FUNÇÕES MATEMÁTICAS APLICADAS EM CONCURSOS PÚBLICOS

Vitor Oliveira de Sousa e Steve da Silva Vicentim.

Sumário

Apresentação

Este material tem origem na dissertação denominada "FUNÇÕES MATEMÁTICAS APLICADAS EM CONCURSOS PÚBLICOS" elaborada pelo discente Vitor Oliveira de Sousa sob orientação do professor Dr. Steve da Silva Vicentim do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), desenvolvido com o objetivo de fornecer suporte teórico e prático a estudantes e professores. Ele foi cuidadosamente estruturado para atender às necessidades de candidatos em concursos públicos e educadores que desejam aprofundar seus conhecimentos em matemática aplicada.

A organização do conteúdo segue uma abordagem didática e progressiva. Os capítulos iniciais cobrem conceitos fundamentais, como funções e suas propriedades, avançando para tópicos mais complexos, incluindo funções afins, quadráticas, modulares, exponenciais e suas aplicações práticas em diferentes contextos. Cada seção é enriquecida com exemplos resolvidos, gráficos ilustrativos e exercícios para fixação dos conceitos apresentados.

Este material é um recurso valioso para quem busca dominar conceitos matemáticos com aplicação direta em problemas reais, oferecendo uma ponte entre a teoria matemática e sua aplicação prática nos desafios enfrentados em concursos e no ensino de matemática.

A dissertação original, que aprofunda os conceitos e discussões apresentados, pode ser acessada no banco de dissertações do PROFMAT (https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/), oferecendo uma visão mais ampla e detalhada do conteúdo explorado neste trabalho.

A transformação da dissertação supracitada para este modelo editável foi feita por voluntários do projeto de extensão intitulado Produção de Recursos Educacionais Abertos para o Ensino de Matemática, cadastrado na Pró-reitora de Extensão da Universidade Federal do Cariri (UFCA).

Capítulo 1: Preliminares

1.1 Funções - Propriedades gerais

Estabelecer relações é algo inerente à vida humana; situações como relacionar um terreno com sua área, um reservatório com o seu volume ou até mesmo o preço a se pagar por determinada quantidade de certo produto são exemplos de associações que fazemos no nosso dia a dia. Nesse sentido, a Matemática, cujo objeto de estudo são os padrões abstratos, fornece-nos as ferramentas necessárias para entendermos o funcionamento dos fenômenos que vivenciamos.

Funções é um ramo da Matemática que relaciona os elementos de dois conjuntos por meio de uma lei de correspondência, chamada lei da função e com isso conseguimos atribuir significado aos problemas de determinar áreas de terrenos ou volumes de reservatórios, tais como outros que aparecerão. Imaginemos que se queira construir uma casa num terreno retangular de largura igual a x metros e comprimento excedendo a largura em 20 metros. Assim, vamos dar um significado para a área deste terreno. Chamando a área de A e sabendo que a área de um retângulo é igual ao comprimento vezes largura, temos:

$$A = x \cdot (x + 20) = x^2 + 20x.$$

Com isso fizemos uma associação entre a largura desse terreno, que é variável, com a sua área.

Esta seção foi desenvolvida a partir das referências [3], [4], [5] [6] e [7].

Inicialmente, a fim de explorar o conceito de função de um modo intuitivo, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.1. *Ao abastecer um automóvel, o preço a ser pago depende do número de litros a ser colocado, então vamos supor R$ 4, 90 o preço do litro do combustível.*

Analisemos a Tabela 1.1:

Tabela 1.1: Litro do combustível e preço a pagar.

Número de litros (L)	**Preço a pagar** (R$)
1	4,90
2	2 × 4, 90 = 9, 80
3	3 × 4, 90 = 14, 70
10	10 × 4, 90 = 49, 00
20	20 × 4, 90 = 98, 00

Note que podemos representar este problema com a seguinte equação:

$$4{,}90 \times Quantidade\ de\ litros = Preço\ a\ pagar.$$

Veja que a quantidade de litros e o preço a pagar são variáveis dependentes uma da outra, então representando-as pelas letras x e y, respectivamente, temos $4{,}90 \times x = y$.

Reescrevendo a equação anterior e fazendo $y = f(x)$, *segue que* $f(x) = x \times 4{,}90$.

Veja que formulamos uma regra que relaciona a quantidade de litros com o preço a ser pago. Dizemos, portanto, que esta é a função que associa essas duas variáveis.

Para maiores aprofundamentos, veja [4, pág. 72-73].

Definição 1.1.2. *Dados os conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento x ∈ A um único elemento y ∈ B, que será o seu correspondente.*

Usamos a notação $f : A \to B$ para indicar a função f de A em B e escrevemos: $y = f(x)$, para cada x ∈ A.

Exemplo 1.1.3. *1. Considere os conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e*

$B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$*. Devemos associar cada elemento de A com o seu dobro em B.*

Note que todos os elementos de A têm correspondentes em B e cada elemento de B, que corresponde a um elemento de A, é único.
Então existe uma função de A em B, descrita por f(x) = 2x. Este problema pode ser descrito pela Figura 1.1:

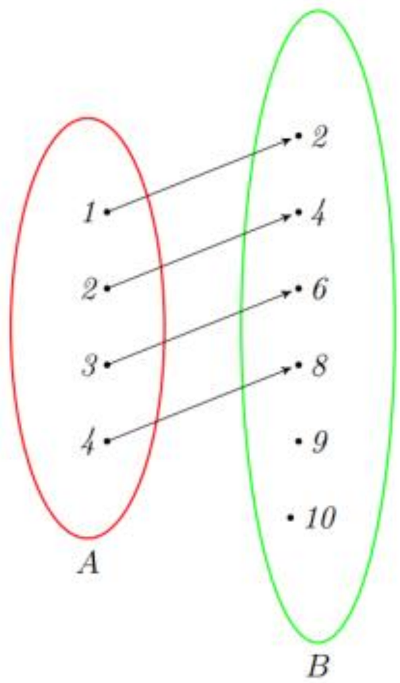


Figura 1.1: Diagrama de flechas para a função $f(x) = 2x$.

2. *Sejam A = {2, 3, 5} e B = {4, 8, 9, 16, 25}, onde cada elemento de A será relacionado com o seu múltiplo inteiro em B.*

Note que não temos uma função de A em B, pois o elemento 2 de A corresponde a três elementos em B (4, 8 e 16 são múltiplos inteiros de 2) e não a apenas um único, contradizendo a definição. Veja a Figura 1.2:

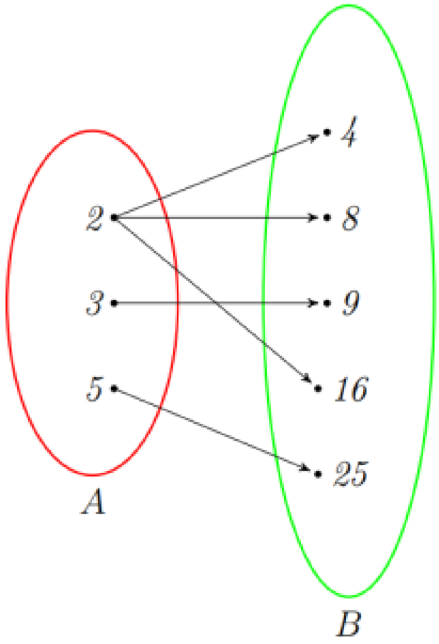


Figura 1.2: Diagrama de flechas ilustrativo.

3. *Sejam A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {2, 3, 4} relacionados pela regra: cada elemento de A será transformado no seu sucessor em B.*
   Veja que não temos uma função de A em B, pois os elementos 4 e 5 de A não têm correspondentes em B, vide Figura 1.3:

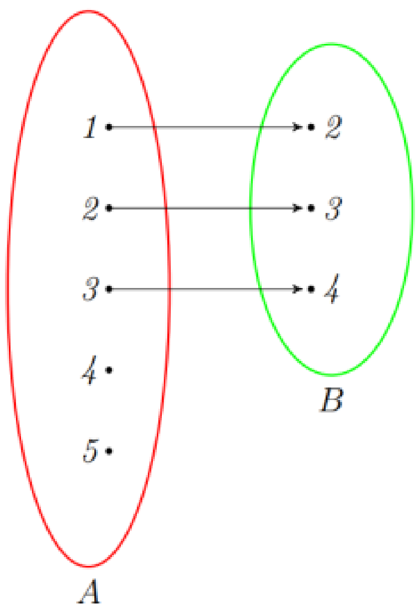


Figura 1.3: Diagrama de flechas ilustrativo.

4. *Sejam $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $B = \{1, 4\}$. Devemos levar cada elemento de A no seu quadrado em B.*
   Todos os elementos de A têm correspondentes em B e eles são únicos. Temos então uma função de A em B, vide Figura 1.4:

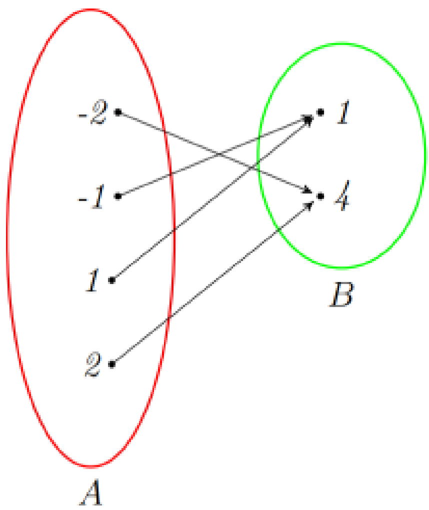


Figura 1.4: Diagrama da função de A em B.

Definição 1.1.4. *Dada uma função $f: A \to B$, o conjunto A é dito o domínio da função f, B o contradomínio e para cada elemento $x \in A$, o seu correspondente $y = f(x) \in B$ é a imagem de x pela função f. O conjunto de todas as imagens $y \in B$ é dito o conjunto imagem de f. Usamos as seguintes notações: $D(f)$ ou D_f para domínio e $Im(f)$, ou ainda $f(A)$ para imagem.*

Então, uma função precisa de três componentes: domínio, contradomínio e uma lei de correspondência que associe os elementos desses dois conjuntos.

Veremos, no Exemplo 1.1.5, que nem sempre o conjunto imagem de uma função será igual ao seu contradomínio.

Exemplo 1.1.5. *Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Tanto o domínio quanto o contradomínio da função são o conjunto dos números reais. Determinemos agora o conjunto imagem. Note que esta função não assume valores negativos (o quadrado de um número real é sempre não-negativo), então o conjunto imagem da função será o conjunto* *dos números reais não-negativos. Notação:* $lm(f) = \{x \in \mathbb{R}|\ x \geq 0\}$*, ou ainda* $lm(f) = \mathbb{R}_+$.

Em muitos casos, será apresentada somente a lei de formação da função sem que sejam explicitados o domínio e o contradomínio da mesma. De um modo geral, vamos considerar o contradomínio sendo o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e o domínio um subconjunto A de $\mathbb{R}$. Estudar o domínio de uma função significa determinar o seu domínio de modo que a função esteja bem definida. Em outras palavras, é encontrar o conjunto A tal que a lei de formação dada defina uma função de A em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.6. 1. $f(x) = \frac{1}{x-4}$.

Em R, não é definida divisão por 0, por isso para existir $f(x) = \frac{1}{x-4}$ *é preciso que* $x \neq 4$.

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \neq 4\}$*, ou ainda* $D(f) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

2. $f(x) = \sqrt{x-5}$.

Em R, não é definida raiz quadrada de número negativo, então para f ser uma função, devemos ter $x - 5 \geq 0$*, ou seja,* $x \geq 5$.

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}|x \geq 5\}\}$*, ou ainda* $D(f) = [5, +\infty)$.

3. $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x}$.

Temos dois casos a considerar: $3 - x \geq 0$ *e* $x \neq 0$. *Daí vem* $x \leq 3$ *e* $x \neq 0$. $D(f) = (-\infty, 0.) \cup (0,3]$.

Definição 1.1.7. *Dada uma função* $f :\ A \rightarrow B$*, dizemos que f é injetiva se para* $x_1, x_2 \in A$*, distintos, tem-se* $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$*, ou equivalentemente,* $f(x_1) = f(x_2) \in B$ *implica* $x_1 = x_2 \in A$.

Definição 1.1.8. *Sendo* $f: A \rightarrow B$ *uma função. Dizemos que a f é sobrejetiva se para cada* $y \in B$*, existe pelo menos um elemento* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$.

Em outras palavras, uma função é sobrejetiva se, e somente se, seu contradomínio coincidir com sua imagem.

Definição 1.1.9. *Uma função que for injetiva e sobrejetiva será dita bijetiva. Então sendo* $f: A \to B$ *uma função bijetiva, dizemos que há uma correspondência biunívoca entre A e B.*

Segue que se uma função $f: A \to B$ for injetiva, então existe uma correspondência biunívoca entre A e f(A), pois para todo y ∈ f(A), existe um único x ∈ A tal que $y = f(x)$.

Também são usadas as expressões função injetora, função sobrejetora e função bijetora, ver [3].

Exemplo 1.1.10. 1. *A função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde* $f(x) = x^2$, *não é injetiva, pois* $-2,2 \in \mathbb{R}$ *e tem-se* $f(-2) = f(2) = 4 \in \mathbb{R}$.

2. *A função f(x) = x + 1 é injetiva, pois*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Pergunta: f(x) = x + 1 é também sobrejetiva?
A resposta é que depende do domínio e do contradomínio considerados. Se a f for de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, *será sobrejetiva, mas se for de* $\mathbb{R}^+$ *em* $\mathbb{R}$, *não será, pois para todo x* $\in \mathbb{R}^+$, *tem-se f(x)* $\in \mathbb{R}^+$. *Logo o contradomínio e a imagem não coincidem.*

Definição 1.1.11. *Dadas as funções* $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$, *definimos a composta de g com f, denotada por* $g \circ f$, *como sendo* $g \circ f: A \to B$ *tal que* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

Exemplo 1.1.12. *Considere as funções* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(x) = 3x + 4$. *Determine* $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ *e* $(g \circ f)(2)$.

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(x^2 + 1) + 4 = 3x^2 + 7$, *ou seja, onde tiver x em g(x), substituímos por f(x).*
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (3x + 4)^2 + 1 = 9x^2 + 24x^2 + 24x + 17$.
- $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 3(2^2) + 7 = 12 + 7 = 19$.

Observação 1.1.13. *([6, pág. 20]) Dadas* $f: A \to B$, $g: B \to C$ *e* $h: C \to D$, *vale a lei associativa* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : A \to D$. *Com efeito, pois para todo x* $\in A$, *temos*

$[(h \circ g) \circ f\,](x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\big[g\big(f(x)\big)\big] = h[(g \circ f)(x)] = [h \circ (g \circ f)](x).$

Ainda no segmento de função composta, falemos sobre função inversa. Para entender melhor este conceito, considere o Exemplo 1.1.1. A função encontrada foi:

Total gasto = 4,90 × Quantidade de litros.

Isso significa que:

Quantidade de litros = Total gasto ÷ 4,90.

Na primeira situação, encontra-se o total gasto em função da quantidade de litros, já na segunda é justamente o contrário, ou seja, consegue-se achar a quantidade de litros tendo por base o total gasto. Dizemos, intuitivamente, que as duas funções são a inversa uma da outra.

Definição 1.1.14. *([6, pág. 17]) Definimos a função identidade como sendo a função* $id_A\colon A \to A$*, tal que* $id_A(x) = x, \forall x \in A$ *.Escrevemos* $id_A\colon A \to A$*, ou ainda* id_A.

Definição 1.1.15. *([6, pág. 21]) Dadas as funções* $f\,:\,A \to B$ *e* $g\,:\,B \to A$*, diremos que a* g *é uma inversa à esquerda para f quando* $g \circ f = id_A\colon A \to A$*, ou seja, quando* $g\big(f(x)\big) = x, \forall x \in A$*.*

Proposição 1.1.16. *([6, pág. 22]) Uma função* $f\colon A \to B$ *possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.*

Demonstração. *Se f é injetiva, então há uma correspondência biunívoca entre A e* $f(A)$*. Devemos mostrar que existe uma função* $g\colon B \to A$*, à satisfazer* $g\big(f(x)\big) = x, \forall x \in A$*. Definamos uma função* $g\colon B \to A$ *tal que* $g\big(f(x)\big) = x, \forall f(x) \in f(A)$*e* $\forall x \in A$ *e* $g(y) = x_0$ *(elemento que fixamos em A) para* $y \in B - f(A)$*. Reciprocamente, supondo que exista uma função* $g\colon B \to A$ *satisfazendo*$g\big(f(x)\big) = x, \forall x \in A$*, para todo* $x_1, x_2 \in A$*, temos* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g\big(f(x_2)\big) = x_2$*. Logo, f é injetiva.*

Definição 1.1.17. *([6, pág. 22]) Uma função* $g\colon B \to A$ *chama-se inversa à direita de uma função* $f\colon A \to B$ *quando* $f \circ g = id_B\colon B \to B$ *ou seja, quando* $f\big(g(y)\big) = y\,, \forall y \in B$*.*

Proposição 1.1.18. *([6, pág. 22]) Uma função* $f\,:\,A \to B$ *possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração. *Seja* $f: A \to B$ *sobrejetiva, então para cada* $y \in B$*, existe* $x \in A$ *tal que* $y = f(x)$*. Definamos uma função* $g: B \to A$ *pondo, para cada* $y \in B$*, um* $x \in A$ *tal que* $g(y) = x$*, onde* $y = f(x)$*. Então temos uma função* $g : B \to A$ *tal que* $f(g(y)) = f(x) = y$*, ou seja,* $f \circ g = idB$*. Reciprocamente, supondo que exista* $g: B \to A$ *que satisfaça* $f \circ g = id_b$*, para cada* $y \in B$*, seja* $x \in A$ *tal que* $x = g(y)$*. Assim,* $f(x) = f(g(y)) = y$*. Portanto, f é sobrejetiva.*

Definição 1.1.19. *([6, pág. 22-23]) Uma função* $g : B \to A$ *chama-se inversa da função* $f : A \to B$ *quando* $g \circ f = id_A$ *e* $f \circ g = id_b$*, isto é, quando g é inversa à esquerda e à direita para f.*

Observação 1.1.20. *Segue, pela Proposição 1.1.16, pela Proposição 1.1.18 e pela Definição 1.1.19, que uma função possui inversa se, e somente se, é uma bijeção. Dizemos então que esta função é invertível.*

Observação 1.1.21. *Como composição de funções tem caráter associativo (Observação 1.1.13), a inversa de uma função, se existir, é única. Certamente, para isso suponha que a função* $f : A \to B$ *admita duas inversas, à saber,* $h_1 : B \to A$ *e* $h_2 : B \to A$*. Temos que:*

$h_1 = h_1 \circ (f \circ h_2) = (h_1 \circ f) \circ h_2 = h_2$.

Proposição 1.1.22. *Dadas duas funções invertíveis* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*, então a composta* $g \circ f$ *também é invertível e vale* $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$*.*

Demonstração. *Dadas as funções invertíveis* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*, temos que elas são bijeções. Do fato de f e g serem injetivas, dados* x_1 *e* $x_2 \in A$ *distintos, temos* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *em B, donde* $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ *em C, ou seja,* $g \circ f$ *é injetiva também. Agora, dado* $z \in C$*, como a g é sobrejetiva, existe* $y \in B$ *tal que* $g(y) = z$*. Como a f é sobrejetiva, existe* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$*, ou seja,* $g(f(x)) = z$ *Logo,* $g \circ f$ *é sobrejetiva e, portanto, invertível.* $g \circ f$ *é uma aplicação que vai de A em C, assim* $(g \circ f)^{-1}$ *deverá ir de C em A, portanto primeiro deverá ser aplicada* g^{-1} *e depois* f^{-1}*. Assim,* $(g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$*, isto é,* $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$*.*

Em algumas funções, o processo de determinar sua inversa é simples, em outras é mais complexo. Vejamos o Exemplo 1.1.23 para uma função trivial.

Exemplo 1.1.23. *Obtenha a inversa da função* $f(x) = 3x + 5$*.*

Podemos denotar $f(x) = y$, *donde* $3x + 5 = y$. *Temos,* $y = 3x + 5 \Rightarrow 3x = y - 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$.

Logo, a inversa da função f é $g(y) = \frac{y-5}{3}$.

Definição 1.1.24. *Sendo* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *uma função, dizemos que a f é par quando* $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$, *ou seja, elementos simétricos no domínio têm a mesma imagem.*

Definição 1.1.25. *A função* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *é ímpar quando* $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, *isto é, elementos simétricos no domínio possuem imagens também simétricas.*

Exemplo 1.1.26. *1.* Mostremos que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ é par.

Temos: $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. *logo a f é par.*

2. *Agora vamos mostrar que a* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x$ *é ímpar.* *Temos:*

$f(-x) = -x = (-1) \cdot f(x) = -f(x)$. *Logo a f é ímpar.*

Definição 1.1.27. *Dizemos que uma função* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *é ilimitada em* $\mathbb{R}$ *se dado* $y \in \mathbb{R}$, *existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) > y$.

A etimologia da palavra "monótono", respectivamente, do grego e do latim monotonus e monotonu, significa "com um único tom", é algo que não sofre mudanças. Em Matemática, dizer que uma função é monótona é considerar que as relações de ordem entre os seus elementos serão preservadas. Definamos, logo a seguir, o que vem a ser função monótona.

Definição 1.1.28. *Dada uma função* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *, dizemos que:*

1. *f é monótona crescente, ou simplesmente crescente, se dados* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *com* $x_1 > x_2$, *tem-se* $f(x_1) > f(x_2)$;

2. *2. f é monótona decrescente, ou simplesmente decrescente, se dados* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *,com* $x_1 > x_2$, *tem-se* $f(x_1) < f(x_2)$;

3. *3. f é monótona não-decrescente, ou simplesmente não-decrescente, se dados* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *com* $x_1 > x_2$, *tem-se* $f(x_1) \geq f(x_2)$*;*

4. *4. f é monótona não-crescente, ou simplesmente não-crescente, se dados* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *com* $x_1 > x_2$, *tem-se* $f(x_1) \leq f(x_2)$*;*

A respeito do comportamento de uma função, ela pode assumir um valor máximo, um mínimo global ou localmente, isso é importante no estudo das funções. Por exemplo, em situações problemas descritos por função quadrática, ver Seção 1.3, saber o seu valor máximo significa determinar o lucro máximo de uma empresa ou a altura máxima de um projétil. Na Seção 1.8, será feito um estudo aprofundado sobre máximos e mínimos de funções quaisquer.

Definição 1.1.29. *Dada uma função f e um ponto* $w \in D(f)$, $f(w)$ *é dito valor máximo global de f (respectivamente valor mínimo global de f) se* $f(w) \geq f(x), \forall x \in D(f)$ $\big(f(w) \leq f(x), \forall x \in D(f)\big)$. *Se* $f(w)$ *é o valor máximo global de f (respectivamente valor mínimo global de f), dizemos que w é o ponto de máximo global de f (ponto de mínimo global de f).*

Definição 1.1.30. *Dada uma função f, um intervalo aberto* $I \subset D(f)$ *e um ponto* $d \in I$*, dizemos que* $f(d)$ *é o valor máximo local de f em I (respectivamente mínimo local de f em I) se* $f(d) \geq f(x), \forall x \in I$ $(f(d) \leq f(x), \forall x \in I)$. *Se* $f(d)$ *é o valor máximo local de f em I (respectivamente mínimo local de f em I), então d é o ponto de máximo local de f em I (ponto de mínimo local de f em I).*

Definição 1.1.31. *Uma função f é periódica se existir um menor real positivo p, denominado período de f, tal que* $f(x+p) = f(x), \forall x \in D(f)$.

Definição 1.1.32. *Dizemos que uma função f é identicamente nula se* $f(x) = 0, \forall x \in D(f)$.

Definição 1.1.33. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita polinomial quando existem* $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ *tais que:*

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Definição 1.1.34. *Dadas as funções polinomiais* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, onde g não é identicamente nula, definamos a função racional* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como o quociente entre f e g, isto é,* $h = f / g$.

Nas duas próximas seções, estudaremos as funções polinomiais com n = 1 e n = 2, respectivamente. Para mais, veja [7].

1.2 Função Afim

Com vastas aplicações, função afim é sempre muito presente em exames seletivos, surgindo em outras áreas, tais como Matemática Financeira com Juros Simples, Progressões Aritméticas e até mesmo Geometria Analítica descrevendo a equação de uma reta. A principal característica é crescimentos ou decrescimentos igualmente espaçados durante o tempo, dependendo de um valor fixo que será acrescido em cada período.

Esta seção foi desenvolvida a partir das referências [3], [4], [5] e [7].

Iniciemos a teoria de Função Afim com a ideia de Juros Simples.

Admita uma aplicação financeira de R$ 10.000, 00 a ser resgatada 5 anos depois, num fundo de investimento a juros simples. Suponha que a taxa anual de juros simples seja de 10%. Vejamos, através da evolução do capital, ao longo do tempo, o valor a ser resgatado. Primeiro vejamos os juros anuais. Como a taxa anual é de 10%, então calculando 10% de 10.000, 00, obtemos R$ 1.000, 00.

Considere a Tabela 1.2:

Tabela 1.2: Introdução por meio de juros simples.

Ano	Capital(R$)	Crescimento (R$)	Juros (R$)
0	10.000, 00	-	-
1	11.000, 00	1.000, 00	1.000, 00
2	12.000, 00	1.000, 00	2 × 1.000, 00
3	13.000, 00	1.000, 00	3 × 1.000, 00
4	14.000, 00	1.000, 00	4 × 1.000, 00

5	15.000, 00	1.000, 00	$5 \times 1.000, 00$

Com isso, os juros totais da operação serão de R\$ 5.000, 00 e o montante (valor a ser resgatado) é dado pela soma dos juros com o capital aplicado.

De maneira geral, sendo C o capital aplicado, n o prazo da aplicação, i a taxa de juros simples, J os juros apurados e M o montante, temos $J = C \times i \times n \, e \, M = C + J$. Manipulando esta última expressão, em função de n, temos:

$$M = an + b, onde\ a = C \times i\ e\ b = C.$$

As funções de que trataremos nesta seção são desse tipo, elas recebem o nome de função afim. Neste caso, fizemos a restrição do domínio em $\mathbb{N}$.

Para maiores aprofundamentos acerca de juros simples, veja [8].

Definição 1.2.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o polinômio de grau 1 na forma $ax + b$ é chamada função afim.*

Notação: $f(x) = ax + b$.

$f(x) = 2x + 1, f(x) = 3x + 4$ *e* $f(x) = 5x - 3$ *são exemplos de funções afins.* Existem dois casos particulares importantes: função linear, denotada por $f(x) = ax$ e função identidade, dada por $f(x) = x$ (Definição 1.1.14).

Nem sempre a função afim será dada, às vezes será necessário buscá-la, a maneira mais usual de se fazer isto é conhecendo dois dos seus valores.

Exemplo 1.2.2. Determine a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(5) = 3\ e\ f(1) = 2$.

Seja $f(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}$.

De $f(5) = 3,\ vem\ 5a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 5a$ (1).

De $f(1) = 2,\ tem-se\ a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a$ (2).

Agora de (1) em (2),

$$3 - 5a = 2 - a \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Substituindo esse valor em uma das equações, digamos em (2), vamos ter

$$b = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{7}{4}.$$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{7}{4}$, *ou ainda* $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 7)$.

Vamos falar agora da taxa de variação da função afim. De maneira geral, dada uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$ e $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, temos

$$b = f(x_1) - ax_1 \text{ e } b = f(x_2) - ax_2.$$

Assim,

$$f(x_1) - ax_1 = f(x_2) - ax_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

O valor $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ é chamado taxa de variação da função afim (ou coeficiente de crescimento ou descrescimento).

Existe uma importante relação entre a taxa de variação de uma função afim e sua monotonicidade, que será vista na proposição a seguir:

Proposição 1.2.3. *Uma função afim* $f(x) = ax + b, a \neq 0$, *é crescente respectivamente decrescente) se, e somente se,* $a > 0$ $(a < 0)$; $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Demonstração. *Suponhamos* $a > 0$, *então dados* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *distintos, temos*

$$x_1 > x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Reciprocamente, suponha que

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2); x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

De $x_1 > x_2$, *vem* $x_1 - x_2 > 0$ *e de* $f(x_1) > f(x_2)$, *segue que*

$$ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 - ax_2 > 0 \Rightarrow a \cdot (x_1 - x_2) > 0.$$

Como $x_1 - x_2 > 0$*, concluímos que* $a > 0$.

O caso em que f é decrescente se, e somente se, $a < 0$ *se faz de maneira análoga. Basta considerarmos que se* $a < 0$*, então* $-a > 0$.

Proposição 1.2.4. *A função afim* $f(x) = ax + b, a \neq 0$*, é injetiva.*

Demonstração. *Segue diretamente da Proposição 1.2.3. Com efeito, consideremos* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*., distintos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que* $x_1 > x_2$*. Se f for crescente, temos* $f(x_1) > f(x_2)$*; se f for decrescente, segue que* $f(x_1) < f(x_2)$*. Em qualquer um dos casos, tem-se* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Proposição 1.2.5. *A função afim* $f(x) = ax + b, a \neq 0$ *é sobrejetiva.*

Demonstração. *De fato, pois* $\forall y \in \mathbb{R}$*, existe x ∈R tal que* $y = ax + b$.

Observação 1.2.6. *Segue da Proposição 1.2.4 e da Proposição 1.2.5 que a função afim* $f(x) = ax + b, a \neq 0$*, é uma bijeção, logo admite inversa (Observação 1.1.19). A inversa da função afim é a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(y) = \frac{y-b}{a}$, onde $y = f(x)$.

Proposição 1.2.7. *A função afim* $f(x) = ax + b, a \neq 0$ *é ilimitada.*

Demonstração. *Segue da Proposição 1.2.5, pois dado* $y \in \mathbb{R}+$*, existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) > y$*. Da mesma forma, dado z* $\in \mathbb{R}_-$*, existe* $w \in \mathbb{R}$ *satisfazendo* $f(w) < y$*. Portanto, a função afim é ilimitada, tanto superior como inferiormente.*

Vamos provar que o gráfico de uma função afim é de fato uma reta, para esta demonstração, usaremos a desigualdade triangular vista na Seção 1.4.

Teorema 1.2.8. *O gráfico de uma função afim é uma reta.*

Demonstração. *De acordo com a Observação 1.4.4, três pontos P, Q e R, pertencentes ao gráfico de uma função afim* $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$*, são colineares se, e somente se,* $|P - R| = |P - Q| + |Q - R|$*, onde* $|P - R|$ *é a maior das distâncias.*

Denotando $P = (x_1, ax_1 + b), Q = (x_2, ax_2 + b)$ *e* $R = (x_3, ax_3 + b)$, *temos*

$$|P - R| = |(x_1 - x_3\ , ax_1 - ax_3)| = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + a^2 \cdot (x_1 - x_3)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + a^2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2}$$

$$= (x_1 - x_3) \cdot \sqrt{1 + a^2}4$$

$$|P - Q| = |(x_1 - x_2\ , ax_1 - ax_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (ax_1 - ax_2)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + a^2)^2 \cdot (x_1 - x_2)^2}$$

$$= (x_1 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

$$|Q - R| = |(x_2 - x_3\ , ax_2 - ax_3)| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (ax_2 - ax_3)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + a^2)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2}$$

$$= (x_2 - x_3) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

Note que:

$$|P - Q| + |Q - R| = (x_1 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2} + (x_2 - x_3) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

$$= x_1\sqrt{1 + a^2} - x_2\sqrt{1 + a^2} + x_2\sqrt{1 + a^2} - x_3\sqrt{1 + a^2}$$

$$= x_1\sqrt{1 + a^2} - x_3\sqrt{1 + a^2}$$

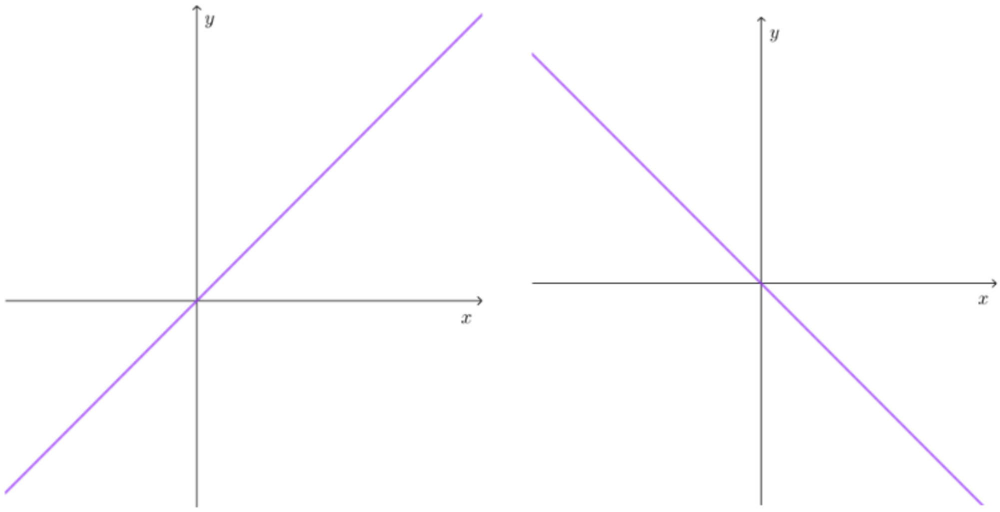
$$= (x_1 - x_3) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

$$= |P - R|$$

Portanto, o gráfico de uma função afim é de fato uma reta.

Para mais, veja [4].

Exemplo 1.2.9. *Esbocemos os gráficos das funções* $f(x) = x$ *e* $g(x) = -x$*, onde f é crescente e g, decrescente.*



$(a)\ f(x) = x$ $(b)\ f(x) = -x$

Figura 1.5: Gráficos de Função Afim.

Provamos, no Teorema 1.2.8, que o gráfico de uma função afim é uma reta. Segue disso que a equação de uma reta obedece à lei de uma função afim. Então sendo s uma reta, a sua equação reduzida é dada por $y = mx + n$, onde m é o seu coeficiente angular e n, o coeficiente linear.

Vimos que o número m é a taxa de variação da função afim, ou seja, dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, distintos, pertencentes à reta $y = mx + n$, temos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Mostremos uma interpretação geométrica para o coeficiente angular m.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m > 0$. Então a reta s tem a forma dada na Figura 1.6. Ainda considerando os pontos A e B, sejam as retas r e r', perpendiculares, tais que r seja paralela ao eixo OX e r' paralela ao eixo OY. Podemos considerar α como sendo o ângulo entre as retas r e r' assim vamos ter

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Logo, $m = \tan \alpha$.

Portanto, o coeficiente angular m é a inclinação da reta s.

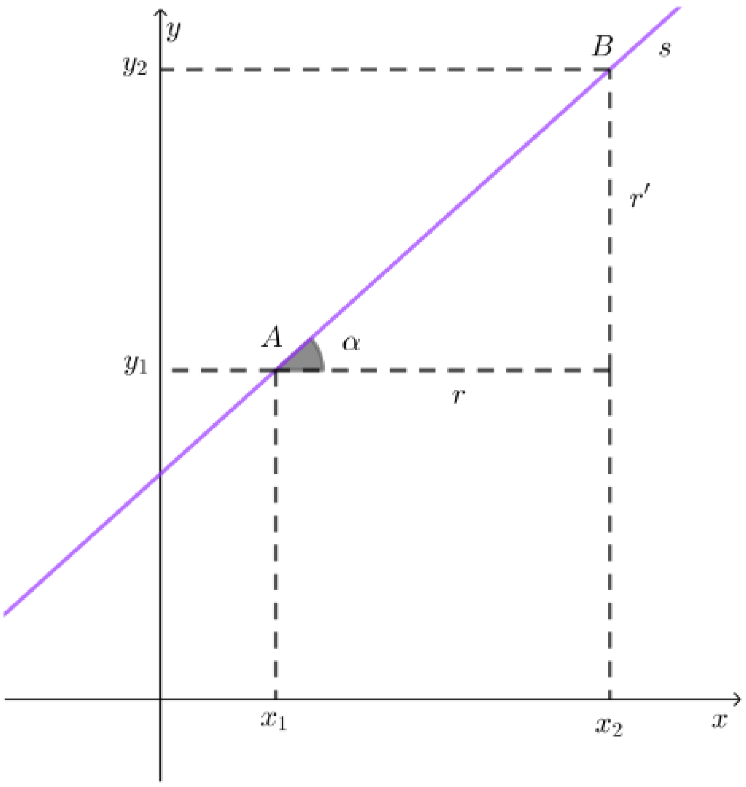


Figura 1.6: Interpretação geométrica para o coeficiente angular.

Exemplo 1.2.10. Calcule a equação da reta que passa pelos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (3,2)$.

Seja $y = mx + n$ a equação da reta que passa pelos pontos A e B, onde m é o coeficiente angular. Temos:

$$m = \frac{2-0}{3-1} = \frac{2}{2} \Rightarrow m = 1.$$

Sendo $P = (x, y)$ um ponto qualquer dessa reta, vamos ter:

$$1 = \frac{y-0}{x-1} \Rightarrow y = x - 1.$$

Dadas duas, ou mais retas, através dos coeficientes angulares, podemos determinar suas respectivas posições relativas.

Proposição 1.2.11. *Dadas as retas* $r: \ y = m_1x + n_1$ *e* $s: \ y = m_2x + n_2$*, então:*

1. *r e s são paralelas se, e somente se,* $m_1 = m_2$*;*
2. *r e s são concorrentes se, e somente se,* $m_1 \neq m_2$*;*
3. *r e s são perpendiculares (ou ortogonais) se, e somente se,* $m_2 = -\frac{1}{m_1}$*, com* $m_1, m_2 \neq 0$.

Demonstração. *Suponhamos, inicialmente, que as retas r e s não sejam coincidentes. Seja* $P' = (x', y')$ *um ponto tal que* $y' = m_1x' + n_1$ *e* $y' = m_2x' + n_2$.

Temos

$$m_1x' + n_1 = m_2x' + n_2 \ \Rightarrow \ m_1x' - m_2x' = n_2 - n_1$$

$$\Rightarrow \ x' \cdot (m_1 - m_2) = n_2 - n_1$$

$$\Rightarrow \ x' = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$$

Logo, as retas r e s admitem uma interseção, à saber, $P' = (x', y')$ *se, e somente se,* $m_1 \neq m_2$*. Da mesma forma, r e s não possuem interseção alguma se, e somente se,* $m_1 = m_2$*. Com isso, os ítens 1 e 2 seguem demonstrados.*

Para o ítem 3, considere a Figura 1.7. Seja $\alpha, 0 < \alpha < 90^{\circ}$*, um ângulo tal que* $m_1 = \tan\alpha$*. Então r e s são perpendiculares se, e somente se,* $m_2 = \tan(\alpha + 90^{\circ})$*, o que ocorre se, e somente se,*

$$\tan(\alpha + 90^{\circ}) = \frac{\sin(\alpha + 90^{\circ})}{\cos(\alpha + 90^{\circ})} = \frac{\sin[180^{\circ} - (\alpha + 90^{\circ})]}{-\cos[180^{\circ} - (\alpha + 90^{\circ})]}$$

$$= -\frac{\sin(90^{\circ} - \alpha)}{\cos(90^{\circ} - \alpha)}$$

$$= -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Logo, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$*, onde usamos a Proposição 1.7.6.*

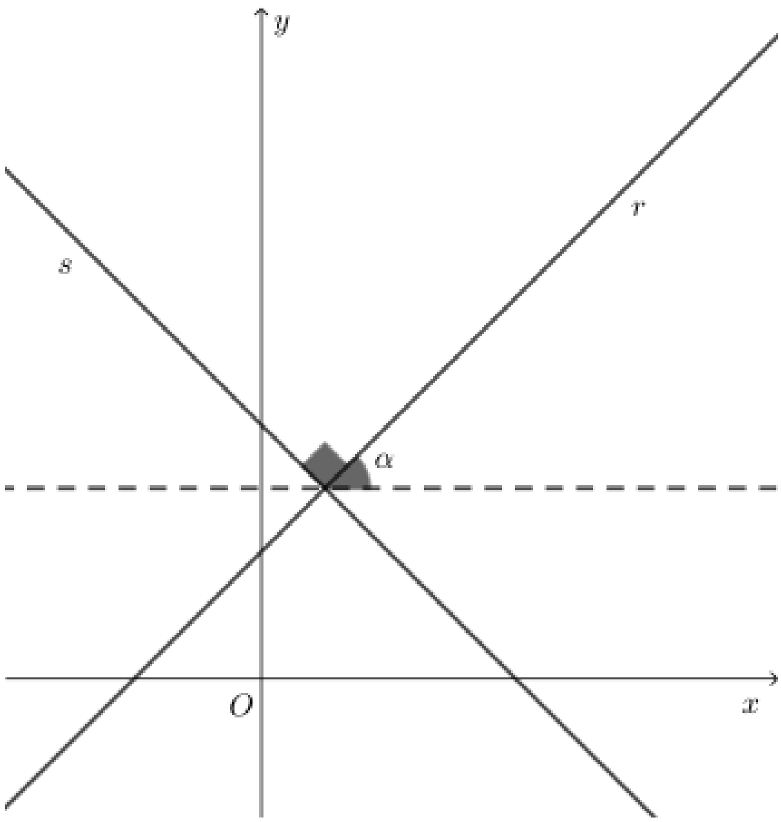


Figura 1.7: Demonstração do ítem 3.

Veremos que progressão aritmética é um caso particular de função afim, restrita a $\mathbb{N}$. Para ilustrar de forma intuitiva o que vem a ser uma PA considere o Exemplo 1.2.12:

Exemplo 1.2.12. *Admita que uma empresa que oferta cursos de Inglês esteja entrando no mercado. Para o início dos trabalhos, já foram confirmadas 500 matriculas. A meta para os próximos dois anos é que a cada mês 100 novas matrículas sejam efetuadas. Ao final desses dois anos, quantos alunos essa escola de Inglês terá?*

Chamemos de a_n *a quantidade de alunos no* $n-$*ésimo mês,* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 24$*, vamos ter*

$$a_1 = 500, a_2 = 500 + 100, a_3 = 500 + 2 \times 100, \cdots, a_{n+1} = 100n + 500.$$

Assim, fazendo $n = 23$*, teremos*

$$a_{24} = 2800.$$

Portanto, ao final de dois anos, a empresa espera ter 2800 alunos matriculados.

Definição 1.2.13. *Progressão Aritmética, ou simplesmente PA, é toda sequência de números reais não-negativos tal que cada termo, a partir do segundo, é obtido mediante a soma do termo anterior com uma constante real não-negativa.*

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots)$ uma progressão aritmética de razão r, onde a_n é o termo geral, então

$$a_2 = a_1 + r;\ a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r;\ a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r; \cdots; a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Com efeito, pois usando indução em n, n ∈ N, conseguimos demonstrar a validade da proposição.

Se $n = 1$, então $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r = a_1$.

Supondo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, para um certo $n, n \in \mathbb{N}$, temos

$$a_n + 1 = a_n + r = a_1 + (n - 1) \cdot r + r = a_1 + [(n - 1) + 1] \cdot r = a_1 + n \cdot r.$$

Portanto, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Temos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, n \geq 1 \, e \, n \in \mathbb{Z},$$

ou ainda, $a_n = a_1 + nr, n \geq 0 \, e \, n \in \mathbb{Z}$.

