X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

A Torre de Monty Hall

de Faria, Beatriz[1]; Possebon, Vanessa Aparecida de Rezende[2] e Grisi, Rafael de Mattos[3]

Resumo: *Neste trabalho, discutimos uma proposta alternativa para exposição do problema de Monty Hall como uma ação extensionista, realizada dentro do projeto MatematiZou. Apresentamos uma versão "gameficada" do problema original, estimulando a compreensão do conceito de eventos dependentes.*

Palavras-chave: *Probabilidade, Educação, Monty Hall.*

1. Introdução

Neste trabalho procuramos propor uma maneira lúdica de abordar conceitos iniciais de probabilidade como independência e probabilidade condicional. Nossa proposta usa, principalmente, dois problemas conhecidos: o "Monty Hall" e a"Ruína do Jogador".

2. Monty Hall Orignal

Problema 3.1 (Monty Hall) *Imagine que você está de frente para três portas numeradas: 1, 2 e 3, e o apresentador diz que atrás de uma dessas portas tem um carro; mas atrás de cada uma das outras duas tem um bode. Escolha uma porta e leve para casa o que estiver atrás dela.*

Você vai lá e escolhe uma das três portas; mas antes que você possa abri-la, o apresentador (que sabe exatamente onde está o carro) pede para você esperar e ele abre uma das portas não escolhidas, mostrando um dos bodes. Nesse momento ele faz a seguinte pergunta: Você quer ficar com a porta que você escolheu ou quer trocá-la pela outra porta fechada? [1]

As pessoas, em geral, assumem que os eventos do problema de Monty Hall são independentes, o que as leva a acreditar que não fará diferença trocar ou não a porta originalmente escolhida [2].

Definição 3.1 *Diremos que dois eventos A e B são* ***independentes*** *se:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

e ***dependentes****, caso contrário.*

Definição 3.2 *Dados eventos A e B, definimos a probabilidade condicional de A ocorrer dado que B ocorre é dada por:*

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Veja que, pelas definições acima, podemos dizer que dois eventos A e B são independentes se $P(A|B) = P(A)$. Será que a primeira escolha de portas e a segunda escolha de portas no Monty Hall são eventos independentes?

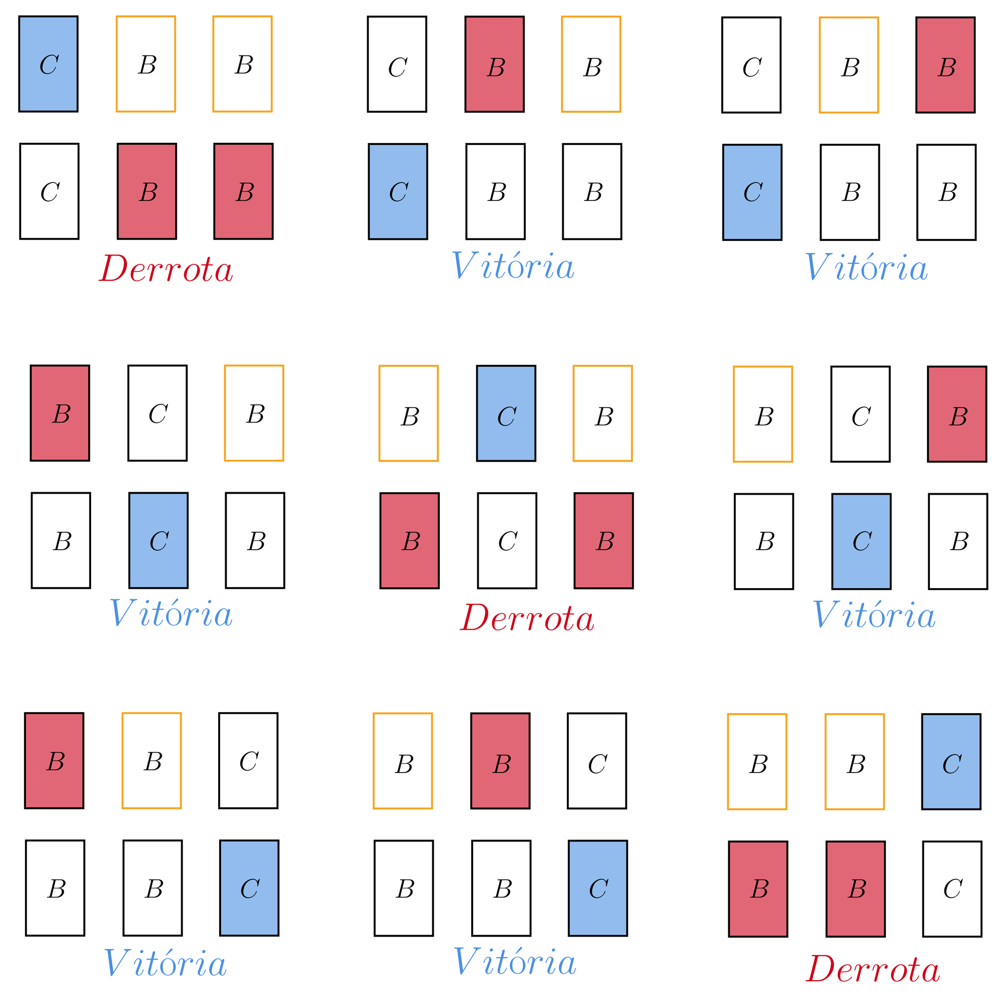

Figura 1. Explicação da solução para o problema de Monty Hall usando a estratégia de trocar de porta.

