UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PAULO ROBERTO COSTA PORTO

PROPOSTA DE ATIVIDADES DE ARITMÉTICA MODULAR COM O USO DE POLÍGONOS ESTRELADOS E CHRYZODES

CURITIBA

2024

PAULO ROBERTO COSTA PORTO

PROPOSTA DE ATIVIDADES DE ARITMÉTICA MODULAR COM O USO DE POLÍGONOS ESTRELADOS E CHRYZODES

Proposal for modular arithmetic activities using star polygons and Chryzodes

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/35708>.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani.
Coorientadora: Profa. Dra. Mari Sano.

CURITIBA

2024

RESUMO

Este recurso educacional apresenta seis propostas de atividades, para professores da educação básica, elaboradas na dissertação de mestrado de Porto (2024). As atividades foram elaboradas pensando nas construções de polígonos estrelados e Chryzodes, bem como na atividade proposta por Hodgson e Cassidy (1982). Procuramos abordar de forma lúdica a construção de tais formas, analisando os pradões e polígonos formados, proporcionando o desenvolvimento das habilidades de desenho geométrico por parte dos estudantes.

Palavras-chave: Aritmética; polígonos estrelados; Chryzodes; congruências aritméticas; desenho geométrico.

ABSTRACT

This educational resource presents six activity proposals for elementary school teachers, developed in the Porto (2024) master's dissertation. The activities were planned with a focus on the construction of star polygons and Chryzodes, as well as the activity proposed by Hodgson and Cassidy (1982). We aim to address the construction of such shapes playfully, analyzing the patterns and polygons formed, and fostering the development of students geometric drawing skills.

Keywords: Arithmetic; star polygons; Chryzodes; arithmetic congruences; geometric drawing.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 RECURSO EDUCACIONAL - PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Trazemos aqui 6 propostas de atividades, como forma de aplicação dos conceitos vistos nos Capítulos 3 e 4 da dissertação publicada por Porto (2024). Cada atividade contém uma breve descrição, lista de materiais e encaminhamentos ao docente. Para algumas das atividades fornecemos também folhas para impressão.

1.1 ATIVIDADE 1 - O PROBLEMA DO HOTEL

1.1.1 INFORMAÇÕES GERAIS.

Esta atividade se trata de uma adaptação do problema proposto por Hodgson e Cassidy (1982), tratado por Porto (2024) no Capítulo 2. Ela visa representar de forma lúdica o problema do hotel e em seguida discutir com a turma a solução do problema. Nesta atividade cada aluno representa um hóspede do hotel, as carteiras da sala de aula representam as portas numeradas e os alunos realizam o processo descrito no problema, "abrindo" e "fechando" as portas de acordo com os números.

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 6º ano.
- Quantidade de aulas: 3 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Polígonos estrelados, paridade, divisibilidade, múltiplos e divisores.

1.1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é discutir de forma lúdica o problema do Hotel Circular.

Os objetivos específicos são:

- Estimular o cálculo mental de múltiplos e divisores.
- Estimular o raciocício lógico e a resolução de problemas.
- Discutir a paridade de um número natural.
- Aplicar os conceitos de números primos e compostos.
- Discutir a divisibilidade entre dois números naturais.
- Apresentar o conceito de polígonos estrelados.

1.1.3 MATERIAL DIDÁTICO.

- Cartões numerados de 1 a m, onde m é o número de alunos participando da atividade.
- Computador e projetor ou tela conectados.
- Impressões disponíveis no Apêndice 1.6.4.

1.1.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentar o problema do hotel circular, proposto no Apêndice 1.6.4, explicar aos estudantes o processo descrito e destacar a pergunta central do problema: “Ao final do processo, quais portas permanecem abertas e quais portas permanecem fechadas?”.

Organizar as carteiras da sala de aula em forma de círculo, onde cada aluno fica atrás de uma carteira. Em seguida, distribuir os cartões numerados em sequência, associando cada aluno e sua respectiva carteira a um hóspede e sua respectiva porta.

Iniciar o processo com o estudante de número 1, que deverá passar por todas as carteiras, girando cada uma em 90 graus, o que representa que as portas estão sendo abertas. Em seguida o estudante de número 2 passa pelas carteiras de número múltiplo de 2, girando-as novamente e representando as portas sendo fechadas.

Após estas duas interações iniciais, retomar a questão central e permitir que alguns alunos dêem respostas preliminares. Retomar o processo a partir do estudante de número 3.

A atividade pode ser pausada para discussão da questão central quantas vezes o docente considerar necessárias, sempre incentivando o raciocínio dos estudantes para que consigam encontrar a resposta antes do processo se finalizar.

Ao final do processo, basta verificar com a turma quais "portas" terminaram "abertas" e "fechadas" para se responder à questão inicial. O docente então deverá discutir com a turma a teoria por trás da resposta do problema. Para isto, sugere-se utilizar a construção no GeoGebra, disponível em <https://www.geogebra.org/classic/mc29jhe3> e mostrar os polígonos estrelados referentes às movimentações de cada aluno, de acordo com seus números, ressaltando as figuras congruentes obtidas por $\{m/a\}$ e $\{m/(m-a)\}$, para que os estudantes visualizem melhor a solução do problema.

Finalmente, destacar a segunda possibilidade de resposta, ou seja, caso a turma tenha um número par de estudantes, observar o que ocorreria se fosse um número ímpar, conforme descrito por Porto (2024) no Capítulo 2. Para isto, basta o docente se unir à turma, passando a representar um dos hóspedes do hotel e alterando a paridade do número anterior. Com a paridade alterada, reinicia-se o ciclo com todas as portas fechadas, novamente com o docente fazendo as intervenções necessárias para que os estudantes possam chegar à segunda possível resposta antes de o processo chegar ao final. Espera-se que, após o primeiro ciclo e a apresentação dos polígonos estrelados como visualização da resolução, os estudantes consigam chegar à segunda resposta com maior facilidade.

Como sugestão de aprofundamento, o docente poderá colocar os seguintes questionamentos: “Quais hóspedes passam por todas as portas e quais hóspedes passam apenas por algumas? Por que isso acontece?”. Para abordar tais questionamentos, retome os polígonos estrelados apresentados aos estudantes anteriormente e permita que os estudantes discutam entre si, propondo explicações. O docente então deverá direcionar a turma à analisar a divisibilidade entre m e a para cada caso. Espera-se que os alunos percebam que a solução se relaciona ao fato de a e m serem ou não coprimos. Para encerrar a atividade, formalizar a solução com a turma, de acordo com os resultados apresentados por Porto (2024) no Capítulo 2.

1.2 ATIVIDADE 2 - CONSTRUINDO ESTRELAS

1.2.1 INFORMAÇÕES GERAIS

Esta atividade de laboratório de matemática propõe a construção de estrelas (polígonos estrelados) usando papelão e linha e, posteriormente, uma análise das relações de divisibilidade que geram as formas construídas. Esta atividade pode ser aplicada para apresentar ou aprofundar os conceitos de múltiplos, divisores, números primos e coprimos. Tomamos como referência as construções e algumas sugestões publicadas por Malke Rosenfeld (2017).

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 6º ano.
- Quantidade de aulas: 4 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Divisibilidade, números primos e compostos, polígonos estrelados, construção geométrica.

1.2.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é abordar diversos conceitos de divisibilidade em $\mathbb{N}$ através da construção física de polígonos estrelados.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de polígonos estrelados.
- Discutir a paridade de um número natural.
- Aplicar os conceitos de números primos e compostos.
- Discutir a divisibilidade entre dois números naturais.
- Incentivar observações sobre os padrões geométricos estabelecidos nas contruções.

1.2.3 MATERIAL DIDÁTICO

- Papelão e papel cartão colorido.
- Novelos de linha com cores variadas.
- Compasso e régua.
- Tesoura e cola.

1.2.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Cada estudante deverá criar ao menos duas construções de polígonos estrelados $\{12/a\}$, ou seja, com 12 pontos sendo conectados somando-se a à posição de cada ponto. Os estudantes deverão escolher dois valores de a, com $a \neq 1$ e $a \neq 11$, sendo um caso onde $(12, a) = 1$ e outro caso onde $(12, a) \neq 1$. O docente pode aproveitar o momento de proposição da atividade para abordar o conceito de números coprimos ou "primos entre si" e então direcionar os estudantes a escolherem os valores de a com os quais desejam construir suas estrelas. Os estudantes também poderão criar composições com mais de um valor de a, por exemplo, construindo um polígono estrelado e o dodecágono circunscrito à ele na mesma construção.

Etapa de esboço: Inicialmente o docente deverá apresentar a atividade, mostrar exemplos de polígonos estrelados e demonstrar o processo de construção descrito por Porto (2024) no Capítulo 3. Os estudantes então deverão desenhar em folhas de papel alguns polígonos estrelados com $m = 12$ para melhor compreenderem o processo de construção posterior. Ao final desta etapa cada estudante deve definir quais valores de a utilizará na etapa seguinte.

