrightarrow$	Roblox
Titanic	$\longrightarrow$	Fortnite
Avatar	$\longrightarrow$	Minecraft
Avatar	$\longrightarrow$	Roblox
Avatar	$\longrightarrow$	Fortnite
Star Wars	$\longrightarrow$	Minecraft
Star Wars	$\longrightarrow$	Roblox
Star Wars	$\longrightarrow$	Fortnite
Vingadores	$\longrightarrow$	Minecraft
Vingadores	$\longrightarrow$	Roblox
Vingadores	$\longrightarrow$	Fortnite

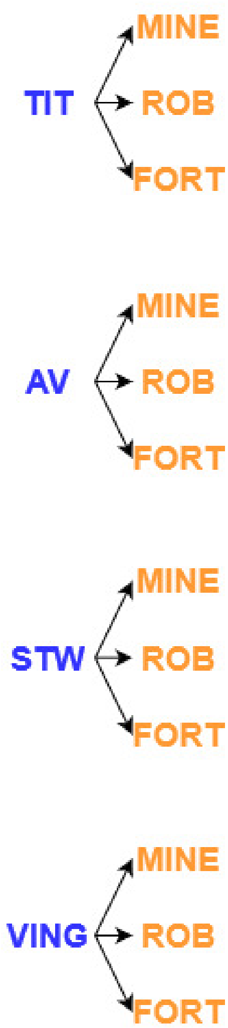
Construindo uma árvore de possibilidades, produz-se uma representação mais simples. Primeiramente substitui-se cada filme e cada jogo por uma letra mais conveniente. Neste caso, será realizada a seguinte troca:

Titanic = *TIT*, Avatar = *AV*, Star Wars = *STW*, Vingadores = *VING*

Minecraft = *MINE*, Roblox = *ROB*, Fortnite = *FORT*

Assim, a árvore de possibilidades é representada na Figura 5.

Figura 5 – Diagrama de árvore do Exemplo 4



Fonte: O autor, 2025

A seguir será construída a árvore de possibilidades do Exemplo 2, onde, como já mencionado, as pessoas foram representadas pela letra inicial do seu nome. O conjunto das pessoas é:

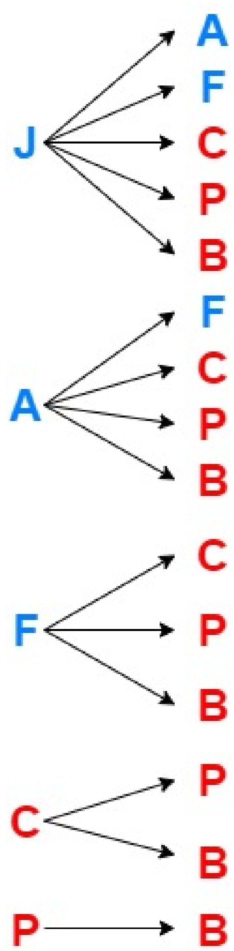
$$\{\text{Joao } (J), \text{ Andre } (A), \text{ Felipe } (F), \text{ Carla } (C), \text{ Paula } (P), \text{ Beatriz } (B)\}$$

Assim o espaço amostral das duplas de truco é:

$$S = \{JA,\ JF,\ JC,\ JP,\ JB,\ AF,\ AC,\ AP,\ AB,\ FC,\ FP,\ FB,\ CP,\ CB,\ PB\}.$$

A representação acima pode gerar dúvidas quanto à exaustão de todas as opções possíveis, ou ainda, pode-se acabar gerando opções duplicadas. Ao gerar a árvore de possibilidades (Figura 6), evita-se que isso aconteça.

Figura 6 – Árvore de possibilidades do Exemplo 2



Fonte: O autor, 2025

A Figura 6 ilustra que cada pessoa do nó subsequente gera uma dupla a menos que a anterior. Isso ocorre porque a dupla dela com a pessoa do nó anterior já foi formada.

Assim, sugere-se que os problemas de Combinatória sejam resolvidos ou iniciados com auxilio dos princípios aditivo e multiplicativo e da representação da árvore de possibilidades, para o melhor entendimento da questão, como defendido amplamente no capítulo anterior. Nos casos de problemas mais complexos ou extensos, em que se torne difícil a enumeração de todos os resultados possíveis de um evento em particular, pode-se, após a escolha da estratégia da resolução, buscar auxilio no uso de alguns modelos matemáticos da Análise Combinatória, como os modelos que seguirão nas próximas seções. As fórmulas que aparecerão não são para uso generalizado, como nos exemplos abaixo; elas aparecerão para confirmar que são somente uma consequência do raciocínio combinatório estabelecido ao longo da resolução.

4.4 Permutação Simples

A permutação consiste em trocarmos a ordem dos elementos de um conjunto, de modo que o agrupamento formado se diferencie dos demais pela ordem dos elementos. A seguir, veremos um exemplo para melhor entendimento.

Exemplo 6 *Ana, Maria e João querem sentar-se em três bancos enfileirados (ou enumerados). De quantas maneiras diferentes poderão sentar-se?*

Para resolver esse exemplo torna-se muito útil organizar os elementos do conjunto de maneira que seja fácil esgotar todas as possibilidades. A estratégia utilizada será de fixar um primeiro elemento escolhido e alterar os demais elementos de todas as maneiras possíveis. Em seguida, fixa-se um segundo e repete-se o mesmo processo.

Fixando, inicialmente, Ana no primeiro banco, obtém-se o diagrama:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
Ana	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	João
Ana	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Maria

Agora, fixando Maria no primeiro banco:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
Maria	$\longrightarrow$	Ana	$\longrightarrow$	João
Maria	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Ana

Finalmente, repete-se o processo com João:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
João	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	Ana
João	$\longrightarrow$	Ana	$\longrightarrow$	Maria

Veja que a ordem dos elementos é importante. Perceba que:

Ana $\longrightarrow$ Maria $\longrightarrow$ João,

é diferente de

Ana $\longrightarrow$ João $\longrightarrow$ Maria.

Portanto as possíveis formas de ocupar os bancos são:

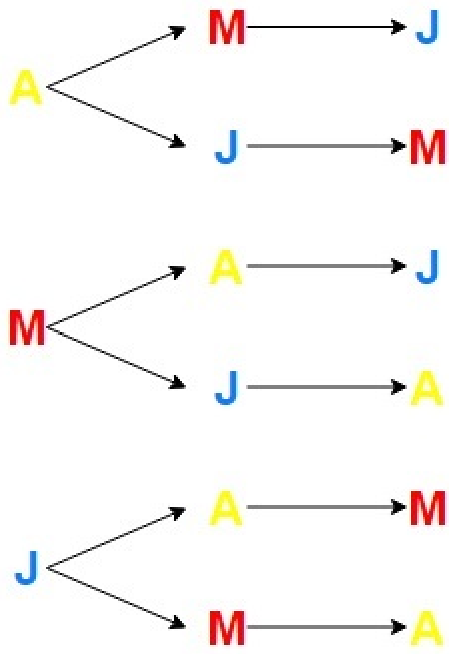
Disposição	**Banco 1**	**Banco 2**	**Banco 3**
i)	Ana	Maria	João
ii)	Ana	João	Maria
iii)	Maria	João	Ana
iv)	Maria	Ana	João
v)	João	Ana	Maria
vi)	João	Maria	Ana

As disposições i), ii), iii), iv), v) e vi) diferem apenas pela ordem que as pessoas ocupam os bancos. Porém, observa-se que todos os bancos são ocupados e todas as pessoas são consideradas.