Para compreender a diferença entre a adoção da estratégia vencedora em relação às demais, é necessário que o problema de Monty Hall seja repetido várias vezes, tornando suas abordagens em sala de aula monótonas aos alunos [3].

3. Ruína do Jogador

Problema 4.1 (Ruína do Jogador) *Consideremos um jogador que vai a um cassino para fazer uma série de apostas. Em cada uma delas, ou ele ganha 1 real com probabilidade p, ou perde 1 real com probabilidade $q := 1 - p$. Começando com uma fortuna inicial de $m \geq 0$, ele jogará até perder todo o seu dinheiro, e estar arruinado, ou até acumular um fortuna de $N \geq m$ reais.*

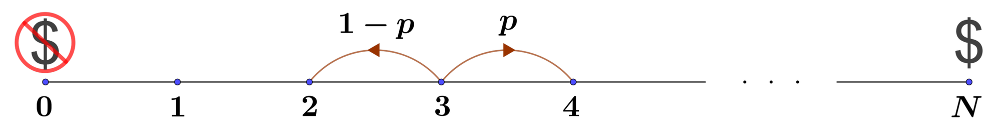

Figura 2. O processo da Ruína do Jogador.

Proposição 4.1 *Com base no Problema da ruína do jogador descrito acima, a probabilidade da ruína é dada por*

$$P(ruína) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}, & se\, p \neq 1-p \\ 1 - \dfrac{m}{N}, & se\, p = q \end{cases}$$

4. Torre de Monty Hall

Problema 5.1 (Torre de Monty Hall) *Em uma torre com 8 níveis, enumerados de 0 a 7. Em cada um deles, com exceção dos níveis 0 e 7, o jogador defronta-se com o Problema de Monty Hall, da seguinte maneira: existem duas escadas que sobem e uma que desce, depois do jogador escolher uma porta, revela-se uma passagem que sobe (esta passagem fica bloqueada), e é dada ao jogador a escolha de trocar ou não de porta. O jogo inicia-se no nível 3, se o jogador chegar ao nível 0, ele fica preso em um calabouço e perde o jogo. Se ele chegar ao nível 7, ele vence o jogo.*

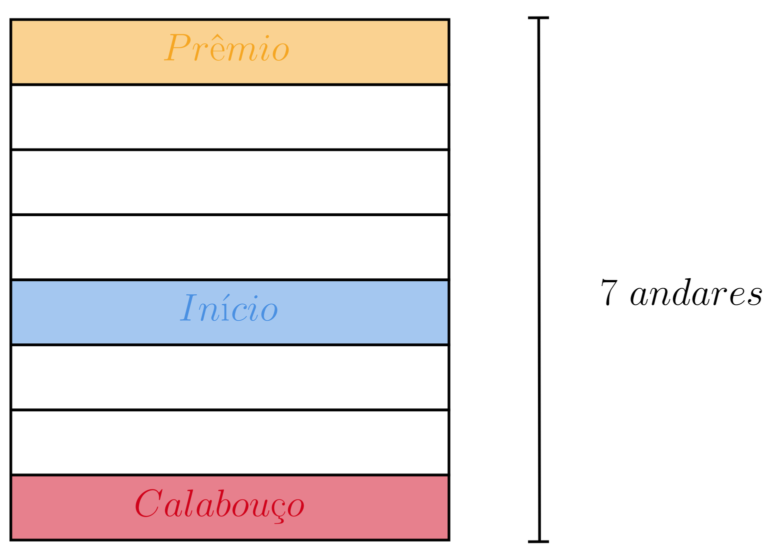

Figura 3. Estrutura da Torre de Monty Hall.

Note que, a situação análoga à *Ruína do Jogador* com $p = \frac{1}{3}$ (caso a porta for trocada) ou $p = \frac{2}{3}$ (caso a porta for mantida), $m = 3$ e $N = 7$. Podemos usar a proposição 4.1 para calcular a probabilidade de ruína de um jogador que adota ou não a estratégia vencedora:

$$P(\text{ruína}|\text{estratégia correta}) = \frac{\left(\frac{1/3}{2/3}\right)^3 - \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^7}{1 - \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^7} = \frac{15}{127} \approx 0.1181$$

$$P(\text{ruína}|\text{estratégia incorreta}) = \frac{\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^3 - \left(\frac{2/3}{1/3}\right)^7}{1 - \left(\frac{2/3}{1/3}\right)^7} = \frac{120}{127} \approx 0.9448$$

Mesmo se o jogador decidir adotar uma estratégia aleatória, onde a probabilidade dele trocar de porta é x, teríamos $p = \frac{2-x}{3}$. Nesse caso, a probabilidade de ruína aumenta conforme o valor de x aumenta e o comportamento dessa função é exibida no gráfico abaixo.