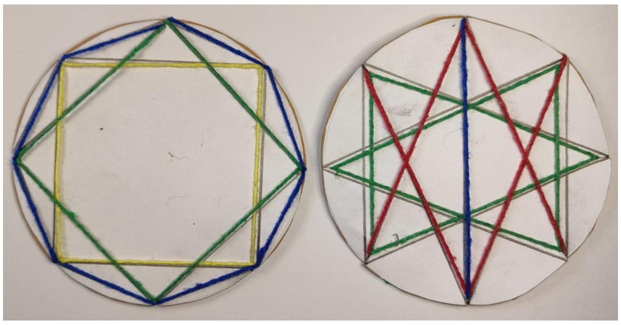
Etapa de construção: A construção se inicia desenhando-se círculos com raio igual a 10 centímetros no papel cartão colorido e círculos com raio igual a 11 centímetros no papelão. Após isto, os estudantes recortam ambos os círculos e deverão colar o papel cartão no papelão, de forma que os círculos estejam concêntricos. Feito isto, deverão utilizar um lápis para marcar os 12 pontos igualmente espaçados ao redor do círculo. O docente deverá auxiliar os alunos para distribuir os pontos de forma adequada, conduzindo o processo se for necessário. Em seguida, os estudantes deverão fazer pequenos cortes ao redor da circunferência, nos pontos marcados, de forma que os cortes cheguem ao menos um centímetro para dentro do círculo interno. Por fim, deverão escolher cores de linhas e ligar os pontos de acordo com os valores de a escolhidos anteriormente. Deve-se passar a linha várias vezes por cada ponto, dando "voltas" ao redor do círculo, para que a linha se fixe melhor. Incentive os estudantes a utilizarem diferentes cores ou tonalidades de uma mesma cor para os vários "ciclos" congruentes que aparecem quando $(m, a) \neq 1$.

Nas Figuras 1.1 e 1.2, temos alguns exemplos de construções, com diferentes quantidades de pontos distribuidos ao redor da circunferência.

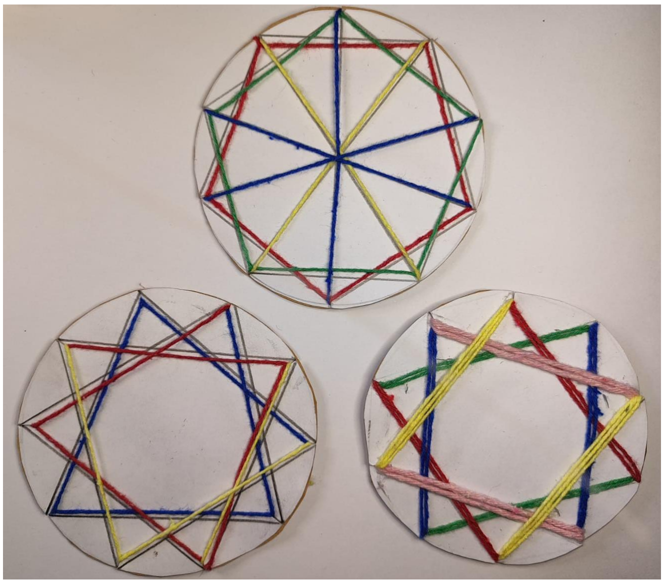
Figura 1.1 – Exemplos de construções com diferentes valores de m.

Fonte: Rosenfeld (2017).

Figura 1.2 – Exemplos de construções com $m = 8$ e $m = 10$.



(a) $m = 8$.



(b) $m = 10$.

Fonte: Autor.

Etapa de análise: Após as construções, o docente deverá apresentar os seguintes questionamentos aos estudantes:

I - No caso em que $(12, a) = 1$, o que você pôde observar a respeito da figura? Quantas estrelas se formaram e quantas pontas tem cada uma? Como você explicaria isto, pensando no fato de que 12 e a são coprimos?

II - No caso em que $(12, a) \neq 1$, o que você pôde observar a respeito da figura? Quantas estrelas se formaram e quantas pontas tem cada uma? Como você explicaria isto, pensando no MDC (maior divisor comum) entre 12 e a?

Após os alunos registrarem suas conclusões, o docente deverá reapresentar os polígonos estrelados módulo 12, desenhando no quadro ou utilizando a construção no GeoGebra disponível através do link <https://www.geogebra.org/classic/mc29jhe3> e discutir com a turma as conclusões sobre a divisibilidade entre 12 e a, mostrando todas as formas possíveis. Também é interessante mostrar outros casos $\{m/a\}$ onde m e a são coprimos ou não, para que a turma compreenda melhor as figuras construídas.

1.3 ATIVIDADE 3 - DESENHANDO CHRYZODES

1.3.1 INFORMAÇÕES GERAIS.

Nesta atividade propomos uma abordagem direta dos Chryzodes e seu estudo através da construção geométrica de alguns Chryzodes e da observação dos padrões de multiplicação análogos. A atividade pode ser toda realizada utilizando-se folhas em branco e material de desenho geométrico, mas fornecemos folhas com pontos numerados para impressão no Apêndice 1.6.4. Os estudantes deverão ser introduzidos ao conceito de Chryzode, visualizar uma construção e produzir suas próprias composições, utilizando técnicas de desenho geométrico.

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 8º e 9º anos.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Construção geométrica, sequências, multiplicação, Chryzodes.

1.3.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é apresentar os Chyzodes e sua construção geométrica, enfatizando a sua relação com a multiplicação.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de Chryzode.
- Analisar a relação entre os Chryzodes e a multiplicação de números naturais.
- Estabelecer o raciocínio análogo à congruência aritmética através da divisão euclidiana.
- Incentivar observações sobre os padrões geométricos estabelecidos nas construções.
- Dividir um um círculo em m partes.

1.3.3 MATERIAL DIDÁTICO

- Papel sulfite ou cartonado.
- Compasso e régua.
- Transferidor.
- Impressões disponíveis no Apêndice 1.6.4.

- Materiais para desenho, como lápis coloridos e canetinhas.
- Computador e tela ou projetor conectados.

1.3.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

O docente deverá apresentar aos estudantes o conceito de Chryzodes, utilizando os links a seguir para mostrar referências visuais e exemplos:

- <https://www.youtube.com/watch?v=QFqScUVfj-0>
- <https://www.youtube.com/watch?v=Bpv4Nw5O990>
- <https://times-tables.lengler.dev>
- <https://www.geogebra.org/classic/aqvvfvzt>

Mostrar à turma algumas variações de Chryzodes e ativando a animação automática disponível por alguns segundos, permitindo a todos os estudantes uma visualização geral inicial. É importante mostrar alguns casos de multiplicação por 2, 3 e 4 com diversos valores de m, ou seja, com diversas quantidades de pontos, para que os estudantes percebam as "pétalas". Também é importante mostrar casos onde $a = \frac{m}{2}$, $a = \frac{m}{2} - 1$ e $a = \frac{m}{2} + 1$. Finalmente, o docente deve utilizar a construção no GeoGebra, disponibilizada através do link <https://www.geogebra.org/classic/aqvvfvzt> para aguçar a curiosidade dos estudantes, incentivando-os a escolher valores de m e a e mostrando as formas obtidas.

Para esta atividade, sugerimos a utilização de $m = 30$ ou $m = 60$, para que a construção não se torne complexa ou cansativa demais. Fornecemos no Apêndice 1.6.4 modelos para impressão, em que os pontos já se encontram igualmente espaçados ao redor de uma circunferência. Alternativamente o docente pode trabalhar a distribuição dos pontos ao redor da circunferência, ficando ao seu critério a construção toda ou a utilização dos modelos fornecidos. Para distribuir os pontos ao redor da circunferência, inicialmente desenha-se uma circunferência com raio $r = 10$ cm e se marca um ponto inicial. Em seguida, define-se o valor de m e deve-se dividir o ângulo pleno 360º por m, para se encontrar o ângulo central relativo a cada par de pontos consecutivos a serem distribuídos. Então, utiliza-se o transferidor para determinar a posição de cada ponto, a partir do ponto inicial definido anteriormente. Finalmente, numera-se os pontos de 0 a $(m-1)$.

Tendo m pontos distribuídos ao redor da circunferência, basta se definir o valor de a e então resolver os produtos entre o número associado à posição de cada ponto e a. Cada estudante deverá escolher um valor de a dentre $\{2, 3, 4, 5\}$, um valor de a dentre $\{\frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1\}$ e outro valor de a à sua livre escolha. Oriente os estudantes a iniciarem os desenhos pelo primeiro conjunto e exemplifique os primeiros passos da construção utilizando esboços no quadro. Assim que o produto entre o valor associado a algum ponto e a resultar num número maior que m, chame a atenção da turma toda e demonstre a solução simples da congruência, utilizando o resto da divisão por m. Demonstre alguns casos e oriente a turma a retomar a atividade, agora com a ferramenta necessária para concluir as construções.

Após os Chryzodes estarem desenhados, os estudantes deverão finalizar suas composições utilizando canetas ou lápis de diferentes cores, escolhendo e criando padrões para cada Chryzode. Incentive os alunos a incorporar elementos externos, encaixando-os com as formas obtidas durante a construção.

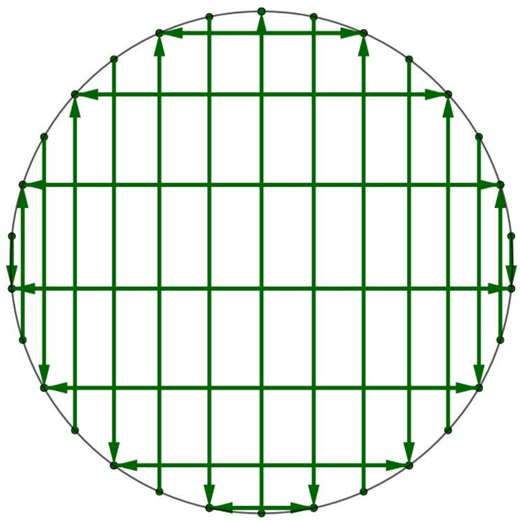
Ao final das construções o docente deverá propor os seguintes questionamentos aos alunos:

1. O que você pôde observar sobre o padrão formado nos Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} - 1$?
2. O que você pôde observar sobre o padrão formado nos Chryzodes onde $a = \frac{m}{2}$?
3. O que você pôde observar sobre o padrão formado nos Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} + 1$?
4. Para o valor de a escolhido livremente, você consegue identificar algum tipo de padrão formado? Descreva-o.