1.3 Função Quadrática

Um jogador de basquete, ao fazer um arremesso, calcula mentalmente a trajetória da bola para conseguir assim fazer a cesta; ele sabe que ela deve atingir uma altura máxima e depois ir caindo e, além disso, o percurso deve ser o mais perfeito possível, caso contrário, a bola não entra. Sem perceber, o atleta indiretamente faz uso de função quadrática e aprimora isto sempre quando treina para melhorar o arremesso.

Esta seção foi desenvolvida a partir das referências [3], [4] e [5].

Antes de aprimorarmos o conceito de função quadrática, vejamos o processo de resolução de uma equação do 2° grau.

Uma equação do 2° grau é toda aquela do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, onde\ a \neq 0\ e\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Existe um processo prático para se achar a solução, a fórmula de Bháskara. Vamos enunciar e demonstrar este importante resultado.

Teorema 1.3.1. Sendo $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0\ e\ a,b,c \in \mathbb{R}$, uma equação do 2°grau. As suas raízes, se existirem, são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demonstração. *Como* $a \neq 0$, *temos*

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a}$$

Usando o método de completar quadrados, temos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observação 1.3.2. *Denotando* $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$, *temos*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chamamos $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$ de discriminante da equação. Segue disso que uma equação do segundo grau admite raiz real se, e somente se, o discriminante for não negativo, pois no conjunto dos números reais não é definida a raiz de um número negativo.

Se o discriminante for nulo, a equação admite uma única raiz real, à saber,

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Se o discriminante for positivo, a equação admite duas raízes reais distintas, à *dizer,*

$$x_1 = \frac{-b\sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x_2 \; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Definição 1.3.3. *Dados* $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, *função quadrática é a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada* $x \in \mathbb{R}$ *o polinômio do segundo grau* $ax^2 + bx + c$. *Notação:* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

As raízes de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ou seja, os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais se tem $f(x) = 0$, são obtidas resolvendo-se a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, podemos determinar os valores de a, b e c conhecendo três de seus pontos. considere o exemplo:

Exemplo 1.3.4. *Seja f(x) = ax2 + bx + c = 0, a 6= 0 tal que f(0) = 4, f(1) = 2 e f(2) = 1. Vamos encontrar os valores de a, b e c.*

De $f(0) = 4$, *vem* $c = 4$.

De $f(1) = 2$, *tem-se que* $b = -2 - a$ (1) *e de* $f(2) = 1$, *temos* $4a + 2b = -3$ (2).

De (1) em (2), segue que $a = \frac{1}{2}$ *e* $b = -\frac{5}{2}$

Logo, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{5}{2} \cdot x + 4$

Considere a Figura 1.8:

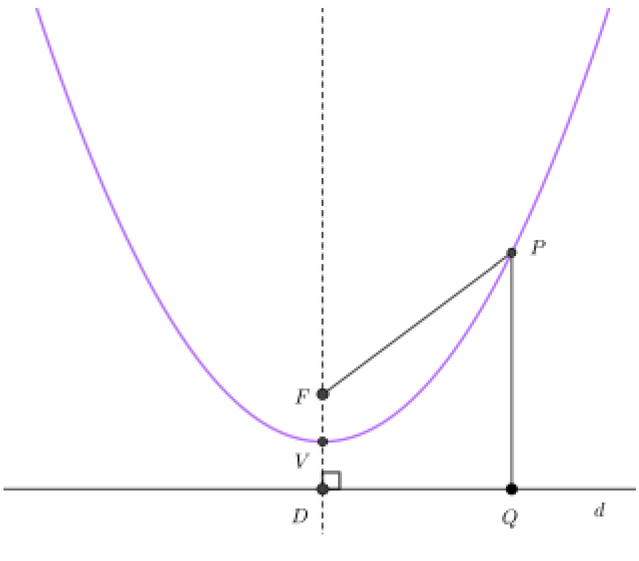


Figura 1.8: Definição de parábola.

Definição 1.3.5. *Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes do ponto F e da reta d.*

Denotemos: O ponto F é o foco da parábola; o ponto V, o vértice (ponto médio do segmento F D); a reta d, a diretriz; a medida de F D, o parâmetro; a reta que passa por F e é perpendicular à diretriz d é o eixo de simetria da parábola e P é um ponto qualquer da parábola.

Vamos provar que o gráfico de uma função quadrática descreve uma parábola.

Teorema 1.3.6. *O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.*

Demonstração. *Considere a Figura 1.8.*

Denotemos

$$P = (x,y), V = (x_v,y_v), d(V,F) = c, F = (x_v, y_v + c) \text{ } e \text{ } Q = (x, y_v - c).$$

Temos que:

$$d(P,F) = d(P,Q) \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_v)^2 + [y-(y_v+c)]^2} = \sqrt{[y-(y_v-c)]^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_v)^2 + [y-(y_v+c)]^2 = [y-(y_v-c)]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-x_v)^2 = 4c \cdot (y-y_v)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xx_v + {x_v}^2 = 4c \cdot (y-y_v)$$

$$\Leftrightarrow y - y_v = \frac{1}{4c}x^2 - \frac{x_v}{2c}x + \frac{{x_v}^2}{4c}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4c}x^2 - \frac{x_v}{2c}x + \frac{x_v}{4c} + y_v$$

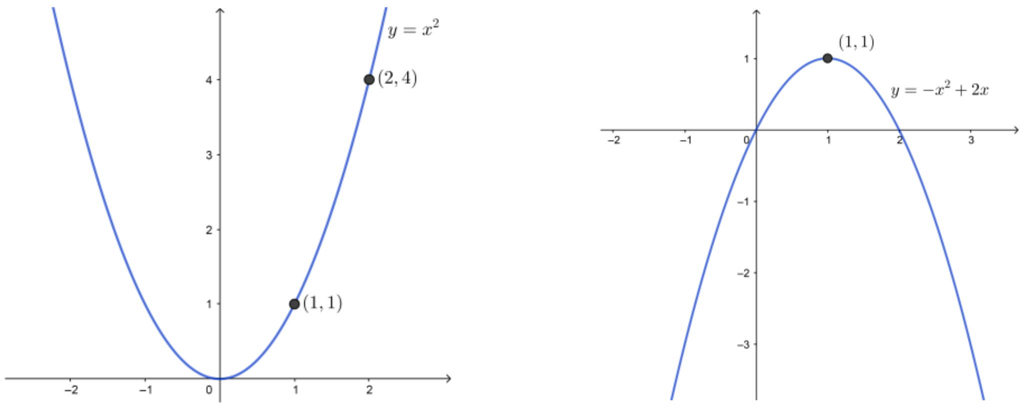
$$\Leftrightarrow y = ax^2 + bx + n,$$

onde $a = \frac{1}{4c}; b = -\frac{x_v}{2c}$ *e* $n = \frac{x_v}{4c} + y_v$

Portanto, o teorema fica demonstrado.

Observação 1.3.7. *Observemos que conseguimos mostrar além do que precisávamos, isto é, também provamos que o conjunto de pontos de uma parábola, de reta diretriz paralela ao eixo OX, satisfaz a lei de uma função quadrática.*

A título ilustrativo, a Figura 1.9 traz os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2 + 2x$.



$(a)\ f(x) = x^2$ $(b)\ f(x) = -x^2 + 2x$

Figura 1.9: Gráficos de funções quadráticas.

Definição 1.3.8. *Reta tangente a uma parábola em um ponto P é a única reta, cuja interseção com a parábola ocorre em um único ponto, que é P, vide Figura 1.10.*

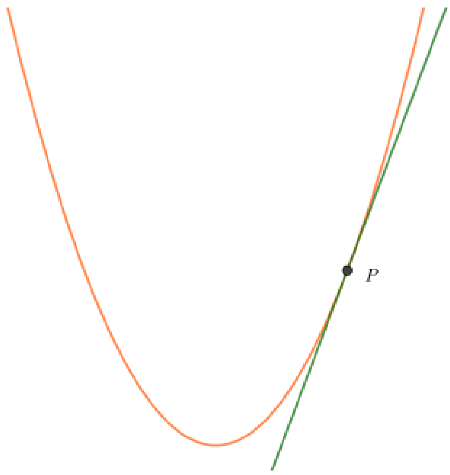


Figura 1.10: Reta tangente.

Definição 1.3.9. *Dada uma função quadrática* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *seja r uma reta tangente ao gráfico de f no ponto* $x \in \mathbb{R}$. *Se a parábola que representa o gráfico de f estiver acima* *de r (respectivamente abaixo de r), dizemos que sua concavidade é voltada para cima (respectivamente para baixo).*

A definição acima é restrita a funções quadráticas, na Seção 1.8, será definido localmente o que vem a ser concavidade de uma função qualquer em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, uma função quadrática. Vamos descrever analiticamente o valor mínimo (respectivamente máximo) de f. Temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Note que: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ (respectivamente $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$) se, e somente se, $a > 0$ $(a < 0)$. Assim $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$ (respectivamente $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$) se, e somente se, $a > 0$ $(a < 0)$. Logo $-\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo (respectivamente máximo) de f se, e somente se, $a > 0$ $(a < 0)$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ se, e somente se, $x = -\frac{b}{2a}$, então $-\frac{b}{2a}$ é o ponto em que f assume valor mínimo (respectivamente máximo).

Definamos o vértice de uma parábola como sendo o ponto em que ela assume valor mínimo (respectivamente máximo). Sendo (x_v, y_v) as coordenadas do vértice, temos

$$x_v = -\frac{b}{2a} \; e \; y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Segue do que acabamos de ver que uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ é ilimitada superiormente (respectivamente inferiormente) se, e somente se, $a > 0$ $(a < 0)$.

Dizemos que $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ é a forma canônica, ou geral, da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Geometricamente, a parábola é côncava para cima (respectivamente para baixo) se, e somente se, $a > 0$ $(a < 0)$. De fato, pois $a > 0$ se, e somente se, a parábola possui um valor mínimo e é ilimitada superiormente. Isso quer dizer que a parábola ficará acima de qualquer tangente que se tome dela. Portanto, a parábola será côncava para cima. A argumentação é análoga para o caso em que $a < 0$.

A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma aplicação definida de $\mathbb{R}_-$ em $\mathbb{R}_+$. Se $a > 0$, a função decresce de $\mathbb{R}_-$ até o ponto $y = y_v$ e cresce de $y = y_v$ até $\mathbb{R}_+$. Chamamos ramo decrescente de f o intervalo onde a parábola é decrescente e ramo crescente de f o intervalo em que a parábola é crescente, ou seja, o ramo decrescente da parábola, com $a > 0$, ocorre no intervalo $(-\infty, y_v)$ e o ramo crescente ocorre em (y_v, ∞). A argumentação é inteiramente análoga para o caso em que $a < 0$.

Com base na referência [7], vamos demonstrar os dois próximos resultados.

Proposição 1.3.10. *Dada a função quadrática $f(x) = ax^2, a \neq 0$, o gráfico de f é a parábola de foco e diretriz, respectivamente, $F = (0,1/4a)$ e $d:\ y = -1/4a$.*

Demonstração. *Sendo $P = (x, ax^2)$ um ponto qualquer do gráfico de f, temos*

$$d(P,F) = \sqrt{x^2 + (ax^2 - 1/4a)^2} \ e \ d(P,d) = \sqrt{(ax^2 + 1/4a)^2}$$

Temos que:

$$d(P,F) = d(P,d) \Leftrightarrow x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + a^2x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2} = a^2x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x^2$$

Como chegamos a uma igualdade verdadeira, o resultado segue verdadeiro.

Proposição 1.3.11. Dada a função quadrática $f(x) = a(x-w)^2, a \neq 0 \; e \; w \in \mathbb{R}$, o gráfico de f é a parábola de foco $F = (w,)$ e diretriz d : y = −1/4a.

Demonstração. *Dado* $P = (x, a(x - w)^2)$ *um ponto do gráfico de* f*, temos:*

$$d(P,F) = d(P,d) \Leftrightarrow (x-w)^2 + \left[a(x-w)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x-w)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-w)^2 = \left[a(x-w)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2 - \left[a(x-w)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-w)^2 = (x-w)^2$$

Portanto, a proposição segue válida.

Observação 1.3.12. *Observemos que o gráfico da função* $f(x) = a(x-w)^2$ *é uma translação do gráfico de* $g(x) = ax^2 \; w$ *unidades para a direita, se* $w > 0$ *e* w *unidades para a esquerda, se* $w < 0$*. Veja a representação gráfica na Figura 2.11 com as funções* $f(x) = x^2, g(x) = (x-2)^2$ *e* $h(x) = (x+2)^2$*. Para completar esta observação, o gráfico de* $H(x) = a(x-w)^2 + k$ *é obtido fazendo a translação do gráfico de* $f(x) = a(x-w)^2 \; k$ *unidades para cima, se* $k > 0$ *e* k *unidades para baixo, se* $k < 0$.

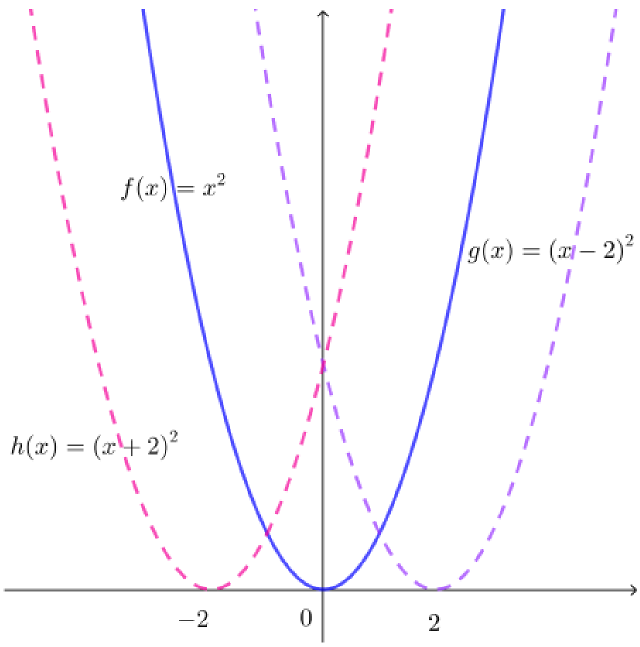


Figura 1.11: Representação gráfica com a função $f(x) = x^2$.

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, o próximo resultado nos apresenta uma importante relação com o sinal do coeficiente b.

Proposição 1.3.13. *Dada uma função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, *se* $b > 0$ *(respectivamente* $b < 0$*), então o gráfico de f intersecta o eixo OY no ramo crescente (respectivamente decrescente).*

Demonstração: Escrevendo f na forma canônica, temos:

$f(x) = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$

fazendo $w = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$, vamos ter

$f(x) = a \cdot (x - w)^2 + k$.

Vimos, na Proposição 1.3.11 e na Observação 1.3.12, que o gráfico de f é obtido por unidades para a esquerda, se $w < 0$; k unidades para cima, se $k > 0$ e k unidades para baixo, se $k < 0$.

Se $a > 0$, então a concavidade do gráfico de f está voltada para cima. Se $b > 0$, então $w < 0$, assim o gráfico de $f(x) = a .(x - w)^2 + k$ é obtido transladando o gráfico de $h(x) = ax^2$, w unidades para esquerda, logo o gráfico de f toca o eixo OY no ramo crescente. Se $b < 0$, temos $m > 0$, assim o gráfico de $f(x) = a .(x - w)^2 + k$ é uma translação do gráfico de $h(x) = ax^2$, w unidades a direita, portanto a parábola que representa o gráfico de f toca o eixo OY no seu ramo decrescente.

A demonstração para o caso em que $a < 0$ é inteiramente análoga. Veja a representação gráfica do problema na Figura 1.12.

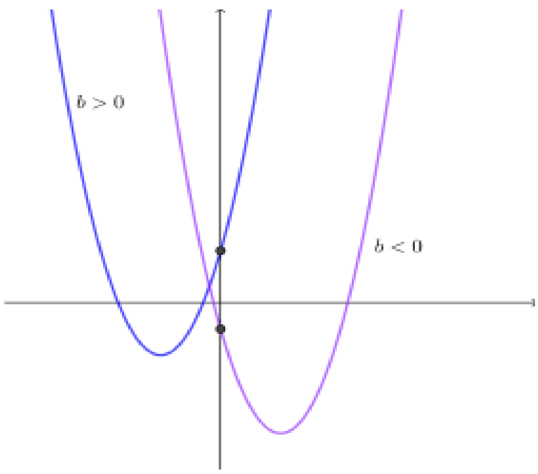


Figura 1.12: Representação gráfica da Proposição 1.3.13

Estudar o sinal de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ significa determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais tem $f > 0$, $f = 0$ ou $f < 0$. Vejamos esse estudo nos casos a seguir:

Caso 1: $\Delta > 0$.

A função admitirá duas raízes reais distintas, à saber, x1 e x2. Então $f(x) = 0$ para $x = x1$ e $x = x2$. Geometricamente, isso quer dizer que a parábola que representa o gráfico de f toca o eixo OX em dois pontos: x1 e x2. Além disso, como podemos ver na figura 1.13:

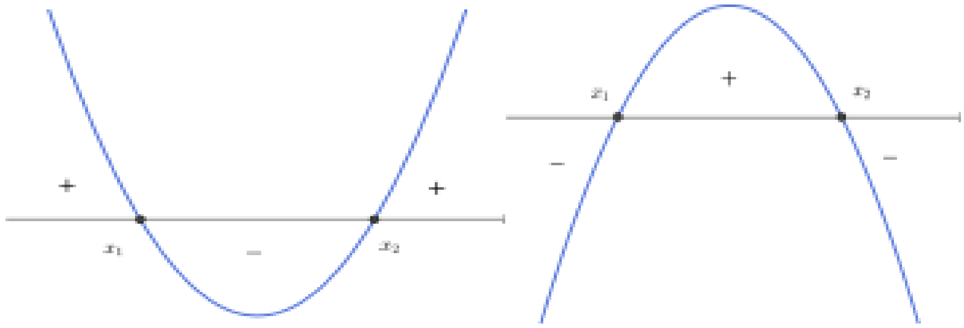


Figura 1.13: $\Delta > 0$

$a > 0$: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x1$ ou $x > x2$ e $f(x) < 0 \Leftrightarrow x1 < x < x2$;

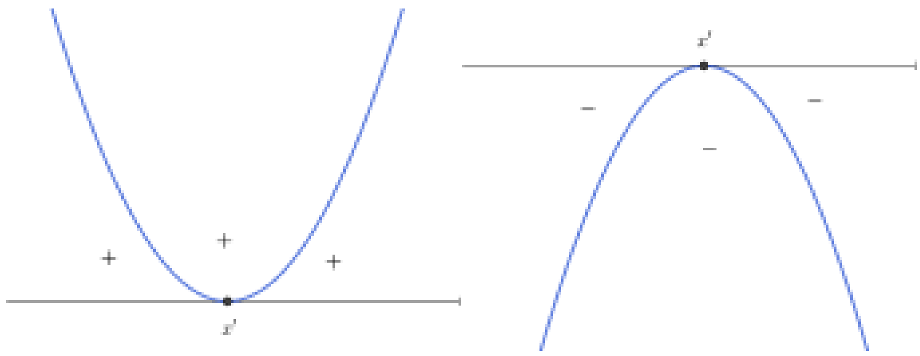
$a < 0$: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x1 < x < x2$ e $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < x1$ ou $x > x2$.

Caso 2: $\Delta = 0$.

Neste caso, a função admitirá uma única raiz real, à dizer, x´, e o sinal dela será o sinal de a. Então $f(x) = 0$ para $x = x´$. Geometricamente, o gráfico de f toca o eixo OX em um único ponto: x´ e, conforme a Figura 1.14:

$a > 0$: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{x´\}$;

$a > 0$: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{x´\}$;

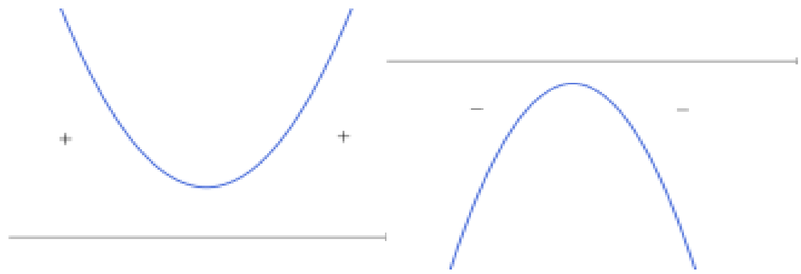


(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Figura 1.14: $\Delta = 0$

Caso 3: $\Delta < 0$

Nesta situação, a função f não admite raiz real alguma, ou seja, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$. Geometricamente, o gráfico do f não toca o eixo OX. Esta situação está representada na figura 1.15:



(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Figura 1.15: $\Delta < 0$

Temos então:

$a > 0$: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

$a < 0$: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

existe uma relação entre função quadrática e progressões aritméticas, que será vista a seguir. Antes, porém, precisamos definir o que vem a ser progressão aritmética de segunda ordem.

Definição 1.3.14. Progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência de números reais na qual as diferenças entre cada termo, a partir do segundo, forma uma progressão aritmética de razão não-nula k.

A definição acima pode ser entendida para progressões aritméticas de ordem superior, ou seja, uma sequência de números reais é dita progressão aritmética de ordem n, $n \in \mathbb{N}$, se as diferenças entre cada termo, a partir do segundo, forma uma PA de ordem n -1.

Proposição 1.3.15. O termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem é dado por uma função quadrática, com domínio restrito a $\mathbb{N}$.

Demonstração. Seja função quadrática $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = na^2 + bn + c$ com a,b e $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $(f(1), f(2), \ldots, f(n), f(n+1), \ldots)$ seja uma sequência de números reais. Considere a nova sequência definida por $(f(2) - f(1), \ldots, f(n+1) - f(n), \ldots)$. Temos que:

$$f(n + 1) - f(n) = a(n + 1)^2 + b(n + 1) + c - (an^2 + bn + c)$$

$$= a(n^2 + 2n + 1) + b(n + 1) + c - an^2 = bn - c$$

$$= an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c$$

$$= 2an + a + b$$

$$= wn + z,$$

Onde $w = 2a$ e $z = a + b$.

Como f(n +10 – f(n) é uma função afim, com domínio restrito a $\mathbb{N}$, então a sequência $(f(2) - f(1), \ldots, f(n+1) - f(n), \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão não-nula k. Logo a sequência $(f(1), f(2), \ldots, f(n), f(n+1), \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Observação 1.3.16. O resultado acima pode ser ampliado para progressões aritméticas de ordem superior, isto é, o termo geral de uma progressão aritmética de ordem n, $n \in \mathbb{N}$, é dado por uma função polinomial de grau n. a demonstração para este fato se encontra na referência [7].

Exemplo 1.3.17. Considere a sequência definida por:

$a_1 = 15$

$a2 = 45$

$a3 = 91$

$a4 = 153$

$a5 = 231$

$a6 = 325$

. . .

Nessas condições, determine o termo a15.

Note que: $a2 - a_1 = 30$; $a3 - a2 = 46$; $a4 - a3 = 62$; $a5 - a4 = 78$ e $a6 - a5 = 94$.

Com isso, temos uma nova sequência (bn), $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(bn) = (30,46,62,78,94, \ldots, bn, \ldots),$$

que é uma progressão aritmética de razão 16.

Logo, a sequência (an), $n \in \mathbb{N}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Pela a proposição 1.3.15, o termo geral de (an) é dado por uma função quadrática, com domínio restrito a $\mathbb{N}$.

Temos que: $an = Pn^2 + Qn + R$; $P,Q,R \in \mathbb{R}$, P diferente de 0 e $n \in \mathbb{N}$.

Seja o sistema abaixo:

$P + Q + R = 15 \qquad -3P - Q = -30 \quad \Rightarrow \quad 2P = 16 \rightarrow P = 8$

$4P + 2Q + R = 45 \quad \Rightarrow \quad -5P - Q = -46$

$9P + 3Q + R = 91$

Daí, $Q = 6$ e $R = 1$.

Logo $an = 8n^2 + 6n + 1$ e , portanto, $a15 = 1891$.

1.4 Função Modular

Em qualquer percurso que se deseja fazer, estabelecer uma referência confere maior organização e eficiência ao processo. Imaginemos uma viagem de carro que vai de uma cidade A para uma cidade B, a fim de estruturar melhor o trajeto, foi pensado em um sistema de referência cuja origem é a cidade A. Vamos associar a posição do carro à sua distância, em km, da origem do sistema da seguinte forma: a orientação do deslocamento é positiva a leste e norte e negativa a oeste e sul. Através de um programa de computador, foi constatado que a cidade B localiza-se a 240 a oeste e 537 ao norte. Representamos esta situação na Figura 1.16:

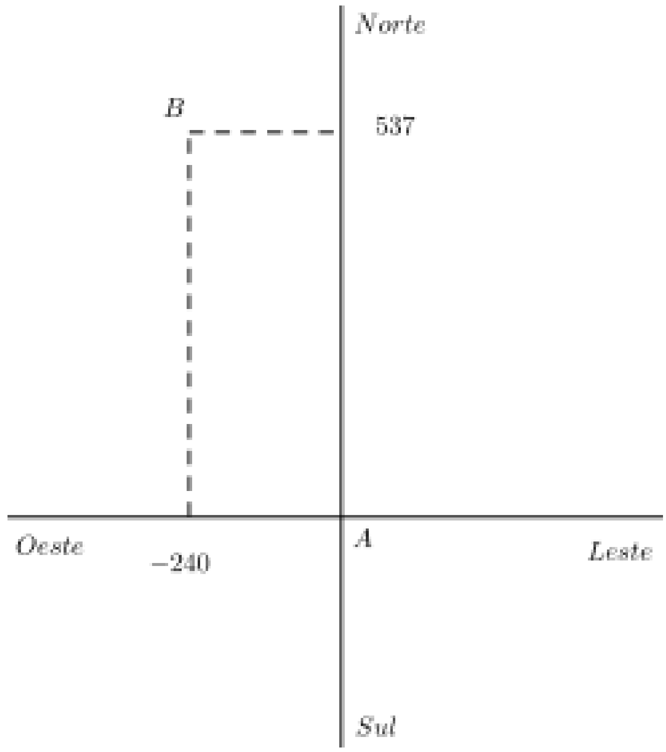


Figura 1.16: Representação do trajeto.

Podemos denota de duas formas a localização da cidade B:

- 240 (oeste) 240 a oeste

537 (norte) 537 a norte

Na primeira situação, temos o valor relativo e na segunda, o valor absoluto. Então valor absoluto de um ponto se refere à distância dele à origem do sistema cartesiano considerado, sempre terá valor positivo, enquanto valor relativo depende da orientação do sistema de referência para a determinação de seu sinal.

Portanto, independentemente do percurso a ser adotado, saber onde se quer chegar dá o direcionamento do que a viagem precisa. Isso se aplicou muito bem nas Grandes Navegações, onde com o auxílio da bússola, portugueses e espanhóis desbravaram o continente americano.

As funções de que trataremos nesta seção associam um número real ao seu valor absoluto, onde a referência é o sistema de coordenadas cartesianas xOy.

Esta seção foi desenvolvida a partir das referências [3], [4] e [5].

Definição 1.4.1. Módulo (ou valor absoluto) de um número real x (notação: |x|) representa a distância desse número à origem do sistema de coordenadas cartesianas, ou seja,

$|x| = x$, se $x \geq 0$

$= -x$, se $x < 0$

Da definição 1.4.1, segue que |x| maior ou igual x, pois se x maior ou igual a 0, tem-se $|x| = x$; por outro lado, x menor que 0, vamos ter $|x| = -x > 0 > x$.

Sendo $u = (a,b)$, com $a,b \in \mathbb{R}$, um ponto no eixo cartesiano, o módulo de u representa a distância dele à origem do sistema. Então considerando a Figura 2.17, temos:

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Daí, dado $x \in R$, temos também $|x| = \sqrt{x^2}$

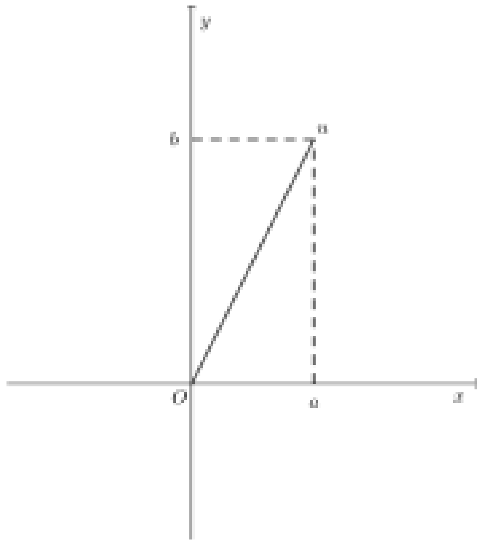


Figura 2.17: Representação gráfica do módulo.

Dados os pontos A = (x1,y1) e B = (x2.y2), a distância entre A e B é dada por |A – B|. Com efeito, pois A - B = (x1 – x2, y1 – y2),

donde |A – B| = $\sqrt{(x1-x2)^2 + (y1-y2)^2}$

Exemplo 1.4.2.

1. Usando a definição de módulo, temos
   |10| = 10 = |- 10|, |12| = 12 = |- 12|, |17| = 17 e |-20| = 20.
2. ∀x ∈ R, sempre vale |x| = |- x|. De fato, pois
   |x| = $\sqrt{x^2}$ = $\sqrt{-x^2}$= |- x|.
3. Considerando a Figura 2.16, vamos calcular a distância entre as cidades A e B. Então sendo A = (0,0) e B = (-240,537), temos
   |A – B| = $|240^2 + (-537)^2|$ = |345969| = 345969 km.

Proposição 1.4.3. Decorrem da Definição 1.4.1 as seguintes propriedades:

I. |x| maior ou igual a 0, ∀x ∈ ℝ
II. |x| = 0 ⇔ x = 0
III. |x| * |y| = |xy|, ∀x ∈ ℝ
IV. $|x|^2 = x^2$, ∀x ∈ ℝ
V. |x + y| ≤|x| + |y|, ∀x ∈ ℝ
VI. |x – y| ≥|x| - |y|, ∀x ∈ ℝ
VII. |x| ≤ a e a≥ 0 ⇔ -a ≤ x ≤ a

VIII. $|x| \geq a$ e $a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $a \geq a$.

Demonstração.

I. Se $x \geq 0$, então $|x| = x \geq 0$; se $x < 0$, temos $-x > 0$, assim $|x| = -x > 0$.

II. Se ≥ 0, então $x = |x| = 0$; se $x < 0$, temos $-x = |x| = 0$, ou seja, $x = 0$. Por outro lado, se $x = 0$, obviamente $|x| = 0$.

III. Se $x,y \geq 0$, então $|x| * |y| = xy = |xy|$.

Se $x,y < 0$, tem-se $|x| * |y| = (-x) * (-y) = xy = |xy|$.

Se $x \geq 0$ e $y < 0$, vem $|x| * |y| = x * (-y) = -xy = |xy|$.

O caso $x < 0$ e $y \geq 0$ se faz de maneira análoga.

IV. Se $x \geq 0$, então $|x| = x$, donde $|x|^2 = x^2$. Se $x < 0$, temos $|x| = -x$, assim $|x|^2 = (-x) *(-x) = x^2$.

V. Temos, $|x+y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$$\leq |x|^2 + |y|^2 + 2 * |x| * |y|$$

$$= (|x| + |y|)^2$$

Logo, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

VI. Temos, $|x-y|^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$$\leq |x|^2 + |y|^2 - 2 * |x| * |y|$$

$$= (|x| - |y|)^2$$

Logo, $|x - y| \leq |x| - |y|$.

VII. Se $a > 0$, vamos ter

$$|x| \leq a \Leftrightarrow |x|^2 \leq a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 – a^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x -a)\ (x +a) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \leq a$$

VIII. Se $a > 0$, vamos ter

$$|x| \leq a \Leftrightarrow |x|^2 \geq a^2$$

$\Leftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - a)(x + a) \geq 0$

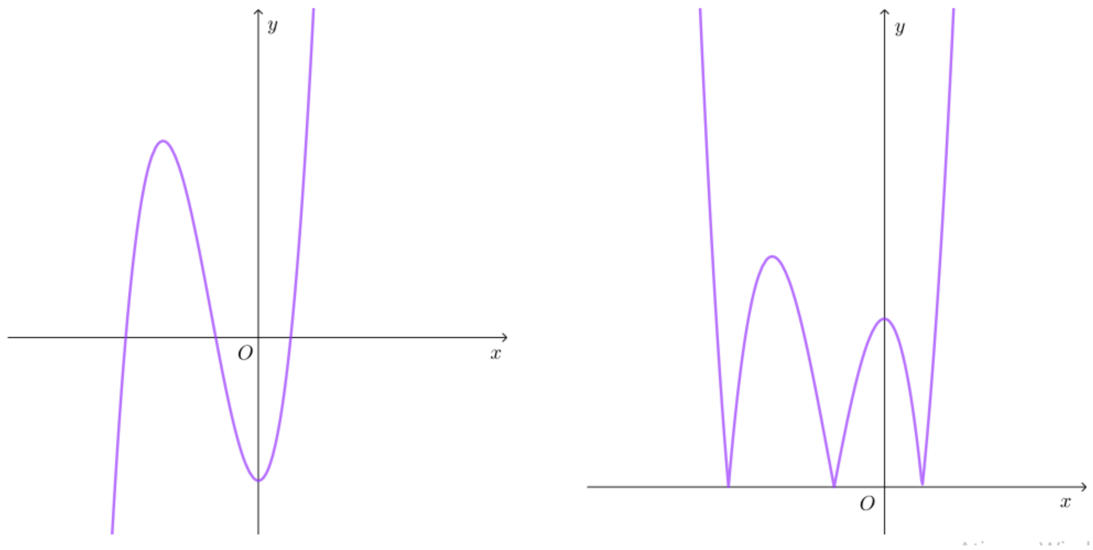
$\Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

Observação 1.4.4. Segue, da desigualdade triangular, a condição de existência de um triângulo. Então os pontos P,Q E R são vértices de um triângulo se, e somente se, $|P - R| < |P - Q| + |Q - R|$. Como contra-posição deste fato, P,Q E R são colineares se, e somente se, $|P - R| = |P - Q| + |Q - R|$, onde $|P - R|$ é a maior das três distâncias.

Definição 1.4.5. *Função modular é toda função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *que associa a cada número real x o seu módulo, ou seja,* $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

São exemplos de funções modulares $f(x) = |x|, f(x) = |3x + 1|, f(x) = |x^2 + 3x|$ etc.

Geometricamente, como a imagem de uma função modular é sempre positiva, ocorrerá uma reflexão em torno do eixo OX. Vejamos o comportamento da função $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4$ com e sem o módulo na Figura 1.18:



(a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4$. (b) $f(x) = |x^3 + 4x^2 - 4|$.

Figura 1.18: Gráfico de uma função modular.

A injetividade e a sobrejetividade de uma função modular depende da lei de formação da função considerada, bem como das restrições feitas ao domínio. Por exemplo, considerando a função $f(x) = |x|$. Se o domínio da f for real, ela será sobrejetiva, pois definimos o contradomínio da função modular sendo $\mathbb{R}_+$, entretanto não será injetiva, pois dados 2 e -2, temos $f(x) = 2 = f(-2)$. Agora se tomarmos o domínio da f sendo o conjunto dos números reais não-negativos, ela de fato será injetiva e ocorrerá assim uma bijeção.

Equações modulares são igualdades do tipo: $|3x + 7| = 3, |4x + 1| + |x| = 2$ etc. O processo de resolução é simples, basta aplicarmos a Definição 1.4.1 e as propriedades de módulo vistas na Proposição 1.4.3.

Exemplo 1.4.6 1. $|x - 7| = 8$.

$$|x - 7| = \begin{cases} x - 7, & se\ x - 7 \geq 0 \\ -(x - 7), & se\ x < 0 \end{cases}$$

Temos $|x - 7| = 8 \Leftrightarrow x - 7 = 8\ ou - x + 7 = 8 \Leftrightarrow x = 15\ ou\ x = -1$.

Logo, o conjunto solução dessa equação é: $\{-1, 15\}$.

2. $|x| = d$, *onde d < 0, não possui solução real, pois lembremos que o módulo sempre vai indicar um valor não-negativo. Neste caso, dizemos que o conjunto solução é vazio. Sendo "S" o conjunto solução, temos:* $S = \emptyset$.

3. $|2x - 4| = |x + 10|$.

Pela definição,

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & se\ 2x - 4 \geq 0 \\ -(2x - 4), & se\ 2x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$|x + 10| = \begin{cases} x + 10, & se\ x + 10 \geq 0 \\ -(x + 10), & se\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

Se $2x - 4 \geq 0\ e\ x + 10 \geq 0\ ou\ 2x - 4 < 0\ e\ x + 10 < 0$, *temos*

$2x - 4 = x + 10$, *donde* $x = 14$.

Se $2x - 4 \geq 0\ e\ x + 10 < 0\ ou\ 2x - 4 < 0\ e\ x + 10 \geq 0$, *então*

$2x - 4 = -(x + 10) = -x - 10$.

Daí, $3x = -6$, *o que nos dá* $x = -2$.

Portanto, S = {-2, 14}.

4. *Imaginemos que em dado ano um comerciante de médio porte do setor de carnes obteve um lucro de* R\$ 750.000,00 *e que no ano seguinte, ocorreu uma variação de* R\$ 90.000,00 *no lucro, onde não se sabe se essa variação foi positiva ou negativa. Quais os possíveis valores para o lucro após a variação? Sendo L o lucro do*

comerciante após a variação de R\$ 90.000,00, *temos* $L - 750000 = 90000$ *ou* $L - 750000 = -90000$, *ou seja,*

$$|L - 750000| = 90000.$$

Recaímos num problema de equação modular. Resolvendo, obtemos $L = 840000$ *ou* $L = 660000$, *que são os possíveis valores para o lucro.*

Inequações modulares são desigualdades do tipo: $|3x + 2| < 3, |x + 1| \geq 4$ etc. Entender o seu processo de resolução auxilia, por exemplo, na determinação do domínio de determinadas funções. Se estivermos interessados em determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{|4x + 1| - 3}$, recairemos num problema de inequação modular, ou seja, devemos solucionar $|4x + 1| \geq 3$, pois o conjunto dos números reais não admite raiz de número negativo.

Dado um número real a, dizer que $|x| \geq a$ e $|x| < a$ equivale a $x \leq -a$ ou $x \geq a$ e $-a < x < a$, conforme visto na Proposição 1.4.3. Geometricamente, isso pode ser interpretado pela Figura 1.19:

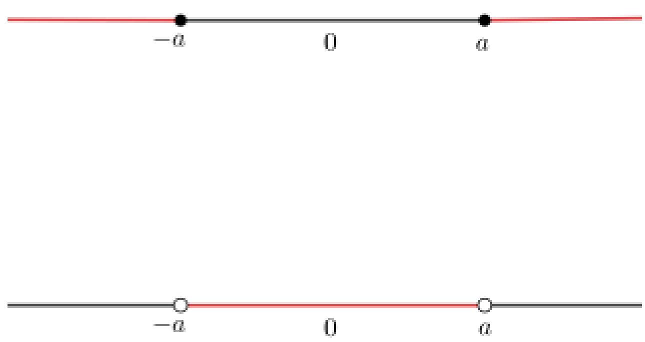


Figura 1.19: Inequações modulares.

Dessa forma, o processo de resolução de uma inequação modular consiste basicamente em aplicar a Definição 1.4.1 e os itens VII e VIII da Proposição 1.4.3:

Exemplo 1.4.7. *1. Determine o domínio da função* $f(x) = \sqrt{|4x + 1| - 3}$.

Devemos ter $|4x + 1| \geq 3$. *Assim,*

$$\begin{aligned} |4x + 1| \geq 3 &\Leftrightarrow 4x + 1 \leq -3 \; ou \; 4x + 1 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -1 \; ou \; x \geq 1/2 \end{aligned}$$

Portanto, $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \ ou \ x \geq 1/2\}$.

2. *Suponha que o lucro de determinada empresa de roupas seja dado pela função* $f(x) = |50x - 50000| - 75000$, *onde x é o número de peças vendidas. Quantas peças de roupas a empresa precisa vender para obter um lucro positivo?*
   O lucro será positivo quando $|50x - 50000| > 75000$. Temos
   $50x - 50000 < -75000 \ ou \ 50x - 50000 > 75000.$
   Assim, $x < -500 \ ou \ x > 2500.$
   Como $x \geq 0$, *segue que* $x > 2500$, *ou seja, a empresa precisa vender no mínimo* 2501 *peças para o seu lucro ser positivo.*

1.5 Exponenciação e função exponencial

O jogo de xadrez é um dos mais difundidos no mundo, com seu caráter estratégico, ele é considerado um esporte, tendo até um campeonato mundial, nas categorias masculino e feminino. A respeito de sua origem, a explicação mais aceita que existe é de que ela tenha se dado na Índia, por volta do século VI. Há uma lenda, amplamente conhecida na comunidade matemática, sobre o surgimento do xadrez que se encaixa perfeitamente no estudo de potências.

Conta-se que um rei indiano estava passando por um momento difícil, de muita tristeza, devido à morte de seu filho. Com o intuito de animar ao seu rei, um dos seus servos resolveu criar um jogo de estratégia para então presenteá-lo. Chegando ao palácio do rei, o servo entregou o tabuleiro com as peças e explicou as regras do jogo. Após alguns dias, maravilhado com o jogo que tivera ganho, o rei mandou chamar o sábio que criou o jogo para recompensá-lo de alguma forma. Chegando ao seu encontro, o rei agradeceu ao sábio pela criação do jogo que tanto o alegrou e de imediato lhe ofereceu uma recompensa. De início, o sábio recusou, mas o rei retrucou: "não aceito "não" como resposta". Dessa forma, o sábio se dirigiu ao rei e então fez o seu pedido: "quero um grão de trigo referente à primeira casa do tabuleiro, dois referentes à segunda casa e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade da casa anterior até chegar à última, de número 64". Estando surpreso com o pedido, pois o considerava simplório, o rei perguntou ao sábio se ele tinha certeza e ainda falou: "podes ter o que quiseres". O sábio apenas respondeu: "dei-me apenas o que pedi".

Sendo assim, o rei ordenou ao seu grupo de matemáticos que calculassem a quantidade de grãos de trigo a ser dada ao criador do jogo de xadrez. Pouco tempo depois, os matemáticos voltaram ao encontro do rei e foram concisos: "mesmo que convertam as águas salgadas dos sete mares e as terras do mundo inteiro em grãos de trigo, seria insuficiente dar a esse senhor a quantidade de que ele deseja". Sem entender nada, o rei indagou: "Como?" Os matemáticos então disseram: "a quantidade pedida por esse senhor é de dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quatrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil e seiscentos e quinze grãos de trigo". Após esta fala, o sábio virou-se ao rei e concluiu dizendo: "majestade, não desejo bens materiais, o meu objetivo com este pedido era apenas mostrar-te o poder imensurável dos números".

Esta breve história nos traz um problema de potenciação, vamos interpretá-lo algebricamente. Antes, porém, precisamos definir a potência natural ou nula de um número real.

Esta seção foi desenvolvida a partir das referências [3], [4], [9] e [7].