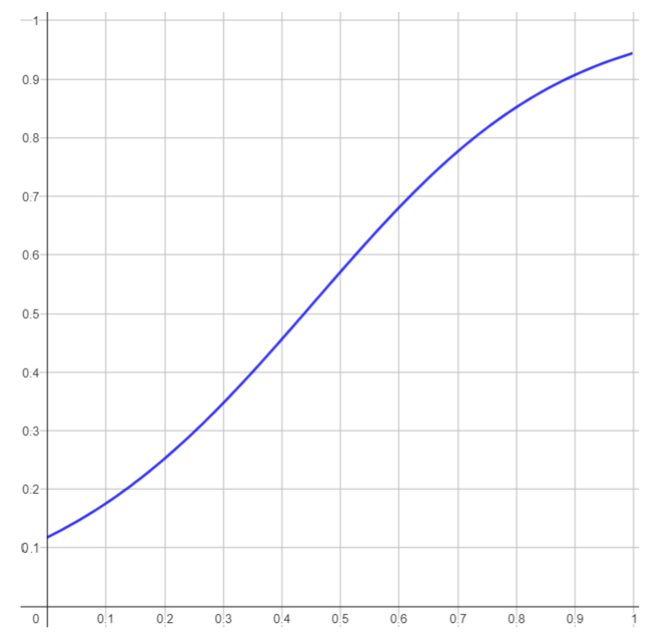

Figura 4. Gráfico da probabilidade de ruína (eixo y) pela probabilidade do jogador trocar de porta (eixo x).

Com essas probabilidades, fica clara a diferença de adoção de cada estratégia. Criamos uma versão gameficada que torre de Monty Hall que está disponível para o público geral no site do MatematiZou, projeto de extensão da Universidade Federal do ABC.

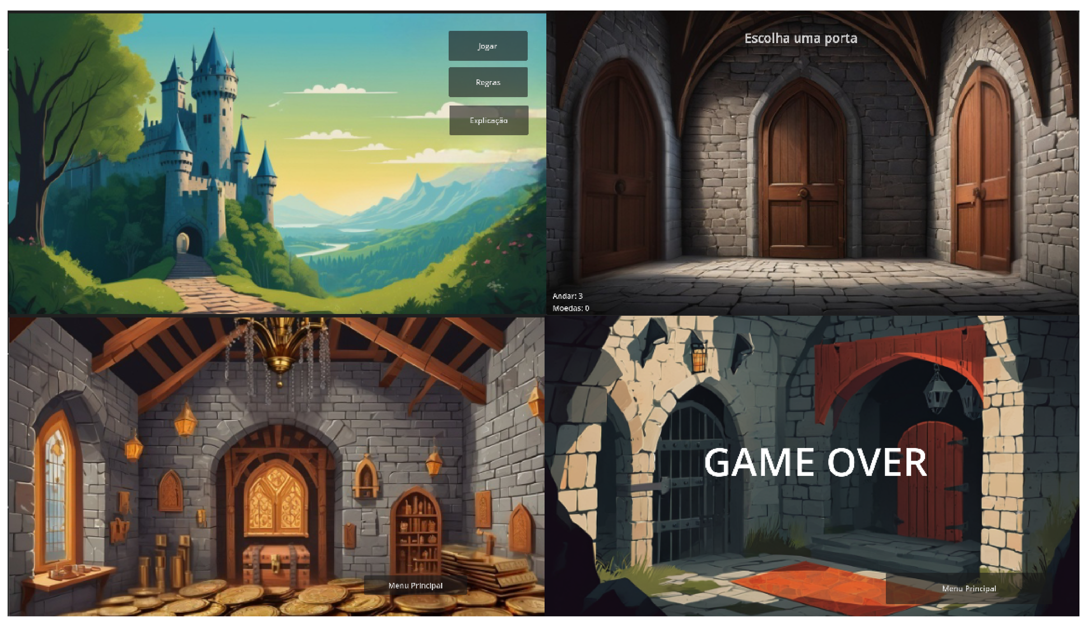

Figura 3. Telas do jogo da Torre de Monty Hall.

Referências

[1] SELVIN, S. **A problem in probability.** American Statistician, 1975.

[2] SAENEN, L; HEYVAERT, M; VAN DOOREN, W; SCHAEKEN, W; ONGHENA, P. **Why Humans Fail in Solving the Monty Hall Dilemma: A Systematic Review.** Psychol Belg, 2018.

[3] BATANERO, C.; CONTRERAS, J.M.; DÍAS, C., CAÑADAS, G.R. **Preparing teachers to teach conditional probability: a didactic situation based on the Monty Hall problem**. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014.

[4] Edwards, A. W. F. **Pascal's Problem: The "Gambler"s Ruin'.** International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique, 1983.

Apoios:

[1]Universidade Federal do ABC
[2]Universidade Federal do ABC
[3]Universidade Federal do ABC