Soluções das questões:

1. Espera-se que o estudante descreva o padrão de linhas verticais e horizontais paralelas obtidos nesse caso, formando um "quadriculado", como pode-se ver na Figura 1.3.

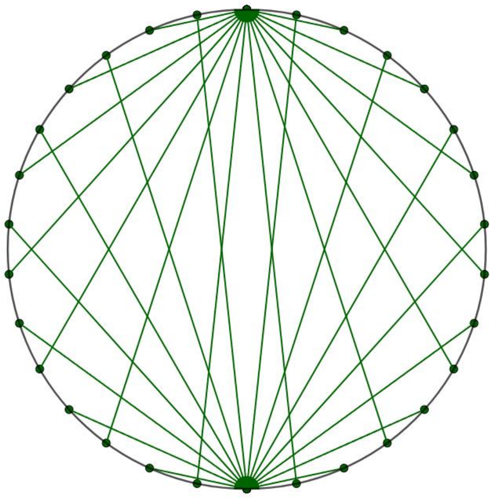
Figura 1.3 – $m = 30; a = 14$



Fonte: Autor.

2. Espera-se que o estudante perceba e descreva o padrão de duas "pontas" formado pelos dois pontos de convergência dos segmentos, como mostra a Figura 1.4.

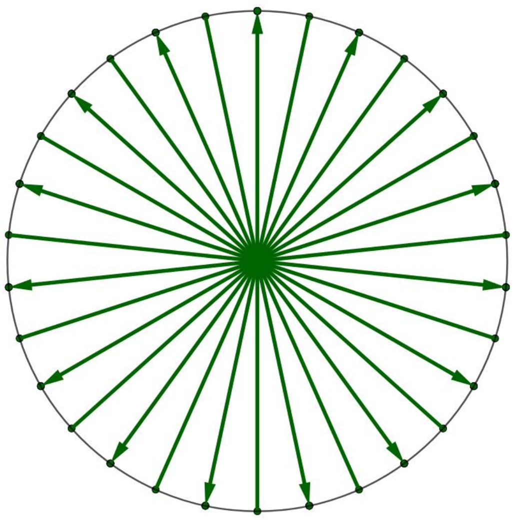
Figura 1.4 – $m = 30; a = 15$



Fonte: Autor.

3. Espera-se que o estudante descreva o ponto central obtido ou que identifique que os segmentos são diâmetros do círculo. vide Figura 1.5

Figura 1.5 – $m = 30; a = 16$



Fonte: Autor.

4. A resposta para esta questão depende do valor a escolhido por cada estudante.

1.4 ATIVIDADE 4 - ENCONTRANDO POLÍGONOS

1.4.1 INFORMAÇÕES GERAIS

A atividade trata da construção de um polígono estrelado, seguida de uma análise dos polígonos formados pelas intersecções dos segmentos inicialmente desenhado pelos estudantes. Esta atividade deverá ser realizada após o docente apresentar à turma os conceitos básicos relacionados a polígonos, bem como suas classificações e características. Usando tais conhecimentos os estudantes deverão identificar os diferentes polígonos presentes em cada figura e deverão responder a uma serie de questionamentos sobre tais polígonos.

- Nível: Ensino fundamental.
- Série/ano: 6º ano.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Polígonos, polígonos estrelados, construções geométricas.

1.4.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é abordar de forma lúdica o desenho de polígonos estrelados e de polígonos simples.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de polígono estrelado.
- Perceber padrões presentes em figuras planas.
- Reconhecer e classificar diferentes polígonos.

1.4.3 MATERIAL DIDÁTICO.

- Papel sulfite em branco ou impressões.
- Régua.
- Materiais para desenho, como lápis coloridos e canetinhas.
- Impressões disponíveis no Apêndice 1.6.4.

1.4.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Como a atividade é voltada para o ensino fundamental, recomendamos que se forneça aos alunos um octógono regular já desenhado e com os vértices destacados, disponível no Apêndice 1.6.4. O docente também pode realizar a construção de tal polígono com a turma caso considere pertinente. Em seguida, os estudantes deverão selecionar um vértice inicial e ligá-lo usando régua, ao vértice localizado três unidades adiante no polígono. Seguindo este procedimento, obtém-se o polígono estrelado $\{8/3\}$. Os estudantes então deverão responder à questões apresentadas pelo docente. Listamos algumas sugestões de questionamentos, que o professor poderá escrever na lousa ou previamente imprimir e entregar aos alunos. O docente pode alterar as questões ou adicionar outros questionamentos conforme as necessidades da turma.

1. Quais figuras geométricas você consegue encontrar?
2. Quais delas são polígonos regulares?
3. Quais tipos de triângulos você consegue encontrar?
4. Quais tipos de quadriláteros você consegue encontrar?
5. Quais figuras são congruentes?

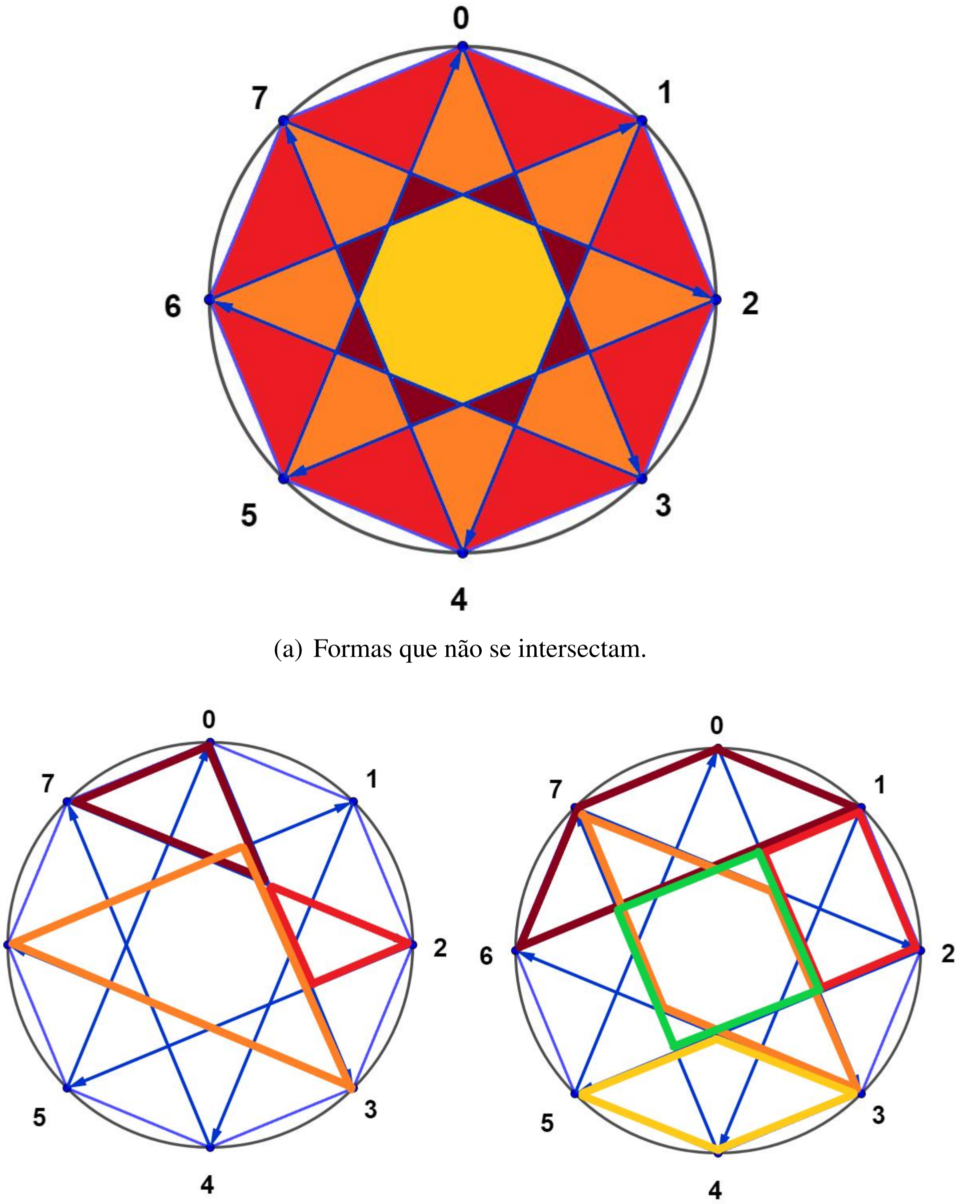
Em seguida, cada aluno deverá contornar e colorir os polígonos escolhendo um padrão de cores conforme os tipos de polígonos e as relações de congruência encontradas na figura.