Definição 1.5.1. *Dados $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, potência de base a e expoente n é o número a^n tal que*

$$a^0 = 1 \text{ e } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\, vezes}.$$

Indutivamente, temos

$a^0 = 1, a^1 = a, \cdots, a^n = a^{n-1} \cdot a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Seja a_n a quantidade de grãos de trigo na n-ésima casa, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq n \leq 64$.

Temos

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4 = 2^2, a_4 = 8 = 2^3, \cdots, a_n = 2^{n-1}$.

Com efeito, pois usando indução em $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 64$, consegue-se mostrar que de fato $a_n = 2^{n-1}$. Então, se $n = 1$, temos $1 = 2^{1-1} = 2^0$. Supondo que $a_n = 2^{n-1}$, para um certo n, $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 64$, seja $a_{n+1} = 2 \cdot a_n = 2 \cdot (2^{n-1})$, donde $a_{n+1} = 2^n$. Logo, a proposição é válida para $n + 1$, assim $a_n = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 64$.

A quantidade de grãos de trigo solicitados pelo sábio é dada pela soma

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$$

por isso o número é tão grande.

As funções de que trataremos nesta seção associam um número real *x* com a potência $a^x, a \in \mathbb{R}\ e\ 0 < a \neq 1$. Antes de conceituá-las, vamos aplicar o conceito de potência para o expoente em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, pois a definição inicial de potência foi feita para o expoente em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definição 1.5.2. *Dado* $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1\ e\ n \in \mathbb{N}$, *definimos a potência* a^{-n} *pela relação*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Proposição 1.5.3. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}\ e\ 0 < a, b \neq 1; m_1, m_2, \cdots, m_8 \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}$ e $m, n, p \in \mathbb{N}$, *tem-se*:

1. $a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdots a^{m_8} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_8}$;

2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

4. $(a^m)^p = a^{mp}$;

5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Demonstração. *Demonstraremos cada um dos itens inicialmente em* $\mathbb{N}$ e depois em $\mathbb{Z}$.

1. *Temos*

$$\begin{aligned} a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdots a^{m_8} &= \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m_1-vezes} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m_2-vezes} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m_8-vezes} \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m_1+m_2+\cdots+m_8-vezes} \\ &= a^{m_1+m_2+\cdots+m_8}. \end{aligned}$$

Considerando os números $-m_1, -m_2, \cdots, -m_8$, *vamos ter*

$$\begin{aligned} a^{-m_1} \cdot a^{-m_2} \cdots a^{-m_8} &= \frac{1}{a^{m_1}} \cdot \frac{1}{a^{m_2}} \cdots \frac{1}{a^{m_8}} \\ &= \frac{1}{a^{m_1+m_2+\cdots+m_8}} \\ &= a^{-(m_1+m_2\cdots m_8)} \\ &= a^{-m_1-m_2\cdots-m_8}. \end{aligned}$$

2. *Temos*

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n-vezes} = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n-vezes} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdots b)}_{n-vezes} = a^n \cdot b^n.$$

Considere o número $-n$, temos

$$(a \cdot b)^{-n} = \frac{1}{(a \cdot b)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}.$$

3. *Temos que:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdots \left(\frac{a}{b}\right)}_{n-vezes} = \frac{a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Considerando $-n$, vamos ter

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}.$$

4. *Temos*

$$\begin{aligned}(a^m)^p &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{p-vezes} \\ &= a^{m+m+\cdots+m} \\ &= a^{mp},\end{aligned}$$

onde usamos o item 1.

Considerando $-m$ e $-p$, vamos ter

$$\begin{aligned}(a^{-m})^{-p} = \frac{1}{(a^{-m})^p} &= \frac{1}{(\frac{1}{a^m})^p} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(a^m)^p}} \\ &= a^{mp},\end{aligned}$$

onde usamos o item 3.

5. *Se $m > n$, então*

$$\begin{aligned}\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^{m-n}}{a^n} &= (a^{-n} \cdot a^n) \cdot a^{m-n} \\ &= a^{-n+n} \cdot a^{m-n} \\ &= a^0 \cdot a^{m-n} \\ &= a^{m-n}.\end{aligned}$$

Se $m = n$, temos

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 \ e \ a^{m-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Assim, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Se m < n, tem-se

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^{n-m}} = \frac{a^{-m} \cdot a^m}{a^{-(m-n)}}$$
$$= \frac{a^{-m+m}}{a^{-(m-n)}}$$
$$= \frac{a^0}{a^{-(m-n)}}$$
$$= a^{m-n}.$$

Considerando agora os números $-n \ e - m$, *vamos ter*

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}.$$

Definição 1.5.4. *Dados* $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1 \ e \ n \in \mathbb{N}$, *chama-se raiz n-ésima de a o número real não-negativo* $a^{\frac{1}{n}}$ *tal que* $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Definição 1.5.5. *Dados* $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1 \ e \ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. *Definimos a potência* $a^{\frac{m}{n}}$ *como sendo a raiz* $n-$*ésima de* a^m, *isto é,* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Lema 1.5.6. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a, b \neq 1$ e $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, *tem-se que:*

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração. *Observemos que* $(a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{p \cdot \frac{1}{q}}, \forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Suponha que $p, q \in \mathbb{N}$, *então*

$$(a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \ e \ a^{p \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Assim, $(a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{p \cdot \frac{1}{q}}, \forall p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$.

Considere os números $-p \ e - q$, *temos*

$$(a^{-p})^{-\frac{1}{q}} = (a^{-p})^{\frac{-1}{q}} = \sqrt[q]{(a^{-p})^{-1}} = \sqrt[q]{a^p} \ e \ a^{-p \cdot \frac{1}{-q}} = a^{p \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Agora, sem perda de generalidade, considere o número $-p$, *temos então*

$$(a^{-p})^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} \ e \ a^{-p \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{-p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}}.$$

Logo, $(a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{p\cdot\frac{1}{q}}, \forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0.$

Sejam $r, s \in \mathbb{R}, 0 < r, s \neq 1$ *e* $n \in \mathbb{Z}$, *temos*

$$r \cdot s = r^{\frac{n}{n}} \cdot s^{\frac{n}{n}} = r^{n\cdot\frac{1}{n}} \cdot s^{n\cdot\frac{1}{n}} = (r^n)^{\frac{1}{n}} \cdot (s^n)^{\frac{1}{n}} \ e$$

$$r \cdot s = (r \cdot s)^{\frac{n}{n}} = (r \cdot s)^{n\cdot\frac{1}{n}} = [(r \cdot s)^n]^{\frac{1}{n}} = [(r^n) \cdot (s^n)]^{\frac{1}{n}}.$$

Como r e s são números reais quaisquer, $0 < r, s \neq 1$, *podemos denotar* $a = r^n$ *e* $b = s^n$. *Com isso, concluímos que*

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

Observação 1.5.7. *Segue que* $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$

Proposição 1.5.8. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a, b \neq 1$; $m_1, m_2, \cdots, m_8 \in \mathbb{Q}, s \in \mathbb{N}$ *e* $m, n, p \in \mathbb{Q}$, *tem-se que:*

1. $a^{m1} \cdot a^{m2} \cdots a^{ms} = a^{m1+m2+\cdots+ms}$;

2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

4. $(a^m)^p = a^{mp}$;

5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Demonstração. $1.$ *Sejam* $m_1 = \frac{p_1}{q_1}, m_2 = \frac{p_2}{q_2}, \cdots, m_s = \frac{p_s}{q_s}$; $p_i, q_i \in \mathbb{Z}, q_i \neq 0, i \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq i \leq s$.

Procederemos por indução sobre s, s $\in \mathbb{N}$.

Observemos que o caso em que s = 1 é redundante, pois é óbvio que $a^{m1} = a^{m1}$.

Dessa maneira, suponha s ≥ 2, s $\in \mathbb{N}$.

Se s = 2, então

$$a^{\frac{p1}{q1}} \cdot a^{\frac{p2}{q2}} = a^{\frac{p1q2}{q1q2}} \cdot a^{\frac{p2q1}{q1q2}} = a^{p1q2\cdot\frac{1}{q1q2}} \cdot a^{p2q1\cdot\frac{1}{q1q2}}$$

$$= (a^{p1q2})^{\frac{1}{q1q2}} \cdot (a^{p2q1})^{\frac{1}{q1q2}}$$

$$= (a^{p1q2} \cdot a^{p2q1})^{\frac{1}{q1q2}}$$

$$= (a^{p_1q_2+p_2q_1})^{\frac{1}{q_1q_2}}$$

$$= a^{(p_1q_2+p_2q_1)\cdot\frac{1}{q_1q_2}}$$

$$= a^{\frac{p1q2}{q1q2}+\frac{p2q1}{q1q2}}$$

$$= a^{\frac{p1}{q1}+\frac{p2}{q2}}.$$

Suponha que a proposição seja válida para um certo s, $s \in \mathbb{N}, s \geq 2.$ $A\ fim\ de\ mostrar\ que\ também\ vale\ para\ s+1, temos$

$$a^{\frac{p1}{q1}} \cdot a^{\frac{p2}{q2}} \cdots a^{\frac{ps}{qs}} \cdot a^{\frac{ps+1}{qs+1}} = a^{\frac{p1}{q1}+\frac{p2}{q2}+\cdots+\frac{ps}{qs}} \cdot a^{\frac{ps+1}{qs+1}}, onde\ p_{s+1}, q_{s+1} \in \mathbb{Z}, q_{s+1} \neq 0.$$

Podemos denotar $\frac{p1}{q1} + \frac{p2}{q2} + \cdots + \frac{p_s}{q_s} = \frac{w1}{w2};\ w_1, w_2 \in \mathbb{Z}, w_2 \neq 0.$

Com isso, vamos ter o produto de duas potências, de mesma base, de expoentes racionais, onde pelo passo base (s = 2), foi mostrado que os expoentes podem ser somados, pois as bases são iguais. Assim, temos

$$a^{\frac{w_1}{w_2}} \cdot a^{\frac{p_{s+1}}{q_{s+1}}} = a^{\frac{w_1}{w_2}+\frac{p_{s+1}}{q_{s+1}}}, isto\ é, a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} \cdots a^{\frac{p_s}{q_s}} \cdot a^{\frac{p_{s+1}}{q_{s+1}}} = a^{\frac{p_1}{q_2}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_s}{q_s}+\frac{p_{s+1}}{q_{s+1}}}.$$

Logo, a proposição é verdadeira para s + 1 e portanto ela vale paro todo s, s ∈ ℕ *, s ≥ 0.*

2. Denotemos n = $\frac{k_1}{k_2}; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_2 \neq 0. Temos$

$$(a \cdot b)^{\frac{k_1}{k_2}} = (a \cdot b)^{k_1 \cdot \frac{1}{k_2}} = [(a \cdot b)^{k_1}]^{\frac{1}{k_2}} = [(a^{k_1}) \cdot (b^{k_1})]^{\frac{1}{k_2}} = (a^{k_1})^{\frac{1}{k_2}} \cdot (b^{k_1})^{\frac{1}{k_2}}$$

$$= a^{k_1 \cdot \frac{1}{k_2}} \cdot b^{k_1 \cdot \frac{1}{k_2}}$$

$$= a^{\frac{k_1}{k_2}} \cdot b^{\frac{k_1}{k_2}}$$

3. Ainda considerando n = $\frac{k_1}{k_2};\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_2 \neq 0, temos$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_1}{k_2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{k_1 \cdot \frac{1}{k_2}} = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k_1}\right]^{\frac{1}{k_2}} = \left(\frac{a^{k_1}}{b^{k_1}}\right)^{\frac{1}{k_2}} = [(a^{k_1}) \cdot (b^{-k_1})]^{\frac{1}{k_2}}$$

$$= (a^{k_1})^{\frac{1}{k_2}} \cdot (b^{-k_1})^{\frac{1}{k_2}}$$

$$= a^{\frac{k_1}{k_2}} \cdot b^{-\frac{k_1}{k_2}}$$

$$= \frac{a^{\frac{k_1}{k_2}}}{b^{\frac{k_1}{k_2}}}$$

4. Sejam $m = \frac{x_1}{x_2}$ $e\ p = \frac{y_1}{y_2}$; $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ e $x_2, y_2 \neq 0, tem - se\ que:$

$$\left(a^{\frac{x_1}{x_2}}\right)^{\frac{y_1}{y_2}} = \left(a^{\frac{x_1}{x_2}}\right)^{y_1 \cdot \frac{1}{y_2}} = \left[\left(a^{\frac{x_1}{x_2}}\right)^{y_1}\right]^{\frac{1}{y_2}} = \left(a^{\frac{x_1}{x_2}} \cdot a^{\frac{x_1}{x_2}} \cdots a^{\frac{x_1}{x_2}}\right)^{\frac{1}{y_2}} = \left(a^{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1}{x_2}+\cdots+\frac{x_1}{x_2}}\right)^{\frac{1}{y_2}}$$

$$= \left(a^{\frac{x_1}{x_2} \cdot y_1}\right)^{\frac{1}{y_2}}$$

$$= a^{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2}},$$

onde usamos o ítem 1 e consideramos y_1 *positivo, se* y_1 *for negativo, basta usarmos a Definição 1.5.2.*

5. Denotamos m = $\frac{x'}{y'}$ $e\ n = \frac{w'}{z'}$; $x', y', w', z' \in \mathbb{Z}, y', z' \neq 0$, *tem-se :*

$$\frac{a^{\frac{x'}{y'}}}{a^{\frac{w'}{z'}}} = \frac{a^{\frac{x'z'}{y'z'}}}{a^{\frac{w'y'}{y'z'}}} = \frac{a^{x'z' \cdot \frac{1}{y'z'}}}{a^{w'y' \cdot \frac{1}{y'z'}}} = \frac{\left(a^{x'z'}\right)^{\frac{1}{y'z'}}}{\left(a^{w'y'}\right)^{\frac{1}{y'z'}}} = \left(\frac{a^{x'z'}}{a^{w'y'}}\right)^{\frac{1}{y'z'}} = \left[\left(a^{x'z^1}\right) \cdot \left(a^{-w'y'}\right)\right]^{\frac{1}{y'z'}}$$

$$= \left(a^{x'z'}\right)^{\frac{1}{y'z'}} \cdot$$

$$\left(a^{-w'y'}\right)^{\frac{1}{y'z'}}$$

$$= a^{\frac{x'z'}{y'z'}} \cdot a^{-\frac{w'y'}{y'z'}}$$

$$= a^{\frac{x'}{y'}} \cdot a^{-\frac{w'}{z'}}$$

$$= a^{\frac{x'}{y'} - \frac{w'}{z'}},$$

onde usamos o itens 1 e 3.

Para completar a definição de potência de expoente real, definamos a potência $a^{\alpha}, a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1\ com\ \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

De acordo com a referência [6], o conjunto $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é denso em* $\mathbb{R}, isso\ quer\ dizer\ que\ dado\ um\ intervalo\ aberto\ (a,b)\ de\ \mathbb{R}, existe\ q\ \in$ $\mathbb{Q}\ tal\ que\ r\ \in (a,b)$.

Definição 1.5.9. Dados $\mathrm{a} \in \mathbb{R}, 0 < \mathrm{a} \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, considere $\mathrm{r}, \mathrm{s} \in \mathbb{Q}$ tais que $\mathrm{r} < \alpha$ e $\mathrm{s} > \alpha$, de modo que a diferença $|\mathrm{r} - \mathrm{s}|$ seja tão pequena quanto se deseje. Então a potência a^{α} é definida da seguinte forma:

$$a^r < a^\alpha < a^s.$$

Observação 1.5.10. *Observemos que as propriedades de potências demonstradas em* $\mathbb{Q}$, $ver\ Proposição$ 1.5.8, $também\ são\ válidas\ em\ \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *A justificação para este fato segue da forma com que potência de expoente irracional foi definida, pois sendo* $a^\alpha, 0 < a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\ tal\ que\ a^r < a^\alpha < a^s; r,s \in \mathbb{Q}$, *uma vez as propriedades sendo válidas para r e s, consequentemente valerão para α, pois a diferença |r – s| pode ser tão pequena quanto se deseje.*

Com isso, temos a definição da potência $a^x, \forall x \in \mathbb{R}\ e\ a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$. *Dessa forma, estamos em condições de definir o que vem a ser função exponencial.*

Definição 1.5.11. Dado a $\in \mathbb{R}$, *0*$< a \neq 1$, *a função f:* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ *que associa cada número real x a potência* a^x *é chamada função exponencial de base a. Assim temos f(x) =* a^x.

De acordo com [9], vamos provar que a função exponencial f(x) = a^x *é crescente (respectivamente decrescente) quando* $a > 1$ $(0 < a < 1)$. *Antes, porém, precisamos mostrar que sendo a* $\in \mathbb{R}, a > 1 (0 < a < 1)\ e\ x \in \mathbb{R}\ qualquer, temos$:

$$a^x > 1\ se, e\ somente\ se, x > 0 (x < 0).$$

Lema 1.5.12. *(|9, Lema 1, pág. 28-29|) Sendo a* $\in \mathbb{R}$, *a* > 1 *e n* $\in \mathbb{Z}, temos$:

$$a^n > 1\ se, e\ somente\ se, n > 0.$$

Demonstração: *Provemos, por indução sobre n, que n* $> 0\ implica\ a^n > 1$.

Se $n = 1$, *então* $a^1 = a > 1.Assim\ o\ resultado\ é\ verdadeiro\ para\ n = 1.Suponhamos\ a\ tese\ válida\ para\ um\ certo\ n, n \in \mathbb{Z}, n > 0, devemos\ provar\ que\ também\ vale\ para\ n+1.$

Sendo $a > 1$, *multiplicando ambos os membros desta desigualdade por* a^n *e mantendo o sentido da mesma, pois* a^n *é positivo, vamos ter*

$$a > 1 \Rightarrow a \cdot a^n > a^n \Rightarrow a^{n+1} > a^n > 1.$$

Assim o resultado é válido para n + 1 e portanto vale para todo $n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

Mostremos agora que $a^n > 1$ *implica* $n > 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $n \leq 0, ou\ seja, -n \geq 0. Notemos\ que\ se\ n = 0$, *então* $a^0 = 1. Pela\ primeira\ parte, a^{-n} \geq 1. Multiplicando\ ambos\ os\ membros\ desta\ desigualdade\ por\ a^n$, *teremos*

$a^{-n} \cdot a^n \geq a^n \Rightarrow 1 \geq a^n$,

O que contraria a hipótese $a^n \geq 1$.

Segue que $a^n > 1$ *de fato implica* $n > 0$.

Lema 1.5.13. *([9, Lema 2, pág. 29-30]) Sendo* $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ *e* $r \in \mathbb{Q}$, *temos:*

$$a^r > 1\ se, e\ somente\ se, r > 0.$$

Demonstração: *Provemos primeiro que* $r > 0 \Rightarrow a^r > 1$. *Seja* $r = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, *então* $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$. *Sendo* $q > 0$ *e* $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a > 1, então$ *pelo Lema 1.5.12,* $a^{\frac{1}{q}} > 1$. *Novamente, pelo Lema 1.5.12,* $a^{\frac{1}{q}} > 1$ *e* $p > 0\ acarreta\ que\ \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1$. *Mostremos agora que* $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$. *Façamos* $r = \frac{p}{q}$, *p, q* $\in \mathbb{Z}$, *q ≠0. Se q >* $0, temos\ a^{\frac{1}{q}} > 1.\ Daí, a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1, donde, pelo\ Lema\ 1.5.12, p > 0\ .Logo, r > 0.$ *Se* $q < 0, isto\ é, -q > 0, então\ a^{-\frac{1}{q}} > 1. Assim\ \ a^r = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{-\frac{1}{q}}\right)^{-p} > 1$, *pelo Lema 1.5.12, -p >0, ou seja, p < 0. Portanto, r > 0.*

Proposição 1.5.14. *([9, Lema 3, pág, 30]) Sendo* $a \in \mathbb{R}$, $a > 1, r, s \in \mathbb{Q}, temos$:

$a^s > a^r$ se, e so mente se, $s > r$.

Demonstração. *Temos que*

$$a^s > a^r \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \quad \Leftrightarrow a^{s-r} > 1$$

$$\Leftrightarrow s - r > 0$$

$$\Leftrightarrow s > r,$$

onde usamos o Lema 1.5.13.

Lema 1.5.15. *([9, Lema 4, pág. 30-31]) Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos:*

$$a^{\alpha} > 1 \text{ se, e somente se, } \alpha > 0.$$

Demonstração. *Provemos que $\alpha > 0$ implica $a^{\alpha} > 1$.*

Pela definição do número irracional α, positivo, existem $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que

$$0 < r < \alpha < s.$$

Como $a > 1$ e $r, s > 0$, pela Proposição 1.5.14 e pelo Lema 1.5.13, temos

$$1 < a^r < a^s.$$

Daí, $1 < a^r < a^{\alpha} < a^s$, ou seja, $a^{\alpha} > 1$.

Mostremos agora que $a^{\alpha} > 1$ implica $a^{\alpha} > 0$.

Suponha, por absurdo, que $\alpha < 0$, então $-\alpha > 0$. Pela primeira parte, $a^{-\alpha} > 1$.

Daí, $a^{-\alpha} \cdot a^{\alpha} > a^{\alpha}$, donde $1 > a^{\alpha}$, contrariando assim, a hipótese $a^{\alpha} > 1$.

Proposição 1.5.16. *([9, Teorema 2, pág. 32]) Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,*

temos:

$a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$.

Demonstração. *Temos que:*

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 > x_2,$$

onde usamos o Lema 1.5.13 e o Lema 1.5.15.

Lema 1.5.17. *([9, Teorema 3, pág. 32]) Sendo* $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ *e* $b \in \mathbb{R}$, *temos*:

$a^b > 1$ *se, e somente se,* $b < 0$.

Demonstração. *Se* $0 < a < 1$, *então* $\frac{1}{a} > 1$. *Temos pelo Lema 1.5.13 e pelo Lema 1.5.15 que* $-b > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} > 1 \Leftrightarrow a^b > 1$, *ou seja,* $a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$.

Proposição 1.5.18. *([9, Teorema 4, pág. 32]) Sendo* $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ *e* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 < x_2.$$

Demonstração. *Temos que:*

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

onde usamos o Lema 1.5.17.

Segue da Proposição 1.5.16 e da Proposição 1.5.18 que a função exponencial, f(x) = a^x *é crescente (respectivamente decrescente) se, e somente se,* $a > 1$ $(0 < a < 1)$. *Esta importante propriedade é de suma importância em todo o estudo de função exponencial.*

Proposição 1.5.19. *([9, pág. 28]) A função exponencial f(x) =* a^x, *com* $0 < a \neq 1$, *é injetiva.*

Demonstração. *De fato, dados* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *distintos, podemos supor, sem perda de generalidade, que* $x_1 > x_2$. *Se a > 1, pela Proposição 1.5.16, temos* $a^{x_1} > a^{x_2}$. *Se* $0 < a < 1$, *pela Proposição 1.5.18, segue* $a^{x_1} < a^{x_2}$. *Em qualquer um dos casos, temos* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Proposição 1.5.20. *A função exponencial é sobrejetiva.*

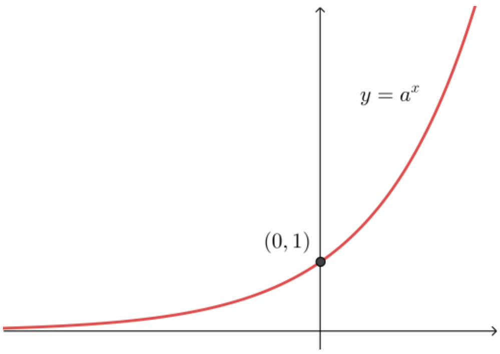
Demonstração. *Veja [7, pág. 156].*

Proposição 1.5.21. *A função exponencial f(x) =* a^x*, 0 < a ≠ 1, é ilimitada superiormente.*

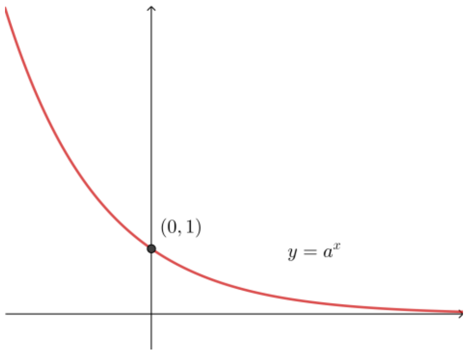
Demonstração. *Segue diretamente da Proposição 1.5.20, pois para todo y* $\in \mathbb{R}_+^*$*, podemos tomar um certo k* $\in \mathbb{R}_+^*$*, k > y tal que k = f(c), para algum c* $\in \mathbb{R}$*.*

Segue da Proposição 1.5.19 e da Proposição 1.5.20 que a função exponencial é uma bijeção, logo admite inversa, ver Observação 1.1.20. Este fato será usado na Seção 1.6 ao definir função logarítmica, que é a inversa da função exponencial.

Segue, na Figura 1.20, os gráficos da função exponencial para os casos a > 1 e 0 < a < 1. Através deles, temos uma interpretação geométrica para a Proposição 1.5.21, ou seja, conseguimos visualizar graficamente o caráter ilimitado da função exponencial. Para maiores aprofundamentos, veja [4, pág. 237-240], [9, pág. 33-38] e [7, pág. 157].



(a) a > 1.



(b) 0 < a < 1.

Figura 1.20: Gráfico da Função Exponencial

Equações exponenciais são igualdades do tipo $7^x = 49^{2x} + 343^{5x}, 8^x = 16^{4x}$ etc. Para a sua resolução, usamos o fato da função exponencial ser injetiva, vide Proposição 1.5.19, e as propriedades de potências vistas na Proposição 1.5.3.

Exemplo 1.5.22. *1. Função exponencial está presente na biologia, sendo o modelo matemático que descreve o crescimento de determinados seres vivos ao longo do tempo. Imaginemos que uma cultura de bactérias duplique sua população a cada hora, assim se t é o número de horas contadas a partir de t = 0, em quantas horas a população será de 8192?*

Note que: $2^1 = 2, 2^2 = 4, \cdots, 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2024, 2^{12} = 4096$ *e* $2^{13} = 8192.$ *Então temos* $2^t = 2^{13}$*, donde t = 13.*

2. Resolver $7^x + 7^{x-2} = 50$.

Note que: $7^x + 7^{x-2} = 7^x + 7^x \cdot 7^{-2} = 7^x \cdot (1 + 7^{-2}) = 7^x \cdot (50/49)$. *Assim,*

$7^x + 7^{x-2} = 50 \Longrightarrow 7^x \cdot (50/49) = 50 \Longrightarrow 7^x = 49 = 7^2 \Longrightarrow x = 2.$

Para maiores aprofundamentos acerca das equações exponenciais, veja [4]. Inequações exponenciais são desigualdades do tipo $2^x > \frac{1}{16}, 9^{2x} < 81^{x+3}$etc.

Para a sua resolução, usamos a Proposição 1.5.16 e a Proposição 1.5.18, bem como as propriedades de potências tratadas na Proposição 1.5.3. Desigualdades desse tipo são importantes na determinação do domínio de determinadas funções, como por exemplo em f(x) = $\frac{1}{\sqrt{4^{x+3}-4^{x+\frac{5}{2}}-1}}$.

Exemplo 1.5.23. *1. Explicite o domínio da função f(x) =* $\frac{1}{\sqrt{4^{x+3}-4^{x+\frac{5}{2}}-1}}$.

Devemos ter $4^{x+3} - 4^{x+\frac{5}{2}} > 1$.

Temos que:

$$\begin{aligned} 4^{x+3} - 4^{x+\frac{5}{2}} = 4^x \cdot 4^3 - 4^x \cdot 4^{\frac{5}{2}} &= 4^x \cdot \left(4^3 - 4^{2+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 4^x \cdot (64 - 16 \cdot 2) \\ &= 4^x \cdot 32. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} 4^x \cdot 32 > 1 \Longrightarrow 2^{2x} \cdot 2^5 > 1 &\Longrightarrow 2^{2x+5} > 1 \\ &\Longrightarrow 2x + 5 > 0 \\ &\Longrightarrow x > -5/2, \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 1.5.13 e o Lema 1.5.15.

Portanto, $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > -5/2\}$.

2. Resolva $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{27}\right)^{4x+1}$.

Temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^{4x+1} &\Longrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{12x+3} \\ &\Longrightarrow 3x < 12x + 3 \\ &\Longrightarrow 9x > -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x > -1/3.$$

Portanto, o conjunto solução desta inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x > -1/3\}.$$

Para mais, veja [3].

No estudo de função exponencial, existe um tipo de função muito importante nas aplicações, que são as funções de tipo exponencial, através delas consegue-se determinar o montante de uma aplicação financeira, a juros compostos, em qualquer data bem como saber o termo geral de uma progressão geométrica, fazendo a restrição do domínio em $\mathbb{N}$.

Definição 1.5.24. *Dado* $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$, $a\ função\ de\ tipo\ exponencial$ é $a\ função\ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *tal que* $f(x) = k \cdot a^x, k \in \mathbb{R}$.

Note que k = *f*(0), pois $k \cdot a^0 = k$. Se k = 0, f seria uma função identicamente nula e assim não faria sentido definir função de tipo exponencial. Se k < 0, f seria negativa em todos os pontos de sua imagem e isso contradiz a definição de seu contradomínio, que é $\mathbb{R}_+^*$. Por isso, vamos considerar k > 0.

Na função de tipo exponencial valem as mesmas propriedades da função exponencial.

Falemos sobre juros compostos, para isso considere a mesma situação problema descrita no início da Seção 1.2, a única diferença é que nesta ilustração será tratado os juros compostos.

Enquanto em juros simples os juros são calculados em cima do valor inicial da operação, dito capital, em juros compostos, a incidência dos juros ocorre em cima do valor imediatamente anterior. Vejamos isso na prática.

Considere a Tabela 1.3

Tabela 1.3: Exemplo com juros compostos.

Ano	Capital (R$)	Crescimento (R$)	Juros (R$)
0	10.000,00	-	-
1	11.000,00	1.000,00	1.000,00

2	12.100,00	1.100,00	2.100,00
3	13.310,00	1.210,00	3.310,00
4	14.641,00	1.310,00	4.641,00
5	16.105,00	1.464,10	6.105,10

Perceba que, nesta situação, o valor a ser resgatado após 5 anos é maior em relação ao do exemplo com juros simples, e essa diferença aumenta com o passar do tempo.

De maneira geral, dada uma aplicação financeira, a juros compostos, de capital C, taxa de juros i e tempo t, o montante M evolui da seguinte forma ao longo do tempo:

$t = 1 : M = C + C \cdot i \cdot 1 = C \cdot (1 + i)$

$t = 2 : M = C \cdot (1 + i) + C \cdot (1 + i) \cdot i = C \cdot (1 + i + i + i^2) = C \cdot (1 + i)^2$

.

.

.

$t = n : M = C \cdot (1 + i)^n$, com restrição do domínio em $\mathbb{N}$.

Definição 1.5.25. ([4, pág. 313]) Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente é chamado razão da progressão e será indicado por q.

Neste trabalho, será considerado apenas os valores positivos de uma PG. Para mais, veja [4].

Considerando uma PG $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, b_n)$ de razão q, temos:

$$b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2, \cdots, b_n = b_{n-1} \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Portanto, o termo geral de uma PG é dado por uma função do tipo exponencial.

A situação problema descrita no início da seção é um exemplo de PG, onde o primeiro termo é 1 e a razão é 2.

Existe um tipo de função que possui muitas aplicações, que é a função exponencial de base e, ou seja, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = e^x$. O número e é irracional, à saber 2,7182818284 .... Ele é obtido considerando a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$.

A medida que n cresce, o valor da sequência se aproxima do valor de e. Na referência [6], demonstra-se que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

Na seção 1.8, será feito um estudo sobre limites.

Encerremos esta seção com uma aplicação da função exponencial de base e.

Em Matemática Financeira, existe um tipo de capitalização que capitaliza os juros em intervalos de tempo bem pequenos, continuamente, ele é chamado capitalização contínua. Então considerando uma aplicação financeira C de taxa de capitalização contínua i durante um período n, o montante M apurado ao final da operação é dado por: $M = C \cdot e^{i \cdot n}$.

Nessas condições, considerando os dados da situação problema vista com juros compostos, vamos encontrar o montante M apurado ao final dos 5 anos com taxa de capitalização contínua de 10%. Temos $M = 10000 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 16487, 21$.

Comparando esse valor obtido com o da Tabela 1.3, na data de 5 anos, vemos que o valor a ser resgatado com capitalização contínua é maior em relação à capitalização composta. Portanto, o investimento com capitalização contínua é mais vantajoso em relação à capitalização composta.

Veremos na seção seguinte a inversa da função exponencial, chamada função logarítmica.

1.6 Logaritmo e Função Logarítmica

Esta seção foi desenvolvida a partir das referências [3], [4], [9] e [7].

Na Seção 1.5 realizamos o estudo de equações e inequações exponenciais, onde tratamos apenas dos casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base, veja exemplo 1.5.22 e Exemplo 1.5.23.

Segundo [9, pág. 57]: "[⋯] Se queremos resolver a equação 2^x= 3, sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, pois $2^1 < 2^x = 3 < 2^2$, mas com os conhecimentos adquiridos até aqui não sabemos qual é esse valor nem o processo para determiná-lo [⋯]".

Com o intuito de resolver esse tipo de problema, bem como outros que aparecerão, iniciaremos o estudo de logaritmos e função logarítmica.

Definição 1.6.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e b > 0, logaritmo de b na base a (notação: $\log_a b$) é o número real x tal que a potência a^x seja igual a b, ou seja,*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Observação 1.6.2. *Segue do estudo de potências feito na Seção 1.5 que os seguintes itens são consequências da Definição 1.6.1:*

1. Se b = 1, então $\log_a b$= 0, pois a^0 = 1 = b.

2. Se b = a, tem-se $\log_a b$ = 1, pois a^1= a = b.

Perceba que este item é apenas um caso particular da Definição 1.6.1, onde neste caso foi considerado x = 1. Obviamente se a definição vale para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular, valerá para $x = 1$ também.

3. $a^{\log_a b} = b$ = b, pois denotando $\log_a b =$ x, temos a^x = b. Assim $a^{\log_a b} = a^x = b$.

Definição 1.6.3. *(Condição de existência de um logaritmo) Dados a, b ∈ $\mathbb{R}$, dizemos que o logaritmo $\log_a b$ existe se b > 0 e 0 < a ≠ 1.*

Vejamos agora as propriedades dos logaritmos.

Proposição 1.6.4. *Dados X, Y, k; a, b ∈ $\mathbb{R}$; X, Y > 0 e 0 < a, b ≠ 1. Tem-se que:*

1. $\log_a(X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y$ *;*

2. $\log_a(X/Y) = \log_a X - \log_a Y$ *; ;*

3. $\log_a X^k = k \cdot \log_a X$*;*

4. $\log_b X = \frac{\log_a X}{\log_a b}$.

Demonstração. *Denotemos $\log_a X$= p, $\log_a Y$ = q, $\log_a(X \cdot Y)$ = r e $\log_a(X/Y)$ = s. Temos 1. a^r = X · Y = $a^p \cdot a^q = a^{p+q} \Leftrightarrow r = p + q$.*

Observemos que podemos generalizar este item, isto é, sendo $A_1, A_2, \cdots, A_n, n \in \mathbb{N}$, números reais positivos, vamos ter

$$\log_a(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \cdots + \log_a A_n.$$

Com efeito, sendo $\log_a(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = w, \log_a A_1 = w_1, \log_a A_2 = w_2, \cdots, \log_a A_n = w_n$*, vem* $a^w = a^{w_1} \cdot a^{w_2} \cdots a^{w_n} = a^{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$*, donde* $w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

2. $a^s = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \Leftrightarrow s = p - q$.

3. Se $k \in \mathbb{N}$*, temos*

$\log_a X^k = \log_a \underbrace{(X \cdot X \cdot X)}_{k-vezes} = \underbrace{(\log_a X + \log_a X + \cdots + \log_a X)}_{k-vezes} = k \cdot \log_a X$.

Se $k \in \mathbb{N}$*, então* $-k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$*. Assim*

$$\log_a X^{-k} = \log_a \frac{1}{X^k} = \log_a 1 - \log_a X^k = -kk \cdot \log_a X,$$

onde usamos o item 2 e o caso em que $k \in \mathbb{N}$.

Se $k \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ *então* $k = \frac{k_1}{k_2}$; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

primos entre si. Temos

$$\log_a X^{\frac{k_1}{k_2}} = \log_a \left(X^{\frac{1}{k_2}}\right)^{k_1} = k_1 \cdot \log_a X^{\frac{1}{k_2}} = k_1 \times \frac{k_2}{k_2} \cdot \log_a X^{\frac{1}{k_2}}$$

$$= \frac{k_1}{k_2} \cdot \log_a \left(X^{\frac{1}{k_2}}\right)^{k_2}$$

$$= \frac{k_1}{k_2} \cdot \log_a X,$$

onde usamos o caso em que $k \in \mathbb{Z}$.

Completemos a demonstração deste item provando para $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ *tais que* $\alpha < k < \beta$*, onde a diferença* $|\alpha - \beta|$ *pode ser tão pequena quanto se deseje. Então temos*

$$log_a X^\alpha = \alpha \cdot log_a X \ \ e \ \ log_a X^\beta = \beta \cdot log_a X,$$

onde usamos o caso em que $k \in \mathbb{Q}$.

Como a diferença $|\alpha - \beta|$ *pode ser muito pequena, podemos concluir que* $log_a X^k = k \cdot log_a X, k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Logo, $log_a X^k = k \cdot log_a X, \forall k \in \mathbb{R}$.

4. Sejam $log_b X = d$ *e* $log_a b = c$.

Sabendo que $log_a X = p$*, temos* $b^d = a^p = \left(b^{\frac{1}{c}}\right)^p = b^{\frac{p}{c}}$.

Logo, d = p/c, pois de $log_a b = c$*, tem-se* $a^c = b$*, ou seja,* $a = b^{\frac{1}{c}}$.

Definição 1.6.5. *Dado* $a \in \mathbb{R}$*, 0*$< a \neq 1$*, função logarítmica é a função* $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número real positivo x o logaritmo loga x. Notação:* $f(x) = log_a x$*.*

Vimos que a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é uma bijeção, veja Proposição 1.5.19 e Proposição 1.5.20, logo admite inversa (Observação 1.1.20). Mostraremos, na Proposição 1.6.6, que a inversa da função exponencial é a função logarítmica.

Proposição 1.6.6. ([9, pág. 80]) Se 0 < a ≠ 1, então as funções $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração. *De acordo com a Definição 1.1.19, basta mostrarmos que* $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$ *e* $g \circ f = Id_{\mathbb{R}_+^*}$.

De fato:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_a a^x = x$ *(segue da Definição 1.6.1) e*

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{\log_a x} = x$ *(segue do ítem 3 da Observação 1.6.2).*

Observação 1.6.7. *Segue da Proposição 1.6.6 que a função logarítmica é uma bijeção, ou seja, é injetiva e sobrejetiva.*

Proposição 1.6.8. *([9, pág. 81]) A função logarítmica* $f(x) = log_a X$ *é crescente (decrescente) se, e somente se, a > 1 (0 < a < 1).*

Demonstração. *Suponha f crescente, então dados* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, temos*

$$x_1 > x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Denotando $log_a x_1 = p$ *e* $log_a x_2 = q$*, temos*

$$x_1 = a^p \text{ e } x_2 = a^q.$$

Assim,

$$a^p > a^q \Leftrightarrow p > q$$

Logo, a função exponencial a^x*, 0 < a ≠ 1, é crescente e portanto a > 1, vide (Proposição 1.5.16). Reciprocamente, suponha que a > 1, então pela Proposição 1.5.16, a função exponencial* a^x *é crescente. Dessa forma, sendo* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, temos*

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2} \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2,$$

onde usamos o item 3 da Observação 1.6.2.

O caso em que f *é decrescente se, e somente se, 0 < a < 1 é análogo.*

Proposição 1.6.9. *A função logarítmica* $f(x) = log_a x$*, 0 < a ≠ 1, é ilimitada em todo* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. *Dado* $y \in \mathbb{R}_+^*$, *a sobrejetividade da função logarítmica (Observação 1.6.7) nos garante a existência de um certo* $w \in \mathbb{R}_+^*$ *com w > y tal que* $f(c) = w$, *para algum* $c \in \mathbb{R}_+^*$. *Da mesma forma, dado* $z \in \mathbb{R}_-^*$, *existe* $w' \in \mathbb{R}_-^*$ *com* $w' < z$ *satisfazendo* $f(d) = w'$, *ara algum* $d \in \mathbb{R}_+^*$. *Com isso, mostramos que a função logarítmica é ilimitada tanto superior como inferiormente, ou seja, em todo* $\mathbb{R}$.

Vimos na Seção 1.5 que a função exponencial tem um crescimento (ou decrescimento) rápido se $a > 1(0 < a \neq 1)$. No caso da função logarítmica, esse crescimento (ou decrescimento) ocorre de maneira mais lenta, mas a monotonicidade da função juntamente com seu caráter ilimitado garantem que ela se estenda por todo $\mathbb{R}$.

Vejamos, na Figura 1.21, o gráfico da função logarítmica para os casos a > 1 e 0 < a < 1. Para mais, veja ([9, pág. 83]).

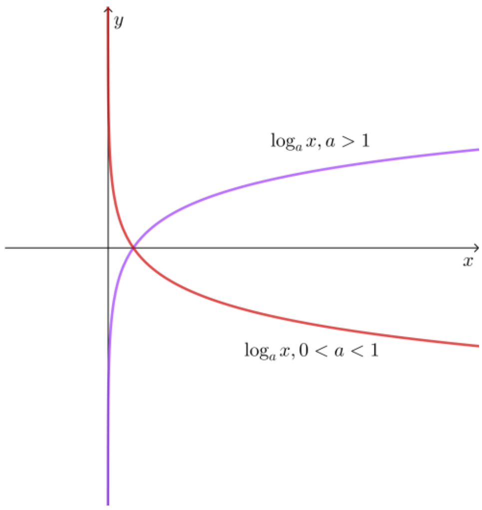


Figura 1.21: Gráfico da função logarítmica.

Um tipo especial de função logarítmica é aquela cuja base é o número irracional e. Denotemos $f(x) = \log_e x$, ou simplesmente $f(x) = \ln x$.

Equações logarítmicas são equações do tipo: $\log_7 x^2 = 3$, $\log_8(x + 1) = \log_8 x + \log_8 x^3$ e $\log_{10} x = \log_{10} x + 1$.

Exemplo 1.6.10. *Resolver* $log_{\frac{1}{2}} x + log_2(x + 1) = 1$.

Condição de existência: x > 0 e x + 1 > 0, donde x > 0. Temos que:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 1/2} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} = -\log_2 x = \log_2 \frac{1}{x}$$

Assim,

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2(x+1) = 1 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{x} + \log_2(x+1) = 1$$

$$\Rightarrow \log_2 \left[\tfrac{1}{x} \cdot (x+1)\right] = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \tfrac{1}{x} = 2$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow x = 1.$$

Inequações logarítmicas são desigualdades do tipo $\log_3 x + \log_3 4x = 1, \log_2 x^2 > 2$ etc.

Para a sua resolução, usamos o fato da função logarítmica ser crescente para a > 1 e decrescente para 0 < a < 1, vide Proposição 1.6.8, isto é,

$$\begin{cases} \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, a > 1 \\ \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 1.6.11. *Determine o domínio da função*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_5\left(\frac{x^2}{4}\right) + \log_5\left(\frac{1}{x} + 1\right) - 1}}$$

Devemos ter $\log_5\left(\frac{x^2}{4}\right) + \log_5\left(\frac{1}{x} + 1\right) - 1.$

Condição de existência: x > 0.