Para a construção da árvore de possibilidades (Figura 7), será utilizada a seguinte representação:

$$\text{Ana} = A, \quad \text{Maria} = M, \quad \text{João} = J$$

Figura 7 – Diagrama de árvore do Exemplo 6



Fonte: O autor, 2025

Analisando a Figura 7, observa-se que para o banco 1 há 3 possíveis pessoas para sentar; para cada uma dessas pessoas há duas possibilidades no banco 2; e para cada uma do banco 2 há uma no banco 3.

Percebe-se que esse exemplo usa o princípio multiplicativo pois seus eventos ocorrem de maneira independente.

O evento 1: *sentar-se no banco 1* é dado pelo conjunto de três elementos:

Ana (A), Maria (M), João (J)

O evento 2: *sentar-se no banco 2* é dado pelo conjunto de dois elementos:

Ana (A), Maria (M), João (J), excluindo a pessoa que sentou no banco 1

O evento 3: *sentar-se no banco 3* é dado pelo conjunto de um elemento:

Ana (A), Maria (M), João (J), excluindo as pessoas que sentaram no banco 1 e no banco 2

A situação pode também ser representada da seguinte forma:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**	
3 possíveis pessoas	$\times$	2 possíveis pessoas	$\times$	1 possível pessoa	$= 3 \times 2 \times 1$
					$=$ 3! possibilidades

Portanto, há 3x2x1 possibilidades ou 3!, ou seja, 6 possibilidades.

De forma mais geral, qualquer disposição ou ordenação dos objetos de um conjunto de n objetos distintos é dita uma permutação destes n objetos (usando todos a cada vez).

Neste exemplo de permutação, pode-se explicitar todas as possibilidades de disposição dos elementos, no entanto, este processo pode se tornar cansativo se o número de objetos for grande.

Dessa maneira busca-se uma generalização que pode ser obtida a partir do exemplo dado:

Banco 1	**Banco 2**	**Banco 3**
$\underbrace{3}$	$\underbrace{2}$	$\underbrace{1}$
Ana, Maria e João podem ocupar a primeira cadeira	escolhida uma pessoa para a primeira cadeira, restam duas pessoas para ocupar a segunda cadeira	escolhidas duas pessoas para as primeiras cadeiras, resta apenas uma para ocupar a terceira cadeira

Assim o número de formas distintas das três pessoas ocuparem as três cadeiras é dado por

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
3	$\times$	2	$\times$	1

que será representado por $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$, que lê-se a permutação de 3 elementos é 3!, ou seja, existem 6 formas de dispor 3 elementos distintos de um conjunto.

Generalizando a ideia usada para este exemplo, observe a esquematização abaixo pensando em dispor n elementos distintos em n posições.

Posição 1	**Posição** 2	$\cdots$	**Posição** $n-1$	**Posição** n
$\underbrace{n}$	$\underbrace{n-1}$	$\cdots$	$\underbrace{2}$	$\underbrace{1}$
objetos disponíveis para ocupar a posição 1	objetos disponíveis para ocupar a posição 2		objetos disponíveis para ocupar a posição $n-1$ posição $n-1$	objetos disponíveis para ocupar a posição n

Assim o número de formas distintas de se dispor os n elementos pode ser organizado como

Posição 1		**Posição** 2		$\cdots$		**Posição** $n-1$		**Posição** n
n	$\times$	$n-1$	$\times$	$\cdots$	$\times$	2	$\times$	1

E, finalmente, a permutação de n elementos distintos, que é o número de agrupamentos ordenados desses elementos, pode ser calculada por

$$P_n = n! \tag{4.2}$$

Em síntese, a permutação é utilizada quando deseja-se obter o número de formas distintas de que pode-se dispor um determinado número de objetos. Vejamos um outro exemplo de permutação.

Exemplo 7 *Ana, Maria, João e Carlos querem sentar-se em quatro bancos enfileirados (ou enumerados). De quantas maneiras diferentes poderão sentar-se?*

Para resolver este problema, será fixado um primeiro elemento escolhido e altera-se os demais elementos de todas as maneiras possíveis. O diagrama abaixo representa estas escolhas:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**		**Banco 4**
Ana	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Carlos
Ana	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	João
Ana	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	Carlos
Ana	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	Maria
Ana	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Maria
Ana	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	João

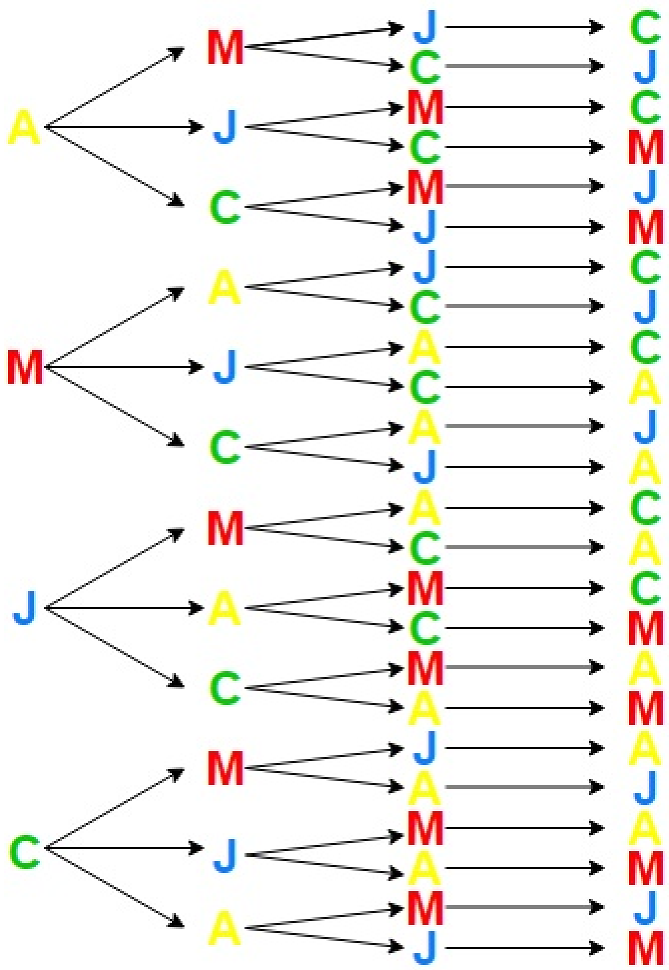
Acima estão descritas apenas as possibilidades quando Ana é fixada no banco 1. Analogamente, quando os demais ocuparem o primeiro banco tem-se as outras possibilidades.

Para a elaboração da árvore de possibilidades deste exemplo (Figura 8), será utilizada a representação:

Ana = A, Maria = M, João = J, Carlos = C

A Figura 8 ilustra que há 4 possíveis pessoas para sentar no banco 1, para cada uma dessas pessoas há três possibilidades no banco 2, duas no banco 3 e uma no banco 4. Portanto, tem-se $4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades, ou seja, $4!$, portanto, 24 possibilidades. Se for utilizada a fórmula $P_n = n!$ para calcular, obtém-se $P_4 = 4! = 24$, o mesmo resultado.