Como sugestão de extensão da atividade, propomos a construção de outro polígono estrelado, dessa vez com dez pontos. Note que para se construir um polígono estrelado com $m = 10$, deve utilizar $a = 3$ ou $a = 7$. Novamente, fornecemos no Apêndice 1.6.4 um decágono regular com os vértices destacados que o docente poderá utilizar para conduzir a construção com a turma. Após a construção, os estudantes repetem a análise anterior, observando os novos polígonos formados. Para elucidar as respostas esperadas, veja as Figuras 1.6 e 1.7. Note que há diversas possibilidades de polígonos convexos e côncavos a serem encontrados nessas figuras e as tarefas de encontrar, nomear e identificar as formas encontradas podem ser extendidas indefinidamente, a critério do professor.

1. Os estudantes podem contar formas considerando ou não as intersecções com outras formas, ou seja, contar apenas figuras que não se intersectam ou contar figuras que intersectam outras. A quantidade de figuras encontradas depende desse critério e se o estudante considerar as figuras que se intersectam, encontrará uma quantidade muito maior de formas. Contamos aqui apenas as que não se intersectam. Espera-se que os alunos encontrem 16 triângulos, 8 quadriláteros e 2 octógonos. Para o decágono espera-se que encontrem 20 triângulos, 10 quadriláteros e 2 decágonos.

2. Há quadrados, octógonos e decágonos regulares.
3. Os triângulos encontrados são isósceles e retângulos.
4. Sem considerar as intersercções os qudriláteros encontrados são quadriláteros irregulares, nomeados trapezoides simétricos. Não se espera que os estudantes saibam nomear tais quadriláteros previamente. Considerando-se todas as posibilidades encontramos também trapézios, paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados.
5. Espera-se que os estudantes identifiquem que todos os quadriláteros são congruentes e que os triângulos são todos semelhantes.

Figura 1.6 – Polígono estrelado $\{8/3\}$.



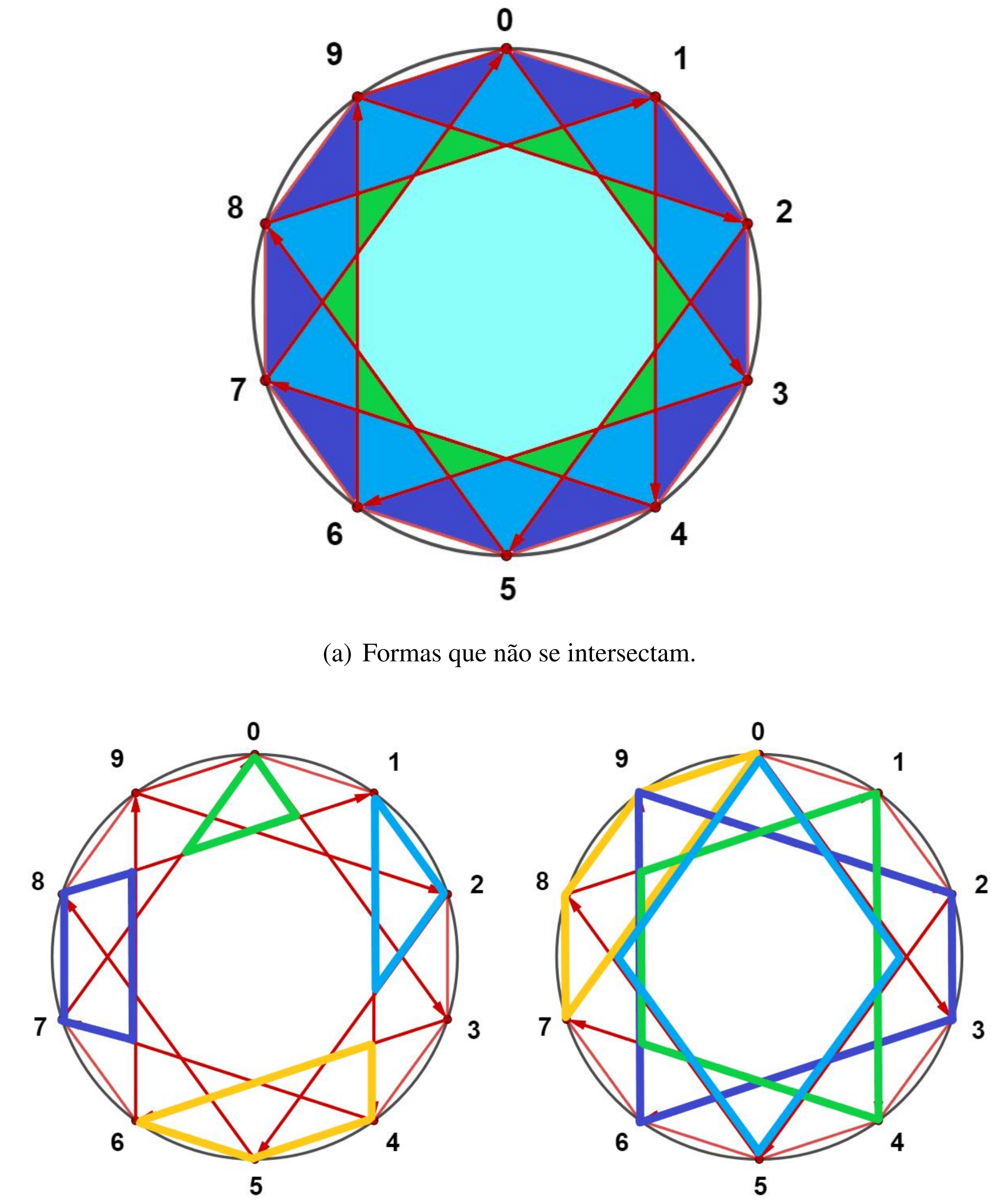
(a) Formas que não se intersectam.

(b) Alguns triângulos encontrados.

(c) Alguns quadriláteros encontrados.

Fonte: Autor.

Figura 1.7 – Polígono estrelado $\{10/3\}$.



(a) Formas que não se intersectam.

(b) Alguns triângulos e quadriláreros encontrados.

(c) Alguns quadriláteros encontrados.

Fonte: Autor.

1.5 ATIVIDADE 5 - POLÍGONOS CONGRUENTES

1.5.1 INFORMAÇÕES GERAIS

Nesta atividade, os alunos construirão polígonos a partir de uma parte do padrão formado, aplicando o conceito de rotação ao redor do centro da circunferência. Para esta construção, necessita-se escolher valores de a e m tais que $(m, a) \neq 1$, ou seja casos descritos por Porto (2024), na Proposição 2.5. Desta forma, os alunos desenharão a primeira figura ligando os pontos, de a em a unidades e partindo do ponto 0. As demais formas deverão ser desenhadas utilizando rotação da figura inicial.

- Nível: Ensino fundamental.
- Série/ano: 8º ano.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Polígonos estrelados, construções geométricas, transformações geométricas, divisão de uma circunferência em m pontos.

1.5.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é trabalhar simultaneamente as habilidades de desenho geométrico e da transformação de rotação.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de polígono estrelado.
- Perceber padrões presentes em figuras planas.
- Dividir um um círculo em m partes.
- Desenhar figuras a partir da rotação de segmentos ao redor de um ponto central.

1.5.3 MATERIAL DIDÁTICO

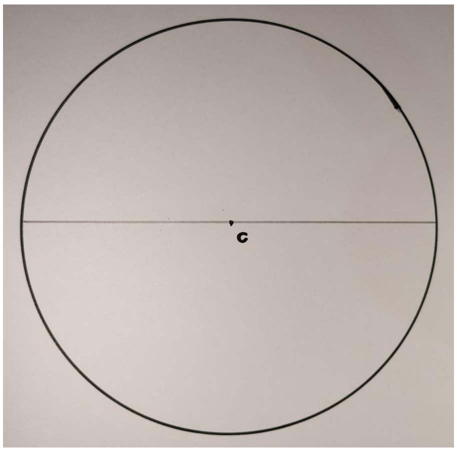
- Folha sulfite em branco.
- Compasso e régua.
- Materiais para desenho, como lápis coloridos e canetinhas.

1.5.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

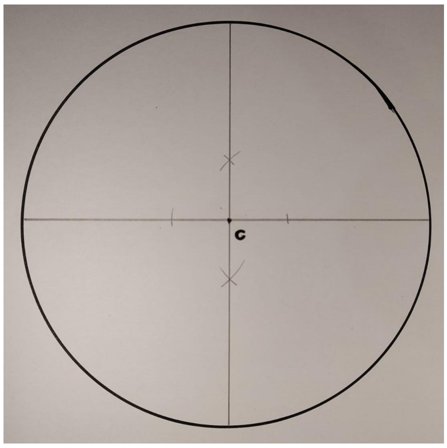
A atividade deverá ser aplicada após a turma estar familiarizada com os conceitos de múltiplos, divisores, números primos, números compostos e números coprimos, pois será uma forma de aprofundar o entendimento destes.

Para iniciar, o professor deverá retomar brevemente os conceitos citados e então distribuir folhas em branco para cada aluno. Solicitar aos estudantes que escolham valores de a tais que $(a, 16) \neq 1$, ajudando-os se for necessário. Então, todos deverão construir uma circunferência com raio igual a $8cm$, no mínimo e destacar o centro. Na circunferência desenhada, os alunos deverão distribuir 16 pontos, igualmente espaçados. Para distribuir os 16 pontos deve-se desenhar um diâmetro e seus dois extremos, que serão os pontos iniciais. Em seguida, utilizar compasso e régua para determinar a bissetriz dos ângulos rasos formados pelo diâmetro. Repete-se o procedimento de determinar a bissetriz sucessivamente até se obter 16 pontos. A Figura 1.8 demonstra essa primeira etapa do processo.