Temos que:

$$\log_5\left(\frac{x^2}{4}\right) + \log_5\left(\frac{1}{x} + 1\right) > 1 \Rightarrow \log_5\left[\left(\frac{x^2}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right)\right] > \log_5 5$$

$$\Rightarrow \tfrac{x}{4} + \tfrac{x^2}{4} > 5$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 20 > 0$$

$$\Rightarrow x < -4 \; ou \; x > 10.$$

Considerando a condição de existência, concluímos que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 10\}.$$

1.7 Funções Trigonométricas

Vimos, na Definição 1.1.31, que uma função *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existir um menor $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. As funções que trataremos nesta seção são desse tipo.

Esta seção foi desenvolvida a partir das referências [4], [10], [3], [11] e [12]. Segundo [4, pág. 362]:

> A palavra *trigonometria* é formada por três radicais gregos: *tri* = três, *gonos* = ângulos e *metron* = medir. Daí o seu significado: medida dos triângulos. Atualmente, a Trigonometria não se limita a estudar somente os triângulos; sua aplicação se estende a vários campos da Matemática (como a Geometria e a Análise). Encontramos, também, aplicações da Trigonometria em Eletricidade, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia Civil, Topografia e em muitos outros campos de atividades, aplicações estas envolvidas em conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

Dada a Figura 1.22, considere as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, ambas de origem O, definimos o ângulo entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, denotado por $A\hat{O}B$, como sendo a inclinação existente entre essas duas semirretas. A medida de $A\hat{O}B$ é proporcional à sua inclinação, se A = B, tem-se $A\hat{O}B = 0$. Nesta seção, o sentido de orientação considerado é o anti-horário, que é o sentido positivo.

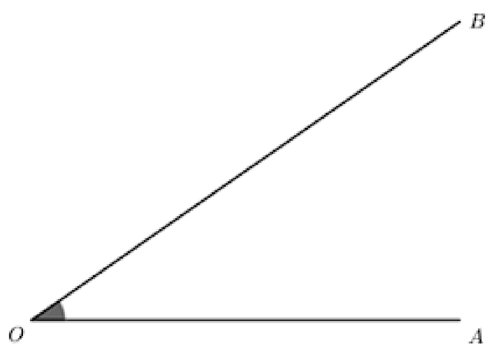


Figura 1.22: Ângulo entre duas semirretas

Vamos associar a cada ângulo uma medida, para isso considere a Figura 1.23(a). Seja a circunferência C, centrada em O, de raio unitário. Temos o ângulo $A\hat{O}M$, que podemos denotá-lo por α, dizemos que a medida de α é igual à medida de seu arco correspondente, ou seja, $\alpha = med(\widehat{AM})$. Vamos dividir a circunferência C em 360 partes iguais e tomar grau como unidade de medida (notação: $x°$ lê-se x graus). A inclinação de $\frac{1}{360}$ corresponde a medida de $1°$, $\frac{2}{360}$, a $2°$ e assim sucessivamente.

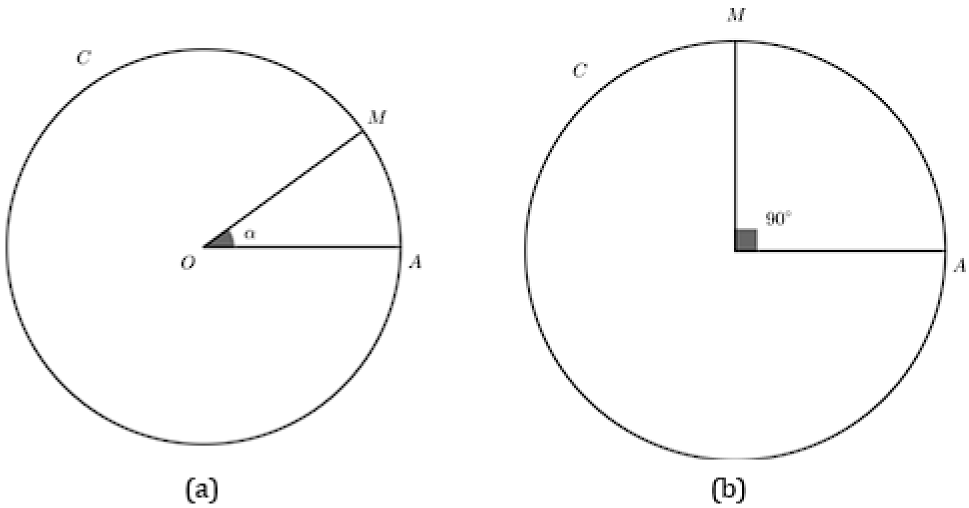


Figura 1.23: Medida de ângulos

Se o ângulo for igual a $90°$, vide Figura 1.23(b), ele é dito reto. Isso é muito importante na definição de um tipo especial de triângulo, amplamente usado na Trigonometria, o triângulo retângulo. Um triângulo recebe a classificação de triângulo retângulo se um dos seus ângulos for reto, conforme mostra a Figura 1.3.

Ainda considerando a Figura 1.24, seja o triângulo retângulo OAB e o ângulo $O\hat{A}B = \alpha$. Dizemos que o lado AB, maior lado desse triângulo, é a sua hipotenusa enquanto os lados OA e OB são os seus catetos. Tomando como referência o ângulo α, OA é chamado cateto adjacente a α e OB, cateto oposto a α.

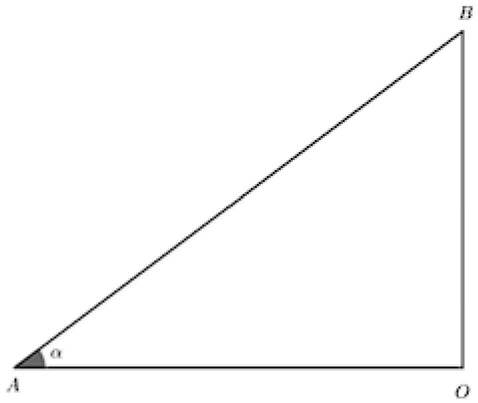


Figura 1.24: Triângulo retângulo

Teorema 1.7.1 *(Teorema de Pitágoras) em todo triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração. *Geometricamente, a situação pode ser descrita pela Figura 1.25:*

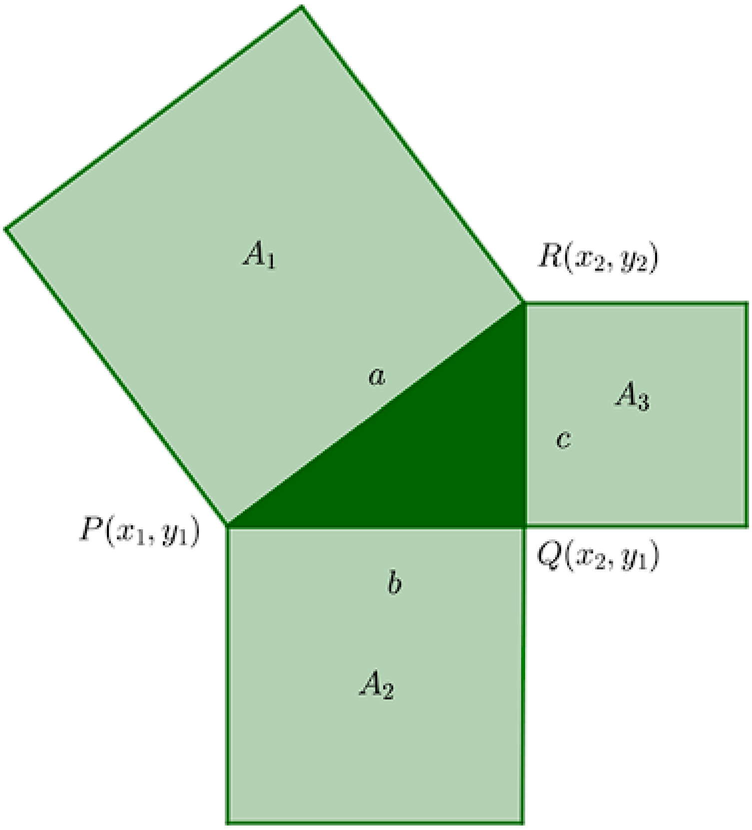


Figura 1.25: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Usemos a noção de módulo vista na Seção 1.4. Considerando os pontos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_1)$ *e* $R(x_2, y_2)$, *vértices do triângulo retângulo de lados a, b e c, temos*

$a = |P - R|$, $b = |P - Q|$ *e* $c = |Q - R|$.

A área do quadrado maior, denotada por A_1, *é dada por* $|P - R|^2$, *assim como as áreas dos quadrados* A_2 *e* A_3 *são respectivamente* $|P - Q|^2$ *e* $|Q - R|^2$

Da Proposição 2.4.3, item IV, segue que

$$|P - R|^2 = (P - R)^2, \ |P - Q|^2 = (P - Q)^2 \ e \ |Q - R|^2 = (Q - R)^2.$$

Assim,

$$A_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \ A_2 = (x_1 - x_2)^2 \ e \ A_3 = (y_1 - y_2)^2.$$

Desse modo, $A_1 = A_2 + A_3$, *ou seja,* $a^2 = b^2 + c^2$.

Dado um ângulo qualquer α, se $0 < \alpha < 90°$, dizemos que ele é agudo e se $90° < \alpha < 180°$, ele é dito obtuso. Definiremos seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Definição 1.7.2. *Considerando um triângulo retângulo qualquer, seja α um ângulo agudo desse triângulo. O seno de α (notação:* sen α*) é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, o cosseno de α (notação:* cos α*) é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa e a tangente de α (notação:* tg α*) é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.*

Considerando a Figura 1.24, denotando $\overline{AB} = a$, $\overline{OA} = b$ e $\overline{OB} = c$, *temos*

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}, \ \cos \alpha = \frac{b}{a}, \ \text{tg } \alpha = \frac{c}{b}.$$

Segue que tg $\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$. Com efeito, pois

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{c}{a} \div \frac{b}{a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \text{tg } \alpha$$

Considere a Figura 1.26:

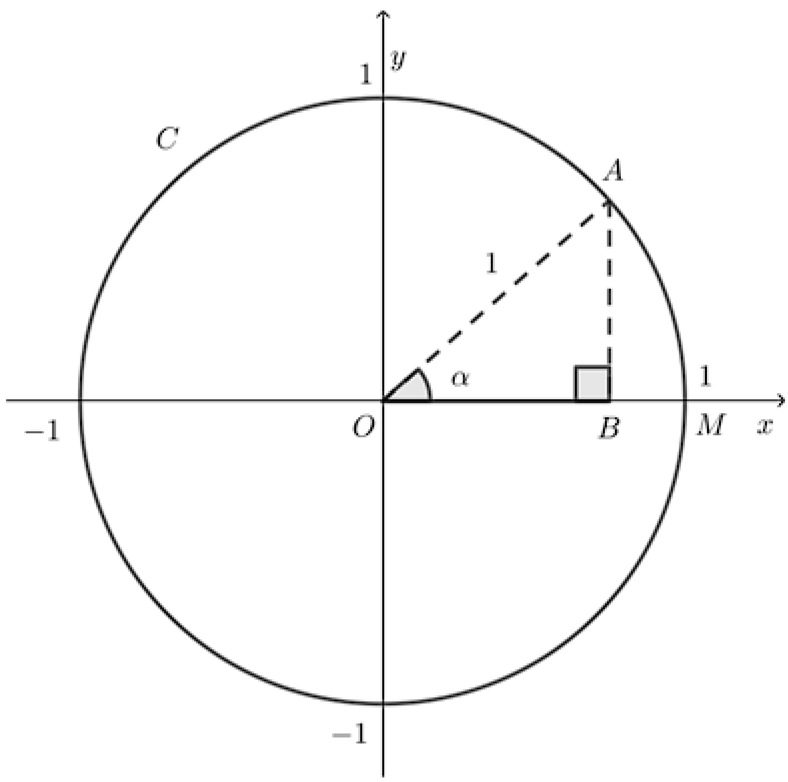


Figura 1.26: Circunferência trigonométrica.

Seja a circunferência C de centro O cujo raio é 1. Considere o triângulo retân- gulo AOB. Sabemos que sen α = $\overline{\text{AB}} \div 1$, ou seja, sen α = $\overline{\text{AB}}$, assim sen α é a ordenada de y. Da mesma forma, tem-se cos α = $\overline{\text{OB}}$, assim cos α é a abscissa de x. A circunferência C é chamada circunferência trigonométrica, onde O = (0, 0) e a orientação é no sentido anti-horário. C é dividida em quatro quadrantes, de acordo com a orientação.

A medida do ângulo central é a mesma de seu arco correspondente, na Figura 1.26, temos $med(A\hat{O}B) = med(\widehat{MA})$. Usamos também radiano radiano (Notação: *rad*) para nos referirmos a comprimentos de arcos.

Temos que:

$180° = \pi rad.$

Daí segue que $360° = 2\pi rad$, $90° = \frac{\pi}{2} rad$ e assim sucessivamente.

Considerando a Figura 1.27, vamos fazer uma redução ao 1° quadrante para obtermos os valores de seno e cosseno para arcos em qualquer quadrante. seja x um arco no 1° quadrante da circunferência trigonométrica. No 2° quadrante, temos

$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\, x$ e $\cos(\pi - x) = -\cos x$. No 3° quadrante, $\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\, x$ e $\cos(\pi + x) = -\cos x$. Por fim, no 4° quadrante, $\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}\, x$ e $\cos(2\pi - x) = \cos x$. Da Figura 1.27, também obtemos:

$$\text{sen}\,(2\pi - x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x \text{ e } \cos\,(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x.$$

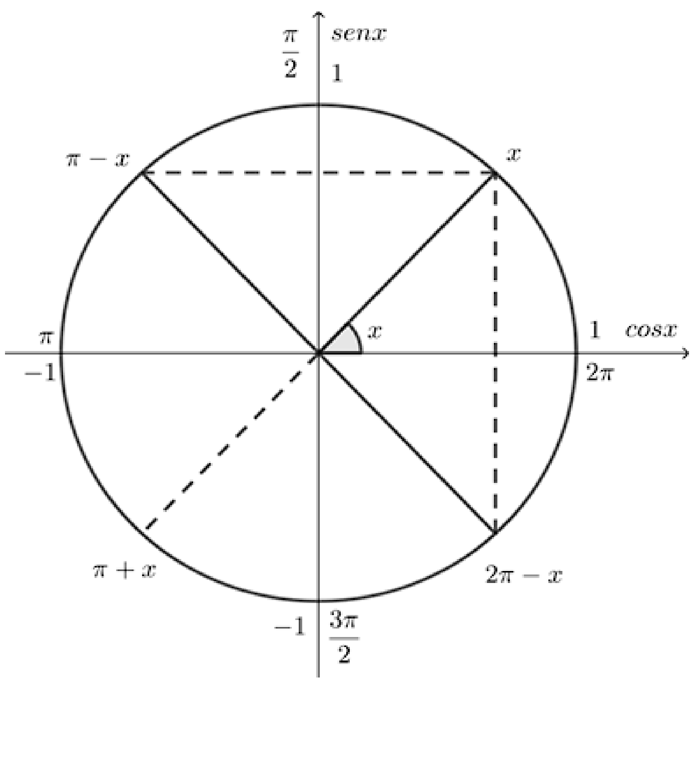


Figura 1.27: Extensão do conceito de seno e cosseno.

A partir da segunda volta, ocorrerá uma periodicidade nos valores dos arcos, assim sendo $k \in \mathbb{Z}$ o número de voltas, vamos ter $\alpha + k \cdot 2\pi = \alpha$.

Segue abaixo uma tabela com os principais valores do seno e do cosseno.

Tabela 1.4: Valores notáveis de seno e cosseno.

x	0	$30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45° \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180°\ \pi$	$270° \left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$360°\ 2\pi$
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Para mais, veja [11, pág. 33].

Teorema 1.7.3. *Dado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos* $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Demonstração. *Considere a Figura 1.26. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOB, vamos ter*

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Através da redução ao 1° quadrante, esse resultado vale para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

O Teorema 1.7.3 é conhecido como a Relação Fundamental da Trigonometria.

Definição 1.7.4. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número real x o número real* sen x *é dita função seno.*

A função seno é ímpar, pois $\text{sen}\, x = -\text{sen}(-x)$, possui -1 como valor mínimo e 1 como valor máximo. Assim, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$. O gráfico da função seno é dado na Figura 1.28.

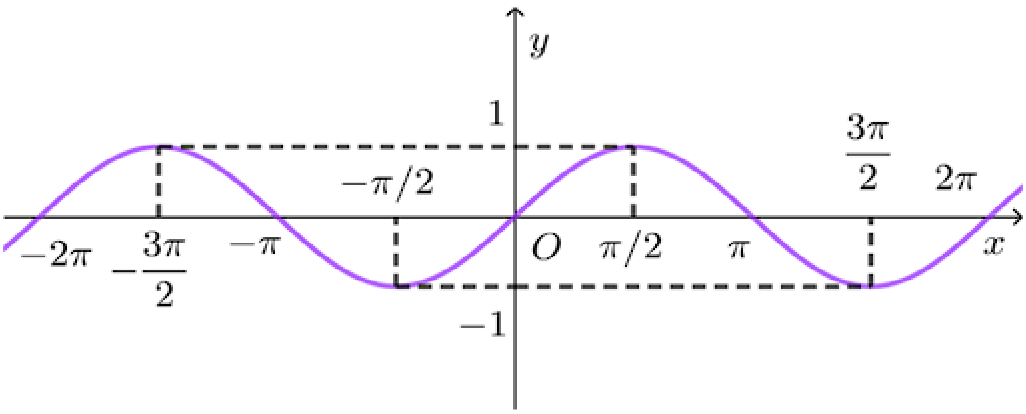


Figura 1.28: Gráfico da função seno.

A função seno é periódica de período 2π, isto é, sendo $f(x)$ = sen x, temos sen x = sen(x+2π), $\forall x \in \mathbb{R}$.

Restrigindo $f(x)$ = sen x ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, vemos que f é bijetiva, logo admite uma inversa. A inversa da função sen x é a função arcsen x, restrita ao intevalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, dita arco seno.

Definição 1.7.5. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número real* x *o número real* cos x *é dita função cosseno.*

A função cosseno é par, pois cos x = cos($-x$), possui -1 como valor mínimo e 1 como valor máximo. Assim, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $-1 \leq \cos x \leq 1$. O gráfico da função cosseno é dado na Figura 1.29.

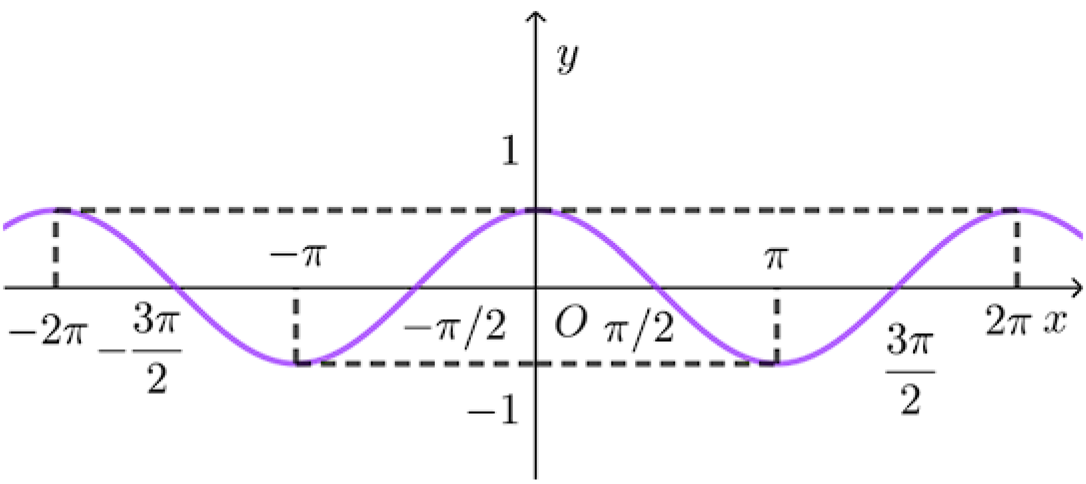


Figura 1.29: Gráfico da função cosseno.

A função $f(x) = \cos x$ é periódica de periodo 2π, ou seja, $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Restrigindo $f(x) = \cos x$ ao intervalo $[0, \pi]$, f se torna uma bijeção de $[0, \pi]$ em $[-1, 1]$, logo admite inversa. A inversa da função cosseno é a função arco cosseno, que associa a cada $x \in [0, \pi]$ o número arccos x.

Entender os intervalos onde as funções seno e cosseno admitem inversa ajudam na resolução de equações e inequações trigonométricas.

Demonstraremos, na Proposição 1.7.7, as fórmulas de adição e subtração de arcos para seno e cosseno. Antes, porém, precisaremos da Proposição 1.1.6.

Dois ângulos α e β são ditos complementares se $\alpha + \beta = 90°$. Perceba, através da Tabela 1.1, que

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Em geral, isso sempre acontece. Vamos provar este fato na Proposição 1.7.6.

Proposição 1.7.6. *([10, Proposição 6.12, pág. 219]) Para todo $c \in \mathbb{R}$, temos:*

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos c \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \text{sen } c$$

Demonstração. *Considere a Figura 1.30:*

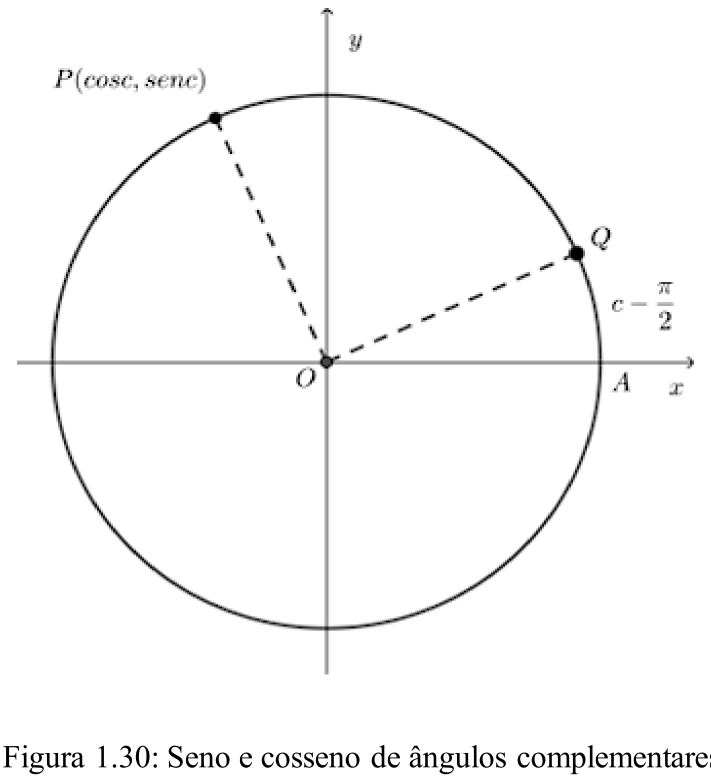


Figura 1.30: Seno e cosseno de ângulos complementares

Estamos considerando $\frac{\pi}{2} < c < \pi$*, os outros casos são análogos.*

Considere os pontos P e Q de tal forma que OP e OQ sejam perpendiculares.

Sejam $\widehat{AP} = c$ *e* $\widehat{AQ} = c - \frac{\pi}{2}$.

Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$ *e* $Q\hat{O}P = 90°$*, temos que se* $Q = (x_0, y_0)$*, então* $P = (-y_0, x_0)$.

De $P = (\cos c, \text{sen } c)$ *e* $Q = (\cos (c - \frac{\pi}{2}), \text{sen } (c - \frac{\pi}{2}))$*, temos*

$\cos c = - \text{sen } (c - \frac{\pi}{2}) = \text{sen } (\frac{\pi}{2} - c)$ *e* $\text{sen } c = \cos (c - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - c)$.

Proposição 1.7.7 *([13, pag. 67-68)] Dados* $a, b \in \mathbb{R}$*, temos:*

1. $\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen } a \text{ sen } b$.

2. $\text{sen } (a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \text{sen } b \cos a$.

Demonstração. *Vamos provar primeiro que*

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a \,\text{sen}\, b$$

Considere a Figura 1.31:

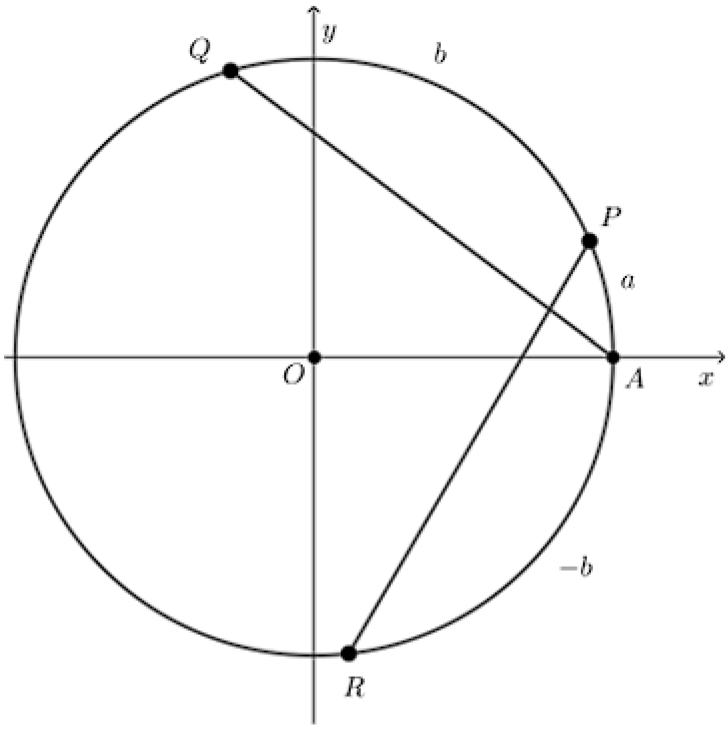


Figura 1.31: Seno e cosseno da soma.

Sejam P, Q e R pontos na circunferência trigonométrica tais que

$\widehat{AP} = a$, $\widehat{PQ} = b$, $\widehat{AQ} = a + b$, $\widehat{AR} = -b$ *e* $\widehat{RP} = a + b$. *Então*

P = (cos a, sen a), Q = (cos (a + b), sen (a + b)) e R = (cos(−b), sen(−b)).

Como os arcos $\widehat{AQ}$ *e* $\widehat{RP}$ *tem a mesma medida, as cordas AQ e RP são iguais, assim d (A, Q) = d (R, P).*

Sendo A = (1, 0), temos.

$$\text{d (A, Q)} = \sqrt{(\cos(a + \text{b}) - 1)^2 + (\text{sen}(a + \text{b}) - 0)^2}$$

$$= \sqrt{cos^2(a + b) \ - \ 2cos\ (a + b) \ + \ 1 \ + sen^2\ (a + b)}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos(a + \text{b})},$$

Onde usamos o Teorema 1.7.3.

Observando que cos (-b) = cos b e sen (-b) = -sen b, vamos ter

$$d\ (R,\ P) = \sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (-\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 b - 2\cos b \cos a + \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 b + 2\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}^2 a}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos b \cos a + 2\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a}$$

Assim,

$$d\ (A,\ Q) = d\ (R,\ P) \Rightarrow 2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2\cos b \cos a + 2\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a$$

$$\Rightarrow \cos(a+b) = \cos a \cos \mathrm{b} - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Quanto a cos (a – b), temos

$$\cos(a-b) = \cos[a + (-b)] = \cos a \cos(-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b)$$
$$= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Em sen (a + b), pela Proposição 1.7.6, temos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left[\tfrac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

$$= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) \cdot \operatorname{sen} b$$

$$= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

Em sen (a – b), tem-se

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}[a + (-b)] = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen}(-b) \cos a$$

$$= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

1.8 Noções básicas de Cálculo

O desenvolvimento desta seção tem por base as referências [14], [15], [16], [17] e [18].

Para introduzir o conceito de limites, considere o exemplo de particionar um círculo qualquer, para isso, seja a Figura 1.32.

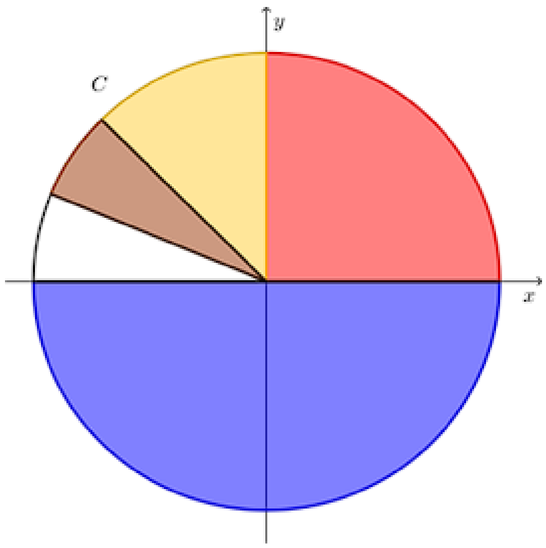


Figura 1.32: Introdução do conceito de limites.

Considerando o círculo C, vamos inicialmente dividi-lo em duas partes iguais e pintar uma delas de azul, assim a parte colorida é 1/2. Depois vamos pintar de vermelho metade da parte que restou, assim a área colorida é 1/2 + 1/4. Pintando novamente metade da área restante de amarelo, a área colorida é 1/2 + 1/4 + 1/8. Pintando de marrom metade da área que restou, a área total colorida é:1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16. Continuando o processo, a área colorida se aproxima do valor limite 1. Dizemos, intuitivamente, que a área total colorida tem limite 1.

Considere os valores da Tabela 1.5:

Tabela 1.5: Noção intuitiva de limite.

x	9	9,9	9,99	9,999	...	10,001	10,01	10,1
$f(x)$	0	0,9	0,99	0,999	...	1,001	1,01	1,1

Note que a medida que os valores de x tendem a 10 pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem a 1, assim como quando x tende a 10 pela direita, $f(x)$ também se aproxima de 1. Neste caso, dizemos que:

$$\lim_{x \to 10^-} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \to 10^+} f(x) = 1$$

Nesta seção, quando falarmos que os valores de x tendem a uma constante b, quer dizer que eles se aproximam ou se inclinam para b.

Veremos, a seguir, que dada uma função $f(x)$, para o limite de $f(x)$ ser igual a um numero real L quando x tende a a, devemos ter: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$. Observemos que na definição de limites, não é preciso que o número a esteja no domínio da f, basta que seja extremidade de um intervalo aberto que esteja contido no domínio da f.

Definição 1.8.1. *Sejam f uma função e a um número real tal que a $\in D(f)$ ou (a y) $\subset D(f)$. Um número real L é dito o limite à direita de f(x) quando x tende a a pela direita (notação* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$*) se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 1.8.2. *Sejam f uma função e a um número real tal que $\in D(f)$ ou (z, a) $\subset D(f)$. Um número real L é chamado o limite à esquerda de f(x) quando x tende a a pela esquerda (notação:* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$*) se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 1.8.3. *Sejam f uma função e a um número real pertencente ao domínio de f ou extremidade de um intervalo aberto que esteja contido no domínio de f. Um número real L é dito o limite de f (x) quando x tende a a (notação:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$*) se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema 1.8.4. *([17, Teorema 3.7.4, pag.78]) Se f é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Demonstração. *Suponhamos que* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$*. Então, dado* $\varepsilon >$

0*, existem* $\delta_1 > 0$ *e* $\delta_2 > 0$ *tais que*

$$a < x < a + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \text{ e } {}_2 < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seja $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$. *Então* $a - \delta_2 \leq a - \delta$ *e* $a + \delta \leq a + \delta_1$, *e portanto, se* $x \neq a$ *e* $a - \delta < x < a + \delta$, *teremos* $|f(x) - L| < \varepsilon$, *isto é,*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

A demonstração da recíproca deste resultado segue da definição de limites e limites laterais.

Definição 1.8.5. *Sejam f uma função e a um número real tal que* $a \in D(f)$. *Dizemos que f é continua em a se* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe e* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\forall a \in D(f)$, *então f é continua em todo seu domínio.*

Exemplo 1.8.6. *A função constante é continua. De fato, sendo* $f(x) = k$, *k constante e a um ponto qualquer de seu domínio, temos* $|k - k| = 0$. *Logo, dado* $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k - k| < \varepsilon$, *ou seja,* $\lim\limits_{x \to a} k = k$.

Demonstraremos, logo a seguir, algumas das propriedades dos limites, que são bem úteis nas demonstrações e nos exercíscios, vide Capítulo 2.

Teorema 1.8.7. *Sejam f e g funções, W uma constante e suponha que os limites* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ *existam, então:*

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3. $\lim\limits_{x \to a} W \cdot f(x) = W \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, *se* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Demonstração. *Denotemos* $\lim_{x\to a} f(x) = M$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = N$. *Temos*

1. *Mostraremos inicialmente que* $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

   Como $\lim_{x\to a} f(x) = M$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = N$, *dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon/2,\ |g(x) - N| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow |f(x) - M| + |g(x) - N| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (M + N)| < \varepsilon,$$

onde usamos a desigualdade triangular, vide Proposição 1.4.3, item 5.

Agora mostremos que $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.

Temos que:

$$|f(x) - g(x) - (M - N)| = |[f(x) - M] + [N - g(x)]|$$

$$\leq |f(x) - M| + |N - g(x)|$$

$$= |f(x) - M| + |g(x) - N|$$

De $\lim_{x\to a} f(x) = M$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = N$, *para todo* $\varepsilon > 0$, *podemos garantir a existência de um* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon/2,\ |g(x) - N| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow |f(x) - M| + |g(x) - N| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow |f(x) - g(x) - (M - N)| < \varepsilon$$

Observemos que sendo $n \in \mathbb{N}$ *e* $h_1, h_2, \cdots, h_n$ *funções, é válido que:*

$$\lim_{x\to a}[h_1(x) \pm h_2(x) \pm \cdots \pm h_n(x)] =$$

$$\lim_{x\to a} h_1(x) \pm \lim_{x\to a} h_2(x) \pm ... \pm \lim_{x\to a} h_n(x)$$

A justificação para este fato segue da associatividade, que é valida nos reais, pois

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[h_1(x) \pm h_2(x) \pm \cdots \pm h_n(x)] &= \lim_{x\to a}[h_1(x) \pm (h_2(x) \pm \cdots \\ &\quad \pm h_n(x))] \\ &= \lim_{x\to a} h_1(x) \pm \lim_{x\to a}[h_2(x) \pm \cdots \pm h_n(x))] \\ &\vdots \\ &= \lim_{x\to a} h_1(x) \pm \lim_{x\to a} h_2(x) \pm ... \pm \lim_{x\to a} h_n(x)\end{aligned}$$

2. *Note que:*

$$\begin{aligned}|f(x)\,g(x) - MN| &= |f(x)\,g(x) - g(x)M + g(x)M - MN| \\ &= |g(x)\cdot(f(x) - M) + M\cdot(g(x) - N)| \\ &\leq |g(x)\cdot(f(x) - M)| + |M\cdot(g(x) - N)| \\ &= |g(x)|\cdot|f(x) - M| + |M|\cdot|g(x) - N|\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2|g(x)|} \text{ e } |g(x) - N| < \frac{\varepsilon}{2|M|}.$$

Assim,

$$|g(x)|\cdot|f(x) - M| + |M|\cdot|g(x) - N| < |g(x)|\cdot\frac{\varepsilon}{2|g(x)|} + |M|\frac{\varepsilon}{2|M|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, $|f(x)\,g(x) - MN| < \varepsilon$.

3. *Segue diretamente do item 2 e do Exemplo 1.8.6, pois denotando W = h(x), temos*

$$\lim_{x\to a} h(x)\cdot f(x) = \lim_{x\to a} h(x)\cdot\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} W\cdot\lim_{x\to a} f(x) = W\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

4. *Pelo item 2, temos que:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}$$

Perceba que:

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| - \left|\frac{1}{N}\right| = \left|\frac{N - g(x)}{g(x)\,N}\right| = \left| [N - g(x)] \cdot \frac{1}{g(x)\,N} \right|$$

$$= |\, N - g(x)| \cdot \left|\frac{1}{g(x)\,N}\right|$$

$$= |\, g(x) - N \,| \cdot \frac{1}{|g(x)\,N|}$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\, g(x) - N| < \varepsilon \cdot |\, g(x)N\,|$. *Daí,*

$$|\, g(x) - N \,| \cdot \frac{1}{|g(x)\,N|} < \varepsilon \,|\, g(x)\, N| \,| \cdot \frac{1}{|g(x)\,N|} = \varepsilon, \text{ ou seja } \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Corolário 1.8.8. *Sejam f e g funções contínuas em a e W uma constante, então f ± g, f □ g, W □ f e f / g, g ≠ 0, também são contínuas em a.*

Demonstração. *Mostremos que f ± g é contínua em a, as outras demonstrações são análogas.*

Como f e g são contínuas em a, temos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Pelo Teorema 1.8.7, item 1, segue que

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a).$$

Observemos que sendo $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *funções contínuas em a, então* $h_1 \pm h_2 \ldots \pm h_n$, *também são contínuas em a, pois pelo Teorema 1.8.7,*

$$\lim_{x \to a} [h_1(x) \pm h_2(x) \pm \cdots \pm h_n(x)] =$$

$$\lim_{x \to a} h_1(x) \pm \lim_{x \to a} h_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x \to a} h_n(x) = h_1(a) \pm h_2(a) \pm \ldots \pm h_n(a).$$

Proposição 1.8.9. *A função $f(x) = x^n$ é contínua em todo ponto p de seu domínio.*

Demonstração. *Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $\forall p \in D(f)$, tem-se*

$$|x-p| < \delta \Rightarrow |x^n - p^n| < \varepsilon.$$

Note que: $x^n - p^n = (x - p) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + xp^{n-2} + p^{n-1})$. Então

$$\begin{aligned} |x^n - p^n| &= |x-p| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + xp^{n-2} + p^{n-1}| \\ &< \delta \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + xp^{n-2} + p^{n-1}| \\ &\leq \delta \cdot w, \end{aligned}$$

Para algum $w \in \mathbb{R}$ tal que $w \geq |x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + xp^{n-2} + p^{n-1}|$.

Logo, tomando $\varepsilon \geq \delta \cdot w$, temos $|x^n - p^n| < \varepsilon$.

Proposição 1.8.10. *As funções polinomial e racional são contínuas em todo ponto p de seu domínio.*

Demonstração. *Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, uma função polinomial e p um ponto qualquer de seu domínio. Temos:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to p} f(x) &= \lim_{x\to p} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0 \\ &= \lim_{x\to p} a_n x^n + \lim_{x\to p} a_{n-1}x^{n-1} + ... + \lim_{x\to p} a_1 x + \lim_{x\to p} a_0 \\ &= a_n p^n + a_{n-1p} p^{n-1} + ...a_1 p + a_0 \\ &= f(p), \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema 1.8.7 e a Proposição 1.8.9.

Portanto, f é continua em p.

Seja $R(x) = \frac{P(X)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, uma função racional, onde P(x) e Q(x) são funções polinomiais. Temos que:

$$\lim_{x \to p} R(x) = \lim_{x \to p} \frac{P(X)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to p} P(x)}{\lim_{x \to p} Q(x)} = \frac{P(p)}{Q(p)} = R(p).$$

Portanto, R é contínua em p.

Observação 1.8.11. *Também são contínuas as funções trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciais, logarítmicas e raízes. As demonstrações para estes fatos se encontram nas referências [16] e [18].*

Teorema 1.8.12. *([18, pág. 115]) Se g for contínua em a e f for contínua em* $g(a)$*, então a função composta* $f \circ g$ *dada por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *é contínua em a.*

Demonstração. *Veja [18, pág. 115].*

Definição 1.8.13. *Sejam f uma função e a um número real tal que* $a \in D(f)$ *ou* $(a, +\infty) \subset D(f)$*. Dizemos que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ *se para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $x > \delta$ *acarreta* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

Definição 1.8.14. *Sejam f uma função e d um número real tal que* $\in D(f)$ *ou* $(-\infty, d) \subset D(f)$*. Então* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ *se para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta < 0$ *tal que* $x < \delta$ *acarreta* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

Exemplo 1.8.15. Mostremos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Intuitivamente, quanto maior o valor de x, mais próximo de 0 estará a fração $1/x$.

Dado $\varepsilon > 0$*, podemos tomar* $\delta \geq \frac{1}{\varepsilon}$*. Temos que:*

$$x > \delta \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

Analogamente, se mostra que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

O problema de definir reta tangente a uma curva qualquer deu origem ao conceito de derivada, um dos mais importantes do Cálculo. Então considerando uma função qualquer f e um ponto P de seu gráfico, vamos atribuir um significado à reta tangente a f em P.

Considere a Figura 1.33:

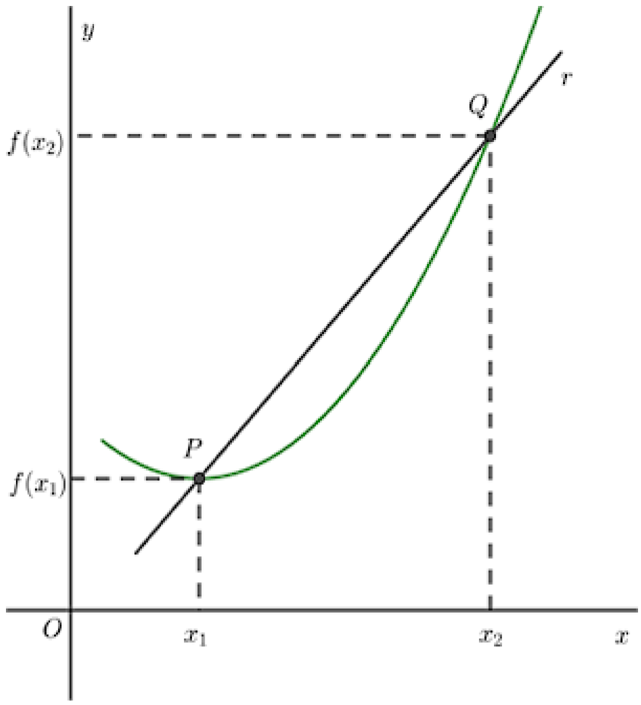


Figura 1.33: Reta tangente a uma curva qualquer.

Sejam P = (x_1, $f(x_1)$) e Q = (x_2, $f(x_2)$) dois pontos do gráfico de f, temos a reta r, secante a f em P e Q, De acordo com a Seção 1.2, a inclinação (ou coeficiente angular) de r é dada por:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Note que a medida que Q se aproxima de P, a reta r se aproxima do que vem a ser a reta tangente ao gráfico de f no ponto P.

Denotando $\Delta x = x_2 - x_1$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto P é dada pelo limite abaixo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dizemos que o limite acima é a derivada da função f no ponto P. De maneira geral, temos que a definição a seguir:

Definição 1.8.16. *Dada uma função f, seja x um ponto qualquer de seu domínio.*

A derivada de f em x (notação: f'(x)) é dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Velocidade e aceleração são conceitos que estão relacionados com o tópico de derivadas. Mostremos como esse processo acontece.