Figura 8 – Árvore de possibilidades do Exemplo 7



Fonte: O autor, 2025

Esta situação pode também ser representada como:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**		**Banco 4**	
4 opções	$\times$	3 opções	$\times$	2 opções	$\times$	1 opção	$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$
							$= 4!$ possibilidades

4.5 Arranjo Simples

Arranjo simples consiste em selecionar e ordenar um grupo de elementos de um dado conjunto, de modo que o agrupamento formado se diferencie dos demais pela ordem dos elementos, porém, o número de elementos de cada grupo é menor do que o número de elementos do conjunto original. Vejamos um exemplo para melhor entendimento.

Exemplo 8 *Ana, Maria, João e Carlos querem sentar-se em* ***dois*** *bancos enfileirados (ou enumerados). De quantas maneiras diferentes poderão sentar-se?*

Do mesmo modo que foi feito na permutação, fixa-se um primeiro elemento escolhido e altera-se os demais elementos de todas as maneiras possíveis. Em seguida, fixa-se um segundo, e o mesmo processo é repetido.

Começando com Ana no primeiro banco e alterando os demais, obtém-se:

Banco1		**Banco2**
Ana	$\longrightarrow$	Maria
Ana	$\longrightarrow$	João
Ana	$\longrightarrow$	Carlos

Agora fazendo o mesmo, fixando Maria no primeiro banco:

Banco1		**Banco2**
Maria	$\longrightarrow$	Ana
Maria	$\longrightarrow$	João
Maria	$\longrightarrow$	Carlos

Da mesma maneira, posicionando João no primeiro banco:

Banco1		**Banco2**
João	$\longrightarrow$	Ana
João	$\longrightarrow$	Maria
João	$\longrightarrow$	Carlos

Finalmente, repete-se o processo com Carlos.

Banco1		**Banco2**
Carlos	$\longrightarrow$	Ana
Carlos	$\longrightarrow$	Maria
Carlos	$\longrightarrow$	João

Observa-se, novamente, que a ordem dos elementos é importante. Perceba que:

Ana $\longrightarrow$ Maria

é diferente de

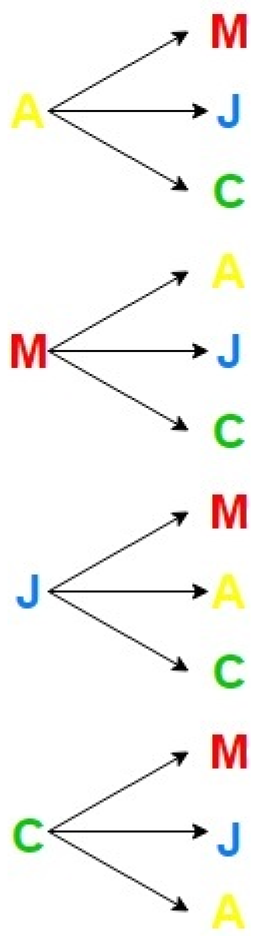
Maria $\longrightarrow$ Ana

A visualização é mais simples através da árvore de possibilidades exposta na Figura 9. Para proceder com a sua construção, será utilizada a seguinte representação:

$$\text{Ana} = A, \quad \text{Maria} = M, \quad \text{João} = J, \quad \text{Carlos} = C$$

Neste exemplo, o diagrama (Figura 9) ilustra que para o banco 1 há 4 possíveis pessoas para sentar, para cada uma dessas pessoas há três possibilidades no banco 2 e as demais pessoas "sobram", ou seja, ficam sem sentar. Portanto, tem-se $4 \times 3 = 12$ possibilidades.

Figura 9 – Árvore de possibilidades do Exemplo 8



Fonte: O autor, 2025.

Observa-se que nesse exemplo também se utiliza o princípio multiplicativo, pois os eventos associados ocorrem de maneira independentes.

O evento 1: *sentar-se no banco 1* é dado pelo conjunto de quatro elementos:

Ana (A), Maria (M), João (J), Carlos (C).

O evento 2: *sentar-se no banco 2* é dado pelo conjunto de três elementos:

Ana (A), Maria (M), João (J), Carlos (C), excluindo a pessoa que sentou no banco 1.

Esquematicamente, pode-se representar a situação da seguinte forma:

$$\underset{\text{pessoas disponíveis}}{\overset{\textbf{Banco 1}}{\underbrace{4}}} \times \underset{\text{pessoas disponíveis}}{\overset{\textbf{Banco 2}}{\underbrace{3}}} = 4 \times 3 = 12$$

Enfim, escreve-se:

$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12$$

como sendo o número de arranjos de 4 pessoas tomadas 2 a 2.

Em ambos Exemplos 7 e 8, há 4 pessoas envolvidas: Ana, Maria, João e Carlos. No entanto, observa-se que :

- no Exemplo 7 deseja-se que as quatro pessoas ocupem 4 bancos, resultando em 24 possibilidades, oriundo de
$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \tag{4.3}$$

- no Exemplo 8 deseja-se que as quatro pessoas ocupem 2 bancos, resultando em 12 possibilidades, oriundo de
$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12. \tag{4.4}$$

Observa-se que a diferença entre (4.3) e (4.4) está no fator 2×1. Tem-se

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

e

$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12.$$

Este fator 2×1 pode ser interpretado como $(n-p)! = (4-2)!$, onde neste caso tem-se $n = 4$ (pessoas) e $p = 2$ (bancos). Assim, o número de permutações P_4 é um múltiplo do arranjo $A_{4,2}$, de modo que:

$$A_{4,2} = \frac{1}{(4-2)!} P_4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 4 \times 3.$$

Observando acima, arranjo $A_{4,2}$ pode ser interpretado matematicamente como o cancelamento dos fatores 2×1 da permutação P_4.

Generalizando, suponha que dado um conjunto de n elementos deseja-se determinar de quantas formas distintas é possível agrupar p elementos desse conjunto, considerando diferença de natureza e ordem de seus elementos. Este problema pode ser esquematizado da seguinte forma.

Posição 1	**Posição 2**	**Posição 3**	$\cdots$	**Posição** p
$\underbrace{n}$	$\underbrace{n-1}$	$\underbrace{n-2}$	$\cdots$	$\underbrace{n-p+1}$
elementos disponíveis para a posição 1	elementos disponíveis para a posição 2	elementos disponíveis para a posição 3		elementos disponíveis para a posição p

Assim, o número de arranjos de n elementos tomados p a p é dado por

$$A_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1). \tag{4.5}$$

No entanto é frequente encontrar a fórmula para determinação do número de arranjos dada em termos de uma permutação. Observe que a Equação (4.5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \\ n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) \times \frac{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1} = \\ \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{P_n}{(n-p)!}, \end{aligned}$$

assim, comumente escreve-se

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{4.6}$$

Em outras palavras, o arranjo é uma permutação em que são agrupados p objetos distintos em cada agrupamento do conjunto, ou seja, não utilizando todos os n elementos do conjunto dado de cada vez.