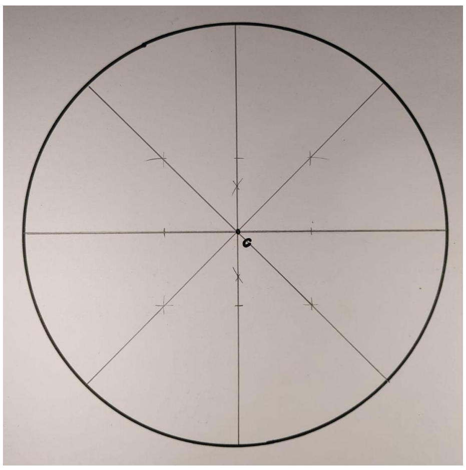
Figura 1.8 – Desenho de um círculo com 16 pontos.



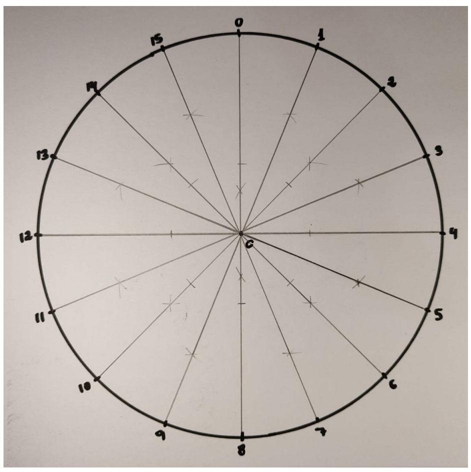
(a) Dois pontos.



(b) Quatro pontos.



(c) Oito pontos.

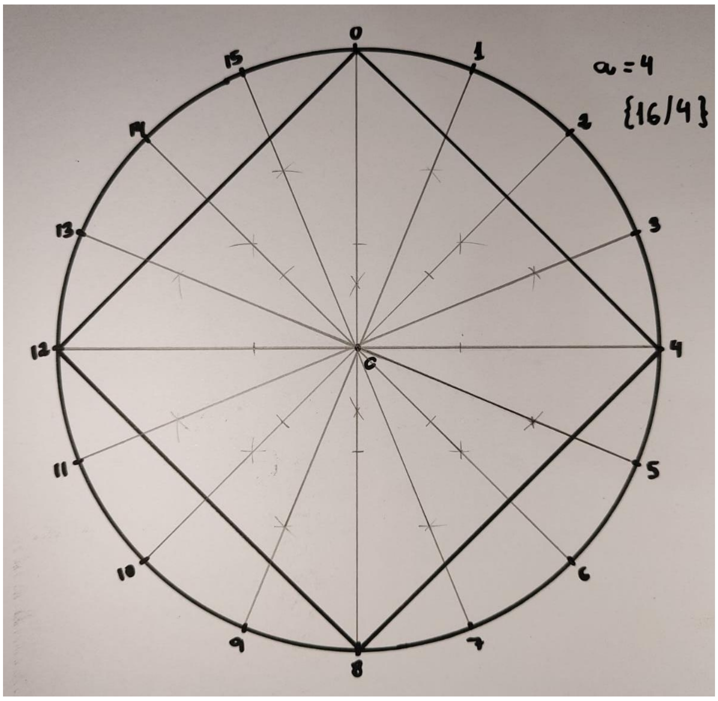


(d) Dezesseis pontos.

Fonte: Autor.

Então, os estudantes deverão numerar os pontos de 0 a 15 e construir cordas ligando o ponto 0 ao ponto localizado a unidades adiante, de acordo com o valor de a escolhido anteriormente. Assim, cada estudante terá obtido a primeira figura presente no polígono $\{16/a\}$, conforme mostra a Figura 1.9.

Figura 1.9 – Desenho da primeira forma obtida.

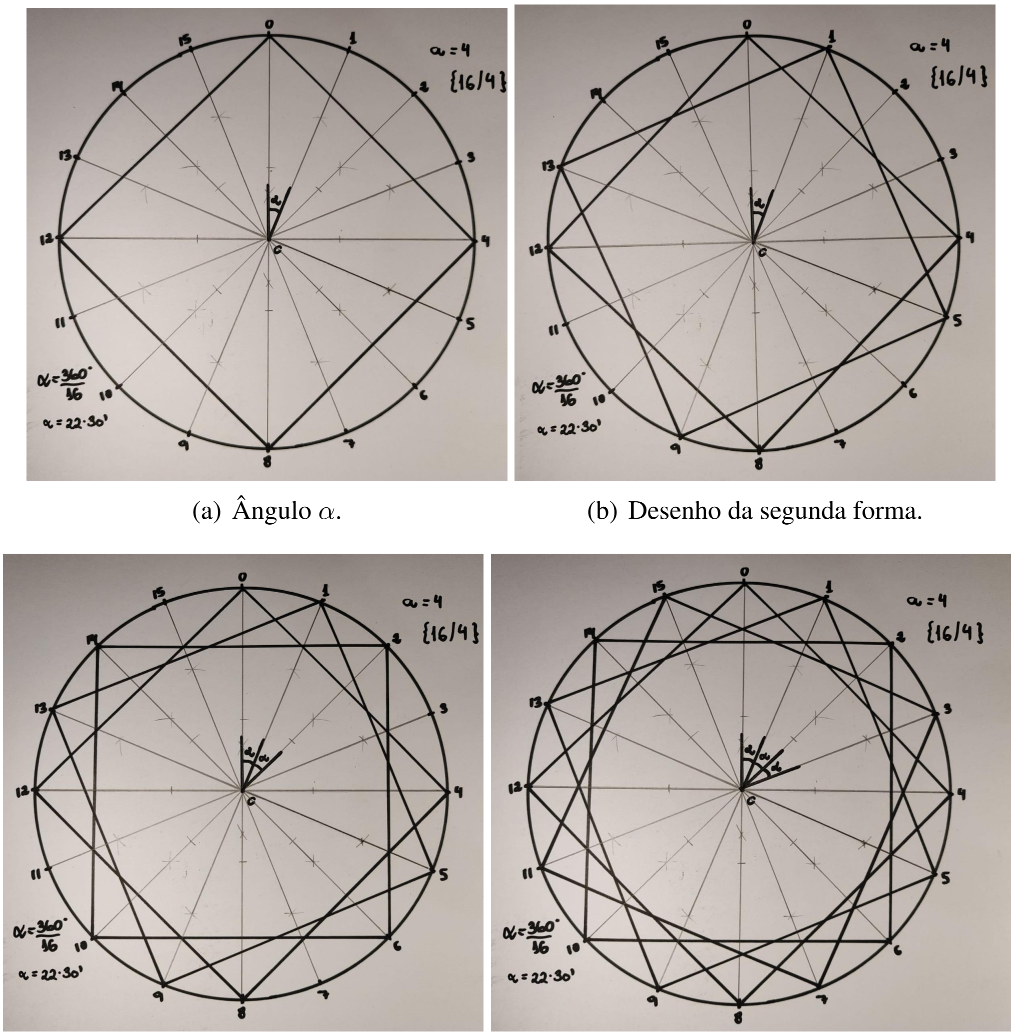


(a) Quadrilátero.

Fonte: Autor.

O professor deverá então demonstrar o cálculo do ângulo α de rotação entre dois pontos sucessivos e os alunos utilizam o resultado para construir a rotação de cada segmento em α graus ao redor do centro. A Figura 1.10 apresenta as últimas etapas da construção.

Figura 1.10 – Calculo de α e desenho das demais formas.



(a) Ângulo α.

(b) Desenho da segunda forma.

(c) Desenho da terceira forma.

(d) Desenho da figura completa.

Fonte: Autor.

Então, os estudantes deverão numerar os pontos de 0 a 15 e construir cordas ligando o ponto 0 ao ponto localizado a unidades adiante, de acordo com o valor de a escolhido anteriormente. Assim, cada estudante terá obtido a primeira figura presente no polígono $\{a/16\}$.

O professor deverá então demonstrar o cálculo do ângulo α de rotação entre dois pontos sucessivos e os alunos utilizam o resultado para construir a rotação de cada segmento em α graus ao redor do centro.

O processo de construção geométrica das figuras deverá tomar a maior parte do tempo desta atividade, mas ao final da construção o docente ainda pode estimular a análise das formas obtidas através de questionamentos. A seguir listamos algumas sugestões:

1. Quantas "pontas" têm a forma construída inicialmente?

2. Quantas vezes esta forma se repetiu ao final da construção?

3. Tente relacionar as duas respostas anteriores à relação de divisibilidade entre a e 16.

4. Quais polígonos você consegue identificar na figura completa?

5. Quais destes polígonos são semelhantes e quais são congruentes?

Considerações sobre as possíveis respostas:

1. A quantia de "pontas" depende do valor escolhido de a, sendo igual a $\dfrac{16}{(16, a)}$.

2. Novamente, a quantida depende de a, desta vez sendo igual a $(16, a)$.

3. Espera-se que os estudantes relacionem os dois resultados numéricos anteriores com a divisibilidade entre 16 e a.

4. Espera-se que encontrem triângulos, quadriláteros e um hexadecágono regular.

5. Espera-se que os estudantes percebam e descrevam os conjuntos de triângulos e quadriláteros congruentes entre si.

1.6 ATIVIDADE 6 - JOGO DA MULTIPLICAÇÃO.

1.6.1 INFORMAÇÕES GERAIS

Propomos agora uma atividade prática em formato de jogo, onde os estudantes trabalharão conceitos relacionados aos Chryzodes, sem abordar diretamente o tema, a partir da divisão Euclidiana. No jogo da multiplicação os estudantes deverão utilizar resultados aleatórios para calcular produtos e quocientes, anotar os valores dos restos e pontuar conforme tais valores. Esta atividade é uma adaptação do jogo elaborado por NRICH (2024), disponível em <https://nrich.maths.org/problems/twelve-pointed-star-game>.