Suponha que um objeto se mova de acordo com uma função s(t), que representa o espaço percorrido em função de um instante t. Imaginemos que esse trajeto ocorra entre os instantes *t* e $t + \Delta t$. Então a velocidade média v_m desse objeto entre *t* e $t + \Delta t$ é dada pela razão:

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Agora, considerando intervalos de tempo cada vez menores, definamos a velocidade instantânea v(t) no instante t por:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

A aceleração média a_m desse objeto entre *t* e Δt é dada por:

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Tomando intervalos de tempo cada vez menores, temos a aceleração instantânea a(t) desse objeto no instante t:

$$a(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Perceba que $a(t) = v'(t)$. Como $v(t) = s'(t)$, temos $a(t) = s''(t)$, isto é, a aceleração instantânea de um objeto no instante *t* é a segunda derivada da função que representa a posição desse objeto em *t*.

Proposição 1.8.17. *A derivada da função constante é zero.*

Demonstração. *Seja f(x) = k, k constante. Temos que:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Proposição 1.8.18. *Se f é uma função derivável, então f é continua em todo ponto de seu domínio.*

Demonstração. *Dado $x \in D(f)$, temos, por hipótese, que*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para todo $a \in D(f)$, denotando $\Delta x = x - a$, temos

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{\Delta x \to a} [f(a + \Delta x) - f(a)]$$

$$= \lim_{\Delta x \to a} [f(a + \Delta x) - f(a)] \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}] \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Logo, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposição 1.8.19. *Sejam f e g funções de variável real x e W uma constante.*

Suponhamos que f e g sejam deriváveis, então

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. *(Regra do produto)* $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$;
3. $(Wf)'(x) = Wf'(x)$.
4. *(Regra do quociente)* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Demonstração. *Sendo f e g deriváveis, então*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

1. *Temos que:*

$$(f + g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$= f'(x) + g'(x)$.

2. $(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\, g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\, g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)] + f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)\ [f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *,onde* $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ *justifica-se pela Proposição 1.8.18.*

3. *Façamos* $h(x) = W$*, então*

   $(h \cdot f)'(x) = h'(x)f(x) + h(x)f'(x) = 0 \cdot f(x) + W \cdot f'(x) = W \cdot f'(x)$*, onde usamos o item 2 e a Proposição 1.8.17.*

4. *Note que:* $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$*. Pelo item 2,* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)$

   $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)$*. Agora vamos dar um significado para* $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)$*. Temos:*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}$$

$$= -g'(x) \cdot \frac{1}{[g(x)]^2} = \frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Logo, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Observação 1.8.20. *Segue dos itens 1 e 3 que $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$. De fato, pois $(f-g)'(x) = (f + (-1)$ □ $g)'(x) = f'(x) + [(-1)g]'(x) = f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x)$.*

Dada as funções $h_1, h_2, \ldots, h_n$, $n \in \mathbb{N}$, vale

$$(h_1 \pm h_2 \pm \cdots \pm h_n)'(x) = h_1'(x) \pm h_2'(x) \pm \cdots \pm h_n'(x).$$

Temos que:

$$\begin{aligned} (h_1 \pm h_2 \pm \cdots \pm h_n)'(x) &= [h_1 \pm (h_2 \pm \cdots h_n)]'(x) \\ &= h_1'(x) \pm (h_2 \pm \cdots h_n)'(x) \\ &\vdots \\ &= h_1'(x) \pm h_2'(x) \pm \cdots \pm h_n'(x). \end{aligned}$$

Dadas duas funções deriváveis, existe uma regra que permite calcular a derivada da composta entre elas, a essa regra tem-se a denominação de Regra da Cadeia.

Teorema 1.8.21. *([16, pág. 171-172]) (Regra da cadeia) Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $Im_g \subset D_f$. Então a composta $h(t) = f(g(t))$ é derivável e vale a regra da cadeia*

$$h'(t) = f'(g(t))\ g'(t), \quad t \in D_g.$$

Demonstração. *Veja [16, pág. 171-172].*

Proposição 1.8.22. *Dados* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $f(x) = x^n$, *então* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração. *Mostremos a validade da proposição em* $\mathbb{N}$ *e, em seguida, em* $\mathbb{Z}$.

Suponhamos inicialmente $n \in \mathbb{N}$, *sabemos que dados* $a, b \in \mathbb{R}$, *tem-se*

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}).$$

Temos que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-1} \cdot x + \ldots + (x+\Delta x) \cdot x^{n-2} + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (x+\Delta x)^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} (x+\Delta x)^{n-2} \cdot x + \ldots + \lim_{\Delta x \to 0} (x+\Delta x) \cdot x^{n-2} + \lim_{\Delta x \to 0} x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + \cdots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Agora considere o número $-n$, *assim*

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{[x^n]^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$\Rightarrow f(x) = -nx^{n-1} \cdot x^{-2n}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Onde usamos a regra do quociente, vide Proposição 1.8.19, item 4.

Se $n = 0$, *tem-se* $f(x) = 1$, *donde* $f'(x) = 0$.

Com isso, mostramos que dado $n \in \mathbb{Z}$, *vale* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ao longo deste trabalho vimos funções definidas explicitamente, tais como $y = ax+b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, \neq 0$. Em determinadas situações, uma função pode ser dada por meio de uma equação, sem que seja explicitada a sua lei de correspondência. De maneira geral, se uma função $y = f(x)$ satisfaz a identidade $H(x, y) = 0, \forall x \in D(f)$, dizemos que $y = f(x)$ é uma função definida implicitamente.

São exemplos de funções definidas implicitamente $x^2 + y^2 = 9$, onde $y > 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ $y - 2xy + 1 = 0$, onde $y = -\frac{1}{1-2x}$.

O processo de derivação de uma função dada implicitamente é visto no exemplo a seguir:

Exemplo 1.8.23. *Considere uma função $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação $xy^2 + 2y^3 + 3x - y = 0$. Calcule y'.*

Não precisamos isolar y para então calcular y', , sendo y uma função de x, vamos aplicar a regra da cadeia (Proposição 1.8.21) e as propriedades de derivação vistas na Proposição 1.8.19. Temos

$$(xy^2 + 2y^3 + 3x - y)' = 0' \Rightarrow (xy^2)' + (2y^3)' + (3x)' - y' = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + 6y^2 \cdot y' + 3 - y' = 0$$

$$\Rightarrow y' \cdot (2xy + 6y^2 - 1) = y^2 - 3$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y^2 - 3}{2xy + 6y^2 - 1}$$

Agora vamos demonstrar que a fórmula da derivada de uma potência vista na Proposição 1.8.22 é valida em todo $\mathbb{R}$.

Proposição 1.8.24. Dados $r \in \mathbb{Q}$ *e* $f(x) = x^r$, *então* $f'(x) = rx^{r-1}$. *Também, se* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *e* $h(x) = x^\alpha$, *vale* $h'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Demonstração. *Denotemos* $r = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, *sendo* $y = f(x)$, *temos*

$$y = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow y^q = x^p \Rightarrow y^q - x^p = 0.$$

Derivando implicitamente em relação a x, vamos ter

$$qy^{q-1}\cdot y' - px^{p-1} = 0 \Rightarrow \; y' = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{q\cdot\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{qx^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{\rho}{q}\left(x^{\rho-1}\cdot x^{\frac{\rho}{q}-\rho}\right)$$

$$\Rightarrow \; y' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = rx^{r-1}$$

Agora, se $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, podemos considerar $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r < \alpha < s$ tais que a diferença $|r-s|$ seja tão pequena quanto se deseje. Como a proposição é válida em $\mathbb{Q}$, consequentemente valerá em $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ também. Portanto, o resultado é verdadeiro para qualquer expoente real.

Teorema 1.8.25. *([16, pág. 148]) São válidas as fórmulas de derivação:*

1. $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x$
2. $g(x) = ln\,x \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{1}{x'}\,x > 0$

Demonstração.

1. Temos: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} = e^x$, *pois* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$, *veja Exemplo 1.8.29.*

2. $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-ln\,x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$. *Fazendo* $u = \frac{h}{x'}$ *temos*

   $\lim\limits_{u\to 0} ln(1+u)^{\frac{1}{xu}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{x}ln(1-n)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x'}$ *pois* $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$, *veja Seção 1.5.*

Observação 1.8.26. *A proposição 1.8.25 pode ser estendida para qualquer base real positiva e diferente de 1. Então dado $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$, se $f(x) = a^x$, denotando $y = f(x)$ e aplicando derivação implícita, vamos ter*

$$y = a^x \Rightarrow ln\,y = ln\,a^x = x\,ln\,a \Rightarrow ln\,y - x\,ln\,a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' - ln\, a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = ln\, a$$

$$\Rightarrow y' = a^x\, ln\, a$$

Analogamente, se $f(x) = \log_a x$*, segue que*

$$y = \log_a x \Rightarrow a^y = a^{\log_a x} = x \Rightarrow a^y - a = 0$$

$$\Rightarrow a^y - \ln a \cdot y' - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot \ln a}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$$

Teorema 1.8.27. *([16, pág. 149-150]) São válidas as fórmulas de derivação:*

(1) $sen'x = \cos x$;
(2) $cos'x = -sen\ x$;

Demonstração. *Veja [16, pág. 150].*

Em alguns problemas nos deparamos com indeterminações matemáticas, a que trataremos no Teorema 1.8.28 é uma do tipo 0/0. A regra que nos permite calcular limites que nos levam a essa indeterminação é conhecida como Regra de L'Hôspital. Então sendo *f* e *g* funções deriváveis, tem-se

Teorema 1.8.28. *([19, Teorema 6, pág. 318]) Suponha que f(a) = g(a) = 0, que* $f'(a)$ *e* $g'(a)$ *existam e que* $g'(a) \neq 0$*. Então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração. *Temos*

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(x)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemplo 1.8.29. *Mostrar que* $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Note que $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ *gera uma forma indeterminada do tipo* $\frac{0}{0}$ *. Pelo Teorema 1.8.28, temos*

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h}{1} = e^0 = 1.$$

Uma outra aplicação de derivada é o cálculo de máximos e mínimos de funções, que estudaremos logo a seguir.

Consideremos a figura 1.34.

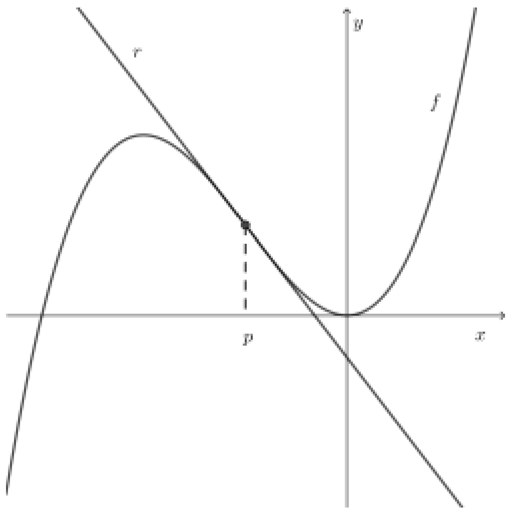


Figura 1.34: *p é ponto de inflexão de f.*

Definição 1.8.30. *([16, pág. 239]) Sejam f uma função e p* $\in D_f$ *, com f contínua em p. Dizemos que p é ponto de inflexão de f se existirem números reais a e b, com*

$p \in]a,b[\subset D_f$ *, tal que f tenha concavidades contrárias em]a, p[e em]p, b[.*

Teorema 1.8.31. *([16, pág. 239]) Seja f uma função que admite derivada até a segunda ordem no intervalo aberto I. Então*

(1) Se $f''(x) > 0$ *em I, então f será côncava para cima em I.*

(2) Se $f''(x) < 0$ *em I, então f será côncava para baixo em I.*

Demonstração. *Veja [16, pág. 239-240].*

Observação 1.8.32. *Segue do Teorema 1.8.31 que dada uma função f, contínua, que admite derivada de segunda ordem em um intervalo aberto I, o (s) ponto (s) de inflexão de f é (são) obtido (s) calculando-se* $f''(x) = 0$.

Teorema 1.8.33. *([17, pág. 199]) Seja f uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável no intervalo (a, b).*

1. *Se* $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, *então f é crescente em [a, b];*

2. *Se* $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, *então f é decrescente em [a, b].*

Demonstração. *Veja [17, pág. 199-200].*

Definição 1.8.34. *Sendo f uma função derivável e* $p \in D_f$, *p é dito ponto ou valor crítico de f se* $f'(p) = 0$.

Veremos, no Teorema 1.8.35, um tipo de critério para determinação de máximos e mínimos de funções, ele é chamado de critério ou teste da derivada primeira.

Teorema 1.8.35. *([17, pág. 201]) Seja f uma função contínua num intervalo fechado [a, b] que possui derivada em todo ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente ponto c.*

1. *Se* $f'(x) > 0, \forall x < c$ *e* $f'(x) < 0, \forall x > c$, *então f tem um máximo relativo em c;*
2. *Se* $f'(x) < 0, \forall x < c$ *e* $f'(x) > 0, \forall x > c$, *então f tem um mínimo relativo em c.*

Demonstração. *1. Da Proposição 1.8.33, vamos ter que f é crescente em [a, c] e decrescente em [c, b], logo* $f(x) < f(c), \forall x \neq c$ *em (a, b).*

2. *Da Proposição 1.8.33, temos que f é decrescente em [a, c] e crescente em [c, b], portanto* $f(x) > f(c), \forall x \neq c$ *em (a, b).*

Exemplo 1.8.36. *Estude o comportamento da função* $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 4$ *com relação aos seus máximos e mínimos locais.*

Primeiro determinemos os pontos críticos de f.

Temos que:

$f'(x) = 3x^2 + 9x$, donde $f'(x) = 0$ *se, e somente, se* $x = 0$ ou $x = -3$.

Assim, os pontos críticos de f são −3 e 0. Como f'é uma função quadrática, f' é positiva para x < −3 e x > 0 e negativa para −3 < x < 0, vide Seção 1.3. Logo, pela Proposição 1.8.33, f é crescente em $(-\infty,-3)$ e $(0,+\infty)$; por outro lado, f é decrescente em [−3, 0].

Como f' muda de positivo para negativo em −3, pelo Teorema 1.8.35, f tem um máximo relativo em −3. Analogamente, f tem um mínimo relativo em 0.

Veja, na Figura 1.35, o gráfico de f.

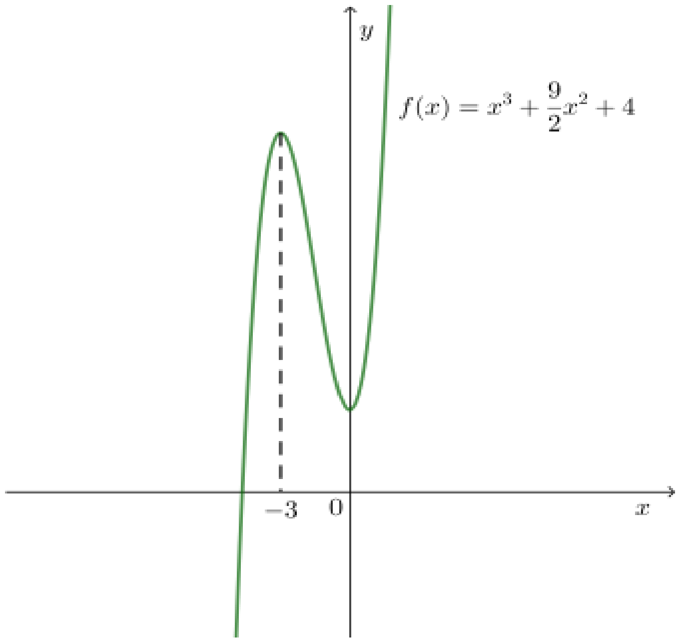


Figura 2.35: Gráfico da função $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 4$.

Em Matemática, é comum nos depararmos com operações que são inversas uma da outra, os casos mais comuns são de adição e subtração e multiplicação e divisão. No estudo de Cálculo, a derivação possui uma operação inversa, chamada integração. Então veremos inicialmente a integral indefinida, como sendo o processo inverso da derivação, depois a integral definida a partir do problema de área e, por fim, o Teorema Fundamental do Cálculo, um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral.

Definição 1.8.37. *Sejam f uma função e I ⊂ D(f) um intervalo aberto. Dizemos que uma função F é uma primitiva de f em I se, para todo x ∈ I, tivermos $F'(x) = f(x)$.*

Exemplo 1.8.38. *Note que a função* $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 1$ *é uma primitiva de* $f(x) = x^3 + 2$*, em um intervalo aberto I ⊂ D(f), pois* $F'(x) = x^3 + 2, \forall x \in I$*. De maneira geral, qualquer função H tal que* $H'(x) = f(x), \forall x \in I$ *é uma primitiva de f em I.*

Proposição 1.8.39. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se uma função F é uma primitiva de f em I e k é uma constante, então o conjunto de todas as primitivas de f em I é dado por:*

$$W = \{H, H(x) = F(x) + k, \forall x \in I\}.$$

Demonstração. *Sendo F uma primitiva de f em I, temos* $F'(x) = f(x), \forall x \in I$*. Definamos uma função H tal que H(x) = F(x) + k, então* $H'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + k' = F'(x), \forall x \in I$*. Assim, sendo H uma primitiva qualquer de f em I, temos H(x) = F(x) + k, k constante.*

A proposição acima nos diz que uma função f que admite uma primitiva F em um intervalo aberto I ⊂ D(f), admitirá infinitas primitivas nesse mesmo intervalo, que diferirão por uma constante.

Definição 1.8.40. *Sejam f uma função e I ⊂D(f) um intervalo aberto. Se F é uma primitiva de f em I, dizemos que F(x) + k, k constante, é a integral definida de f em I. Notação:* $\int f(x)dx = F(x) + k$*, onde dx indica a variável de integração.*

Proposição 1.8.41. *Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I e k uma constante, então*

1. $\int kf(x)dx = k\int(x)\,dx$;
2. $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Demonstração. 1. *Seja* $F(x) + C_1, C_1$ *constante, uma primitiva de f em I, então* $F'(x) = f(x), \forall x \in I$, donde $kF'(x) = kf(x)$, ou seja, $kF(x) + C_2, C_2$ *constante, é uma primitiva de* $kf(x)$.

Temos que:

$k\int f(x)dx = k[F(x) + C_1] = kF(x) + kC_1$.

Denotando $C_2 = kC_1$, temos $k\int f(x)dx = kF(x) + C_2$.

Logo, $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

3. *Sejam* $F(x) + w_1$ *e* $G(x) + w_2, w_1$ *e* w_2 *constantes, primitivas de f e g, respectivamente, em I. Temos que:*

$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + w_1 + G(x) + w_2 = F(x) + G(x) + w_3, com\ w_3 = w_1 + w_2.$

Como $(F(x) + G(x) + w_3)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, segue que $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Exemplo 1.8.42. 1. *Sendo* $f(x) = x^k$, *onde k é um número real fixo não-nulo, então* $\int x^k\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, C$ *constante.*

De fato, pois $\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C\right)' = x^k$, ou seja, $\frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ *é uma primitiva de* $f(x) = x^k$.

Agora considerando a função $\mathrm{h}(x) = \mathrm{a}_1\mathrm{x}^{\mathrm{k}_1} + a_2x^{k_2} + \cdots + a_n x^{k_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \cdots, \mathrm{k}_n \in \mathbb{R}$, *pelo que acabamos de mostrar e pela Proposição 1.8.41, segue que*

$$\int h(x)dx = a_1 \cdot \frac{x^{k_1+1}}{k_1+1} + a_2 \cdot \frac{x^{k_2+1}}{k_2+1} + \cdots + a_n \cdot \frac{k_1+1}{k_n+1}.$$

2. *Se* $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$, *então* $\int f(x)dx = \ln x + C$, *C constante, pois* $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.
3. *Se* $f(x) = e^x$, *temos* $\int f(x)dx = e^x + C$, *C constante pois* $(e^x + C)' = e^x$.
4. *Sendo* $f(x) = \cos x$ *e* $h(x) = sen\ x$, *temos*

$$\int f(x)dx = sen\ x + C_1\ e \int h(x)dx = -\cos x + C_2, C_1\ e\ C_2\ constantes.$$

De fato, pois
$(sen\ x + C_1)' = \cos x\ \ e\ (-\cos x + C_2)' = -(-sen\ x) = sen\ x.$

Áreas de figuras planas, tais como triângulo, quadrado e retângulo são familiares e sabemos, com técnicas simples, desenvolver os cálculos. Se nos depararmos com um polígono regular de n lados, bastamos dividi-lo em n triângulos, de mesma área, e calcularmos a sua área, somando ao final, veja [18]. Porém, se precisarmos calcular a área de uma figura qualquer, necessitaremos de um método mais sofisticado.

Com base na referência [17], vamos apresentar o conceito de integral definida a partir do problema de se calcular áreas de regiões quaisquer.

É interessante observar como o pensamento humano evoluiu ao longo de nossa história. Hoje temos uma ciência mais sofisticada e acessível, onde todos nós enquanto pesquisadores, professores e alunos estamos fazendo proveito de tudo que foi construído até os presentes dias.

Antigamente, ao se calcular a área de determinadas figuras, aproximavam-se por áreas de figuras planas já conhecidas; esse processo ficou conhecido como método da exaustão. Por exemplo, na área de um círculo, eram inscritos triângulos e por meio das áreas deles tinha-se uma aproximação para a área do círculo, quanto maior for o número de triângulos, melhor será essa aproximação, veja a Figura 1.36.

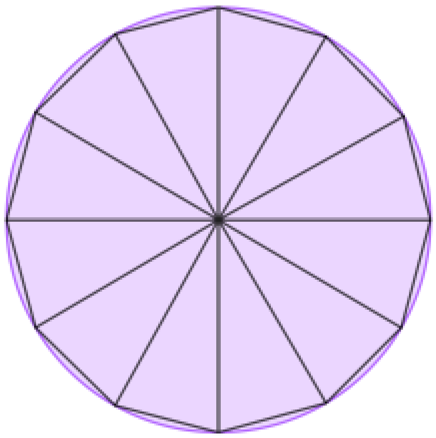


Figura 1.36: Ideia intuitiva para a área de um círculo.

Considere a região S dada na Figura 1.37.

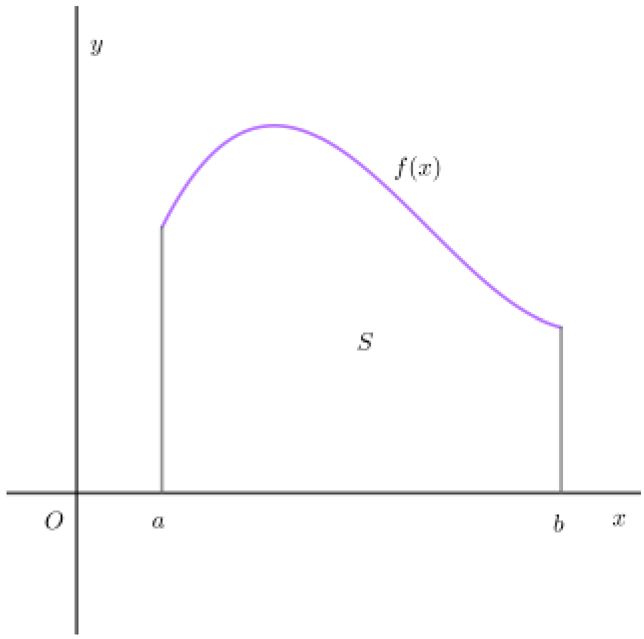


Figura 1.37: Área da região *S*.

A região S está compreendida entre o gráfico da função contínua f(x), o eixo OX e as retas x = a e x = b.

Vamos particionar o intervalo [a, b] em n subintervalos da seguinte forma: $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. *Aproximemos a área de S por n retângulos, não necessariamente iguais, conforme a Figura 1.38.*

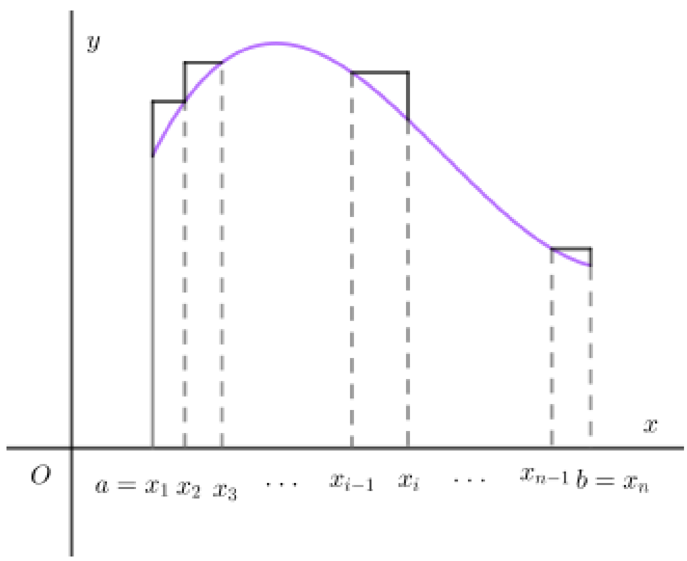


Figura 1.38: Uma aproximação por retângulos para a área de *S*.

Considerando o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$*, seja* Δx_i *o comprimento desse intervalo. Sendo* c_i *um ponto de* $[x_{i-1}, x_i]$*, vamos ter que a altura do i-ésimo retângulo é de* $f(c_i)$*. Assim, a soma das áreas dos n retângulos, representada por* S_n *é:*

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Esta soma é chamada soma de Riemann.

Portanto, a área da região S, denotada por A, é:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

Definição 1.8.43. *([17, pág. 260]) Seja f uma função definida no intervalo [a, b] e seja P uma partição qualquer de [a, b]. A integral definida de f de a até b, denotada por* $\int_a^b f(x)dx$*, é dada por:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

desde que o limite do 2º *membro exista. Se* $\int_a^b f(x)dx$ *existe, dizemos que f é integrável em* [*a, b*]*. Na notação, a e b são chamados de limites de integração.*

Proposição 1.8.44. *Se f e g são funções integráveis no intervalo [a, b] e k é uma constante, então sendo* $k \cdot f$ *e* $f + g$ *integráveis em [a, b], vale:*

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
3. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Demonstração. 1. Temos que

$$k\int_a^b f(x)dx = k\left[\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right] = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b kf(x)dx$$

2. *Temos,*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i \right]$$

$$= \int_a^b [f(x) + g(x)]dx$$

3. *Temos, pelos itens 1 e 2, que*

$$\int_b^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [f(x) + (-1) \cdot g(x)]dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (-1)g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + (-1) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Apresentemos o Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona a integração com a diferenciação, onde uma operação seria a inversa da outra, tais como adição e subtração, multiplicação e divisão e potenciação e radiciação.

Teorema 1.8.45. *([18, pág. 356]) Suponha que f seja integrável em [a, b].*

(1) Se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, *então* $g'(x) = f(x)$.

(2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que F'* $= f$.

Demonstração. *Veja [18, pág. 252] e [18, pág. 252].*

Exemplo 1.8.46. *1. Sendo f(x)* $= 3x^2 + 2x + 1$, *calcule* $\int_4^6 f(x)dx$.

Como g(x) = $x^3 + x^2 + x$ *é uma antiderivada de f(x), temos*

$\int_4^6 f(x)dx = (6^3 + 6^2 + 6) - (4^3 + 4^2 + 4)$ = *174*

2. Calcule a área delimitada pela curva f(x) = $-x^2$*+ 4x e o eixo OX.*

Considerando a Figura 1.39, vamos ter:

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = -\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 = \frac{-64}{3} + 32 = \frac{96}{3} - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}7.$$

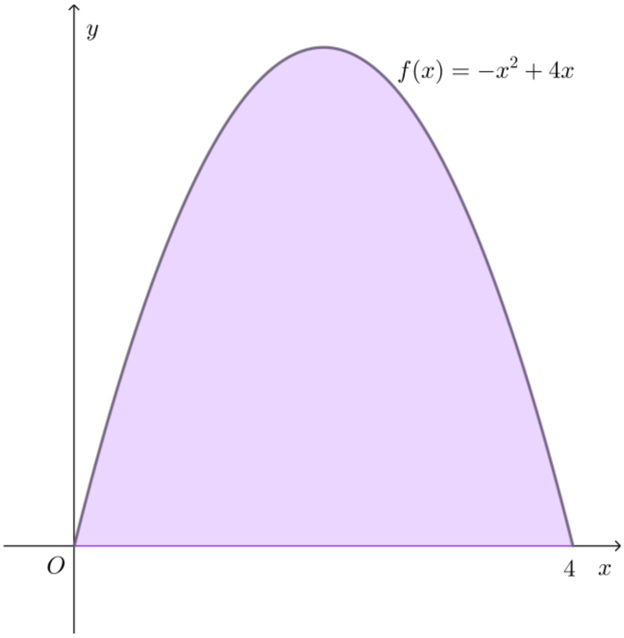


Figura 1.39: Representação gráfica.

Capítulo 2: Resolução de questões de concursos

2.1 Funções - Propriedades Gerais

Questão 2.1.1. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2009) Julgue os itens seguintes relativos a funções, considerando que o domínio de cada uma delas é o conjunto dos números reais.*

(I) *f(x) =* $sen(3x)\ \cdot\ cos(4x)$ *é uma função ímpar;*

(II) *Se* $g(x)$ *e* $h(x)$ *são funções pares, então* $f(x) = g(x) + h(x)$ *é uma função par;*

(III) *Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais* XOY *, o gráfico de uma função ímpar, da forma* $y = f(x)$*, não nula, é simétrico em relação ao eixo* OY *;*

(IV) *Se* $[\mathrm{f}(x)]^2$ *é uma função par, então, necessariamente,* $f(x)$ *é também uma função par.*

Estão certos apenas os itens:

(A) I e II;

(B) I e III;

(C) II e IV;

(D) III e IV.

Solução. *Analisemos os itens separadamente.*

(I) *Item correto, pois do fato da função seno ser ímpar, temos*

$$\begin{aligned} f(-x) &= sen(-3x) \cdot cos(-4x) \\ &= -sen(3x) \cdot cos(4x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

II. Item correto, pois

$$f(-x) = g(-x) + h(-x)$$
$$= g(x) + h(x) = f(x).$$

III. Item falso, considere a Figura 2.1:

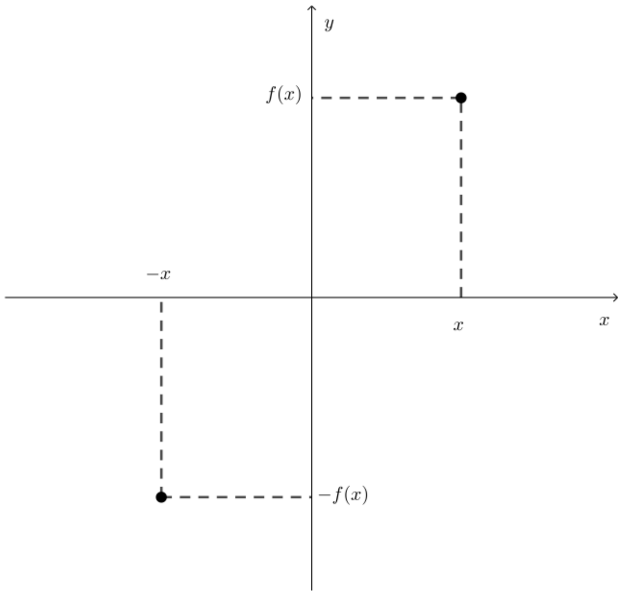


Figura 2.1: Dois pontos quaisquer de uma função ímpar.

Com isso, vemos que o gráfico de f é simétrico em relação à origem.

IV. Ítem falso. Seja x^2 uma função par, porém x é uma função ímpar.

Gabarito: "A".

Questão 2.1.2. (CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) Assinale a opção correspondente ao domínio da função $y = f(x) = -x + \sqrt{(x+2)^{200} - x^{200}}$ no conjunto dos números reais.

(A) $(-\infty, -1]$.

(B) $[0, +\infty)$.

(C) $[-1, +\infty)$.

(D) [0, 200).

(E) $(-\infty, +\infty)$.

Solução. *Como o conjunto dos números reais não admite raiz de número negativo, devemos ter* $(x+2)^{200} - x^{200} \geq 0$. *Faremos por dedução. Perceba, x + 2 e x têm o mesmo expoente, que é 200. Além disso,* $(x+2)^{200}$ *nos dará valores não-negativos enquanto* $-x^{200}$, *negativos. Com isso, devemos apenas resolver a simples inequação* $x + 2 \geq -x$, *assim* $x \geq -1$. *Logo, o domínio desta função é o conjunto* $[-1, +\infty)$. *Letra "C".*

Questão 2.1.3. (CESPE/CEBRASPE - SEDUC/PA 2006) *Considere as seguintes funções definidas no conjunto dos números reais:*

$$F(x) = 3x^2 - 4x + 1; \; H(x) = |x^3 - 2|.$$

A respeito dessas funções, é correto afirmar que

(A) *A função F é uma função par.*

(B) *A função F, quando restrita à semi-reta* $x \geq \frac{2}{3}$, *admite inversa.*

(C) *A função H é uma função crescente.*

(D) *A função H, quando restrita à semi-reta* $x \leq 2$, *admite inversa.*

Solução. *Analisemos cada um dos itens. Será se F é uma função par? A resposta é que não, pois* $F(1) = 0 \neq 8 = F(-1)$. *H é crescente? Também não, pois* $H(-1) = |(-1)^3 - 2| = |-1-2| = |-3| = 3$ *e* $H(0) = |-2| = 2$. *Nos restou os itens "B" e "D". Uma função admite inversa se, e somente se, for bijetiva (ver Observação 2.1.20). Vejamos a função H, considere* $|x^3 - 2| = d$, *para algum* $d \in \mathbb{R}$, *então* $x^3 - 2 = d$ *ou* $x^3 - 2 = -d$, *donde* $x = \sqrt[3]{d+2}$ *ou* $x = \sqrt[3]{-d+2}$. *Assim vemos que H não é injetiva, logo não será bijetiva. Nos sobrou o ítem B, que é o correto. Veja, o* x_v de F é $\frac{2}{3}$ *(ver Seção 2.3). Assim, se restrita à semirreta* $x \geq \frac{2}{3}$ *ou* $x \leq \frac{2}{3}$, *a função F será injetiva e como já é sobrejetiva, será também bijetiva,* veja Figura 2.2.

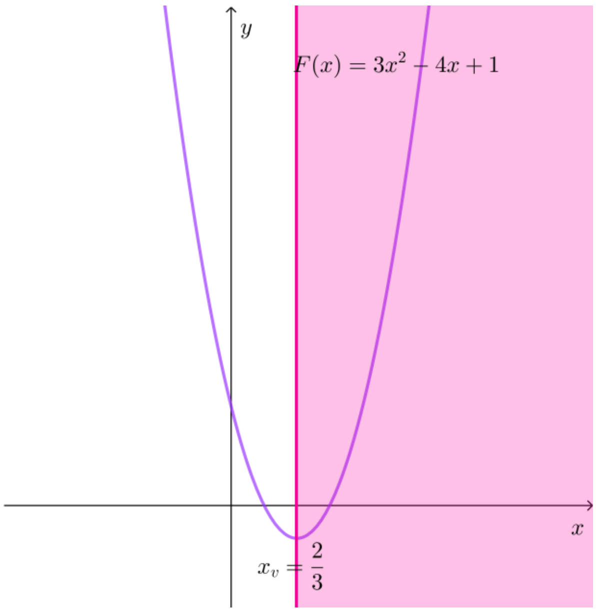


Figura 2.2: Gráfico da função $F(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Questão 2.1.4. *(UECE - SEDUC/CE 2018) Considere a sequência* (a_n) *definida como segue:*

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2$

$a_3 = 2 + 3 + 4$

$a_4 = 4 + 5 + 6 + 7$

$a_5 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$

...

Observe que o termo a_n é a soma de n inteiros consecutivos. Nessas condições, o termo a_{11} é igual a

(A) 561.

(B) 415.

(C) 481.

(D) 465.

Solução. Seja $(a_n) = (1, 3, 9, 22, 45, \cdots)$. Considere a nova sequência (b_n) definida por: $(b_n) = (3 - 1, 9 - 3, 22 - 9, 45 - 22, \cdots) = (2, 6, 13, 23, \cdots)$. Agora seja (c_n) outra nova sequência tal que $(c_n) = (6 - 2, 13 - 6, 23 - 13, \cdots) = (4, 7, 10, \cdots)$.

Perceba que (c_n) é uma PA de razão 3, logo (a_n) é uma PA de terceira ordem. Com isso, o termo geral de (a_n) é dado por uma função polinomial de terceiro grau.

Temos que: $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d, a \neq 0.$

Como $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9$ *e* $a_4 = 22$, *considere o sistema:*

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ 27a + 9b + 3c + d = 9 \\ 64a + 16b + 4c + d = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7a - 3b - c = -2 \\ -19a - 5b - c = -6 \\ -37a - 7b - c = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a + 2b = 4 \\ 18a + 2b = 7 \end{cases}$$

Nas passagens acima, subtraímos equação por equação, repetindo este processo no último sistema, teremos $-6a = -3$, *donde* $a = \frac{1}{2}$. *Substituindo nas outras equações, b = -1, c =* $\frac{3}{2}$ *e d = 0. Daí, vem* $a_n = -\frac{1}{2}n^3 - n^2 + \frac{3}{2}n.$

Logo, $a_{11} = \frac{1}{2} \times 11^3 - 11^2 - \frac{3}{2} \times 11 = 561.$ *Portanto, é a letra "A".*

Para responder às Questões de 2.1.5 a 2.1.9, as funções reais de variável real consideradas são:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = \frac{x-3}{x-2}.$$

Os domínios e os conjuntos imagens (ou conjuntos de valores) dessas funções são identificados por: $\mathrm{Dom(f)}, \mathrm{Im(f)}, \mathrm{Dom(g)}$ e $\mathrm{Im(g)}$ respectivamente. R representa o conjunto dos números reais.

Questão 2.1.5. *(UECE - SEDUC/CE 2018) Sendo* $Dom(f) = R - \{m\}, Dom(g) = R - \{p\}$ *e* $Im(g) = R - \{q\}$, *a soma m + p + q é igual a*

(A) 4.

(B) 6.

(C) 5.

(D) 3.

Solução. *Temos que:*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

Então $Dom(f) = R - \{0\}$, *assim* $m = 0$.

Quanto a g, $Dom(g) = R - \{2\}$, *donde* $p = 2$.

Para sabermos o conjunto imagem de g, vejamos:

$$g(x) = \frac{x-3}{x-2} \Longrightarrow x \cdot g(x) - 2 \cdot g(x) = x - 3$$

$$\Longrightarrow x \cdot g(x) = x - 3 + 2 \cdot g(x)$$

Daí, se $g(x) = 1$, *teríamos* $3 = 2$, *um absurdo. Logo,* $q = 1$. *Assim,* $m + p + q = 0 + 2 + 1 + 3$. *Letra "D".*

Questão 2.1.6. *(UECE - SEDUC/CE 2018) A função* $g : R - \{p\} \to R - \{q\}$ *é invertível. Sua inversa* $g^{-1} : R - \{q\} \to R - \{p\}$ *tem a forma* $g^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ *com a, b e c constantes. Nestas condições, a soma a + b + c é igual a:*

(A) -4.

(B) 3.

(C) -2.

(D) 5.

Solução. Temos que:

$$g(x) = \frac{x-3}{x-2} \Longrightarrow g(x) \cdot x - 2g(x) = x - 3$$

$$\Longrightarrow g(x) \cdot x - x = -3 + 2g(x)$$

$$\Longrightarrow x \cdot (g(x) - 1) = 2 \cdot g(x) - 3$$

$$\Longrightarrow x = \frac{2 \cdot g(x) - 3}{g(x) - 1}$$

Assim, $g^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

Logo, $a = 2, b = -3$ e $c = -1$ e, portanto, a + b + c = $2 - 3 - 1 = 2 - 4 = -2$.

Gabarito: letra "C".

Questão 2.1.7. (*UECE - SEDUC/CE 2018) Sendo $f : R - \{0\} \rightarrow R$, podemos afirmar corretamente que a imagem de f é o conjunto*

(A) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

(B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(C) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(D) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Solução. *Temos que:* $Im(f) = \{y \in R | y = f(x), para\ algum\ x \in R - \{0\}\}$. *De* $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, *vem* $x^2 - x \cdot f(x) + 1 = 0$. *Perceba que se o delta desta equação for negativo, não existe* $x \in R - \{0\}$ *tal que* $y = f(x)$. *Então fazendo* $\Delta < 0$, *temos* $f(x)^2 - 4 < 0$, *donde* $f(x)^2 < 4$. *Logo,* $-2 < f(x) < 2$. *Assim, esta função não possui imagem no conjunto* $(-2, 2)$. *Portanto,* $Im(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. *Letra "A".*

Questão 2.1.8. *(UECE - SEDUC/CE 2018) Se z é o resultado da soma das coordenadas cartesianas dos pontos de interseção dos gráficos de f e de g com os eixos coordenados, então z é igual a*

(A) 3,5.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 4,5.

Solução. *Em $f(x)$, não há interseção do gráfico com os eixos coordenados, pois $x \neq 0$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in R - \{0\}$. Quanto a $g(x)$, se $x = 0$, então $g(0) = {}^{3}/_{2}$. Se $g(x) = 0$, vem $x = 3$. Logo, somando, resulta:* $\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$ *Letra "D".*

Questão 2.1.9. *(UECE - SEDUC/CE 2018) $f : R - \{m\} \to R$ e $g : R - \{p\} \to R - \{q\}$ é correto afirmar que*

(A) As duas funções são injetivas.

(B) Somente uma das funções é injetiva.

(C) Nenhuma das funções é bijetiva.

(D) As duas funções são sobrejetivas.

Solução. *$f : R - \{m\} \to R$ não é sobrejetiva, já que $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \neq R$. Lembremos que para uma função ser sobrejetiva, contradomínio e imagem devem coincidir. Também, f não é injetiva, considere $\frac{x^2+1}{x} = k, k \in \mathbb{R}$, as raízes da equação $x^2 - x \cdot k + 1 = 0$ são*

$$x = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \text{ e } x = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

Assim, para $k \neq \pm 2$, existirão dois elementos no domínio de f a se corresponder com k, isso mostra a não-injetividade de f. Então, não pode ser as letras "A" e "D".

Vejamos a função g. $g : R - \{p\} \to R - \{q\}$ é injetiva? Considere $g(x_1) = g(x_2)$, devemos provar que necessariamente $x_1 = x_2$. Temos

$$\frac{x_1 - 3}{x_1 - 2} = \frac{x_2 - 3}{x_2 - 2} \Longrightarrow x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6 = x_1 \cdot x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6$$
$$\Longrightarrow x_1 = x_2,$$

como queríamos.

Então a g é $1 - 1$ (injetiva). Logo, a alternativa "B" é a correta. Para encerrar, a g também é sobre, basta tomarmos $x = \frac{2y-3}{y-1}, y \neq 1$.

Questão 2.1.10. *(IBADE - Pref. de Manaus - AM 2018) Considere as funções* $f(x-4) = \frac{x-1}{4}$ *e* $g(3x+1) = 6x+5$*, definidas de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Dessa forma, pode-se afirmar que* $g(f(f(x)))$ *é igual a:*

(A) $\frac{7x+4}{4}$

(B) $\frac{x+39}{8}$

(C) $\frac{3x+49}{8}$

(D) $\frac{x+9}{2}$

Solução. Temos que:

$$f(x-4) = \frac{x-1}{4} \ e \ g(3x+1) = 6x+5.$$

Note que: $f(x) = \frac{x+3}{4}$ e $g(x) = 2x+3$(basta verificar com $f(x-4)$ e $g(3x+1)$.)