4.6 Combinação Simples

Na combinação simples, assim como em Arranjos simples, são formados grupos de p elementos distintos, escolhidos de um grupo de n elementos (onde $p \leq n$). A diferença para o arranjo simples está em que os grupos **não** diferem entre si pela ordem dos p elementos.

Escrevendo explicitadamente para o caso de três elementos, se os elementos a, b e c são dispostos em todas as ordens possíveis, ou seja, (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a), mesmo assim tem-se **um único** conjunto $\{a, b, c\}$, já que a ordem não importa.

Neste exemplo, um novo conjunto é obtido somente através da inclusão de um novo elemento, por exemplo d, ao conjunto original, obtendo, por exemplo, $\{a, b, d\}$.

Essa situação ficará mais clara no exemplo 9.

Exemplo 9 *De quantas maneiras podemos escolher duas pessoas para estarem dentro de uma sala entre quatro pessoas possíveis (Ana, Maria, João e Carlos)?*

Observa-se que não existe uma ordem de sentar em bancos, como nos exemplos anteriores, nem mesmo a ordem de entrar na sala importa. O único fator a ser considerado é quais pessoas estão na sala.

Na representação abaixo, as possibilidades quando Ana está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
Ana	e	Maria
Ana	e	João
Ana	e	Carlos

Em seguida estão representadas as possibilidades em que Maria está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
Maria	e	Ana
Maria	e	João
Maria	e	Carlos

Da mesma maneira, quando João está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
João	e	Ana
João	e	Maria
João	e	Carlos

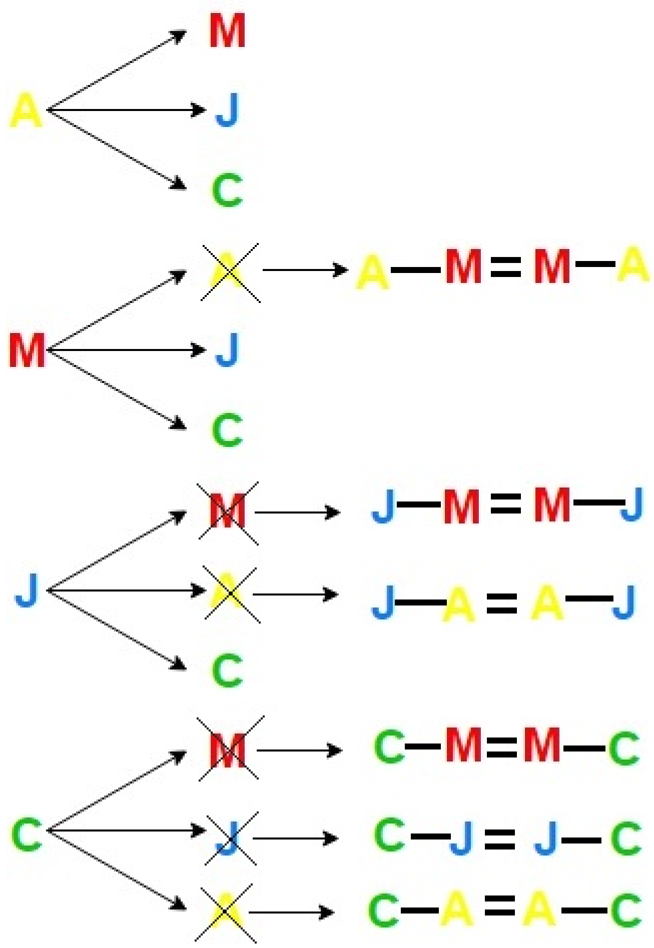
E ainda, as possibilidades quando Carlos está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
Carlos	e	Ana
Carlos	e	Maria
Carlos	e	João

Percebe-se que Ana e Maria, na primeira representação, e Maria e Ana, na segunda representação, compõem a mesma possibilidade dentro da sala. Afinal, se Ana entra na sala e depois Maria ou se Maria entra primeiro e depois Ana não faz diferença, o que importa é quais pessoas estão na sala.

Um primeiro formato da árvore de possibilidades para esse exemplo está representado na Figura 10.

Figura 10 – Árvore de possibilidades do Exemplo 9

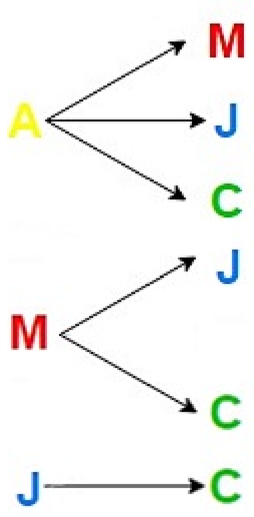


Fonte: O autor, 2025

Percebe-se, na árvore de possibilidades da Figura 10, que no segundo nó uma opção foi cancelada, pois essa mesma opção foi apresentada no nó anterior com a ordem trocada. Como a ordem dos elementos não importa neste caso, uma das opções deve ser excluída. Do mesmo modo, no terceiro nó foi cancelada duas opções já apresentada nos nós anteriores e no quarto todas as opções, também canceladas, já apresentadas em outros nós.

Portanto, a Figura 11 ilustra as opções que permaneceram, isto é, as 6 possibilidades de solução do problema, metade das possibilidades do Exemplo 8.

Figura 11 – Árvore de possibilidades do Exemplo 9, excluídas as repetições



Fonte: O autor, 2025

No que segue, será realizada uma análise das diferenças entre os Exemplos 8 e 9. Em ambos exemplos tem-se 4 pessoas envolvidas: Ana, Maria, João e Carlos.

No entanto, observa-se que:

- no Exemplo 8 deseja-se que as quatro pessoas ocupem 2 bancos, resultando em 12 possibilidades, oriundo de
$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12. \tag{4.7}$$
- no Exemplo 9 deseja-se que as quatro pessoas ocupem qualquer lugar dentro da sala, resultando em 6 possibilidades, oriundo de
$$C_{4,2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6. \tag{4.8}$$

Observa-se que a diferença entre (4.7) e (4.8) está no fator $\frac{1}{2}$. Tem-se

$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12$$

e

$$C_{4,2} = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Este fator $\frac{1}{2}$ pode ser interpretado como

$$\frac{1}{p!} = \frac{1}{2!},$$

onde $p = 2$ é o número de bancos.

Assim, o arranjo $A_{4,2}$ é um múltiplo da combinação $C_{4,2}$, de modo que:

$$C_{4,2} = \frac{1}{2!} \times A_{4,2} = \frac{1}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Observando acima, pode-se deduzir que:

$$C_{n,p} = \frac{1}{p!} \times A_{n,p}$$

.

Sabendo que a fórmula do arranjo é:

$$A_n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Deduz-se que a fórmula da combinação é:

$$C_n = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Esta divisão na fórmula do arranjo por $p!$ pode ser interpretado como a divisão necessária em virtude das repetições existentes que no diagrama ilustrado na Figura 10 eram as opções que foram canceladas por já haverem sido apresentadas em um nó anterior.

Substituindo n por 4 (número de pessoas) e p por 2 (número de bancos), obtém-se:

$$C_4 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{24}{(2) \times 2} = \frac{24}{4} = 6, \tag{4.9}$$

que é o mesmo resultado encontrado anteriormente.