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 7º ou 8º ano.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Chryzodes, divisibilidade, divisão euclidiana.

1.6.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é gamificar o aprendizado de multiplicações e restos da divisão de um número natural por outro.

Os objetivos específicos são:

- Estimular o cálculo mental de multiplicações.
- Calcular o resto da divisão de um número natural por outro.
- Perceber padrões presentes em figuras planas.
- Desenhar figuras associadas a Chryzodes.
- Estabelecer a relação entre os possíveis restos da divisão e a divisibilidade entre o numerador e divisor.

1.6.3 MATERIAL DIDÁTICO

- Impressões disponíveis no Apêndice 1.6.4.
- 3 dados comuns (6 lados) por grupo.

1.6.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Para esta atividade sugerimos o cálculo de resíduos módulo 6, mas a atividade pode ser adaptada para outros módulos. Os estudantes utilizarão três dados de seis lados, calculando a soma entre os resultados dos três dados em cada lançamento, bem como o resto da divisão desta soma por 6.

No Apêndice 1.6.4 disponibilizamos uma folha de atividade para impressão, uma cópia deverá ser entregue para cada estudante.

Para iniciar a atividade os alunos deverão estar organizados em pequenos grupos, de até seis estudantes. O docente distribuirá os dados e uma cópia impressa do Apêndice 1.6.4. Esta folha contém as figuras necessárias para o desenvolvimento da atividade, bem como as questões sugeridas para a atividade. Cada grupo competirá separadamente, ou seja, cada grupo terá um vencedor ao final do jogo.

Abaixo estão recortes da folha de atividade, para melhor compreensão das regras. Todos os estudantes do grupo devem rolar os três dados de uma vez, individualmente, a cada rodada e somar os resultados dos dados. Esta soma será o valor de a do estudante na rodada. Caso a rolagem resulte num valor já obtido por aquele estudante em rodadas anteriores, deve-se repetir a rolagem.

No Quadro 1.1, os estudantes anotarão os valores rolados para a, em cada rodada.

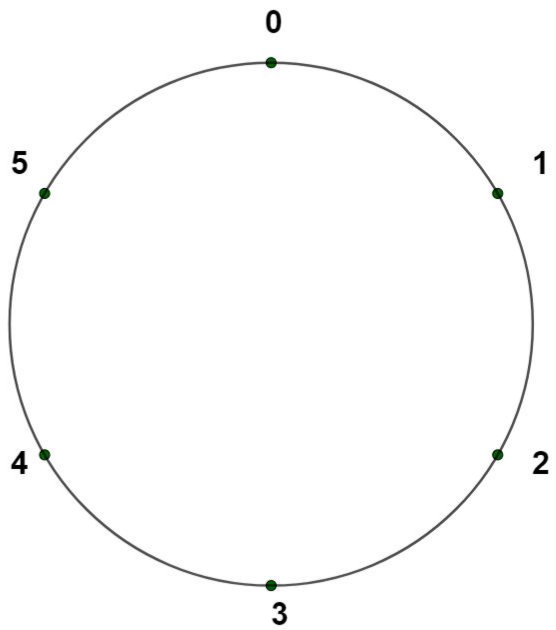
Quadro 1.1 – Tabela de resultados "a"

Rodada	Soma "a"

Fonte: Autor.

Na Figura 1.11 os estudantes desenharão flechas ligando cada ponto p ao ponto numerado com o resíduo congruente a $p \cdot a$ módulo 6, ou seja, cada ponto é ligado ao resíduo referente ao produto entre p e a, módulo 6.

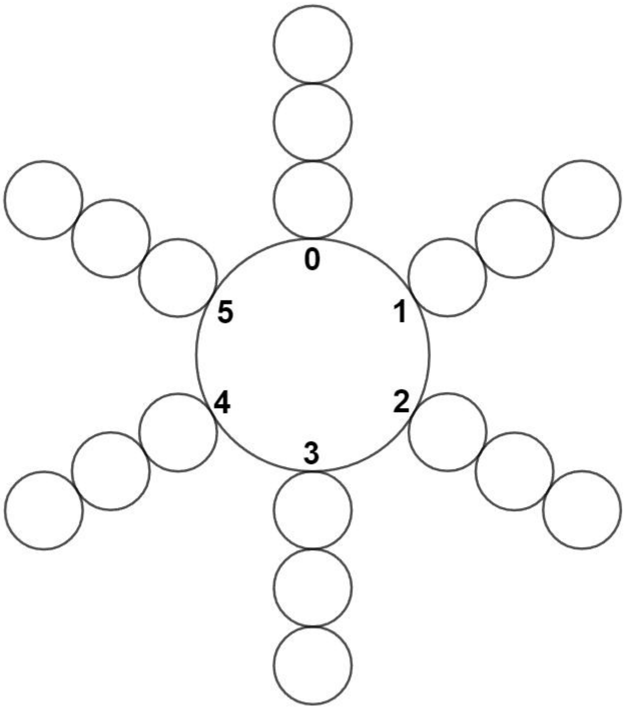
Figura 1.11 – Base para os Chryzodes.



Fonte: O autor.

Como se trata de uma atividade para o sexto ano do ensino fundamental, os alunos utilizarão divisão euclidiana para determinar o resto em cada caso. Este momento de cálculo poderá ser cronometrado para manter o engajamento e o andamento da atividade, sugerimos o tempo de 3 minutos a cada rodada para isto. Após determinar os restos e esboçar o Chryzode, deve-se marcar os produtos obtidos na Figura 1.12, junto ao resíduo referente àquele resultado. Vence quem conseguir preencher três valores diferentes referentes a cada resíduo módulo 6, ou seja, aquele que preencher todos os espaços na Figura 1.12.

Figura 1.12 – resíduos módulo 6.



Fonte: O autor.

Segue um exemplo de preenchimento para duas rodadas. Digamos que os resultados dos dados na primeira rolagem foram $2, 1$ e 2. Neste caso, o valor de a será $2 + 1 + 2 = 5$. O estudante anotará este valor na tabela de resultados "a", como ilustrado no Quadro 1.2

Quadro 1.2 – Tabela de resultados "a- Exemplo de preenchimento.

Rodada	Soma "a"
1	5

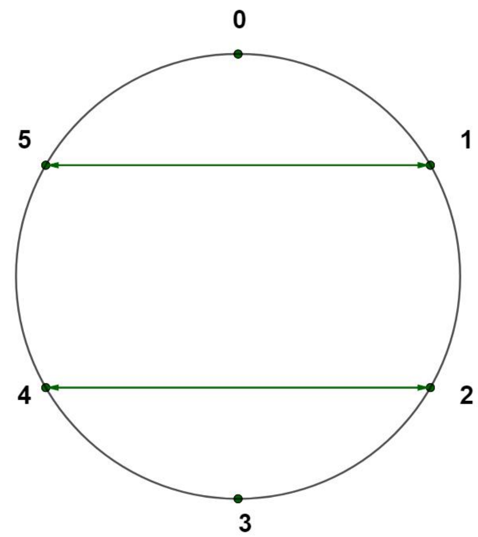
Fonte: Autor.

Em seguida, o estudante calcula os produtos entre cada um dos resíduos módulo 6 e o valor $a = 7$, utilizando divisão euclidiana para determinar os restos módulo 6. Abaixo estão os resultados, representados através de congruências.

$$\begin{aligned} 0 \cdot 5 &\equiv 0 \mod 6 \\ 1 \cdot 5 &\equiv 5 \mod 6 \\ 2 \cdot 5 = 10 &\equiv 4 \mod 6 \\ 3 \cdot 5 = 15 &\equiv 3 \mod 6 \\ 4 \cdot 5 = 20 &\equiv 2 \mod 6 \\ 5 \cdot 5 = 25 &\equiv 1 \mod 6 \end{aligned}$$

Assim, o aluno utilizará régua para desenhar flechas ligando cada ponto ao respectivo resto calculado anteriormente, conforme mostra a Figura 1.13

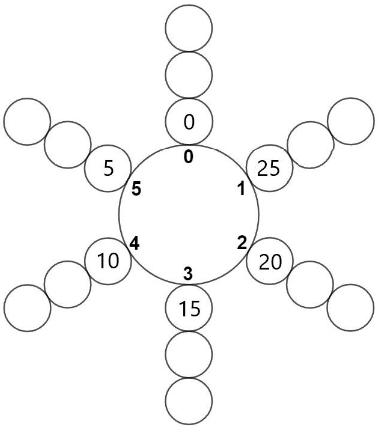
Figura 1.13 – Chryzode de multiplicação por 5, módulo 6.



Fonte: O autor.

Para finalizar a rodada o estudante anota os produtos calculado nos círculos referentes a cada respectivo resíduo módulo 6, "pontuando" naquela rodada, conforme o exemplo na Figura 1.14.

Figura 1.14 – Preenchimento dos valores relativos a cada resídulo módulo 6.



Fonte: O autor.

Note que no exemplo acima, o resultado $a = 5$ levou a todas as possibilidades de resíduos módulo 6, então o estudante pontuou uma vez em cada resíduo.