Assim,

$$g\left(f(f(x))\right) = g\left(\frac{\frac{x+3}{4}+3}{4}\right) = g\left(\frac{\frac{x+15}{4}}{4}\right) = g\left(\frac{x+15}{16}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{x+15}{16}\right) + 3$$

$$= \frac{x+15}{8} + \frac{24}{8}$$

$$= \frac{x+39}{8}$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.1.11. *(CONSULPAM - Pref. de Pentecoste - CE 2014) Sabendo que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é tal que para qualquer* x *e* y *pertencentes ao seu domínio,* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *e* $f(3) = 1$*, podemos afirmar que:*

(A) $f(4) = 3 + f(1)$.

(B) $f(4) = f(3) + 1$.

(C) $f(4) = f(3) \cdot f(1)$.

(D) $f(4) = 1 + 1/3$.

Solução. *Como* $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, *em particular, vale para*

$$x = y = 0$$

Assim $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, *donde*

$$f(0) = 0.$$

Agora perceba que:

$$\begin{aligned} f(3) = f(2 + 1) &\Rightarrow f(2) + f(1) = 1 \\ &\Rightarrow f(2) = 1 - f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) = f(4 + (-1)) &\Rightarrow f(4) + f(-1) = 1 \\ &\Rightarrow f(4) = 1 - f(-1) \end{aligned}$$

Como $f(4) = f(2 + 2) = f(2) + f(2)$. *Usando* $f(2) = 1 - f(1)$, *temos*

$$f(4) = 2 - 2f(1).$$

Note que $f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1)$. *De* $f(0) = 0$, *vem*

$$f(1) = -f(-1).$$

De $f(4) = 1 - f(-1)$ *e* $f(4) = 2 - 2f(1)$, *temos*

$$1 - f(-1) = 2 - 2f(1) \Rightarrow 1 = 2f(1) - f(-1) \Rightarrow 1 = 2[-f(-1)] - f(-1)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 = -2f(-1) = - f(-1) \\ &\Rightarrow 1 = -3f(-1) \\ &\Rightarrow f(-1) = -{}^{1}/_{3}, \end{aligned}$$

onde usamos $f(1) = -f(-1)$.

Substituindo em $f(4) = 1 - f(-1)$, *concluímos que*

$$f(4) = 1 + {}^{1}/_{3}.$$

Gabarito: letra "D".

Questão 2.1.12. *(CONSULPAM - Pref. de Quadra - SP 2019) Sejam* f *e* g *funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$*, sendo* $\mathbb{R}$ *o conjunto dos números reais, dadas por* $f(x) = 2x - 5$ *e* $g(x) = 3x + 1$*. Nestas condições, o valor de* $(f \circ g)^{-1}(3)$ *é:*

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Solução. *Conforme demonstrado na Proposição 1.1.22, temos que*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Neste caso, $(f \circ g)^{-1}(3) = (g^{-1} \circ f^{-1})(3) = g^{-1}(f^{-1}(3))$.

Tendo em vista a bijetividade de f *e* g*, temos*

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{2} \;\; e \; g^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}.$$

Logo,

$$f^{-1}(3) = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \; e \; g^{-1}\big(f^{-1}(3)\big) = g^{-1}(4) = \frac{4 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.1.13. *(URCA - Pref. de Cedro - CE - 2014) Considere duas funções polinomiais* $f(x)$ *e* $g(x)$*. Se o grau de* $(f \circ g)(x)$ *é* 3 *e o grau de* $g(x)$ *é* 1*, é correto afirmar que:*

(A) $f(x)$ é *de grau* 2.

(B) $f(x)$ é *de grau* 3.

(C) $f(x)$ é *de grau* 1.

(D) $f(x) = 3 \cdot g(x)$.

Solução. *Temos que:* $f(g(x)) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ *e* $g(x) = mx + n, m \neq 0$.

Como o grau de g é 1, ao compor com f*, g não acrescentará grau a* $f \circ g$*, isso quer dizer que o grau de* f *é o mesmo que o de* $f \circ g$*. Assim,* $f(x)$ *é de grau 3. Letra "B".*

Questão 2.1.14. *(VUNESP - SEE - SP 2007) Um quadrado de área A, um triângulo equilátero de área B e um círculo de área C têm o mesmo perímetro. Então, pode-se afirmar que*

(A) $A = B = C$.

(B) $A = C > B$.

(C) $A > B > C$.

(D) $C > A > B$.

(E) $C > B > A$.

Solução. *Sejam a o lado do quadrado, l o lado do triângulo e r o raio do círculo, o perímetro de cada figura é, respectivamente,*

$$PQ = 4a, P_T = 3l \text{ e } P_C = 2\pi r.$$

Como esses perímetros são iguais, vamos ter

$$PQ = P_T \text{ e } P_T = P_C.$$

De $P_Q = P_T$*, vem* $a = \frac{3}{4} l$ *e de* $P_T = P_C$*, vamos ter* $r = \frac{3}{2\pi} l$*.*

Daí,

$$A = a^2 = \left(\frac{3}{4} l\right)^2 = \frac{9}{16} l^2 \text{ e } C = \pi r^2 = \pi \left(\frac{3}{2\pi} l\right)^2 = \pi \cdot \frac{9}{4\pi^2} l^2 = \frac{9}{4\pi} l^2.$$

Como $B = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$*, podemos comparar as áreas. Assim*

$$A = 0{,}5625 \cdot l^2 \text{ ; } B = 0{,}4330 \cdot l^2 \text{ e } C = 0{,}7166 \cdot l^2.$$

Logo, C > A > B. Letra "D".

Questão 2.1.15. *(UPA - Pref. de Caririaçu - CE 2012) Um cone de altura h e raio da base r tem um aumento de 20% na altura, e uma diminuição de 20% no raio da base. É CORRETO afirmar:*

(A) O volume não se altera.

(B) O volume sofre uma redução de 40%.

(C) O novo volume corresponde a 76, 8% do volume original.

(D) O novo volume corresponde a 20% do volume original.

Solução. *O volume de um cone é dado pelo produto da área da base pela altura divido por 3. O volume inicial do cone de altura h e raio da base r é*

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Com o acréscimo de 20% na altura h do cone e o decréscimo de 20% no raio da base, temos

$$H = 1,2h \text{ e } R = 0,8r,$$

onde H e R são, respectivamente, a altura e o raio da base do novo cone.

O volume desse cone é

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi(0{,}8r)^2(1{,}2h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot 0{,}768$$
$$= 0{,}768V_1.$$

Logo, o novo volume corresponde a 76; 8% do volume inicial. Letra "C".

Questão 2.1.16. *(UEPB - Pref. de Juazeirinho - PB 2014) Considere uma função* $f : A \to \mathbb{R}$ *com* $A = \{-3{,}5, \sqrt{28}{,}7\}$ *e a função definida pela seguinte fórmula* $f(x) = 5\,x^2 + 3$*. A sua imagem é dada pelo seguinte subconjunto* $B \subset \mathbb{R}$:

(A) $B = \{34, 97, 113, 198\}$.

(B) $B = \{48, 128, 143, 248\}$.

(C) $B = \{36, 75, 143, 216\}$.

(D) $B = \{48, 115, 113, 197\}$.

(E) $B = \{48, 115, 143, 216\}$.

Solução. *Sendo* $A = \{-3{,}5, \sqrt{28}{,}7\}$ *o domínio da f, a sua imagem é o conjunto*

$$B = \{f(-3), f(5), f(\sqrt{28}), f(7)\}.$$

Basta calcular esses valores. Temos

$$B = \{48, 128, 143, 248\}.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.1.17. *(UEPB - Pref. de Juazeirinho - PB 2014) Sejam as funções* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sabendo que* $f(x) = \sqrt[3]{6x+2}$ *e* $f(g(x)) = x - 3$. *Assim podemos afirmar que o valor de* $g(5)$ *será dado por:*

(A) $\sqrt[3]{14}$

(B) -2.

(C) 4.

(D) 1.

(E) 0.

Solução. *Temos que:*

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{6 \cdot g(x) + 2} = x - 3 \Longrightarrow 6g(x) + 2 = (x-3)^3$$
$$\Longrightarrow g(x) = \frac{(x-3)^3 - 2}{6}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g(5) = \frac{(5-3)^3 - 2}{6} &= \frac{2^3 - 2}{6} \\ &= \frac{8-2}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Gabarito: letra "D".

Questão 2.1.18. *(UEPB - Pref. de Juazeirinho - PB 2014) A partir da função* $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$*, podemos afirmar que a sua função inversa,* $f^{-1}(x)$ *será dada por:*

(A) $(x + 1)(x - 3)$

(B) $\frac{x+3}{x-2}$.

(C) $\frac{x-1}{x-2}$.

(D) $\frac{x-1}{2x}$

(E) $(2x + 1)(x - 1)$.

Solução. *Temos que:*

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Então $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função bijetiva, logo admite inversa. Assim*

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1} \Longrightarrow (x-1) \cdot f(x) = 2x - 3 \Longrightarrow x \cdot f(x) - f(x) - 2x = -3$$
$$\Longrightarrow x \cdot (f(x) - 2) = -3 + f(x)$$
$$\Longrightarrow x = \frac{-3 + f(x)}{f(x) - 2}$$

Denotando $x = f^{-1}(x)$ *e* $f(x) = x$, *vamos ter a função inversa de* f. *Portanto,*

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.1.19. *(URCA - Pref. de Cedro - CE 2014) Sendo* $f(x)$ *uma função periódica de período* α, *podemos afirmar que a função* $g(x) = f(kx + m), k > 0$, *é de período:*

(A) α / k.

(B) k.

(C) α.

(D) $\alpha \cdot k$.

Solução. *Temos, por hipótese, que α é o menor número real tal que*

$$f(x) = f(x + \alpha), \forall x \in D(f).$$

Como g é uma aplicação que pode ser obtida por meio da função f, que é periódica, então a função g também é periódica. Chamemos de β o periodo de g, ou seja, β é o menor real satisfazendo

$$g(x) = g(x + \beta), \forall x \in D(g).$$

Temos que:

$$g(x + \beta) = f(k \cdot (x + \beta) + m) = f(kx + k\beta + m) = f\big((kx + m) + k\beta\big).$$

Como a g é periódica, então

$$f\big((kx + m) + k\beta\big) = f(kx + m),$$

pois $g(x) = g(x + \beta), \forall x \in D(g)$.

Como o periodo da f é α, teremos que $\alpha = \beta k$, *ou seja,* $\beta = \alpha/k$. *Letra "A".*

Questão 2.1.20. *(URCA - Pref. de Mauriti - CE 2018) Sejam $f(x)$ uma função quadrática e $g(x) = \frac{5x+1}{2}$ tais que $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}(25x^2 - 5x + 6)$. O valor de $f(1)$ é:*

(A) $^{17}/_{4}$

(B) 3.

(C) 4.

(D) $^{15}/_{4}$

(E) 5.

Solução. *Temos que:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= a \cdot \left(\frac{5x+1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{5x+1}{2}\right) + c \\ &= a \cdot \left(\frac{25x^2+10x+1}{4}\right) + \frac{5bx+b}{2} + c \\ &= \frac{25a}{4}x^2 + \frac{5a}{2}x + \frac{a}{4} + \frac{5b}{2}x + \frac{b}{2} + c \\ &= \frac{25a}{4}x^2 + \frac{5a+5b}{2}x + \frac{a+2b+4c}{4}. \end{aligned}$$

Temos, por hipótese, que

$$f(g(x)) = \frac{25}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3.$$

Pela igualdade polinomial,

$$\frac{25a}{4} = \frac{25}{2}\,(1), \frac{5a+5b}{2} = -\frac{5}{2}\,(2)\ e\ \frac{a+2b+4c}{4} = 3\ (3).$$

De (1), tem-se a = 2. Substituindo em (2),

$$\begin{aligned} \frac{10+5b}{2} = -\frac{5}{2} &\Longrightarrow 5b = -15 \\ &\Longrightarrow b = -3 \end{aligned}$$

Substituindo em (3),

$$\frac{2-6+4c}{4} = 3 \Longrightarrow -4+4c = 12$$
$$\Longrightarrow 4c = 16$$
$$\Longrightarrow c = 4.$$

Logo, $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ *e, portanto,* $f(1) = 3$. *Letra "B".*

Questão 2.1.21. *(URCA - Pref. de Mauriti - CE 2018) Sobre funções, assinale a alternativa INCORRETA:*

(A) Dadas as funções $f : A \longrightarrow B$ *e* $g : B \longrightarrow D$. *Se* $g \circ f$ *é injetiva, então f é injetiva.*

(B) Se $f : A \to A$ *é uma função injetiva e A é um conjunto finito, então* f *é sobrejetiva.*

(C) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ *é o intervalo* $(-1,1)$.

D) Se $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *são funções invertíveis, então* $g \circ f : A \to C$ *é invertível e* $(g \circ f)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

(E) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = 2n + 1$ *é injetiva, mas não é sobrejetiva.*

Solução. *Analisemos cada um dos ítens.*
(A) Item correto. Justificação: como $g \circ f$ *é injetiva, dados* $x_1, x_2 \in A$*, distintos, Temos*

$$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)).$$

Se, por absurdo, f não for injetiva, existirão $a, b \in A$*, distintos, tais que*

$$f(a) = f(b).$$

Daí, aplicando a g*, vem* $g(f(a)) = g(f(b))$*. Contradição.*

(B) Item correto. Justificação: seja n *a cardinalidade de A,* $n \in \mathbb{N}$*. Se a* f *não fosse sobrejetiva, existiria um certo* $y \in A$ *a não se corresponder com nenhum elemento de A, com isso, existem* $w_1, w_2 \in A$*, distintos, tais que*

$$f(w_1) = f(w_2):$$

Contradição, pois a f *é por hipótese injetiva.*

(C) Item correto. Justificação: para a função f *fazer sentido, devemos ter*

$$1 - x > 0.$$

Logo, $x \in (-1, 1)$.

(D) Item errado. A justificação encontra-se na Proposição 1.1.22.

(E) Item correto. Justificação: a f é de fato não-sobrejetiva, pois a expressão $f(n) = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ *nos fornece apenas inteiros ímpares. Com efeito, pois usando indução em n, temos:*

$$n = 0 \Longrightarrow f(n) = 1 \; e \; n = 1 \Longrightarrow f(n) = 3.$$

Nas duas situações, $f(n)$ *nos dá números ímpares. Suponha que* $f(n) = 2n + 1$ *seja ímpar, para um certo* $n \in \mathbb{N}$*. Temos*

$$f(n+1) = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = (2n+1) + 2$$

Pela hipótese de indução, $2n+1$ *é ímpar, assim* $2n+1 + 1$ *é par e*

$$2n + 1 + 1 + 1 = (2n+1) + 2$$

é ímpar.

Portanto, f(n), é ímpar, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A demonstração para $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ *é análoga.*

2.2 Função Afim

Questão 2.2.1 *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/AM 2011) Se* $f(x) = 2x + 5$ *e* $g(x) = -x$*, então a funções compostas* $f \circ g$ *e* $g \circ f$*, definidas por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *e* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$*, são, ambas, crescentes.*

Solução. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot (-x) + 5 = -2x + 5$. *Não precisamos fazer a outra composta, o item está claramente errado, pois* $f \circ g$ *é decrescente (Proposição 1.2.3) e o enunciado diz que* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são ambas crescentes.*

]

Com relação a sequência numérica $a_1, a_2, \cdots, a_n$, julgue a Questão 2.2.2.

Questão 2.2.2. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/AM 2011) Se a sequencia estiver em progressão aritmética com razão igual a 10 e* $a_1 = 5$*, então* $a_{10} > 100$.

Solução. *Os termos da progressão aritmética podem ser obtidos por meio da função afim:* $f(x) = 10x + 5$*, onde* $a_1 = f(0)$*.Assim,* $a_{10} = f(9)$*.Dai,* $f(9) = 95 < 100$*. A questão está, portanto, errada.*

Questão 2.2.3. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/AM 2011) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY, as retas de equações* $x + 5y - 7 = 0$ *e* $3x + 15y + 2 = 0$ *são paralelas.*

Solução. *Vamos escrever essas duas equações na forma reduzida, isto é, com y em função de x, então* $y = -\frac{1}{5} \cdot x + \frac{7}{5}$ *e* $y = -\frac{1}{5} \cdot x + \frac{1}{15}$. *Como essas duas equações têm o mesmo coeficiente angular, as referidas retas são de fato paralelas, assim o item está correto.*

Questão 2.2.4 *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/PA 2006) Foi proposto aos alunos de uma classe o seguinte problema.*

Em uma competição esportiva, o técnico de um dos competidores representou o campo onde se realizará a competição sobre uma malha quadriculada e utilizou um sistema de coordenadas cartesianas xOy. O jogador está com a bola na posição P = (3, 2) e deverá arremessa-la com bastão de modo que ela bata na parede do campo − representada pelo eixo Ox − em um pongo G, seja desviada e caia em um buraco situado no ponto F, representado pelo ponto (−3,3).

Supondo que o percurso da bola é formado por segmentos de reta, e que o comprimento do percurso PG + GF deva ser o menor possível, desenhe o percurso da bola encontre as coordenadas do ponto G.

O aluno utilizou o seguinte método para resolver o problema.

(i) Achou a imagem P' de P por uma reflexão em relação ao eixo Ox.

(ii) Encontrou a equação da reta r que passa pelos pontos F e P'.

(iii) Achou as coordenadas do ponto G interseção da reta r com o eixo Ox.

Com base na solução do aluno, assinale a opção correta.

(A) O ponto P' tem coordenadas (−2, 3).

(B) A reta r é descrita pela equação $6y + 5x = 3$.

(C) A reta r pode ser descrita pela equação $x = 3$.

(D) O ponto G tem coordenadas (1, 0).

Solução. *O primeiro passo é entender que P' ser uma reflexão de P = (3, 2) em relação ao eixo Ox significa que P' = (3, −2), ou seja, muda apenas o sinal da coordenada de y. Agora vamos representar a reta r pela função afim* $f(x) = ax + b$. *Como r passa por F = (−3, 3) e P' = (3, −2), então f(−3) = 3 e f(3) = −2. Substituindo esses valores na função, temos*

$$3 = -3a + b \Rightarrow b = 3 + 3a \text{ e}$$

$$-2 = 3a + b \Rightarrow b = -2 - 3a$$

$$\Rightarrow 3 + 3a = -2 - 3a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{6}$$

Disso, vem $b = \frac{1}{2}$.

Logo, $f(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$. *Sendo f(x) = y, temos*

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{3}{6} \Rightarrow 6y = -5x + 3$$

$$\Rightarrow 6y + 5x = 3$$

Portanto, a alternativa correta é a "B".

Uma representação para este problema está na Figura 2.3.

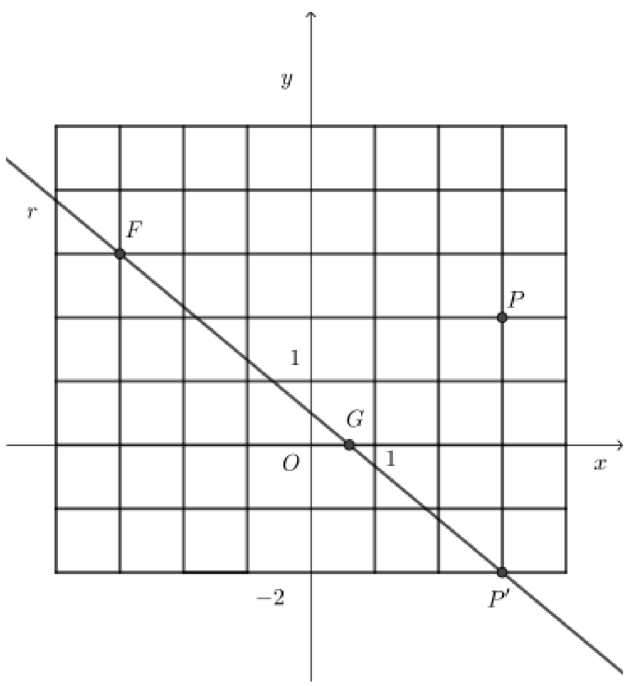


Figura 2.3: Representação gráfica do problema

Questão 2.2.5. *(IBADE – SEDUC/PB 2017) Se r :* $4x - 3y + 15 = 0$ *é uma reta contida no plano* $\mathbb{R}^2$*, calcule a distância entre r e o ponto P(1,* -2*).*

(A) 5 u.c.

(B) $2\sqrt{6}\ u.c.$

(C) 6 u.c.

(D) $6\sqrt{2}\ u.c$

(E) $5\sqrt{2}\ u.c$

Solução. *Sendo r :* $4x - 3y + 15 = 0$*, colocando na forma de uma função afim,*

$$r : y = \frac{4}{3}x + 5.$$

Seja s a reta perpendicular a r que passa por P, então o coeficiente angular de s é $-3/4$*. Sendo (x, y) um ponto qualquer de s, temos*

$$-\frac{3}{4} = \frac{y+2}{x-1} \Rightarrow -3x + 3 = 4y + 8$$

$$\Rightarrow -3x - 5 = 4y$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4},$$

Ou seja,

$$s : y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4},$$

Agora, vamos tirar a interseção de r com s, com isso

$$\frac{4}{3}x + 5 = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = -5 - \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{16x + 9x}{12} = -\frac{20}{4} - \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{25x}{12} = \frac{-25}{4}$$

$$\Rightarrow \; x = -\frac{12}{4}$$

$$\Rightarrow \; x = -3$$

Disso, vem $y = 1$. Seja $Q = (-3,\ 1)$ a interseção entre r e s, a distância entre r e P é a distancia entre P e Q. Assim,

$$d(r;\, p) \;=\; \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+9}$$

$$= 5.$$

Logo, a alternativa correta é a "A".

Veja Figura 2.4.

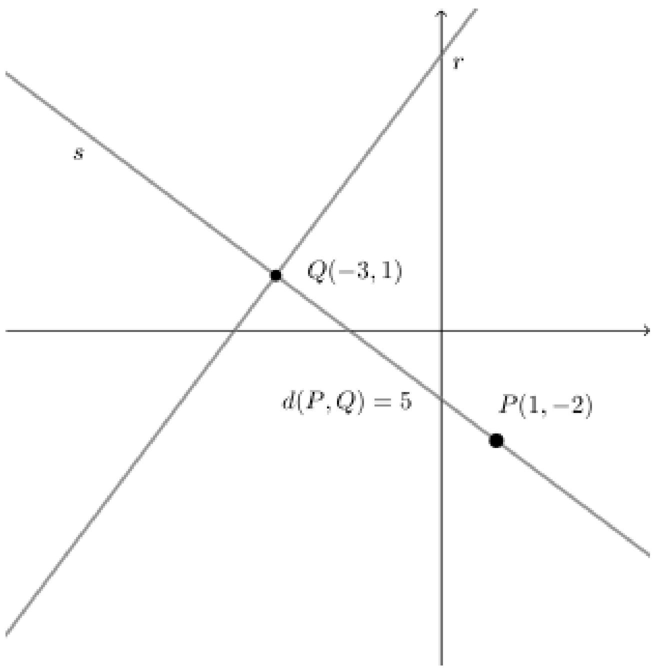


Figura 2.4: Representação gráfica do problema.

A figura 2.5 é para a questão 2.2.6.

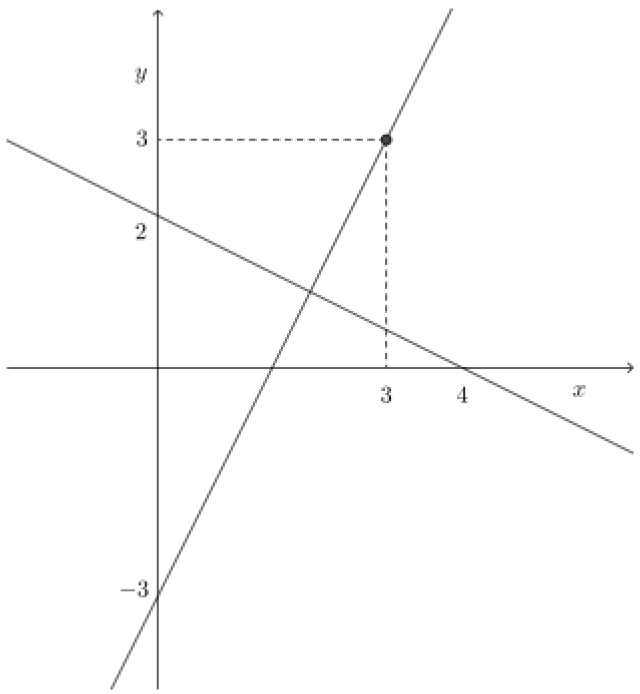


Figura 2.5: Gráfico das funções *f* e *g*.

Questão 2.2.6. *(IBADE – Pref. De Manaus 2019) Considere duas funções representadas no plano cartesiano, na qual f é a função crescente e g é a função decrescente, ambas do tipo afim e de domínio real. Neste caso, pode-se afirmar que o conjunto solução de* $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$ *está corretamente representado pelo intervalo:*

(A) $\{x \in \mathbb{R} |\ 3/2 < x \leq 4\}$.

(B) $\{x \in \mathbb{R} |\ 3/2 \leq x \leq 4\}$.

(C) $\{x \in \mathbb{R} |\ x \leq 3/2 \ ou \ x \geq 4\}$.

(D) $\{x \in \mathbb{R} |\ x < 3/2 \ ou \ x \geq 4\}$.

Solução. *Perceba que* $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$ *na parte azul da Figura 2.6, onde* $x \leq 4$. *Bastamos saber o ponto de interseção de f com eixo OX, para isso devemos determinar a função f. Perceba que f passa pelos pontos* $(0, -3)$ *e* $(3, 3)$. *Sendo* $f(x) = ax + b$, *temos* $f(0) = -3$, *donde* $b = -3$. *De* $f(3) = 3$, *vem* $3 = 3a - 3$, *o que nos dá* $a = 2$. *Assim,* $f(x) = 2x - 3$. *Então fazendo* $f(x) = 0$, *tem-se* $x = 3/2$. *Como* $f(x) \neq 0$ *por estar no denominador da inequação, devemos ter* $x > 3/2$. *Logo,* $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$ *no intervalo* $3/2 < x \leq 4$. *Letra "A".*

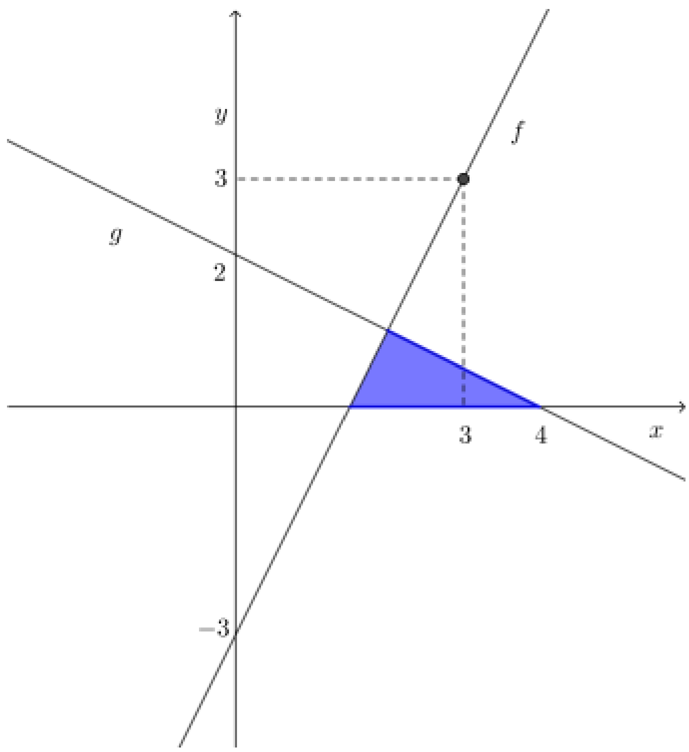


Figura 2.6: Quociente *g(x) / f(x)*.

Questão 2.2.7. *(CONSULPAM – Pref. De Martinópole – CE 2015) Determine o valor de a e b para os quais a equação* $ax + 1 = x + b$ *possua uma única solução.*

(A) $a = 1$ e b qualquer.

(B) $b \neq 1$ e a qualquer.

(C) $a \neq 1$ e b qualquer.

(D) $b = 1$ e a qualquer.

Solução. *Temos: $ax + 1 = x + b$, donde $(a - 1)x + 1 - b = 0$. Uma função $f(x) = cx + d$ é do tipo afim se, e somente se, $c \neq 0$, pois caso contrário f seria uma função constante. Então a função $h(x) = (a - 1)x + 1 - b$ é afim se e somente se, $a - 1 \neq 0$, ou seja, $a \neq 1$. O valor de b é qualquer. Isso responde ao que se pede. Letra "C".*

Questão 2.2.8. *(CONSULPAM – Pref. de Serrita – PE 2015) José andou 13 km de táxi e pagou R\$ 30, 00. No outro dia José andou 17 km no mesmo táxi e pagou R\$ 38,00. Sabe-se que para calcular o valor da viagem multiplica-se a distancia percorrida por um valor fixo por km e acrescenta-se a bandeirada. Qual o valor pago por quilômetro e o valor da bandeirada no táxi que José pegou?*

(A) R\$ 2, 00 e R\$ 4, 00.

(B) R\$ 3, 00 e R\$ 1, 00.

(C) R\$ 3, 00 e R\$ 2, 00.

(D) R\$ 2, 00 e R\$ 5, 00.

Solução. *Perceba, o enunciado diz que o valor a ser pago é dado pelo produto da distância percorrida por um valor fixo mais uma taxa adicional, a bandeira. Então sendo x o número de quilômetros rodados, a o valor por quilômetro rodado e b o valor da bandeira, a função que relaciona o preço a ser pago com o número de quilômetros rodados é*

$$f(x) = ax + b.$$

Temos que:

$$f(13) = 30 \text{ e } f(17) = 38.$$

Daí, temos $a = 2$ e $b = 4$. Logo, $f(x) = 2x + 4$.

Assim, o valor da bandeira é b = R\$ 4, 00 e o preço por quilômetro rodado é a = R\$ 2, 00. Letra "A".

Questão 2.2.9. *(CONSULPAM – Pref. de Tarradas – CE 2015) Existem algumas formas de se obter a equação de uma reta. Sabemos também que a equação de uma reta pode ser da forma geral, reduzida ou segmentária e que podem ser deduzidas a partir da resolução de um simples determinante. Com base nisso, assinale o item que corresponde a equação segmentária da reta que passa pelos pontos A(2, 0) e B(0, 3).*

(A) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1.$

(B) $3x - 2y - 6 = 0.$

(C) $y = \frac{3}{2}x - 3.$

(D) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0.$

Solução. *Equação de reta é uma função afim, então a equação reduzida da reta em questão é obtida por*

$$f(x) = ax + b,$$

onde f(2) = 0 (ponto A) e f(0) = 3 (ponto B).

De f(0) = 3, vem b = 3. Disso e de f(2) = 0, tem-se que a = −3/2.

Logo,

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

Fazendo f(x) = y, a equação da reta é:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 = -\frac{3}{2}x + \frac{6}{2} \Rightarrow 2y = -3x + 6 = -3 \cdot (x - 2)$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}y = x - 2$$

$$\Rightarrow 2 = x + \frac{2}{3}y = \frac{3x+2y}{3}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3X+2Y}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.2.10. *(URCA – Pref. de Cedro – CE – 2014) O maior valor de α para que as retas $3\alpha x + 8y - 5 = 0$ e $6y - 4\alpha x + 1 = 0$ sejam perpendiculares é:*

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Solução. *Primeiramente, vamos colocar as retas dadas na forma reduzida, que é a forma de uma função afim.*

Então $3\alpha x + 8y - 5 = 0$ e $6y - 4\alpha x + 1 = 0$ equivalem a

$$y = -\frac{3\alpha}{8}x + \frac{5}{8} \text{ e } y = \frac{2\alpha}{3}x - \frac{1}{6}.$$

Essas duas retas são perpendiculares se, e somente se,

$$-\frac{3\alpha}{8} = -\frac{1}{2\alpha/3} \Rightarrow -\frac{3\alpha}{8} = -\frac{3}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow 6\alpha^2 = 24$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 4.$$

Logo, $\alpha = 2$, pois a questão pede o maior valor de α para as duas retas dadas serem perpendiculares. Gabarito: letra "B".

Questão 2.2.11. *(VUNESP – SEE – SP 2007) Um artesão produz colares formados por 60 pedras divididas entre ametistas, a um custo de R\$ 0, 50 a pedra, e jades, a R\$ 1, 00* *a pedra. Para baratear o preço de cada colar, o artesão aumentou a quantidade de ametistas em 4 pedras e diminuiu a de jades em 4 pedras, obtendo o preço de R$ 40, 00 o colar. Qual o preço original de cada colar?*

(A) R$ 41, 00.

(B) R$ 42, 00.

(C) R$ 43, 00.

(D) R$ 44, 00.

(E) R$ 45, 00.

Solução. *A noção de função nos auxilia a interpretar algebricamente problemas da realidade, vejamos este. Seja x o número de pedras ametistas e y o número de pedras jades. Temos* $x + y = 60$, *donde* $y = 60 - x$.

Seja C(x) o preço do colar, então

$$C(x) = 0{,}5x + y = 0{,}5x + 60 - x = -0{,}5x + 60 \Rightarrow C(x) = -0{,}5x + 60.$$

Temos uma função afim. Aumentando o número de peças ametistas em 4 unidades, o preço passa a ser R$ 40, 00, ou seja,

$$C(x + 4) = 40.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 40 = -0{,}5(x+4) + 60 = -0{,}5x - 0{,}5 \cdot 4 + 60 \ &\Rightarrow \ 40 = -0{,}5x - 2 + 60 \\ &\Rightarrow \ 40 = -0,5x + 58 \\ &\Rightarrow \ = -0,5x \ = -18 \\ &\Rightarrow \ x \ = \ 36. \end{aligned}$$

Logo, o preço do colar é obtido fazendo C(36), então

$$C(36) = -0{,}5 \cdot 36 + 60 = -18 + 60 \Rightarrow C(36) = 42.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.2.12. *(VUNESP – SEE – SP 2011) Um professor propôs a seguinte questão, em uma prova, para seus alunos do 1° ano do Ensino Médio.*

Analise a variação das grandezas x e y representadas na Figura 2.7.

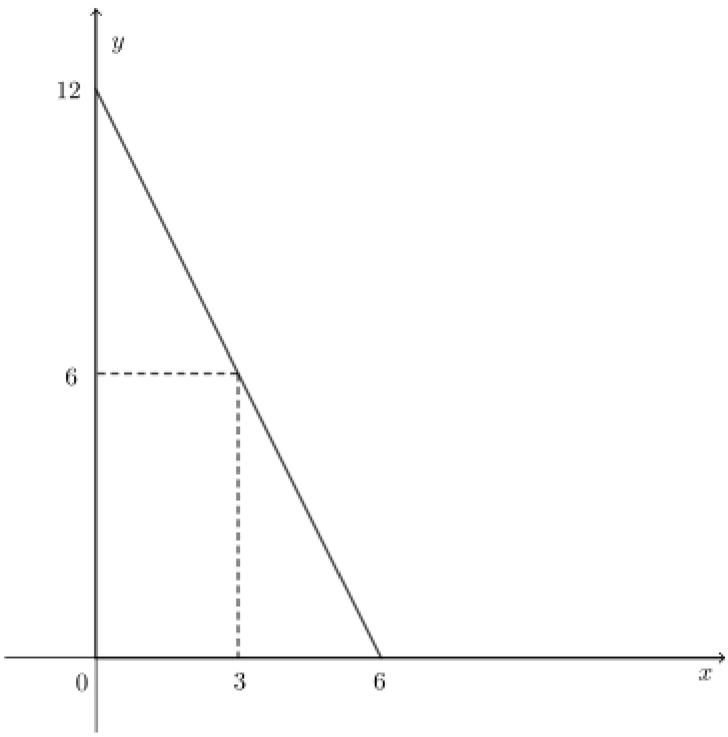


Figura 2.7: Relação entre as grandezas *x* e *y*.

A respeito da Figura 2.7, um aluno fez as seguintes observações:

I. *As grandezas envolvidas no gráfico são inversamente proporcionais, pois quando uma grandeza aumenta, a outra diminui e vice-versa.*

II. *A relação entre y e x é uma função decrescente.*

III. *Quando y = 2, o valor de x é 5.*

A respeito dessas observações feitas pelo aluno, pode-se concluir que está correto o contido em

(A) I, II e III.

(B) II e III, apenas.

(C) I e III, apenas.

(D) I e II, apenas.

(E) II, apenas.

Solução. *Analisemos cada item separadamente.*

II. Começando pelo item II, ele está correto, pois de fato a função que relaciona x e y é decrescente, basta vermos que a medida que x cresce, y decresce e depois o gráfico dessa função é uma reta inclinada para a esquerda.

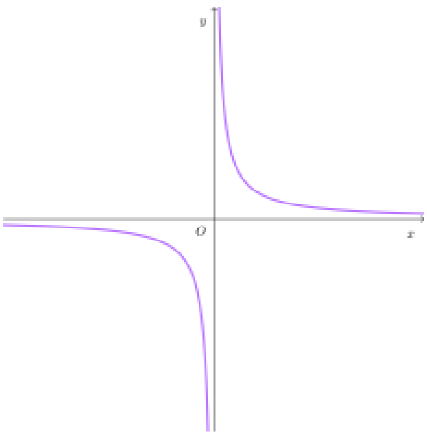
I. O item I é falso, pois função afim não é modelo que relaciona duas grandezas inversamente proporcionais.

Note que se y é inversamente proporcional a x, então y é diretamente proporcional a 1/x, isto é,

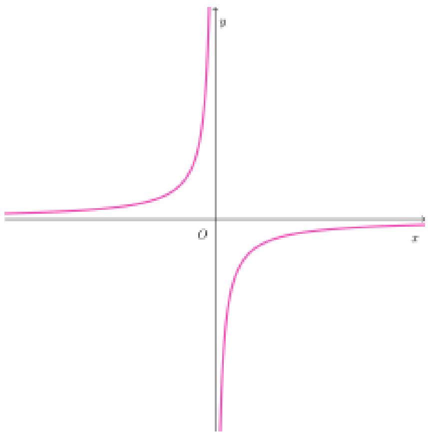
$$y = \frac{1}{x} \cdot k,$$

onde k é uma constante.

O gráfico de f conforme visto na Figura 2.8 é uma hipérbole.



(a) $k > 0$.



(b) $k < 0$.

Figura 2.8: Gráfico de $y = \frac{1}{x} \cdot k$.

Para maiores aprofundamentos, veja |4|.

III. Quanto ao terceiro item, precisamos determinar a lei da função que relaciona x e y. Como o gráfico é uma reta, temos uma função afim.

Seja $f(x) = ax + b$, onde $f(0) = 12$ e $f(6) = 0$.

De $f(0) = 12$, temos $b = 12$. Disso e de $f(6) = 0$, segue que $a = -2$.

Daí,

$$f(x) = -2x + 12.$$

Logo, sendo $y = 2$, tem-se que

$$2 = -2x + 12 \Rightarrow 2x = -10 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, III está correto. Letra "B".

Questão 2.2.13. *(VUNESP – SEE – SP 2011) A equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-1, -1)$ e $(7, 7)$ é*

(A) $7x - y = 0$.

(B) $-x + 7y = 0$.

(C) $x + y = 0$.

(D) $7x + 7 = 0$.

(E) $x - y = 0$.

Solução. *A equação reta é dada pela função afim $f(x) = ax + b$.*

Temos que:

$$f(-1) = -1 \text{ e } f(7) = 7.$$

De $f(-1) = -1$, temos $b = -1 + a$ e de $f(7) = 7$, segue que $b = 7 - 7$.

Daí,

$$-1 + a = 7 - 7a \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1.$$

Depois, b = 0. Logo, f(x) = x e fazendo y = f(x), teremos $x - y = 0$.

Gabarito: letra "E".

Questão 2.2.14. *(VUNESP – SEE – SP 2011) Mantida a relação existente entre os números da sequência (* -2*, 0, 2, 4, 6, 8, ...), é correto afirmar que o seu 100° termo é:*

(A) 190.

(B) 192.

(C) 194.

(D) 196.

(E) 198.

Solução. *Perceba que a sequência em questão é uma progressão aritmética, então todos os seus termos podem se obtidos por uma função afim, com domínio restrito aos naturais.*

Seja f(n) = 2n – 2, onde $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_1 = f(0)$; $a_2 = f(1)$, $a_3 = f(2)$ *e assim sucessivamente.*

Logo, o centésimo termo dessa P.A. é obtido fazendo n = 99 na função afim f(n) = 2n – 2.

Portanto, $a_{100} = f(99) = 2 \cdot 99 - 2 = 198 - 2 = 196$. *Letra "D".*

Questão 2.2.15. *(VUNESP – SEE – SP 2011) Tem-se um determinado valor disponível para se adquirir certa quantidade de um produto. Se esse produto for adquirido ao preço de R$* 25,00, *o total com sua compra ultrapassará o valor disponível em R$* 5,00. *Se ele for adquirido ao preço de R$* 24,00, *sobrarão, do valor disponível, R$* 12,00. *O valor disponível que se tem é*

(A) R$ 415, 00.

(B) R$ 420,00.

(C) R$ 425,00.

(D) R$ 430,00.

(E) R$ 435,00.

Solução. *Seja P o número de unidades vendidas do produto, o valor disponível pode ser obtido por meio das seguintes funções*

$$f(P) = 25P - 5 \text{ e } f(P) = 24P + 12$$

Daí, P = 17. Logo, calculando f(17) em qualquer uma das expressões para f(P), teremos

$$f(17) = 420.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.2.16. *(UPA – Pref. de Caririaçu – CE 2012) Na produção de calçados, uma indústria tem um custo fixo mensal de R$* 15.000,00 *mais um custo variável de R$* 2,50 *por unidade produzida. Sabendo-se que os custos totais (fixos + variáveis) no mês de junho totalizaram R$* 40.000,00, *pode-se afirmar que o número de unidades produzidas nesse mês foi de:*

(A) 8000 *unidades.*

(B) 10000 *unidades.*

(C) 15000 *unidades.*

(D) 25000 *unidades.*

Solução. *Sendo x o número de unidades produzidas, o custo é dado, em função do número de unidades produzidas, por*

$$C(x) = 2{,}5x + 15000.$$

No mês de junho, esse custo foi de R$ 40.000,00, assim

$$40000 = 2{,}5x + 15000 \;\Rightarrow\; 2{,}5x = 25000$$

$$\Rightarrow x = \frac{25000}{2{,}5}$$

$$\Rightarrow x = 10000.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.2.17. *(UPA – Pref. de Caririaçu – CE 2012) Numa Progressão Aritmética de 200 termos, o 1° termo é 29 e o último é 1024. Pode-se afirmar que a razão dessa P.A. vale:*

(A) 5.

(B) 7.

(C) 9.

(D) 6.

Solução. *Seja $f(n) = an + b$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq 199$ a função afim que nos permite determinar qualquer termo desta P.A.*

O primeiro termo é b, obtido calculando $f(0)$. O problema nos dá a informação de que esse número é 29, assim $b = 29$. Também, a é a razão.