Generalizando, suponha-se que dado um conjunto de n elementos deseja-se determinar de quantas formas distintas é possível agrupar p elementos desse conjunto, considerando que não há diferença na ordem de seus elementos. Assim, o número de combinações de n elementos tomados p a p é dado por

$$C_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}. \tag{4.10}$$

A fórmula acima para determinação do número de combinações pode ser dada em termos de um arranjo ou de uma permutação. Observa-se que a Equação (4.10) pode ser reescrita como:

$$C_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} =$$

$$C_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} \times \frac{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1} =$$

$$\frac{n!}{(n-p)! \cdot (p)!} = \frac{A_{n,p}}{(p)!} = \frac{P_n}{(n-p)! \cdot p!}.$$

Assim, comumente escreve-se

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}. \tag{4.11}$$

O objetivo da parte final deste capítulo sobre os princípios e modelos da combinatória, foi de apresentar e demonstrar que esses modelos matemáticos e suas fórmulas são consequência daqueles princípios. O uso da árvore de possibilidades e dos princípios, principalmente o princípio multiplicativo, é fator decisivo para o entendimento e a resolução dos problemas de análise combinatória. Sugere-se que o uso de fórmulas seja feito somente após esse entendimento e nos casos em que for necessário, devido ao grande número de elementos ou de contas envolvidas.

5 DESCRIÇÃO DAS HISTÓRIAS INTERATIVAS

As histórias interativas são, basicamente, compostas de um ator ”principal” que conduz a narrativa e apresenta explicações ou problemas de Probabilidade. Também há atores ”secundários” para interação e explicação da(s) situação(ões) proposta(s). Conforme a interação do usuário nos objetos apresentados, os atores vão interagindo e guiando para a resolução do problema. Nessa interação, espera-se ocorrer o desenvolvimento do raciocínio proposto. Finalizando a resolução, decorre ultimas explicações para consolidar o entendimento.

A programação de algumas situações-problema pode se tornar muito extensa e demorada ou, mesmo, inviável devido à grande quantidade de atores/cenários envolvidos. Nestes casos há duas sugestões: criar a interação em parte do problema como ocorre na sexta história interativa (Figura 17), em que os atores da interação são carros que podem ser conduzidos aos estandes, enquanto, os caminhões são utilizados somente para explicação; ou fixar parte do evento, como ocorre na quinta história interativa (Figura 16), em que a parede norte é fixada e a interação ocorre nas demais paredes.

A seguir são apresentadas as Histórias Interativas elaboradas no Scratch e disponibilizadas no site. Para cada história, foram destacados:

- Tipo de problema;
- Estratégia de resolução;
- Representação;
- Habilidade(s) da BNCC (segundo exposto no Cap. 3);
- Descrição da história;
- Invariantes operatórios.

5.1 Primeiras Noções de Análise Combinatória

Tipo de problema: Produto Cartesiano e Combinação Condicional

Estratégia de resolução: Princípio Multiplicativo

Representação: Listagem

Habilidade(s) da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Descrição: A primeira história (Figura 12) apresentada é narrada pelo personagem Diogo que explica, através de exemplos, como combinar elementos e contá-los para calcular as maneiras possíveis de solucionar os problemas de Análise Combinatória.

Figura 12 – História Interativa 1

Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/413981574>

Diogo faz uma breve apresentação de si e de seu amigo Doguito, personagem representado por um cão que ajudará durante a elaboração de estratégias para a resolução do problema proposto na história. Em seguida é descrita a situação-problema: "*Duas moedas são lançadas simultaneamente, quantas são as possibilidades de que ambas caiam com a mesma face para cima?*"

Então, faz uma apresentação das moedas nas ordenações possíveis:

Coroa	——	Coroa
Coroa	——	Cara
Cara	——	Cara
Cara	——	Coroa

Revelando, posteriormente, as duas opções corretas:

Coroa	——	Coroa
Cara	——	Cara

Concluindo, portanto, que há 2 possibilidades de que ambas as moedas caiam com a mesma face para cima.

Na sequência da história, Diogo apresenta outro exemplo: *Um grupo de seis amigos: João, André, Felipe, Carla, Paula e Beatriz, resolveu jogar uma partida de truco de duplas. Quantas são as possíveis duplas que João pode formar? E quantas são as possíveis duplas que João pode formar com uma menina?*

O problema, agora, requer que sejam avaliadas duas situações diferentes, a primeira, são as duplas com todos e a segunda, condicionada a duplas com meninas. Sendo usada a representação por listagem com a intenção de auxiliar o usuário na resolução.

O personagem Diogo apresenta os nomes das duplas de João nas ordenações possíveis:

João	——	André
João	——	Felipe
João	——	Carla
João	——	Paula
João	——	Beatriz

Concluindo, portanto, que há 5 possíveis duplas que podemos formar com João.

Posteriormente exibe a seleção relativa à segunda pergunta:

João	——	Carla
João	——	Paula
João	——	Beatriz

Concluindo, então, que há 3 possíveis duplas que podemos formar com João e uma menina.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram apresentados dois problemas: o primeiro problema, do tipo produto cartesiano, com dois conjuntos distintos de 2 elementos cada, em que 1 elemento de cada conjunto será combinado para formar um novo conjunto. O segundo problema, do tipo combinação condicional, 6 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos em que um dos 6 elementos, “João”, já ocupava lugar no agrupamento, restando ocupar o outro lugar com um dos demais 5 elementos. Na sequência, condicionando este outro lugar com somente as meninas, ou seja, ocupar o outro lugar com um de 3 elementos.

5.2 Construindo a Árvore de Possibilidades

Tipo de problema: Produto cartesiano e combinação condicional

Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo

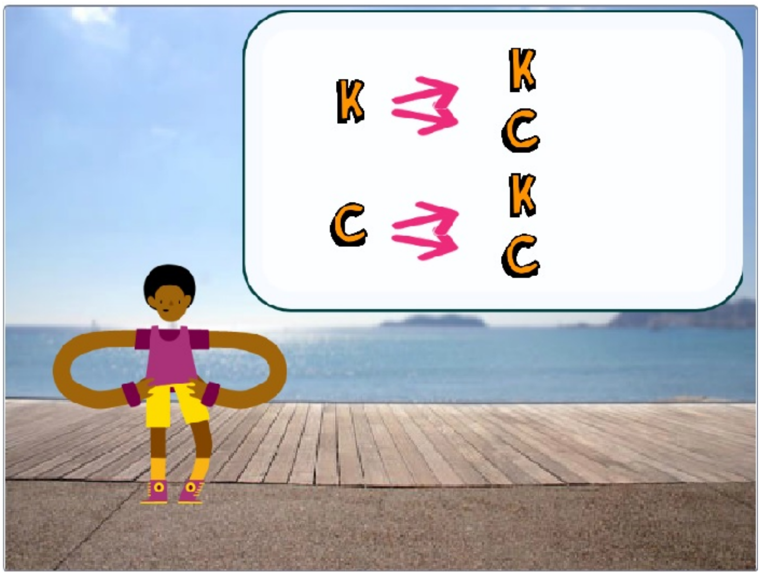
Representação: Árvore de possibilidades

Habilidade(s) da BNCC:

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Descrição: A segunda atividade (Figura 13) apresentada explica o que é e como fazer uma árvore de possibilidades.