Para a segunda rodada, suponha que os resultados nos dados foram $6, 1$ e 3. Assim, o valor de a será $6 + 1 + 2 = 9$. Segue então o preenchimento do Quadro 1.3 de resultados.

Quadro 1.3 – Tabela de resultados "a" - Exemplo de preenchimento da segunda rodada.

Rodada	Soma "a"
1	5
2	9

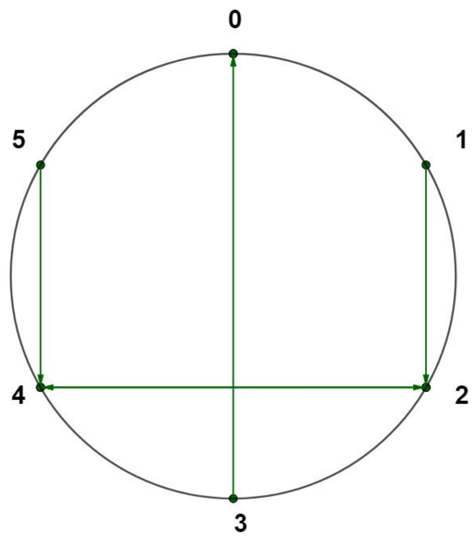
Fonte: Autor.

Temos então as seguintes congruências:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 9 \equiv 0 &\mod 6 \\
1 \cdot 9 = 9 \equiv 3 &\mod 6 \\
2 \cdot 9 = 18 \equiv 0 &\mod 6 \\
3 \cdot 9 = 27 \equiv 3 &\mod 6 \\
4 \cdot 9 = 36 \equiv 0 &\mod 6 \\
5 \cdot 9 = 45 \equiv 3 &\mod 6
\end{aligned}
$$

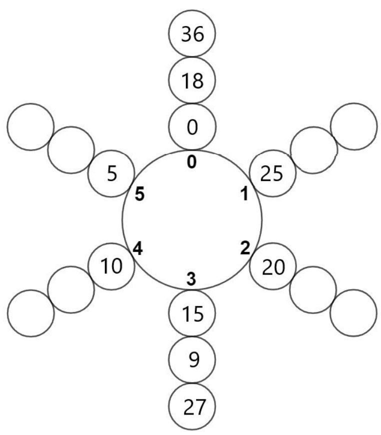
Segue disso o desenho do Chryzode na Figura 1.15 e da marcação de pontos na Figura 1.16.

Figura 1.15 – Chryzode de multiplicação por 9, módulo 6.



Fonte: O autor.

Figura 1.16 – Preenchimento dos valores relativos a cada resídulo módulo 6.



Fonte: O autor.

Desta vez, os resultados levaram apenas aos resíduos 0 e 3, então o participante pontuou apenas nestes resíduos, ficando o restante em branco neta rodada. Conforme as rodadas prosseguirem, os estudantes pontuarão mais vezes em cada resíduo e ganha o jogo o primeiro que conseguir pontuar três vezes em cada, ou seja, preencher todos os espaços da Figura 1.16.

Ao final do jogo, o docente deve propor os seguintes questionamentos para que os alunos respondam:

1. Quais valores de a resultaram em todos os possíveis restos após os cálculos e quais valores não resultaram em todos?

2. Quais valores de a são mais interessantes para que se tenha uma chance maior de ganhar o jogo?

3. Alguns valores de a aparecem com mais frequência que outros, tente determinar tais valores e explicar o porquê.

4. Observe as figuras esboçadas por você durante o jogo. Você consegue identificar um ou mais padrões interessantes? Tente descrever tais padrões.

Considerações sobre as possíveis respostas:

1. Os valores que resultam em todos os possíveis restos são sempre congruentes a 1 ou 5, no módulo 6. Ou seja, $4, 6, 11, 13$ e 17.

2. Os valores citados na resposta anterior são os mais interessantes pois se obtém todos os possíveis resíduos módulo 6.

3. A resposta está relacionada com distribuição normal entre os resultados de cada um dos três dados. Espera-se que os alunos percebam que a probabilidade é maior para valores mais próximos de 10 e 11.

4. Resposta pessoal. Espera-se uma descrição visual dos Chryzodes obtidos.

REFERÊNCIAS

CASSIDY, C.; HODGSON, B. R. Because a door has to be open or closed... **Mathematics Teacher**, n. 75, p. 155–158, 1982. 2, 3, 8

NRICH. **The twelve pointed star game**. University of Cambridge, 2024. Disponível em: <https://nrich.maths.org/problems/twelve-pointed-star-game>. Acesso em: 08 nov. 2024. 28

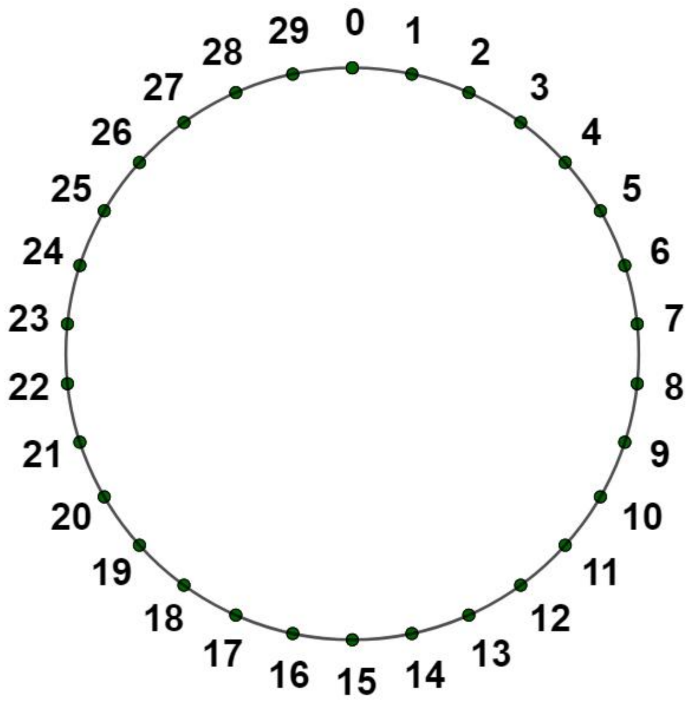
PORTO, P. R. C. **A aritmética modular das estrelas e dos chryzodes**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2024. 2, 3, 8, 9, 10, 12, 23

ROSENFELD, M. **Star-o-rama and how to make them**. Math in unexpected spaces, 2017. Disponível em: <https://mathinunexpectedspaces.wordpress.com/2017/12/10/star-o-rama-and-how-to-make-them/>. Acesso em: 23 set. 2024. 11, 13

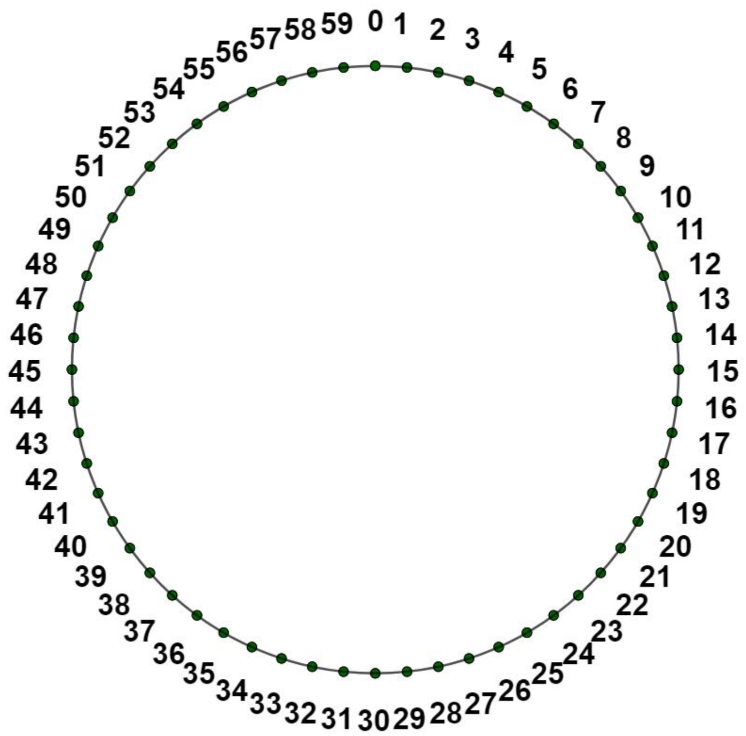
APÊNDICE A - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 1

Imagine um hotel onde há m hóspedes e m quartos dispostos ao redor de um pátio circular, numerados de 1 a m. Os hóspedes participam de um jogo onde todas as portas se iniciam fechadas e os hóspedes passam pelas portas interagindo com elas (abrindo ou fechando). Os hóspedes terminam sua rodada apenas quando iteragem pela primeira vez com a porta m. O primeiro hóspede passa por cada porta, partindo da porta de número 1 e abre todas as portas, uma a uma. O segundo hóspede então passa pelas portas, na mesma ordem, fechando as portas de número par. O terceiro hóspede repete o processo realizado pelos hóspedes anteriores, interagindo com cada de número múltiplo de 3, abrindo as portas fechadas e fechando as abertas. Isto segue até o hóspede de número m. Ao final do jogo, quais portas estarão abertas e quais portas estarão fechadas?