Reescrevendo f, temos

$$f(n) = an + 29.$$

O último termo ser 1024 quer dizer que $f(199) = 1024$. Assim,

$$f(199) = a \cdot 199 + 29 \Rightarrow 1024 = a \cdot 199 + 29$$

$$\Rightarrow 199 \cdot a = 995$$

$$\Rightarrow a = 5.$$

Portanto, a razão desta P.A. é 5. Letra "A".

Informações para as Questões 2.2.18 e 2.2.19.

Seja r uma reta que passa pelo ponto $P(-1, 3)$ e é paralela à reta s formada pelos pontos $A(-2, 1)$ e $B(1, 4)$.

Questão 2.2.18. *(UPA – Pref. de Caririaçu – CE 2012) O coeficiente angular da reta r vale:*

(A) – 1.

(B) 3.

(C) 1.

(D) – 2.

Solução. *Primeiro encontraremos a reta s.*

Seja $f(x) = ax + b$ a função afim que determina a equação da reta s.

Como s passa por $A(-2, 1)$ e $B(1, 4)$, então $f(-2) = 1$ e $f(1) = 4$

De $f(-2) = 1$, então $1 = -2a + b$ e de $f(1) = 4$, temos $4 = a + b$.

Assim,

$$b = 1 + 2a \text{ e } b = 4 - a \Rightarrow 1 + 2a = 4 - a$$

$$\Rightarrow 3a = 3$$

$$\Rightarrow a = 1.$$

Substituindo em $4 = a + b$, vem $b = 3$. Dessa forma,

$$s : y = x + 3.$$

O coeficiente angular de s é o termo que acompanha x, ou seja 1. Como r é paralela a s, o coeficiente angular de r é o mesmo que o de s, isto é, 1. Letra "C".

Questão 2.2.19. *(UPA – Pref. de Caririaçu – CE 2012) Assinale a opção que apresenta a equação reduzida da reta r:*

(A) $y = x + 2$.

(B) $y = 2x - 1$.

(C) $y = x - 4$.

(D) $y = x + 4$.

Solução. *Seja $g(x) = x + d$ a função afim que determina a equação reduzida da reta r. Como r passa pelo ponto $P(-1, 3)$, devemos ter $g(-1) = 3$, assim $3 = -1 + d$, donde $d = 4$. Portanto, $r : y = x + 4$. Letra "D".*

Questão 2.2.20. *(UEPB – Estado da Paraíba – PB 2005) O comprimento final de uma barra de metal cujo comprimento inicial é $b = 10$ cm varia com a temperatura t da barra, de acordo com a equação $l = b + 0{,}0001t$, sendo t dado em graus centígrados (°C) e l em cm. Para um acréscimo de 1°C na temperatura, qual o acréscimo em cm sofrido pelo comprimento?*

(A) 0,001 cm.

(B) 10,0001 cm.

(C) 0,0001 cm.

(D) 0,01 cm.

(E) 10 cm.

Solução. *Seja $l = b + 0{,}0001t$ a função que nos dá o comprimento final da barra. Como $l_i = b$ cm é o comprimento inicial, $t = 0$ é a temperatura inicial. Com o acréscimo de 1°C, a temperatura final passou a ser $t = 1$. Daí, o comprimento final da barra é $l_f = b + 0{,}0001 \cdot 1 = b + 0{,}0001$. Portanto, a dilatação foi de $l_f - l_i = b + 0{,}0001 - b = 0{,}0001$ cm. Letra "C".*

Questão 2.2.21. *(UEPB – Estado da Paraíba – PB 2005) Se as retas de equações $y = ax - b$ e $y = cx + 3$ concorrem perpendicularmente no ponto $(2, -3)$, então o valor de b é:*

(A) 11/3.

(B) 7.

(C) 3.

(D) 7/3.

(E) 11.

Solução. *O problema nos dá duas informações importantes: as duas retas são perpendiculares e passam pelo ponto $(2, -3)$.*

Da primeira informação, sai da relação entre os coeficientes angulares das retas,

$$c = -\ 1/a.$$

Assim,

$$y = ax - b \text{ e } y = -\frac{1}{a}x + 3.$$

Da segunda informação, vem $-\ 3 = 2a - b$ *e* $-\ 3 = -\frac{2}{a} + 3.$

Isolando a,

$$a = \frac{-3+b}{2} \ \ e \ \ a = \frac{1}{3}.$$

Daí,

$$\frac{-3+b}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow -\ 3 + b = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\ b = \frac{2}{3} + 3$$

$$\Rightarrow\ b = \frac{11}{3}.$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.2.22. *(CESGRANRIO – Pref. de Manaus – AM – 2014) O preço da lata de óleo de soja da marca X em um supermercado é de R$ 2,20. Às quartas-feiras, este óleo entra em promoção: o cliente pode levar até 11 latas pelo preço de R$ 1,80 e, se quiser levar mais que 11 latas, deverá pagar o preço não-promocional pela quantidade excedente. Na quarta-feira, Marina gastou R$ 39,60 nesse supermercado, com a compra do óleo X. O número de latas que ela comprou foi:*

(A) 9.

(B) 12.

(C) 18.

(D) 20.

(E) 22.

Solução. *O preço pago pelas 11 primeiras latas é dado por 1,8 × 11, ou seja,* *R\$ 19,80.*

Seja l o número de latas compradas após as 11 primeiras, como o preço pago por cada uma é de R\$ 2,20, o gasto total é encontrado mediante a função afim

$$h(l) = 2{,}2l + 19{,}8.$$

Como Marina gastou R\$ 39,60, devemos encontrar l tal que $h(l) = 39{,}6$. Temos,

$$39{,}6 = 2{,}2l + 19{,}8 \Rightarrow 2{,}2l = 19{,}8$$

$$\Rightarrow l = \frac{19{,}8}{2{,}2}$$

$$\Rightarrow l = 9.$$

Assim, foram compradas 9 latas além das 11 iniciais, portanto o número total de latas compradas é 20. Letra "D".

Questão 2.2.23. *(AOCP – Pref. de Nossa Senhora do Socorro – SE – 2013) Quantos múltiplos de 4 há entre 21 e 234.*

(A) 50.

(B) 51.

(C) 52.

(D) 53.

(E) 54.

Solução. *O primeiro múltiplo de 4 após 21 é 24 e o último antes de 234, 232. Perceba que o número de múltiplos de 4 entre 24 e 232 é o número de elementos da P.A. de razão 4, primeiro termo 24 e último termo 232.*

Colocando isso numa função afim, temos

$$f(x) = 4n + 24,$$

onde $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e n é o número de termos da P.A.

O último termo é dado por $f(n - 1)$, assim

$$f(n-1) = 4 \cdot (n-1) + 24 \Rightarrow 4n + 20 = 232$$

$$\Rightarrow 4n = 212$$

$$\Rightarrow n = 53.$$

Portanto, o número de múltiplos de 4 entre 21 e 234 é 53.

Gabarito: letra "D".

Questão 2.2.24. *(FCC – SEE – SP – 2010) Os taxis de uma cidade cobram um valor fixo pela bandeirada e mais uma taxa por quilômetro rodado. Sendo B, Q e T, respectivamente, os valores (em reais) da bandeirada, do quilômetro rodado e do total pago de tarifa no táxi após uma viagem de X quilômetros, é correto afirmar que*

(A) T – B é diretamente proporcional à X, sendo que a constante de proporcionalidade é Q.

(B) T é diretamente proporcional a X, sendo que a constante de proporcionalidade é Q.

(C) T é diretamente proporcional a X, sendo que a constante de proporcionalidade é B.

(D) T é inversamente proporcional a X.

(E) X · Q – T é inversamente proporcional a B.

Solução. *Este problema pode ser descrito pela seguinte função afim*

$$T = Q \cdot X + B.$$

Daí,

$$T - B = Q \cdot X.$$

Então T – B é diretamente proporcional a X, sendo Q a constante de proporcionalidade.

Gabarito: letra "A".

A figura 2.9 é para a Questão 2.2.25.

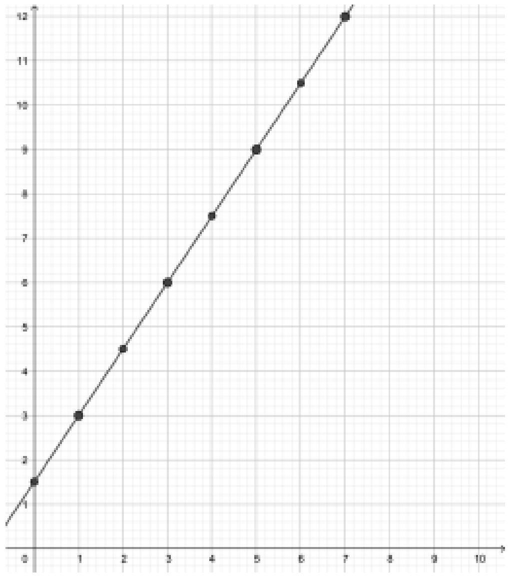


Figura 2.9: Sequência de pontos no plano cartesiano.

Questão 2.2.25. *(FCC – SEE – SP – 2010) Com relação à sequência de pontos (x, y) marcados na reta, é correto afirmar que mantém associação direta com uma progressão*

(A) Geométrica de razão 3.

(B) Geométrica de razão igual ao coeficiente angular da reta que passa pelos pontos.

(C) Aritmética de razão igual ao seno do ângulo de inclinação da reta que passa pelos pontos.

(D) Aritmética de razão igual ao coeficiente angular da reta que passa pelos pontos.

(E) Aritmética de razão igual a 3.

Solução. *O gráfico de uma reta nos remete à função afim que, por sua vez, está relacionada à progressão aritmética. Então, inicialmente, devemos eliminar as opções "A" e "B". De maneira geral, a razão de uma PA é igual ao coeficiente angular da função afim que está a ela relacionada, ou seja, dada uma função afim* $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x \leq n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, *podemos extrair uma PA de razão a de n termos. Com isso mostramos que a alternativa correta é a letra "D".*

Para encerrar, vamos mostrar o porquê das alternativas C e E estarem erradas. Primeiramente, devemos encontrar a função afim que está relacionada com a PA em *questão. Seja f(x) = ax + b, a, b ∈ ℝ. Como f passa pelos pontos P(1, 3) e Q(3, 6), temos f(1) = 3 e f(3) = 6.*

De f(1) = 3, vem 3 = a + b e de f(3) = 6, segue que 6 = 3a + b. Assim,

$$
\begin{aligned}
b = 3 - a \text{ e } b = 6 - 3a &\Rightarrow 3 - a = 6 \\
&\Rightarrow 2a = 3 \\
&\Rightarrow a = 3/2
\end{aligned}
$$

Disso, b = 3/2. Logo, $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

Isso quer dizer que o primeiro termo da PA é 3/2 e sua razão é igual a 3/2, com isso mostramos que o item E está errado.

Quanto ao item C, considere a Figura 2.10.

Temos que:

$$
\begin{aligned}
d(P, Q) &= \sqrt{(3-1)^2 + (6-3)^2} \\
&= \sqrt{2^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{4+9} \\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

Assim considerando o triângulo retângulo PQR e sabendo que d(R, Q) = 3, temos

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

que obviamente não é igual ao coeficiente angular da reta em questão.

Portanto o item C também está errado.

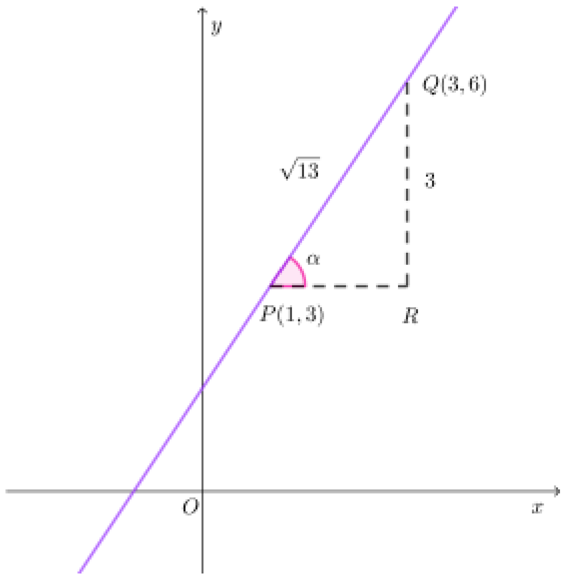


Figura 2.10: Argumentação geométrica para a solução do problema.

Questão 2.2.26. *(UPA – Pref. de Farias Brito – CE – 2021) O senhor Rodrigues está pensando em entrar na academia para malhar, mas está em dúvida em qual. Ao pesquisar o preço das mensalidades nas duas academias do bairro, ele obteve as seguintes propostas:*

- Academia Smart Gin: cobra uma taxa fixa de 10 reais mensais de manutenção do seu plano mais 3 reais por dia que for malhar.

- Academia Top Gin: cobra uma taxa fixa de 25 reais mensais de manutenção do seu plano mais 2 reais por dia que for malhar.

A partir de quantos dias é mais vantajoso financeiramente o senhor Rodrigues malhar na academia Top Gin?

(A) 14.

(B) 15.

(C) 16.

(D) 21.

Solução. *Vamos relacionar o preço cobrado nas duas academias por meio de duas funções, chamemos de f_1 a função que relaciona o preço cobrado na academia Smart Gin* *em função do número de dias malhados e de f_2 a função que nos dá o preço cobrado na academia Top Gin em função do número de dias de malhação.*

Sendo x o número de dias em que o senhor Rodrigues for malha, vamos ter

$$f_1(x) = 3x + 10 \text{ e } f_2(x) = 2x + 25.$$

Perceba que nos primeiros dias de malhação, se pagará mais na academia Top Gin, pois o preço fixo é maior, porém depois de algum tempo ela será mais vantajosa. Vamos determinar depois de quantos dias as duas academias apresentam o mesmo valor, pois a partir do dia seguinte a academia Top Gin será mais vantajosa. Temos

$$3x + 10 = 2x + 25 \Rightarrow x = 15.$$

Então se o senhor Rodrigues malhar no máximo 14 dias, a academia Smart Gin é melhor opção; se ele malhar exatos 15 dias, as duas academias apresentam o mesmo custo; se ele malhar a partir de 16 dias, a academia Top Gin se torna a opção mais rentável. Isso responde ao que se pede. Letra "C".

2.3 Função quadrática

Leia atentamente o texto abaixo para as Questões 2.3.1 a 2.3.8.

Cada j = 0, 1, ⋯, 11 representa um mês do ano de 2017, isto é, $j = 0$ = janeiro, $j = 1$ = fevereiro, e assim sucessivamente. Se o mês j tem d dias, então $j + 1/d$ representa o dia 1° do mês j; $j + 2/d$ representa o dia 2 do mês j, e assim sucessivamente, $j + d/d = j + 1$ representa o dia d do mês j. Dessa forma, cada dia do ano de 2017 pode ser representado por um número x do intervalo [0, 12]. Considere que, nessa representação, em cada dia x do ano de 2017, a porcentagem de água acumulada em relação à capacidade máxima do reservatório de determinada represe seja expressa pelo valor da função

$$f(x) = x^2 - 10 \cdot x + 60.$$

Questão 2.3.1. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) A diferença entre os percentuais de água contida na represa em 31/12/2017 e 1°/1/2017 é superior a 20%.*

Solução. *Determinemos primeiramente o percentual em 31/12/2017.*

Do texto, sabemos que

$$x = j + i/d,$$

onde $1 \leq i \leq d$.

Em 31/12, $j = 11$ *e* $i = d = 31$. *Daí,* $x = 11 + 31/31 = 12$. *Temos*

$$f(12) = (12)^2 - 10 \cdot 12 + 60$$

$$= 84.$$

Em 1°/1/2017, $x = 0 + 1/31 = 1/31$. *Assim*

$$f(1/31) = (1/31)^2 - 10 \cdot (1/31) + 60$$

$$= 59{,}6784\ldots$$

Podemos arredondar para 60%.

A diferença entre os dois percentuais é

$$84 - 60 = 24\%$$

Logo, o item está correto.

Questão 2.3.2. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) Sabendo-se que fevereiro de 2017 teve 28 dias, então* $f(1,\ 25)$ *é a porcentagem de água acumulada no reservatório da represa no dia 25/2/2017.*

Solução. *A porcentagem de água acumulada no reservatório da represa no dia 25/2/2017 é dada por*

$$f(1 + 25/28).$$

Por outro lado,

$$f(1{,}25) = f(1 + 0{,}25)$$

$$= f(1 + 1/4)$$

$$= f(1 + 7/28).$$

Veja que $f(1{,}25) \neq f(1 + 25/28)$. *Logo o item está errado.*

Questão 2.3.3. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) Considere que a função f(x) esteja definida para todos os números reais do intervalo* [0, 12]. *Nesse caso, é correto afirmar que para cada e* $y_0 \in [0, 100]$, existe $x_0 \in [0, 12]$ *tal que* $y_0 = f(x_0)$.

Solução. *Como o coeficiente de* x^2 *em f(x) é 1, que é positivo, f(x) admite valor mínimo. Assim, vamos determina-lo. Temos que*

$$y_v = \frac{\Delta}{4 \cdot a},\ a = 1.$$

Note que:

$$\Delta = (10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 100 - 240 = -140.$$

Daí

$$y_v = \frac{-140}{4 \cdot 1} = \frac{140}{4} = 35.$$

Como 35 é o valor mínimo de f(x), não existe função para $y \in [0,35]$. *Isso contradiz o enunciado, pois ele afirma que para cada* $y_0 \in [0, 100)$, existe $x_0 \in [0, 12]$ *tal que* $y_0 = f(x_0)$. *Logo, o item está errado.*

Questão 2.3.4. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) A inversa de f(x) é expressa por* $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2 - 10 \cdot x + 60}$, *para* $0 \leq x \leq 12$.

Solução. *Dada uma função qualquer, ela admite inversa se, e somente se, for bijetiva. Como f foi definida para* $x \in [0, 12]$, *a parábola nos mostra que existem elementos diferentes com a mesma imagem, assim f não é injetiva e, por consequência, não é bijetiva. Logo, não admite inversa, então o item está errado por supor que tal inversa existe. Veja a representação gráfica na Figura 2.11.*

Questão 2.3.5. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) Em 2017, a menor quantidade de água acumulada no reservatório foi inferior a 10% de sua capacidade máxima e foi atingida no dia 31/5/2017.*

Solução. *Na Questão 2.3.3, a menor porcentagem de água acumulada no reservatório em relação à capacidade máxima foi calculada, que é o y_v de f(x), ou seja, 35%. Assim o item está errado.*

Questão 2.3.6. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) Em 2017, a quantidade de água acumulada no reservatório ficou acima de 51% de sua capacidade máxima em dias de exatamente 4 meses.*

Solução. *Dizer que a quantidade de água acumulada no reservatório ficou acima de 51% da capacidade máxima é o mesmo que considerar a inequação*

$$x^2 - 10 \cdot x + 60 > 51.$$

Temos

$$x^2 - 10 \cdot x + 60 > 51 \Leftrightarrow x^2 - 10 \cdot x + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 9.$$

Vamos ter $0 \leq x < 1$ ou $9 < x \leq 12$. Então a capacidade ficará acima de 51% nos meses de Janeiro, Outubro, Novembro e Dezembro, isto é, 4 meses. Assim, o item está correto.

Questão 2.3.7. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) Se, para 2018, a previsão para a porcentagem de água no reservatório for dada pela composição g(x) = $(f \circ G)(x)$, em que G(x) = 12 – x, então g(x) =* $x^4 - 24x^3 + 284x^2 - 1680x + 5040$.

Solução. *Temos g(x) = f(G(x)) =* $(12 - x)^2 - 10 \cdot (12 - x) + 60$. *Não é preciso fazer as contas para ver que este item está errado. Veja, na conta acima, g(x) tem grau 2, mas no enunciado tem que g(x) possui grau 4. Contradição.*

Questão 2.3.8. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AL 2018) Considere que, em cada dia x de 2017, segundo a representação enunciada, p(x) = x + 5 represente a porcentagem de água do reservatório, em relação à capacidade máxima, que foi desviada ilegalmente para abastecer as caixas d'água de um frigorífico. Nessa situação, se essa água não tivesse sido desviada, em algum momento o reservatório teria transbordado.*

Solução. *Primeiramente vejamos qual é a porcentagem máxima que f(x) nos fornece em relação à capacidade total. Essa porcentagem máxima irá ocorrer em um dos extremos: x = 0 ou x = 12, pois $x \in [0, 12]$.*

Se x = 0, temos f(x) = 60 e se x = 12, então f(x) = 84.

Assim a porcentagem máxima é 84.

Em p(x) = x + 5, a porcentagem máxima retirada ocorre quando x = 12, que é p(12) = 17%. Se essa água não tivesse sido desviada, a porcentagem resultante seria: 84 + 17 = 101%; o que faria o reservatório transbordar em 1%. Portanto, o item está correto.

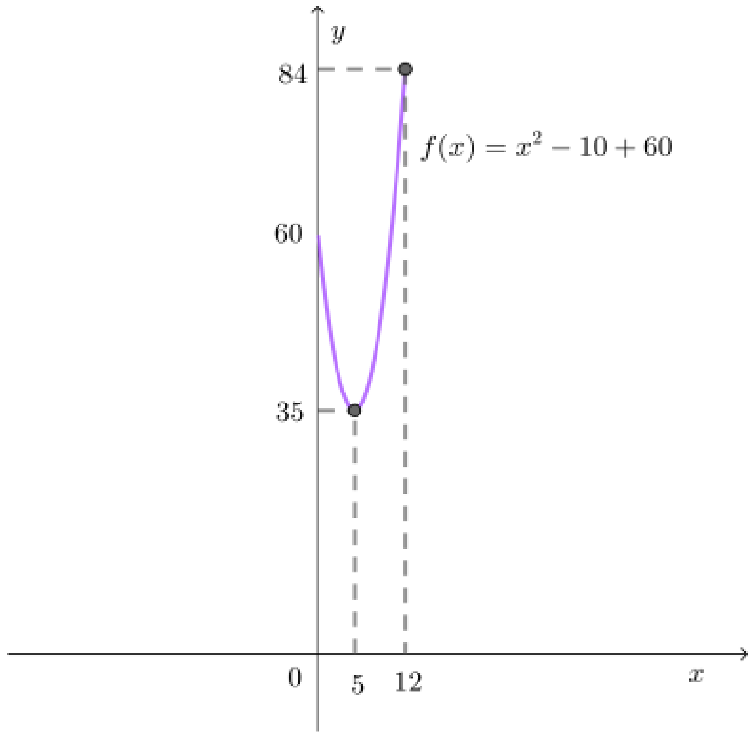


Figura 2.11: Representação gráfica para os Exemplos de 2.3.1 a 2.3.8.

Questão 2.3.9. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC / AM 2011) Se f é uma função tal que f(x + 1) =* $x^2 + 5$*, para todo número real x, então f(x + 5) =* $x^2 + 1$.

Solução. *Como* $f(x + 1) = x^2 + 5$*, podemos afirmar que a lei de correspondência de f é um polinômio de grau 2, ou seja, f é uma função quadrática. Temos então*

$f(x) = ax^2 + bx + c.$

Da condição inicial, vem

$$x^2 + 5 = a \cdot (x+1)^2 + b \cdot (x+1) + c = a \cdot (x^2 + 2x + 1) + b \cdot (x+1) + c$$

$$= ax^2 + (2a + b)x + a + b + c.$$

Pela igualdade de polinômios, temos

$$a = 1, 2a + b = 0 \text{ e } a + b + c = 5.$$

Como a = 1, tem-se b = −2 e c = 6. Assim,

$$f(x) = x^2 - 2x + 6$$

Logo,

$$f(x+5) = (x+5)^2 - 2 \cdot (x+5) + 6 = x^2 + 10x + 25 - 2x - 10 + 6$$

$$= x^2 + 8x + 21.$$

Portanto, o item está errado.

Questão 2.3.10. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/AM 2011) Se k é um número real diferente de 2, então a equação* $(k-2)x^2 - 3kx + 1 = 0$ *sempre terá raízes reais distintas.*

Solução. *Para a equação dada ter raízes reais e distintas é necessário e suficiente que o valor de Delta seja positivo. Temos assim*

$$\Delta = (-3k)^2 - 4 \cdot (k-2) \cdot 1 = 9k^2 - 4k + 8.$$

Devemos ter $9k^2 - 4k + 8 > 0$.

Perceba que isso é sempre verdade, pois o coeficiente de k^2*é positivo, assim a concavidade da parábola é voltada para cima. Também, o Delta da equação* $k^2 - 4k + 8 = 0$ *é negativo, isso quer dizer que o gráfico dela não toca o eixo OX.*

Logo, $9k^2 - 4k + 8 > 0, \forall k \in \mathbb{R}$ *e assim o item está correto.*

Questão 2.3.11. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/AM 2011) Suponha que A, B e C sejam constantes reais e que* $x_1 = -2$ *e* $x_2 = 3$ *sejam as raízes da equação* $Ax^2 + Bx + C = 0$. *Nesse caso, é correto afirmar que* $x_1 = -5$ *e* $x_2 = 0$ *são as raízes da equação* $A(x+3)^2 + B(x+3) + C = 0$.

Solução. *As raízes da equação* $Ax^2 + Bx + C = 0$ *são dadas por*

$$\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \; e \; \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

Somando, ficamos com $\frac{-2B}{2A} = 1$ *(no outro membro somamos os valores de* x_1 *e* x_2*). Daí,* $B = -A$.

A segunda equação pode ser escrita

$$A\cdot(x+3)^2 - A\cdot(x+3) + C = 0 \Rightarrow A\cdot(x^2+6x+9) - A\cdot(x+3) + C = 0$$

$$\Rightarrow Ax^2 + 6Ax + 9A - Ax - 3A + C = 0$$

$$\Rightarrow Ax^2 + 5Ax + 6A + C = 0.$$

As raízes desta equação são

$$\frac{-5A \pm \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

Somando, $\frac{-10A}{2A} = -5, donde - 10A = -10A.$

Portanto, o item está correto, pois chegamos a um resultado verdadeiro.

Questão 2.3.12. (*CESPE/CEBRASPE - SEDUC/AM 2011*) *O conjunto solução para a inequação* $x^2 + 2x - 3 > 0$ *contém o intervalo* $3 \leq x \leq 3$.

Solução. *Devemos resolver a inequação* $x^2 + 2x - 3 > 0$. *As raízes da equação* $x^2 + 2x - 3 = 0$ *são* $x_1 = -3$ *e* $x_2 = 1$ *(Ver Seção 2.3). Então* $x^2 + 2x - 3 > 0$ *para* $x < -3$ *ou* $x > 1$. *Assim, o conjunto solução da inequação não contém o intervalo* $3 \leq x \leq 3$. *Logo, o item está errado.*

Questão 2.3.13. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2009) Devido a uma explosão, uma pedra, que se encontrava no solo, foi lançada para cima. Considere que em cada instante t, em segundos, a partir de t = 0, o momento da explosão, a distância que a pedra se encontra do solo seja descrita por uma função da forma y = y(t), expressa em metros. Suponha que, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais tOy, o gráfico da função y seja uma parábola, que no instante t = 2 s a pedra esteja a 256 m do solo e que no instante t = 4 s, a 384 m do solo. A partir dessas informações, assinale a opção correta.*

(A) Nos instantes t = 2 s e t = 7 s, a pedra estará à mesma altura do solo.

(B) A pedra, que saiu do solo no instante t = 0 s, atingirá novamente o solo em 8 segundos.

(C) No instante t = 5 s, a pedra atingirá a maior altura em relação ao solo.

(D) Entre os instantes t = 6 s e t = 7 s, a pedra ainda está subindo, se afastando do solo.

Solução. *A primeira informação é que o gráfico da função que rege o problema é uma parábola, então* $y(t) = a^2 + bt + c, a \neq 0$. *Depois, temos que*

$$y(2) = 256, y(4) = 384, y(0) = 0$$

De $y(0) = 0$ *vem* $c = 0$*, assim* $y(t) = at^2 + bt$.

De $y(2) = 256$ *e* $y(4) = 384$*, tem-se*

$$256 = 4a + 2b \text{ e } 384 = 16a + 4b.$$

Daí, vamos ter

$$256 = 4a + 2b \text{ e } 384 = 16a + 4b \Rightarrow b = 128 - 2a \text{ e } b = 96 - 4a$$

$$\Rightarrow 128 - 2a = 96 - 4a$$

$$\Rightarrow a = -16.$$

Disso, b = 160. Assim

$$y(t) = -16t^2 + 160t.$$

O ponto de máximo da parábola é

$$x_v = \frac{-160}{-32} = 5,$$

Portanto, no instante t = 5, a pedra atingirá a maior altura em relação ao solo. Gabarito: letra "C".

Questão 2.3.14. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2009) Com relação à função* $f(x) = \dfrac{3}{1 - 6^{x^2-4x}}$*, assinale a opção correta.*

(A) O domínio da f é o conjunto $\{x \in R | x \neq 0\}$.

(B) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY, o gráfico de $y = f(x)$ *intercepta o eixo OX em mais de um ponto.*

(C) $f(x) > 0$ *se, e somente se* $0 < x < 4$.

(D) A equação $f(x) = 3$*, possui pelo menos uma raiz real.*

Solução. *Sendo* D_f *o domínio da f, temos*

$$D_f = \{x \in R \mid 1 - 6^{x^2-4x} \neq 0\}.$$

Assim,

$$1 - 6^{x^2-4x} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \, e \, x \neq 4$$

Então,

$$D_f = \{x \in R \mid x \neq 0 \, e \, x \neq 4\}.$$

Logo a letra "A" está errada.
A letra "B" também está errada, pois f(x) não possui raízes reais, já que o seu numerador é 3.
Quanto ao item "C", temos

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 6^{x^2-4x} > 0$$

$$\Leftrightarrow 6^{x^2-4x} < 6^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

Assim o item "C" é o correto.

A letra "D" está errada, pois

$$f(x) = 3 \Rightarrow 1 - 6^{x^2-4x} = 1 \Rightarrow 6^{x^2-4x} = 0,$$

o que é um absurdo.

Questão 2.3.15. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2009) Uma pesquisa de mercado com o público leitor de determinada revista constatou que, para cada R$ 0,01 a menos cobrado no preço de capa, 10 novos exemplares da revista seriam vendidos. Considere que o custo de cada exemplar da revista seja de R$ 10,00 e que, ao preço de capa de R$ 17,00, 3.600 exemplares são fabricados e vendidos. Nessa situação, ao se reajustar o preço da revista nos moldes indicados pela pesquisa, se toda produção for vendida, então o lucro máximo que poderá ser obtido com a venda da revista será igual a*

(A) R$ 28.090,00.

(B) R$ 37.450,00.

(C) R$ 106.090,00.

(D) R$ 133.450,00.

Solução. *Seja x o número de exemplares da revista.*

Considerando C(x) o custo, R(x) a receita e L(x) o lucro, temos

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

A receita será dada pelo preço de capa vezes o número de exemplares vendidos, então

$$R(x) = (17 - 0{,}01x) \cdot (3600 + 10x).$$

Perceba que 3600 + 10x é o número de exemplares vendidos da revista, então o custo é dado por

$$C(x) = 10 \cdot (3600 + 10x) = 100x + 36000.$$

Daí,

$$L(x) = (17 - 0{,}01x)(3600 + 10x) - (100x + 36000).$$

Efetuando os cálculos, chegamos a

$$L(x) = -0{,}1x^2 + 34x + 25200$$

O lucro máximo é o valor máximo da função quadrática acima, que é

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-11236}{-0{,}4} = 28090.$$

Portanto, a alternativa correta é a "A".

Veja a representação gráfica na Figura 2.12.

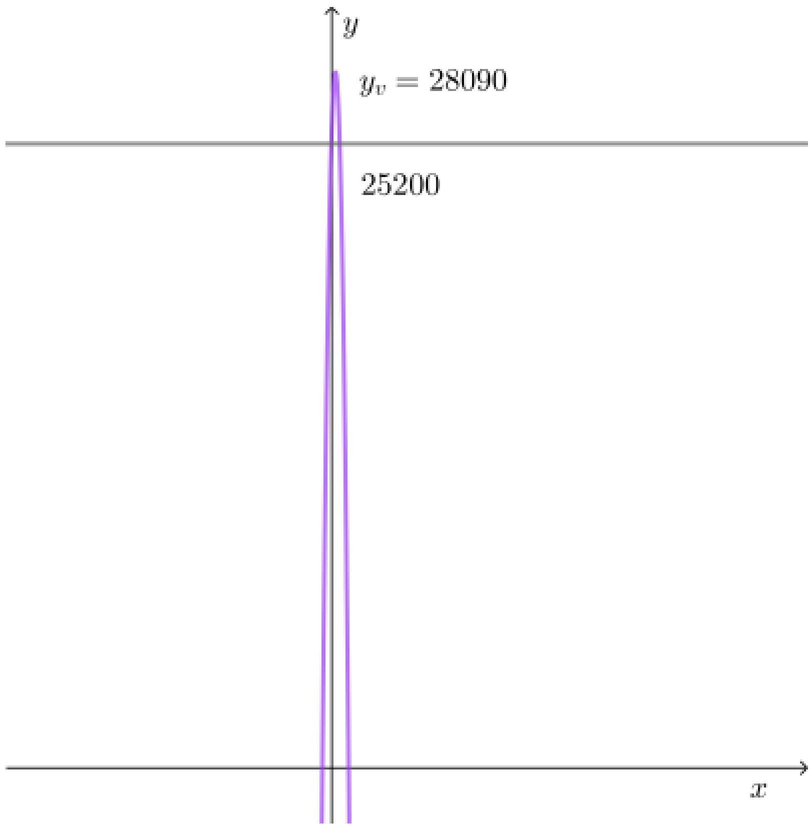


Figura 2.12: Análise da promoção.

Texto para as Questões de 2.3.16 e 2.3.20.

Um professor de educação física, ensinando os fundamentos do arremesso de peso, escolheu um aluno para fazer 3 arremessos. Os arremessos 1 e 2 foram filmados e as trajetórias do peso foram computadorizadas. Percebeu-se que essas trajetórias se aproximavam, respectivamente, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY , dos gráficos das parábolas $y = f(x) = \frac{1}{40}[-3x^2 + 24x + 60]\, e\, y = g(x) = \frac{1}{26}[-3x^2 + 36x + 39]$, (em metros) do ponto no solo localizado abaixo do peso até o ponto no solo localizado sob os pés do aluno que o lançou — considerado a origem O do sistema de coordenadas.

Questão 2.3.16. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) Com base no texto acima, é correto afirmar que o peso atingiu a altura máxima quando*

(A) x = 4 m no primeiro arremesso e x = 6 m no segundo arremesso.

(B) x = 8 m no primeiro arremesso e x = 12 m no segundo arremesso.

(C) x = 10 m no primeiro arremesso e x = 13 m no segundo arremesso.

(D) x = 12 m no primeiro arremesso e x = 18 m no segundo arremesso.

(E) x = 30 m no primeiro arremesso e x = 19, 5 m no segundo arremesso.

Solução. *Temos que*

$$y = f(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{24}{40}x + \frac{60}{40} \text{ e } y = g(x) = -\frac{3}{26}x^2 + \overset{3}{\frac{6}{26}}x + \frac{39}{26}.$$

A altura máxima do primeiro arremesso é

$$x_v = \frac{-24}{40} \div \frac{-6}{40} = \frac{-24}{40} \times \frac{40}{-6} = 4.$$

Com isso, já vemos que a alternativa correta é a "A".

Questão 2.3.17. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) Se os valores de x correspondentes aos pontos em que o peso atingiu o solo em cada um dos 3 arremessos formam uma progressão geométrica crescente, então, no terceiro arremesso, tem-se que*

(A) x = 9 m.

(B) x = 16,90 m.

(C) x = 18 m.

(D) x = 25,35 m.

(E) x = 27 m.

Solução. *O peso atinge o solo quando y = 0. Então devemos encontrar os zeros das duas funções para fazer as análises.*

De $f(x) = 0$ *tem-se* $-3x^2 + 24x + 60 = 0$ *donde* $-x + 8x + 20 = 0$. *As raízes desta equação são x = −2 e x = 10, devemos considerar x = 10.*

Em g(x) = 0, segue $-3x^2 + 36x + 39 = 0$, *ou seja,* $-x^2 + 12x + 13 = 0$. *As raízes são x = −1 e x = 13, onde vamos considerar x = 13.*

Sendo q a razão da P.G. Vamos ter: $10 \cdot q = 13$, *o que nos dá* $q = 1{,}3$. *Assim, no terceiro arremesso,* $x = 13 \cdot 1{,}3 = 16{,}9$. *Letra "B".*

Questão 2.3.18. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) Se, para cada x, h(x) é a distância, em metros, que o peso está do solo, medida do ponto em que se encontra o peso até o ponto de coordenadas (x, 0), então, no arremesso 1, h(x) ≥ 2,4 m para todo x, tal que*

(A) $0 \leq x \leq 2$.

(B) $0 \leq x \leq 4$.

(C) $x \geq 2$.

(D) $2 \leq x \leq 6$.

(E) $x \geq 6$.

Solução. *Devemos resolver a inequação f(x) ≥ 2, 4. Temos que:*

$$f(x) \geq 2{,}4 \Leftrightarrow -3x^2 + 24x + 60 \geq 2{,}4 \cdot 40 = 96$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x = 20 \geq 32$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6.$$

Portanto, o gabarito correto é a letra "D".

Questão 2.3.19. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) Se a distância x for expressa por $x = x(t) = v \times t$, em que t é o tempo, em segundos, $0 \leq t \leq 4$, e v é uma constante positiva, então, no arremesso 1, a altura do peso em função do tempo será dada por $y = y(t) = f(x(t))$. Nessa situação, a altura máxima do peso ocorrerá no instante t0 igual a*

(A) 4.

$(B) \frac{4}{v}$.

(C) v.

$(D) \frac{v}{4}$.

(E) 4v.

Solução. *Devemos considerar* $x = v \times t$ *em* $f(x)$, *temos*

$$y(t) = -\frac{3v^2}{40}t^2 + \frac{24v}{40}t^2 + \frac{60}{40}.$$

É a mesma ideia do x_v, *a diferença é que, neste caso,* $x_v = t_0$. *Assim,*

$$t_0 = \frac{-24v}{-6v^2} = \frac{4}{v}.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.3.20. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) A respeito dos valores* $máx\ f$ *= valor máximo de f(x) e* $máx\ g$ = *valor máximo de* $g(x)$, *assinale a opção correta.*

(A) $máx\ f > máx\ g$.

(B) $0 < máx\ f < máx\ g < 2$.

(C) $2 < máx\ f < máx\ g < 6$.

(D) $6 < máx\ f < máx\ g < 10$.

(E) $máx\ f = máx\ g$.

Solução. *Devemos calcular o* y_v *de* $f(x)$ *e* $g(x)$. *Isso pode ser feito pela fórmula* $\frac{-\Delta}{4a}$, *onde* a *é o coeficiente de* x^2 *ou calculando* $f(4)$ *e* $g(6)$, *pois* $x = 4$ *e* $x = 6$ *são os valores que maximizam as funções f e g respectivamente (ver Exemplo 3.3.15). Calculando* $f(4)$ *e* $g(6)$, *temos* $f(4) = 2,7$ *e* $g(6) = 5,65$. *Portanto,*

$$2 < máx\ f < máx\ g < 6.$$

Gabarito: letra "C".

A Figura 2.13 é referente à Questão 2.3.21.

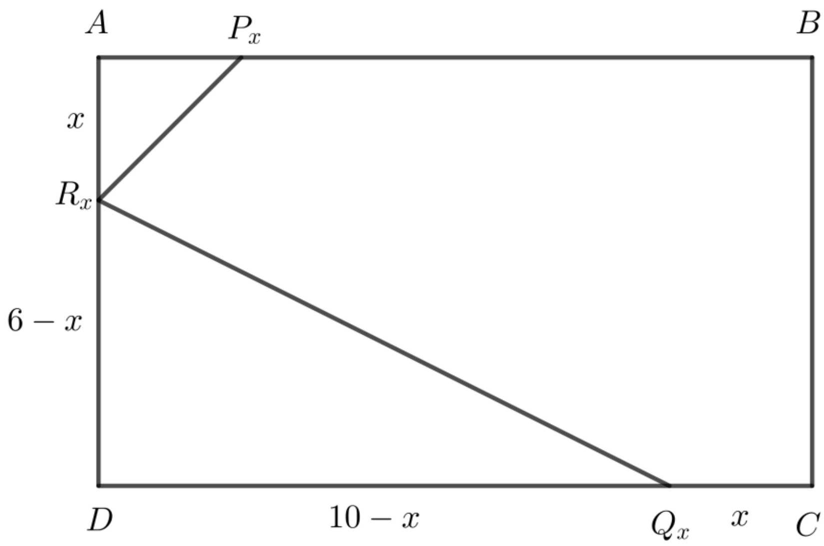


Figura 2.13: Valor de x que maximiza a área do pentágono $P_xBCQ_xR_x$.

Questão 2.3.21. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) No retângulo ABCD mostrado acima, os lados AB e DC medem* 10 *cm, e AD e BC,* 6 *cm. Para cada x real tal que* $0 \leq x \geq 6$*, considere os pontos R_x sobre o lado AD e P_x sobre AB de modo que $AR_x = AP_x = x$ cm. Considere também Q_x sobre DC de modo que a medida de Q_xC seja igual a x cm. Nessa situação, o valor de x que determina o pentágono $P_xBCQ_xR_x$ de máxima área é igual a*

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

(E) 5.

Solução. *A área do pentágono $P_xBCQ_xR_x$ é dada pela diferença entre as áreas do retângulo ABCD e dos triângulos retângulos P_xAR_x e Q_xDR_x.*

A área do retângulo ABCD é 60 cm^2.

As áreas dos triângulos retângulos P_xAR_x e Q_xDR_x são, respectivamente,

$$\frac{x^2}{2} \; e \; \frac{(6-x)(10-x)}{2}.$$

.

Daí, a área do pentágono $P_xBCQ_xR_x$ é

$$60 - \frac{x^2}{2} - \frac{(6-x)(10-x)}{2} = \frac{120}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{60-16x+x^2}{2}$$
$$= -x^2 + 8x + 30.$$

O valor de x que maximiza a área é, portanto,

$$x_v = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Gabarito: alternativa D.

Questão 2.3.22. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/MT 2007) A função* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}}$ *é válida para*

(A) $x > -1$.

(B) $x < 0$.

(C) $-2 < x < -1$.

145

(D) $-3 < x < -2$.

Solução. *Devemos determinar o domínio da f. Considerando o conjunto dos números reais, duas condições devem ser satisfeitas: o denominador deve ser não - nulo e o número que está na raiz, positivo.*

Assim, pelo que foi visto na Seção 2.3, temos

$$x^2 + 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ou } x > -1.$$

Logo, a letra "A" é a correta.

Questão 2.3.23. *(IBADE - Pref. de Porto Velho 2019) A área máxima de um terreno retangular que possui 36 metros de perímetro é:*

(A) $78,50\ m^2$.

(B) $81\ m^2$.

(C) $77,50\ m^2$.

(D) $80,50\ m^2$.

(E) $81,50\ m^2$.