Figura 13 – História Interativa 2



Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/439609545>

A história, também narrada pelo personagem Diogo, explica como representar as opções das questões de contagem substituindo os sujeitos, seres ou objetos do evento por elementos alfanuméricos ou outros símbolos. Essa construção da árvore de possibilidades tem o objetivo de mostrar ao usuário que o uso desse diagrama organiza os elementos, evitando o esquecimento ou a repetição e ainda facilita a compreensão e resolução dos problemas.

Como exemplo, usou-se a questão das moedas resolvida no projeto anterior, onde substituímos as suas opções de moedas por letras. A moeda cara é trocada pela letra K e a moeda coroa pela letra C e assim, criamos a árvore de possibilidades.

Em um segundo exemplo, também questão do projeto anterior, são exibidos os nomes das duplas com João e depois substituídos os nomes pela respectiva letra inicial, formando, por fim, a árvore de possibilidades. Nos dois problemas desenvolvidos foi utilizado o princípio multiplicativo, mas na história ele não foi apresentado de forma explícita, pois este será explicado na atividade seguinte.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram desenvolvidos os mesmos problemas das atividades anteriores, ou seja, o primeiro problema do tipo produto cartesiano, com dois conjuntos distintos de 2 elementos cada, onde 1 elemento de cada conjunto será combinado para formar um novo conjunto. O segundo problema do tipo combinação condicional, 6 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos onde um dos 6 elementos, “João”, já ocupava lugar no agrupamento, restando ocupar o outro lugar com um dos demais 5 elementos. Na sequência, condicionando este outro lugar com somente as meninas, ou seja, ocupar o outro lugar com um de 3 elementos.

5.3 Compreendendo os Princípios Aditivo e Multiplicativo

Tipo de problema: Princípio aditivo e Produto Cartesiano
Estratégia de resolução: Princípios aditivo e multiplicativo
Representação: Árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:
(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore (árvore de possibilidades).

Descrição: Essa atividade (Figura 14) é apresentada com o intuito de desenvolver a compreensão do usuário sobre a diferença entre os princípios aditivo e multiplicativo e sua importância na resolução de problemas de contagem.

Figura 14 – História Interativa 3

Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/549705534>

Diogo, agora, narra a história com a participação de um hipopótamo “voador”, explicando os princípios aditivo e multiplicativo. Em seguida, expõe as diferenças entre os dois, com auxílio dos Exemplos 3 e 4 do capítulo 4, que envolvem o cinema e o fliperama.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram desenvolvidos dois problemas: o primeiro, usando o princípio aditivo, com dois conjuntos distintos, um de 3 elementos e outro de 4 elementos, onde 1 elemento entre os dois conjuntos será escolhido para formar um novo conjunto; e, o segundo problema, do tipo produto cartesiano, com dois conjuntos distintos, um de 3 elementos e outro de 4 elementos, em que 1 elemento de cada conjunto será combinado para formar um novo conjunto.

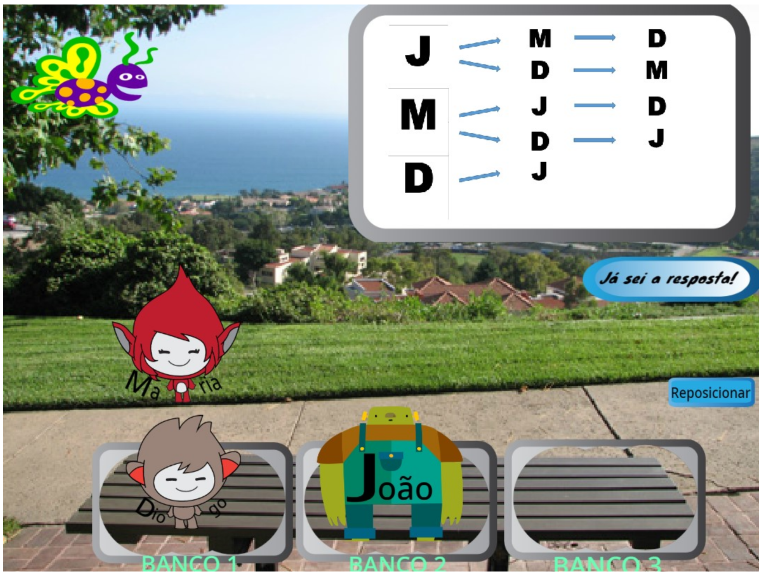
5.4 Acomodando Três Pessoas em Três Bancos

Tipo de problema: Permutação
Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo
Representação: Árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Descrição: A próxima atividade (Figura 15) apresentada desenvolve uma interação com o usuário, precedida de explicação do problema proposto.

Figura 15 – História Interativa 4



Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/410223955>

Através de um novo personagem, uma borboleta, introduzimos uma questão: *De quantas maneiras, três pessoas (João, Maria e Diogo) podem sentar-se em três bancos (um ao lado do outro)?*

Na tela, existe um banco de três lugares e os três personagens João, Maria e Diogo. Neste momento, o usuário é convidado a interagir, escolhendo em qual banco irá acomodar João, Maria e Diogo enquanto visualiza as opções que aparecem no canto superior direito da tela. Trocando os personagens de lugar, o usuário encontra outras opções, que também aparecem na tela. Quando todas as opções forem encontradas, surge na tela a árvore de possibilidades formada e o usuário poderá dar a resposta da questão na tela. Após dar essa resposta, a personagem borboleta inicia as explicações sobre o que é permutação e mostra o uso do princípio multiplicativo na resolução, além da correspondência com a fórmula da permutação.

Finalizando, conclui, que há 6 maneiras de três pessoas sentar-se em três bancos (um ao lado do outro).

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foi desenvolvido um problema do tipo permutação, com 3 elementos, formando agrupamentos ordenados de 3 elementos no qual a ordem dos elementos gera novas possibilidades e todos os elementos do conjunto serão usados.

5.5 Pintando as Paredes do Quarto de Manuela

Tipo de problema: Permutação

Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo

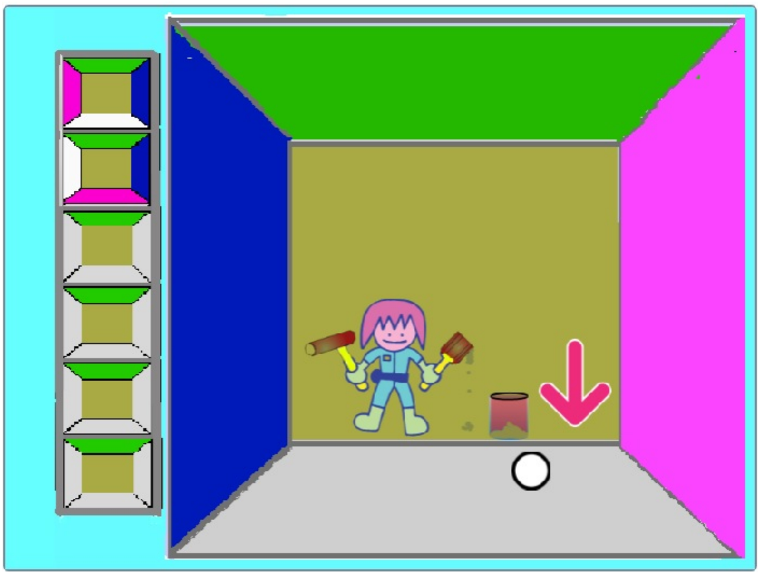
Representação: Gráfica dos elementos

Habilidades da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Descrição: Essa atividade (Figura 16) é apresentada pela personagem Manuela, mesma personagem de uma questão da OBMEP (descrita posteriormente). A atividade permite a interação do usuário (utilizando mouse e teclado para construção das estratégias de resolução), seguida de explicação e resolução do problema.