APÊNDICE B - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 3

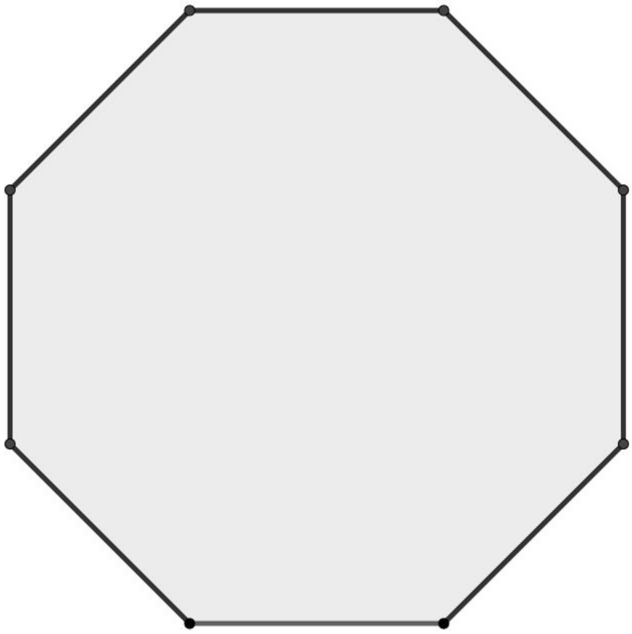


(a) m = 30

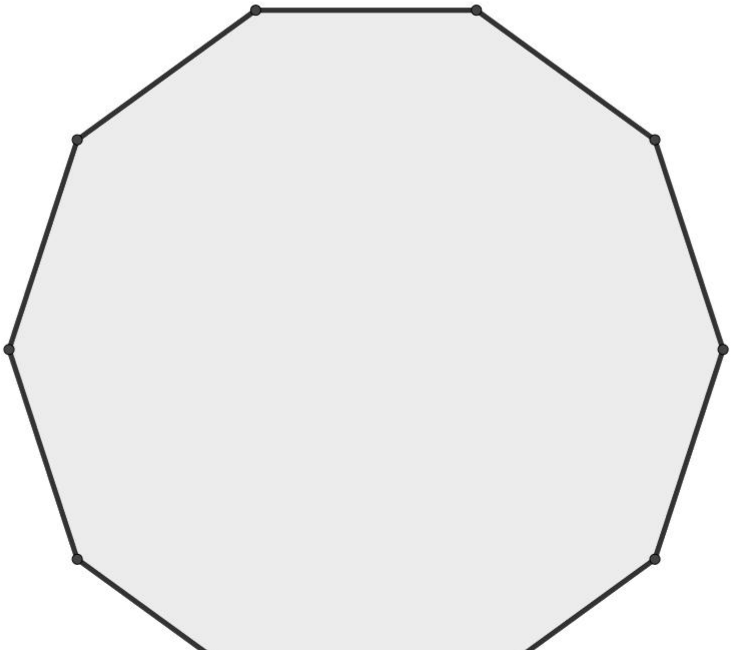


(b) m = 60

APÊNDICE C - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 4

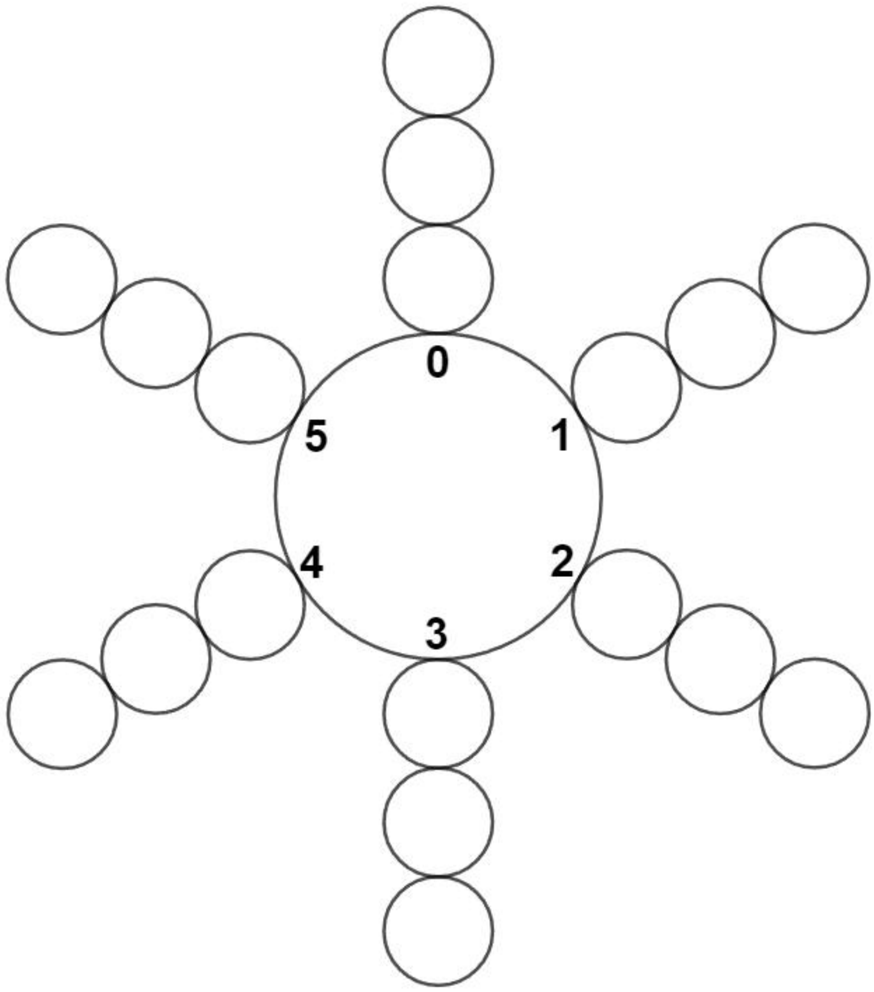


(a) Octógono regular

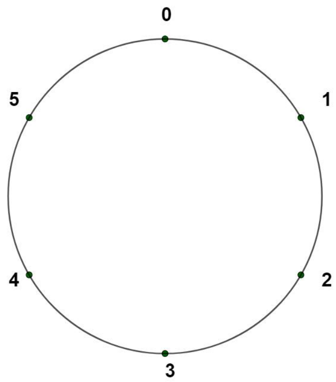


(b) Decágono regular

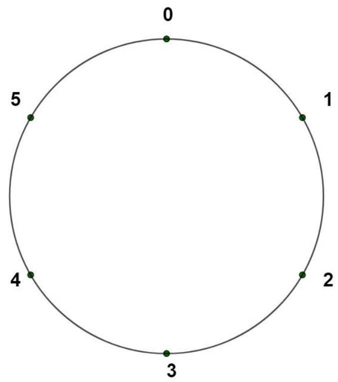
APÊNDICE D - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 6



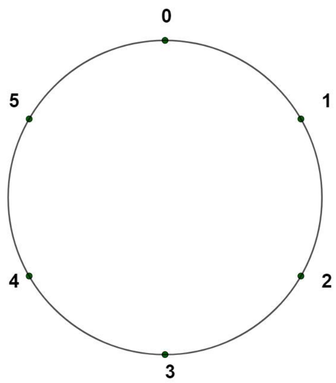
Rodada	Soma "a"



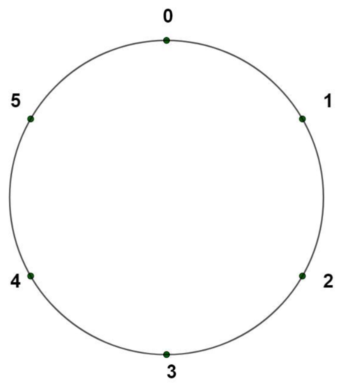
(a)



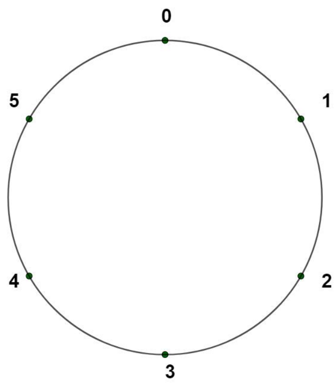
(b)



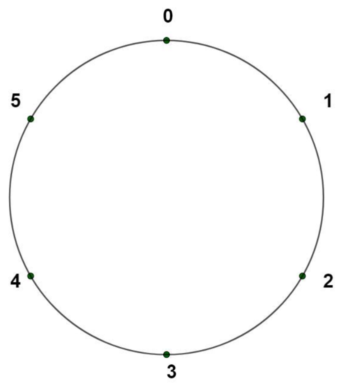
(c)



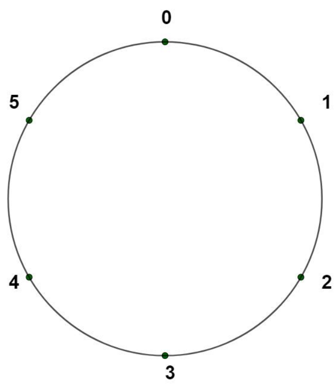
(d)



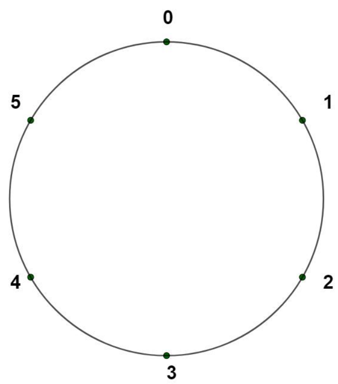
(e)



(f)



(g)



(h)