Figura 16 – História Interativa 5



Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/431887800>

A personagem Manuela solicita auxílio do usuário para pintar as paredes de seu quarto, das cores azul, rosa, verde e branco. O usuário, então, é orientado a interagir pintando as paredes, bastando arrastar as cores até elas e assim vai observando as opções que resultam no lado esquerdo da tela. Na parede norte do quarto já está fixada a cor verde e o usuário pode pintar as demais paredes. Após pintar e repintar em todas as possibilidades das demais paredes, o usuário verifica, através da interação, 6 maneiras de pintar as paredes, tendo na parede norte fixada a cor verde.

Na sequência, Manuela explica o que acontece se trocarmos a cor verde da parede norte por outras cores, chegando à conclusão, fazendo uso da representação gráfica, de que são 24 possibilidades de pintar as paredes de seu quarto das quatro cores diferentes. Mostra, também, como pode-se usar o princípio multiplicativo para chegar à solução da questão e que se trata de uma permutação.

Neste momento, Manuela apresenta a questão da OBMEP (Quadro 5):

Quadro 5 – Questão da OBMEP (2007, nível 2, fase 1, nº 16)

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Fonte: (OBMEP, 2007)

Manuela explica que para obter-se a solução do problema é necessário subtrair do total de possibilidades o número de maneiras de a parede azul ficar de frente para parede rosa. Exibindo a contagem de quantas são essas possibilidades, a personagem pede que o usuário digite este número, a saber. 8. Finalmente, Manuela conclui o raciocínio, solicitando que o usuário dê a resposta final, ou seja, $24 - 8 = 16$.

Com esse exemplo, é apresentado ao usuário outra situação envolvendo permutação e fomentando o uso do princípio multiplicativo para a resolução da questão. Usando desta vez, ao invés de árvore de possibilidades, a representação gráfica dos elementos, no caso as paredes do quarto. Mostrando que outras representações também são válidas para buscar as soluções dos problemas.

Invariantes Operatórios: Foi desenvolvido um problema do tipo permutação, com 4 elementos, formando agrupamentos ordenados de 4 elementos os quais a ordem dos elementos gera novas possibilidades e todos os elementos do conjunto serão usados.

5.6 Participando do Salão de Automóveis de São Paulo

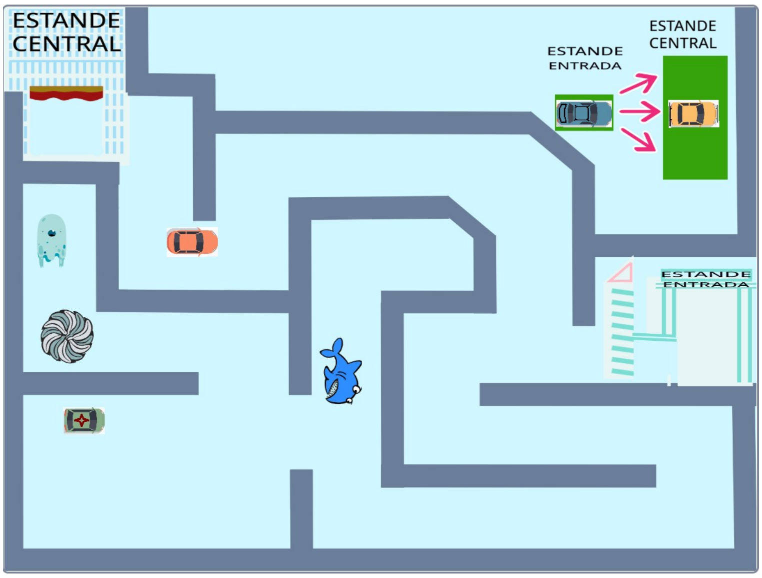
Tipo de problema: Arranjo
Estratégia de resolução: Princípios aditivo e multiplicativo
Representação: Árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Descrição: A construção no Scratch (Figura 17) assemelha-se a um jogo, precedida da explicação da situação problema a ser resolvida durante a interação.

Figura 17 – História Interativa 6



Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/496282483>

A história é narrada pelo personagem pinguim que inicia apresentando uma questão do ENEM[1] (Quadro 6):

Quadro 6 – Questão do ENEM (2018, 2º Dia, Caderno 5, Amarelo, nº 161)

Salão de Automóveis de São Paulo.
Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.
Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

1. $A_{4,10}$;
2. $C_{4,10}$;
3. $C_{4,2} \times C_{6,2} \times 2 \times 2$;
4. $A_{4,2} \times A_{6,2} \times 2 \times 2$;
5. $C_{4,2} \times C_{6,2}$.

Fonte: (ENEM, 2018)

O personagem Pinguim, então, solicita que o usuário não se preocupe, neste momento,

[1] Exame Nacional do Ensino Médio

em obter a expressão, e sim, busque identificar a quantidade de maneiras diferentes. Para isso, convida-o a interagir, levando pelo caminho, somente os carros ao estande. Ao longo dessa interação, à medida que o usuário organiza os carros no estande, pode observar as maneiras possíveis que se formam e aparecem na tela. No final, visualizando a árvore de possibilidades completa que se forma, conclui-se que são possíveis 12 maneiras de expor somente os carros no estande. Neste momento, é explicado de que se trata do princípio multiplicativo, com 4 opções de carros para o estande de entrada e para cada um desses, tem-se 3 opções de carros no estande principal. Formando, assim, 4×3 opções ou um arranjo $A_{4,2}$.

Na sequência, é explicado ao usuário que, ao organizar os caminhões nos estandes, de forma análoga aos carros, observa-se também um arranjo. Ao final, também observando a árvore de possibilidades, conclui-se que há 30 maneiras de expor somente os caminhões nos estandes. Pelo princípio multiplicativo, tem-se 6 opções de caminhões para o estande de entrada e, para cada um desses, 5 opções de caminhões no estande principal. Formando, assim, 6×5 opções ou um arranjo $A_{6,2}$.

Concluídos os arranjos dos carros e caminhões, o personagem Pinguim observa que os dois eventos ocorrem simultaneamente e de maneira independente. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo tem-se que a solução da situação-problema é 12×30 possibilidades ou $A_{4,2} \times A_{6,2}$ de expor, em dois estandes do salão do automóvel, um carro e um caminhão em cada estande. Ao finalizar, o personagem Pinguim comenta que $A_{4,2} \times A_{6,2}$ não se encontra entre as alternativas da prova do ENEM, porém, ele explica que (como já observado no Capítulo 4) para $n = 6$ e $p = 2$,

$C_{6,2} = \frac{1}{2!} \times A_{6,2}$ ou $C_{6,2} \times 2! = A_{6,2}$, logo $A_{6,2} = C_{6,2} \times 2$.

Portanto, $A_{4,2} \times A_{6,2} = C_{6,2} \times 2 \times C_{6,2} \times 2$.

Ou seja, $C_{6,2} \times C_{6,2} \times 2 \times 2$.

Logo, a alternativa **C** da prova do ENEM é a correta.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram desenvolvidos dois problemas do tipo arranjo, o primeiro com 4 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos e o segundo com 6 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos. Em ambos os casos, a ordem dos elementos gera novas possibilidades mas nem todos os elementos do conjunto serão usados.

5.7 Movendo Duas Pessoas para Dentro da Casa

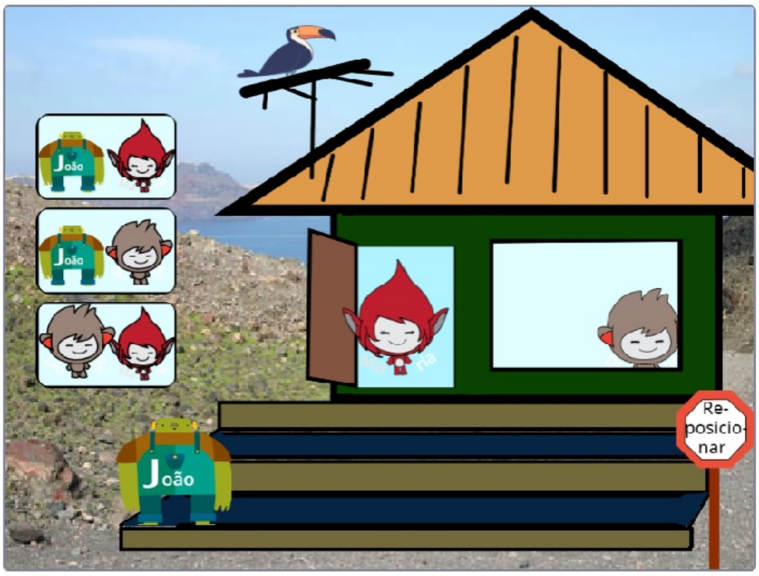
Tipo de problema: Combinação
Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo
Representação: Listagem e árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Descrição: A próxima atividade (Figura 18) é narrada pelo personagem Tucano que expõe uma questão ao usuário: *João, Maria e Diogo estão do lado de fora de casa. De quantas maneiras dois deles podem estar dentro de casa?*

Figura 18 – História Interativa 7



Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/494262944>

A tela exibe uma casa com os três personagens João, Maria e Diogo. Tucano explica que a ordem em que eles entram na casa não importa e sim, quais estão no interior dela. O usuário pode interagir, arrastando os personagens para o interior da casa. Então, as opções encontradas são visualizadas no lado esquerdo da tela. Trocando os personagens de dentro da casa, o usuário encontra outras opções, que também aparecem na tela. Quando todas as opções forem encontradas, o Tucano explica que existem três possibilidades e que se trata de uma combinação, pois não importa a ordem em que eles entram na casa e sim quais pessoas estão na casa. Portanto, se entrar na casa João e depois Maria ou se entrar Maria e depois João tem-se um único agrupamento. Na sequência, Tucano mostra como determinar essa resposta usando a fórmula para combinação.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foi desenvolvido um problema, do tipo Combinação, com 3 elementos, formando agrupamentos ordenados de 3 elementos em que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

5.8 Capturando os Alunos Medalhistas

Tipo de problema: Combinação e Arranjo
Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo
Representação: Listagem e árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Descrição: A construção no Scratch (Figura 19) assemelha-se a um jogo, precedida da explicação da situação problema a ser resolvida durante a interação.

Figura 19 – História Interativa 8

Fonte: O autor, 2025.
<https://scratch.mit.edu/projects/501220868>

A história é narrada e conduzida pela personagem, astronauta Dani, que ao sair de seu foguete, apresenta a questão da OBMEP (Quadro 7):

Quadro 7 – Questão da OBMEP (2015, nível 3, fase 1, nº 5)

Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pode receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Fonte: (OBMEP, 2015)

Na sequência, o usuário interage, através do foguete ou nave da astronauta, acertando ou capturando as duplas de alunos medalhistas, sem analisar as medalhas que vão receber, apenas formando duplas. Após encontradas todas as duplas possíveis, a astronauta Dani explica que são dez combinações possíveis e apresenta a árvore de possibilidades da combinação das duplas. Detalhando que se trata de uma combinação $C_{5,2}$ e como obter essa resposta utilizando a fórmula de combinação.

A personagem, astronauta Dani, passa a explicar ao usuário as opções de medalhas que cada dupla pode receber. São três tipos de medalhas que cada pessoa pode receber vezes três tipos da outra pessoa da dupla, ou seja, são $3 \times 3 = 9$ possibilidades de medalhas.

Por fim, a astronauta conduz o usuário à explicação final de que a formação das duplas e o recebimento das medalhas são eventos que ocorrem simultaneamente e de maneira independente. Assim, pelo princípio multiplicativo tem-se $10 \times 9 = 90$ combinações, ou ainda, $C_{5,2} \times 9$. Resultando na alternativa **D** da prova da OBMEP.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foi desenvolvido dois problemas: o primeiro, do tipo Combinação, com 5 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos cuja ordem dos elementos não gera novas possibilidades; e, o segundo, do tipo arranjo, com 3 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos cuja ordem dos elementos gera novas possibilidades, mas nem todos os elementos do conjunto serão usados.

Referências

AZEVEDO, J.; BORBA, R. E. de S. R. Construindo Árvores de possibilidades virtuais: O que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 2, p. 39–62, 2013.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012 para o Ensino Médio: Matemática**. Brasília, 2011.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015 para o Ensino Médio: Matemática**. Brasília, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

ENEM 2018. **Exame Nacional do Ensino Médio**. - INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em Fevereiro de 2021.

LIMA, A. P. B. de. **Princípio Fundamental da Contagem: Conhecimentos de Professores de Matemática sobre seu uso na Resolução de Situações Combinatórias**. 138 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Teoria e Problemas de Matemática discreta**. 2. ed. São Paulo-SP: Artmed Editora S.A., 2004.

MORGADO, A. C. de O. et al. **Teoria e Problemas de Matemática discreta**. 6. ed. São Paulo-SP: SBM, 1991.

OBMEP 2007. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. - IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Ministério da Educação, 2007. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em Fevereiro de 2021.

OBMEP 2008. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. - IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Ministério da Educação, 2008. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em Fevereiro de 2021.

OBMEP 2015. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. - IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Ministério da Educação, 2015. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em Março de 2021.

PESSOA, C. A. dos S.; BORBA, R. E. de S. R. Quem dança com quem: O desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ**, v. 17, jan-jun 2009.

ZOPPO, B. M. **A contribuição do scratch como possibilidade de material didático digital de matemática no ensino fundamental I**. 135 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.