Solução. *Sejam x e y as dimensões do terreno, como ele é retangular, o seu perímetro é*

$$2x + 2y$$

Usando a informação dada, temos

$$2 \cdot (x + y) = 36 \Rightarrow x + y = 18 \Rightarrow y = 18 - x.$$

A área desse retângulo é então $f(x) = x \cdot (18 - x)$, *isto é,*

$$f(x) = -x^2 + 18x.$$

Para obter a área máxima, primeiro vamos encontrar o x_v *e depois calcular o* $f(x_v)$*, que será a nossa área máxima. Temos,*

$$x_v = \frac{-18}{-2} = 9 \; e \; f(9) = -9^2 + 18 \cdot 9 = 81.$$

Portanto, a área máxima desse terreno é $81\ m^2$.

Gabarito: letra "B".

Questão 2.3.24. *(IBADE - Pref. de Manaus - AM 2018) Um automóvel tem seu consumo de combustível para percorrer 100 km estimado pela função* $C(x) = 0{,}02x^2 - 1{,}6x + 42$*, com velocidade de x* km/h*. Sendo assim, qual deve ser a velocidade para que se tenha um consumo mínimo de combustível?*

(A) 55.

(B) 35.

(C) 50.

(D) 40.

Solução. *A velocidade que minimiza o consumo de combustível é dada pelo* x_v *da função. Assim,*

$$x_v = \frac{-(-1{,}6)}{2 \cdot (0{,}02)} = \frac{1{,}6}{0{,}04} \times \frac{100}{100} = \frac{160}{4} = 40.$$

Gabarito: letra "D".

Questão 2.3.25. *(CONSULPAM - Pref. de Apuiarés - CE 2014) A inequação* $x^2 - 2x - 3 > 0$ *admite quantas soluções inteiras?*

(A) Zero.

(B) 4.

(C) 2.

(D) Infinitas.

Solução. Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - 2x - 3 = 0$, obtemos como raízes $x = -1$ e $x = 3$. Então $x^2 - 2x - 3 > 0$ se, e somente se, $x < -1$ ou $x > 3$. Logo, a inequação em questão admite infinitas soluções inteiras. Letra "D".

Questão 2.3.26. *(CONSULPAM - Pref. de Guaraciaba do Norte - CE 2014) Quais os três próximos números da sequência a seguir?*

$$(a_n) = (0,3,8,15,24,35,\cdots)$$

(A) 48, 63 e 80.

(B) 50, 65 e 82.

(C) 49, 64 e 81.

147

(D) 44, 53 e 62.

Solução. *Considere a nova sequência*

$$(b_n) = (3-0{,}8-3{,}15-8{,}24-15{,}35-24{,}\cdots)$$
$$= (3, 5, 7, 9, 11, \dots).$$

Perceba que (b_n) é uma P.A. de razão 2, logo (a_n) é uma P.A. de segunda ordem, disso vem que o seu termo geral é dado por uma função polinomial de grau 2, ou seja, uma função quadrática, com domínio restrito aos naturais. Demonstramos esse fato na Proposição 2.3.15.

Temos que:

$$f(n) = an^2 + bn + c, n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Como $f(0) = 0$, *temos* $c = 0$. *Daí,* $f(n) = an^2 + bn$.

De $f(1) = 3$ *e* $f(2) = 8$, *vem* $3 = a + b$ *e* $8 = 4a + 2b$. *Assim,*

$$3 = a + b \text{ e } 8 = 4a + 2b \Rightarrow b = 3 - a \text{ e } b = 4 - 2a$$
$$\Rightarrow 3 - a = 4 - 2a$$
$$\Rightarrow a = 1.$$

Substituindo em $b = 3 - a$, *obtemos* $b = 2$. *Então, temos*

$$f(n) = n^2 + 2n:$$

Os três próximos elementos são dados por $f(6), f(7)$ *e* $f(8)$. *Assim,*

$$f(6) = 36 + 12 = 48;\ f(7) = 49 + 14 = 63 \text{ e } f(8) = 64 + 16 = 80.$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.3.27. *(CONSULPAM - Pref. de Martinópole - CE 2015) Qual a menor área de um quadrado inscrito noutro quadrado de lado a?*

(A) $a^2/2$.

(B) $a\sqrt{2/2}$.

(C) $3a^2/2$.

(D) $a^2/2$.

148

Solução. *Observe a Figura 3.14. Nela, vamos obter a área do quadrado menor em função de* a*, antes, porém, obteremos o lado do quadrado menor por meio do Teorema de Pitágoras, vide Teorema 2.7.1.*

Sendo l *o lado do quadrado menor, temos*

$$\begin{aligned} l^2 &= (a-x)^2 + x^2 \\ &= a^2 - 2ax + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + a^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$A(x) = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

A área mínima do quadrado menor é dada pelo y_v *de A(x), assim*

$$\begin{aligned} y_v &= \frac{-(4a^2 - 8a^2)}{8} \\ &= \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Gabarito: letra "A".

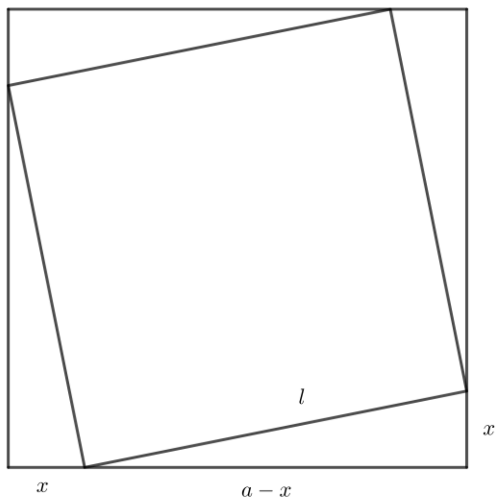


Figura 2.14: Área do quadrado menor em função de a.

Questão 2.3.28. *(CONSULPAM - Pref. de Pentecoste - CE 2014) O conjunto solução da inequação* $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ *é:*

149

(A)$\{ x \in \mathbb{R} | \, x < -1 \; ou \; x > 3\}$.

(B)$\{x \in \mathbb{R} | \, x < -1 \; ou \; x > 3\}$.

(C)$\{x \in \mathbb{R} | \, x \leq -1 \; ou \; x \geq 3\}$.

(D)$\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3\}$.

Solução. *As raízes da equação* $x^2 - 2x - 3 = 0$ *são* $x = -1$ *e* $x = 3$. *Então,* $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ *se, e somente se,* $-1 \leq x \leq 3$. *Letra "D".*

Questão 2.3.29. *(URCA - Pref. de Farias Brito - CE 2014) João fabrica um determinado tipo de adubo, no qual tem um custo de 70 centavos o quilo. Vendendo ao preço de R$ 1; 50 o quilo, João vende 500 quilos de adubo por semana. Para cada centavo que João diminua no preço do quilo, ele vende 25 quilos a mais por semana.*
Para obter um lucro máximo, ele deve diminuir do preço do quilo do adubo em:

(A) 20 centavos.

(B) 30 centavos.

(C) 40 centavos.

(D) 50 centavos.

Solução. *Sendo x o número de centavos a menos cobrado no preço do quilo do adubo, o problema pode ser descrito pela seguinte função:*

$$f(x) = (1{,}50 - 0{,}01x)(500 + 25x) - 0{,}7(500 + 25x),$$

onde $1{,}50 - 0{,}01x$ *é o preço do quilo do adubo,* $500 + 25x$ *a quantidade vendida e* $0{,}7(500 + 25x)$ *o custo da operação.*

Temos,

$$\begin{aligned} f(x) &= 750 + 37{,}5x - 5x - 0{,}25x^2 - 350 - 17{,}5x \\ &= -0{,}25x^2 + 15x + 400. \end{aligned}$$

O número de centavos a ser diminuído no preço do quilo de adubo para o lucro ser máximo é obtido pelo x_v *de* $f(x)$*, assim*

$$x_v = \frac{-15}{-2 \cdot 0{,}25} = 30.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.3.30. *(VUNESP - SEE - SP 2007) Em um exame, foi solicitada a resolução de uma equação do segundo grau. Um dos candidatos copiou errado o termo constante da equação e obteve os valores* 7 *e* -3 *como raízes. Outro candidato cometeu um erro no coeficiente de x e encontrou as raízes* -6 *e* 2. *A equação correta é*

(A) $x^2 - 4x - 12 = 0.$

(B) $x^2 + 4x - 12 = 0.$

(C) $x^2 - 4x + 21 = 0.$

(D) $x^2 - 8x - 12 = 0.$

(E) $x^2 + 8x - 21 = 0.$

Solução. *Seja* $ax^2 + bx + c = 0$ *a equação do segundo grau em questão. Como o primeiro aluno copiou errado o termo constante, devemos ter*

$ax^2 + bx + d = 0$, *d constante.*

As raízes desta última equação são 7 *e* -3, *assim*

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = 7 \ ou \ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -3.$$

Somando essas duas raízes, temos $\frac{-b}{a} = 4, donde \ \frac{b}{a} = -4.$

Não precisamos analisar o erro do outro aluno, só com esta informação dá para se chegar a equação que queremos. Em quais alternativas ocorre $\frac{b}{a} = -4$?

Resposta:

"A" e "C". A equação da letra "C" não possui solução real, pois $\Delta = -68 < 0$. Nos restou a letra "A", que é a correta.

Questão 2.3.31. *(VUNESP - SEE - SP 2011) Considere a Figura 2.15.*

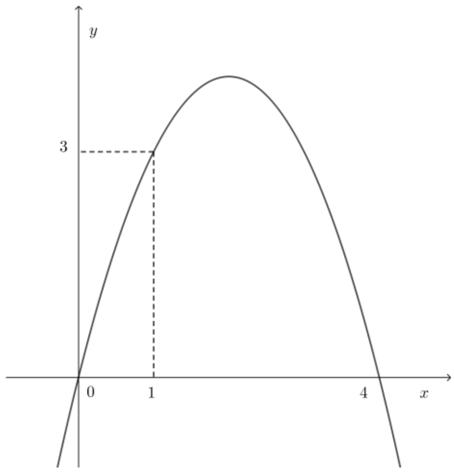


Figura 2.15: Ordenada correspondente à abscissa x = 2 na função quadrática dada.

A ordenada correspondente à abscissa x = 2 é

(A) y = 3, 25.

(B) 3, 5.

(C) 4.

(D) 4, 25.

(E) 4, 75.

Solução. *Pelo gráfico da Figura 3.15, vemos que a função a ser considerada é a quadrática. Seja então* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como a parábola passa pelo ponto (0, 0), então $c = 0$, *assim* $f(x) = ax^2 + bx$.

A f *também passa por (1, 3) e (4, 0). Dessa forma, temos* $a + b = 3$ *e* $16a + 4b = 0$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
a + b = 3 \text{ e } 16a + 4b = 0 \ &\Rightarrow b = 3 - a \text{ e } b = -4a \\
&\Rightarrow 3 - a = -4a \\
&\Rightarrow a = -1
\end{aligned}
$$

Daí, $b = 4$ *e assim* $f(x) = -x^2 + 4x$. *Então sendo x = 2, teremos*

$$f(x) = -2^2 + 4 \cdot 2 = -4 + 8 = 4,$$

ou seja, y = 4.

Gabarito: letra "C".

Questão 2.3.32. *(VUNESP - SEE - SP 2011) A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = x^2 - 1$ *possui valor mínimo*

(A) -3.

(B) -2.

(C) -1.

(D) 0.

(E) 1.

Solução. *A função* $h(x) = x^2$ *é bem conhecida, o seu gráfico é uma parábola, de ncavidade voltada para cima, cujo vértice é a origem. Assim, o seu valor mínimo é* $y = 0$*, logo o valor mínimo de* $f(x) = x^2 - 1$ é $f_{min}(x) = 0 - 1 = -1$. *Letra "C".*

Questão 2.3.33. *(UPA - Pref. de Caririaçu - CE 2012) Qual o valor de p de modo que a função* $f(x) = (2p - 4/3)\,x^2 - 2x + 5$ *admita valor máximo?*

(A) $p < 4/6$.

(B) $p > 4/6$.

(C) $p < 2$.

(D) $p > 0$.

Solução. *Dada uma função quadrática* $h(x) = ax^2 + bx + c$*, foi visto que se* $a > 0$*, a concavidade da parábola é voltada para cima, assim ela admite valor mínimo; se* $a < 0$*, a concavidade da parábola é voltada para baixo, admitindo valor máximo. Neste caso, como queremos que* f *admita valor máximo, devemos ter* $2p - 4/3 < 0$*, donde* $2p < 4 = 3$. *Portanto,* $p < 4 = 6$. *Letra "A".*

Questão 2.3.34. *(UPA - Pref. de Farias Brito - CE 2021) A professora Rita esboçou os gráficos das funções* $f(x) = 3x + 2021$ *e* $g(x) = x^2 - bx + c$*, com b e c reais e* $c \neq 0$*, no plano cartesiano e percebeu que seus gráficos interceptam o eixo das abscissas a mesma quantidade de vezes. Nessas condições, é correto afirmar que* $b^6 \cdot c^{-3}$ *vale:*

(A) 64.

(B) 62.

(C) 61.

(D) 4.

Solução. *Geometricamente, o gráfico de uma função interceptar o eixo OX (ou das abscissas) em um dado ponto, significa que essa função possui uma raiz real nesse mesmo ponto. Sabemos que uma função afim possui uma única raiz real; nesssa situação, como as funções f e g interceptam o eixo OX a mesma quantidade de vezes, então a função quadrática g possui uma única raiz real, onde isso ocorre se, e somente se,* $\Delta = 0$, *vide Observação 1.3.2.* Logo,

$$b^2 - 4c = 0 \Rightarrow b^2 = 4c \Rightarrow (b^2)^3 = (4c)^3 \Rightarrow b^6 = 64c^3 \Rightarrow b^6 = \frac{64}{c^{-3}} \Rightarrow b^6 \cdot c^{-3} = 64$$

Letra "A".

Questão 2.3.35. *(UPA - Pref. de Farias Brito - CE 2021) Os gráficos das funções* $f(x) = mx + n$ *e* $g(x) = ax^2 + bx + c$, *com* m, $a \neq 0$, *estão esboçados na Figura 3.16:*

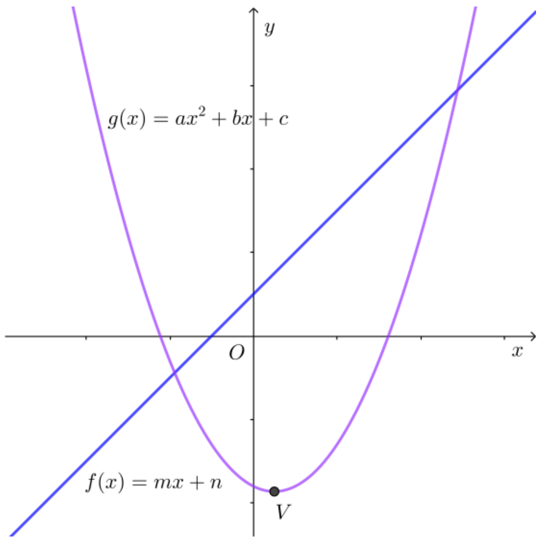


Figura 3.16: Gráficos das funções $f(x) = mx + n$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Se o ponto V, em destaque no gráfico de g, é o vértice da parábola, então é correto afirmar que:

(A) $amnb < 0$.

(B) $ac + mb > 0$.

(C) (mn + a)c > 0.

(D) $am + nb > 0$.

Solução. *Pelos gráficos vemos que f é uma função crescente e a concavidade do gráfico de g está voltada para cima, assim* $a, m > 0$. *Fazendo* $x = 0$ *em f, vem que n > 0. De acordo com a Proposição 1.3.13, se b > 0 (respectivamente b < 0), a parábola toca o eixo OY no ramo crescente (respectivamente decrescente). Neste caso, como o gráfico de g toca o eixo OY no ramo decrescente, teremos que b < 0.*
Logo, amnb < 0. Letra "A".

Questão 2.3.36. *O professor Cipriano deseja construir o gráfico da função* $g(x) = (x-2)^2 - 3$ *partir do gráfico já esboçado da função* $f(x) = x^2 + 1$. *Nessas condições, basta o professor Cipriano pegar o gráfico da função f e deslocar:*

(A) Duas unidades para cima no eixo das ordenadas e três unidades para esquerda no eixo das abscissas.

(B) Duas unidades para a direita no eixo das abscissas e três unidades para baixo no eixo das ordenadas.

(C) Duas unidades para esquerda no eixo das abscissas e quatro unidades para cima no eixo das ordenadas.

(D) Duas unidades para direita no eixo das abscissas e quatro unidades para baixo no eixo das ordenadas.

Solução. *Considerando a função* $h(x) = x^2$*, de acordo com a Proposição 1.3.11 e a Observação 1.3.12, o gráfico de g é obtido fazendo-se a translação do gráfico de h duas unidades para a direita e três unidades para baixo. Como* $f(x) = h(x) + 1$*,então será necessário deslocar mais uma casa para baixo para se obter assim o gráfico de g. Portanto, considerando a função* $f(x) = h(x) + 1$*, o gráfico de g é a translação do gráfico de f duas unidades à direita e quatro uniddes para baixo. Letra "D". Veja a representação gráfica na Figura 2.17:*

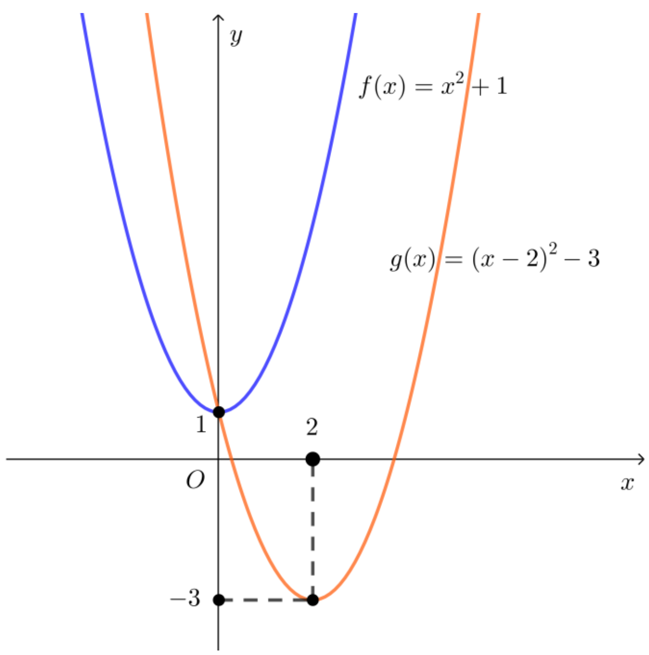


Figura 2.17: Gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = (x-2)^2 - 3$.

Questão 2.3.37. *(URCA - Pref. de Cedro - CE 2014) Com relação à Figura 2.18, podemos afirmar que* $\frac{x}{y}$ *vale:*

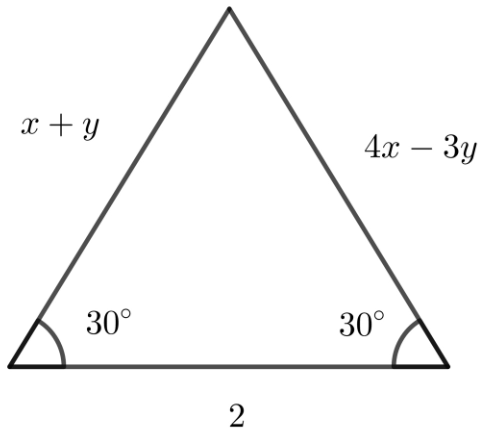


Figura 2.18: Exemplo com Função quadrática aplicada em Geometria Plana.

(A) $4/3$.

(B) $1/2$.

(C) $\sqrt{3}$

(D) $8/21$.

Solução. *Como os ângulos da base desse triângulo são iguais, vamos ter que ele é isósceles, logo as medidas dos lados* $x + y$ *e* $4x - 3y$ *são iguais. Temos*

$$\begin{aligned} x + y = 4x - 3y &\Rightarrow (x+y)^2 = (4x-3y)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2 \\ &\Rightarrow 15x^2 - 26xy + 8y^2 = 0 (\div y^2) \\ &\Rightarrow 15\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 26\frac{x}{y} + 8 = 0 \\ &\Rightarrow 15k^2 - 26k + 8 = 0, \end{aligned}$$

onde $k = \frac{x}{y}$.

Resolvendo-se esta equação do segundo grau, temos

$$\Delta = 196 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 14.$$

Assim,

$$k = \frac{26 \pm 14}{30} = \frac{13 \pm 7}{15} \Rightarrow k = \frac{4}{3} \text{ ou } k = \frac{2}{5}.$$

Se $k = \frac{2}{5}$, *temos* $x = \frac{2}{5}y$. *Assim,*

$$x + y = \frac{7}{5}y \text{ e } 4x - 3y = -\frac{7}{5}y.$$

Com isso, chegamos a uma contradição, ou seja, $\frac{x}{y} \neq \frac{2}{5}$.

Devemos ter $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, *pois fazendo* $x = \frac{4}{3}y$, *obtemos*

$$x + y = \frac{7}{3}y \text{ e } 4x - 3y = \frac{7}{3}y.$$

Gabarito: letra "A".

2.4 Módulo e Função Modular

Questão 2.4.1. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/CE 2013) Considere que, em determinado momento, tenha sido estimado que a altura — h — do nível de água na caixa seja tal que* $|5h - 9| < h$ *Nessa situação, é correto concluir que h é*

(A) superior a 1 m e inferior a 3 m.

(B) superior a 3 m e inferior a 5 m.

(C) superior a 5 m e inferior a 7 m.

(D) superior a 7 m e inferior a 9 m.

(E) superior a 9 m e inferior a 11 m.

Solução. *Basta resolvermos a inequação modular* $|5h - 9| < h$. *Temos*

$$\begin{aligned} |5h - 9| < h &\Leftrightarrow -h < 5h - 9 < h \\ &\Leftrightarrow 5h - 9 > -h \; e \; 5h - 9 < h \\ &\Leftrightarrow h > \frac{3}{2} \; e \; h < \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Reescrevendo, $1{,}5 < h < 2{,}25$.

Analisando os ítens, vemos que o correto é o "A".

Questão 2.4.2. *(URCA - Pref. de Cedro - CE - 2014) Com relação à função* $f(x) = \sqrt{|4x + 3| - 8}$*, assinale a alternativa que contém o seu domínio.*

(A) $\{x \in \mathbb{R} | -11/4 \leq x \leq 5/4.\}$

157

(B) $\{x \in \mathbb{R} | \, x \leq 8 \; ou \; x \geq 5\}$.

(C) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -11/4 \; ou \; x \geq 5/4\}$.

(D) $\{x \in \mathbb{R} | -5/4 \leq x \leq 0 \; ou \; x \geq 11/4\}$.

Solução. *Vamos assumir que o conjunto considerado seja o dos números reais, como ele não admite raiz de número negativo, devemos ter* $|4x + 3| \geq 8$. *Então*

$$\begin{aligned} |4x + 3| \geq 8 &\Leftrightarrow 4x + 3 \geq 8 \; ou \; 4x + 3 \leq -8 \\ &\Leftrightarrow x \geq 5/4 \; ou \; x \leq -11/4. \end{aligned}$$

Gabarito: letra "C".

Questão 2.4.3. *(AOCP - IBC - 2013) Quando* $x \leq 2$*, então* $|x-2|+|3-x|$ *é igual a*

(A) 5.

(B) $2x - 5$.

(C) 2.

(D) $x + 2$.

(E) $-2x + 5$.

Solução. *Se* $x \leq 2$*, então* $x - 2 \leq 0$ *e* $3 - x > 0$.
Assim,

$$|x-2|+|3-x| = 2-x+3-x = -2x+5.$$

Gabarito: letra "E".

Questão 3.4.4. *(AOCP - IBC - 2013) O conjunto solução da equação* $|2x+3| = 7$ *é*

(A) $\{-2, 5\}$

(B) $\{2\}$

(C) $\{-5\}$

(D) $\{-5, 2\}$

(E) $\emptyset$

Solução. *Temos,* $|2x+3| = 7 \Leftrightarrow 2x + 3 = 7$ *ou* $2x + 3 = -7 \Leftrightarrow x = 2$ *ou* $x = -5$.

Logo, o conjunto solução é: $\{-5, 2\}$. *Letra "D".*

2.5 Exponenciação e Função Exponencial

A respeito das Questões 3.5.1 e 3.5.2, julgue-as em verdadeira ou falsa.

Questão 2.5.1. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/AL 2018) O número de Euler é menor que o número racional 2, 72.*

Solução. *Vimos que e = 2, 7182818284 . . . ; 2, 72 pode ser entendido como 2, 7200 . . . ; Então como 2 é maior que 1; 2, 72 é maior que e, o número de Euler. Então este item está correto.*

Questão 2.5.2. (CESPE/CEBRASPE - SEDUC/AL 2018) A função exponencial $g(x) = e^x$, função inversa de $\ln x$, é uma função crescente.

Solução. *Dada uma função exponencial qualquer* $f(x) = a^x$, *ela será crescente quando a > 1 e decrescente se 0 < a < 1, ver Proposição 1.5.16 e Proposição 1.5.16. Em* $g(x) = e^x$, *temos a = e = 2, 71, ou seja, a > 1. Assim, a função* $g(x) = e^x$ *é de fato crescente e o item está correto.*

Questão 2.5.3. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/PA 2006) O modelo matemático que descreve a população de uma colmeia, nos primeiros 21 dias, é expresso pela função*

$$y(t) = Ae^{-0{,}025t}, para\ 0 \leq t \leq 21,$$

em que y(t) é o número total de abelhas operárias e zangões t dias após a formação da colmeia. Se 10.000 abelhas seguem uma abelha rainha para formar uma nova colmeia, se N é o número de abelhas 10 dias após a formação dessa nova colmeia e se $\ln(1{,}28) = 0{,}25$, *então*

(A) $N \leq 7.500$.

(B) $7.500 < N \leq 8.000$.

(C) $8.000 < N \leq 8.500$.

(D) $N > 8.500$.

Solução. *A população inicial de colmeias ocorre quando* $t = 0$, *ou seja,* $y(0) = A$. *Perceba, o enunciado diz que* 10.000 *abelhas seguem uma abelha rainha para formar uma nova colmeia, ou seja, a nova colmeia não foi formada, isso quer dizer que* 10.000 *é a população inicial de abelhas, assim* $A = 10.000$.

Sendo $t = 10$ *e* $N = y(10)$, *vamos ter*

$$N = 10000 \cdot e^{-0,025 \cdot 10} = 10000 \cdot e^{-0,25}.$$

A questão nos dá a informação: $ln(1,28) = 0,25$. *Daí,*

$$-ln(1,28) = -0,25 \Rightarrow e^{-ln(1,28)} = e^{-0,25}$$
$$\Rightarrow e^{ln[(1,28)^{-1}]} = e^{-0,25}$$
$$\Rightarrow e^{-0,25} = \frac{1}{1,28}.$$

Temos,

$$N = 10000 \cdot \frac{1}{1,28} \times \frac{100}{100} = \frac{1000000}{128} = 7812,5.$$

Logo, $7.500 < N \leq 8.000$. *Letra "B".*

Questão 2.5.4. (*VUNESP - SEE - SP 2007) Numa cidade com cerca de 5 milhões de habitantes, realiza-se uma pesquisa em laboratório em que uma cultura de bactérias é mantida com alimento ilimitado e sem inimigos. Sabendo-se que o número de bactérias presentes num certo instante t0 é igual a 100 e que esse número dobra de valor a cada hora transcorrida, o primeiro instante (em horas), após* t_0, *no qual a população de bactérias ultrapassará a população da cidade é*

(A) menor ou igual a 10 horas.

(B) maior do que 10 horas, porém, menor ou igual a 20 horas.

(C) maior do que 20 horas, porém, menor ou igual a 24 horas.

(D) maior do que 24 horas, porém, menor ou igual a 48 horas.

(E) maior do que 48 horas.

Solução. *O número de bactérias pode ser descrito pela função exponencial*

$$P(t) = 100 \cdot 2^t.$$

A montagem desta lei é bem simples de se entender, 100 representa a população inicial de bactérias, fazendo t = 0 na função dada. Como essa população dobra a cada hora, então $P(t) = 100 \cdot 2^t$.
O problema pede para encontrar t tal que $P(t) \geq 5000000$. Assim,

$$100 \cdot 2^t \geq 5000000 \Rightarrow 2^t \geq 50000.$$

Temos $2^{10} = 1024 < 50000$, então não é a letra "A".
Agora,

$$\begin{aligned} 2^{20} = 2^{2\cdot 10} &= (2^{10})^2 \\ &= (1024)^2 \\ &= 1048576 > 50000. \end{aligned}$$

Logo, o número de bactérias ultrapassa a população da cidade entre os instantes $t = 10$ e $t = 20$. Letra "B".

Questão 2.5.5. *(UPA - Pref. de Caririaçu - CE 2012) O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $B(t) =$*

$1000 \cdot 2^{0,5t}$. *Quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 16.000 bactérias?*

(A) 2 anos.

(B) 4 anos.

(C) 12 anos.

(D) 8 anos.

Solução. *Devemos determinar t de modo que B(t) = 16000. Temos,*

$$\begin{aligned} 16000 = 1000 \cdot 2^{0,5t} &\Rightarrow 2^{0,5 \cdot t} = 16 = 2^4 \\ &\Rightarrow 0,5t = 4 \\ &\Rightarrow t = 8. \end{aligned}$$

Gabarito: letra "D".

Questão 2.5.6. *(UEPB - Estado da Paraíba - PB - 2005) Sendo S_1 o conjunto solução de $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$ e S_2 o conjunto solução de $\frac{1}{9} < 9^{x-1} < 3^x$, $S_1 \cap S_2$ é igual a:*

(A) $0 < x \leq 2.$

(B) $-1 < x < 2.$

(C) $-1 < x \leq 2.$

(D) $0 \leq x < 2.$

(E) $0 < x < 2.$

Solução. *Note que:*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} = 3^{x-x^2} \; e \; \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^{-2}.$$

Então,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 3^{x-x^2} > 3^{-2}$$
$$\Leftrightarrow x - x^2 > -2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Daí,

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 2\}.$$

Da segunda inequação, temos

$$\frac{1}{9} < 9^{x-1} < 3^x \Leftrightarrow 3^{-2} < 3^{2x-2} < 3^x$$
$$\Leftrightarrow 3^{2x-2} > 3^{-2} \; e \; 3^{2x-2} < 3^x$$
$$\Leftrightarrow 2x - 2 > -2 \; e \; 2x - 2 < x$$
$$\Leftrightarrow x > 0 \; e \; x < 2.$$

Disso,

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 < x < 2\}.$$

Logo, $S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 < x < 2\}$.

Gabarito: letra "E".

Questão 2.5.7. *(CESGRANRIO - SEEC - RN - 2011) Se* $(a_n)n \in \mathbb{N}$ *é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é igual a 125 e cuja razão é igual a* $1/25$*, então, a sequência definida por* $b_n = \log_5 a_n$ é *uma progressão*

(A) Aritmética, cujo primeiro termo é igual a 3, e cuja razão é igual a -2.

(B) Aritmética, cujo primeiro termo é 25, e cuja razão é igual a -5.

(C) Geométrica, cujo primeiro termo é igual a 25, e cuja razão é igual a $1/2$.

(D) Geométrica, cujo primeiro termo é igual a 3, e cuja razão é igual -2.

(E) Geométrica, cujo primeiro termo é 25, e cuja razão é igual a -5.

Solução. *A lei que nos permite determinar qualquer termo da P.G. de primeiro termo 125 e razão* $1/25$ *é*
$f(x) = 125 \cdot (1/25)^n$,

em que $n \geq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *ou seja,* $a_n = 125 \cdot (1/25)^n, n \geq 0$.

Temos agora,

$$\begin{aligned} b_n = \log_5 a_n = \log_5 125 \cdot (1/25)^n &= \log_5 (5^3 \cdot 5^{-2n}) \\ &= \log_5 5^3 + \log_5 5^{-2n} \\ &= 3 - 2n; \end{aligned}$$

isto é, $b_n = -2n + 3$.
Logo, a sequência definida por b_n *é uma progressão artimética de primeiro termo 3 e razão* -2. *Letra "A".*

A Figura 3.19 é para a Questão 3.5.8.

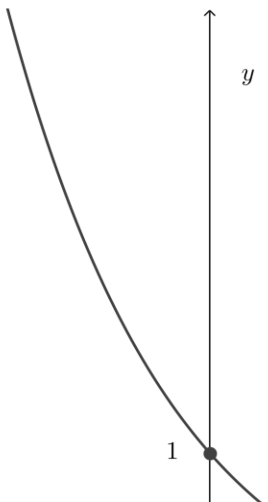


Figura 3.19: Gráfico da função $f(x) = 10^{\beta x}, (\beta \in \mathbb{R}^*)$.

Questão 2.5.8. *(CESGRANRIO - Pref. de Salvador - BA - 2010) Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = 10^{\beta x}, (\beta \in \mathbb{R}^*)$*, representada pelo gráfico acima. O valor de* $log(f(6))$ *é:*

(A) -12.

(B) -6.

(C) -3.

(D) 2.

(E) 6.

Solução. *A função exponencial em questão passa pelo ponto* $(2, 0, 1)$*, então*

$$f(2) = 0{,}1.$$

Temos

$$\begin{aligned} 0{,}1 = 2^{2\beta} &\Rightarrow log\, 0{,}1 = log\, 10^{2\beta} \\ &\Rightarrow log \frac{10}{10^2} = 2\beta \cdot log\, 10 \\ &\Rightarrow log\, 10 - log\, 10^2 = 2\beta \\ &\Rightarrow 2\beta = 1 - 2 = -1 \\ &\Rightarrow \beta = -1/2. \end{aligned}$$

Daí, $f(x) = 10^{-x/2}$.

Agora, $f(6) = 10^{-6/2} = 10^{-3}$.

Logo, $log\ f(6) = log\ 10^{-3} = -3$. *Letra "C".*

Questão 2.5.9. (*AOCP - IBC - 2013) O primeiro termo de uma progressão geométrica é 3. Sabendo que essa sequência possui 5 termos, e o último é 48, qual é a razão?*

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

(E) 6.

Solução. *Seja* $f(n) = 3 \cdot q^n, 0 \leq n \leq 4, n \in \mathbb{N}$ *a função exponencial que está por trás desta P.G. O primeiro termo é obtido fazendo* $n = 0$ *em f(n) e o último,* $n = 4$ *em* $f(n)$. *Então* $f(4) = 3 \cdot q^4 \Rightarrow 3 \cdot q^4 = 48 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = 2$. *Logo, a razão é 2.*

Letra "A".

A Figura 2.20 é para a Questão 2.5.10.

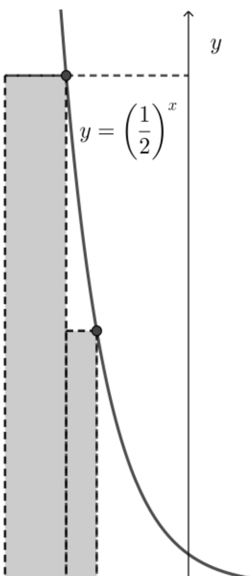


Figura 2.20: Curva que representa a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Questão 2.5.10. *(FCC - SEDUC - MA - 2005) A curva desenhada no plano cartesiano representa o gráfico de* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. *A área da parte pintada é 40 unidades de área. O valor de b é igual a:*

(A) 2.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 8.

(E) 16.

Solução. *Seja A a área da parte pintada, vamos dividi-la em duas outras áreas; a primeira, que chamaremos de* A_1, *será a área do retângulo menor, enquanto a segunda,* A_2, *será a área do retângulo maior.*

As ordenadas de $x = -3$ *e* $x = -4$ *pela função* f *são, respectivamente,*

$$f(-3) = 8 \text{ e } f(-4) = 16.$$

Assim, a área do retângulo menor é $A_1 = 1 \times 8 = 8$ *u.a.*

Como $A = A_1 + A_2$, *tem-se* $A_2 = 32$ $u.a$*:*

$f(-4) = 16$ *nos diz que a altura do retângulo maior é 16, então sendo* $-4 - (-b)$ *a sua base, temos*

$A_2 = (-4 + b) \cdot 16 \Rightarrow 32 = (-4 + b) \cdot 16 \Rightarrow -4 + b = 2 \Rightarrow b = 6.$

Gabarito: letra "C".

Questão 2.5.11. *(FGV - SEDUC - AM - 2014) Uma população de bactérias cresce exponencialmente, de forma que o número P de bactérias t horas após o instante inicial de observação do fenômeno pode ser modelado pela função*

$$P(t) = 15 \times 2^{t+2}.$$

De acordo com esse modelo, a cada hora, a população de bactérias

(A) Cresce 20%.

(B) Cresce 50%.

(C) Dobra.

(D) Triplica.

(E) Quadruplica.

Solução. *Primeiro vamos determinar a população inicial de bactérias, obtida fazendo* $t = 0$ *em* $P(t)$.

Temos $P(0) = 15 \cdot 2^{0+2} = 60.$

Após 1 hora, $P(1) = 15 \cdot 2^{1+2} = 120.$

Após 2 horas, $P(t) = 15 \cdot 2^{2+2} = 240.$

Note que a cada hora, a população dobra de tamanho. Logo, devemos marcar a letra "C".

2.6 Logaritmo e Função Logarítmica

Questão 2.6.1. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/AM 2011) Se* $f(x) = \log_2 x$ *e* $g(x) = \log_{10} x$*, então* $f(x) \cdot ln\ 10 = g(x) \cdot ln\ 2$*, em que* $ln\ k$ *denota o logaritmo neperiano de* k.

Solução. *Dizer que $A = B$ é o mesmo que afirmar que $A = C$ e $B = C$, então vamos analisar cada lado da igualdade separadamente.*

Temos que:

$$f(x) \cdot ln\,10 = log_2 x \cdot ln(2 \cdot 5) = log_2 x \cdot (ln\,2 + ln\,5).$$

Também,

$$\begin{aligned} g(x) \cdot ln\,2 = log_{10} x \cdot ln\,2 &= \left(\frac{log_2 x}{log_2 10}\right) \cdot ln\,2 \\ &= \left(\frac{log_2 x}{log_2(2 \cdot 5)}\right) \cdot ln\,2 \\ &= \left(\frac{log_2 x}{log_2 2 + log_2 5}\right) \cdot ln\,2 \\ &= \left(\frac{log_2 x}{1 + log_2 5}\right) \cdot ln\,2 \\ &= log_2 x \cdot \left(\frac{ln\,2}{1 + log_2 5}\right). \end{aligned}$$

Como os dois membros nos levam a resultados diferentes, então a igualdade é falsa. Logo, o ítem está errado.

Questão 2.6.2. *(CESPE/CEBRASPE - SEDUC/AL 2018) Experimentos mostram que a velocidade de queda de um paraquedista é expressa, em metros por segundos, por uma função da forma $v(t) = 5\frac{1+ce^{-at}}{1-ce^{at}}$, em que a e c são constantes positivas e $t \geq 0$ é o tempo de queda. Se $a = 4$ e $c = \frac{1}{3}$, a velocidade de $7\ m/s$ do paraquedista será atingida quando t for igual a*

(A) $ln\,\sqrt[4]{2}s.$

(B) $[\ln(2)]^4 s$

(C) $\ln(2^4)s$.

$(D)\ -\ln\left(\frac{1}{2}\right)s.$

(E) 0 s.

Solução. *Fazendo* $a = 4$, $c = 1/3$ *e* $v(t) = 7$ *na equação dada, vamos ter*

$$7 = 5\cdot\left[\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-4t}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-4t}}\right] \Rightarrow \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-4t}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-4t}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5+\frac{5}{3}\cdot e^{-4t} = 7-\frac{7}{3}\cdot e^{-4t}$$

$$\Rightarrow 4\cdot e^{-4t} = 2$$

$$\Rightarrow e^{-4t} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln e^{-4t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -4t = -\ln 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{4}.$$

Este resultado é diferente dos apresentados nos ítens, porém é equivalente a um deles. Na hora da prova, como não se pode usar calculadora, a alternativa é ir por eliminação. Vejamos, $\frac{\ln 2}{4}$ *é igual a 0? Óbvio que não! Então não é a letra "E".*

$\frac{\ln 2}{4}$ *é igual a* $-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$*? Também não, pois*

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \neq \frac{\ln 2}{4}.$$

Seguindo o raciocínio, sobra o ítem "A". Conferindo os resultados com uma calculadora, teremos:

$$\frac{\ln 2}{4} \cong 0{,}1732867951 \; e \; \ln \sqrt[4]{2} \cong 0{,}1732867951.$$

Texto para a Questão 2.6.3.

A modelagem matemática pode ser considerada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem da matemática.

Segundo Bassanezi, ela consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando-se suas soluções na linguagem do mundo real.

Entre os modelos que podem ser utilizados para resolver problemas relacionados à estimativa do crescimento de determinada população, estão aqueles que envolvem funções exponenciais e logarítmicas, tal qual o apresentado a seguir, em que a população $P(t)$ em determinada região de um país é expressa em termos de t anos a partir de 2005, ou seja, $t = 0$ corresponde ao ano 2005, $t = 1$, ao ano 2006 etc.

Suponha que

$$\frac{200000}{1 + 0{,}25 \cdot e^{kt}},$$

em que k é um número real.

Questão 2.6.3. (*CESPE/CEBRASPE - SEDUC/MT 2007) Considerando-se as informações do texto e sabendo-se que a população modelada por $P(t)$, em 2006, era igual a 120:000 habitantes, então o valor de k na expressão apresentada é igual a*

$(A)\,\dfrac{ln\,3}{ln\,2}.$

$(B)\,\dfrac{2\,ln\,2}{3\,ln\,3}.$

(C) $3\ln 3 - \ln 2.$

(D) $3 \ln 2 - \ln 3.$

Solução. *Em 2006,* $t = 1$*. Assim,* $P(t) = 120000$*. Substituindo esses valores na expressão de* $P(t)$*, temos*

$$120000 = \frac{200000}{1 + 0{,}25 \cdot e^{k \cdot 1}} \Rightarrow 120000 + 30000 \cdot e^{k} = 200000$$
$$\Rightarrow 30000 \cdot e^{k} = 80000$$
$$\Rightarrow e^{k} = \frac{8}{3}$$
$$\Rightarrow \ln e^{k} = \ln\left(\frac{8}{3}\right)$$
$$\Rightarrow k = \ln 8 - \ln 3 = \ln 2^{3} - \ln 3$$
$$\Rightarrow k = 3 \cdot \ln 2 - \ln 3.$$

Portanto, o gabarito correto é a letra "D".

Questão 2.6.4. *(UECE - SEDUC/CE 2018) Para todo número natural* $n \geq 2$*, o valor numérico de* $log_n\left[log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right]$ *é*

$(A)\frac{1}{3}$

(B)3

(C)-3

$(D)-\frac{1}{3}$.

Solução. *Temos,* $log_n\left[log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right] = \log_n[\log_n n^{1/3}] = \log_n \frac{1}{n^3} = \log_n n^{-3} = -3$

Gabarito: letra "C".

Questão 2.6.5. *(IBADE - SEDUC/PB 2017) Encontre o conjunto solução da inequação logarítmica a seguir:*

$$\log_7(x) + \log_{49}(x+1)^2 + \log_{1/7} 6 = 0$$

(A) $S = \{2, 3\}$.

(B) $S = \{-6, 1\}$.

(C) $S = \{2\}$.

(D) $S = \{3\}$.

(E) $S = \{-3, 2\}$.

Solução. *Condição de existência*: $x > 0$ *e* $x + 1 > 0$, *donde* $x > 0$.
Faremos uma mudança de base em todos os logaritmos para a base 7.
Temos que:

$$\begin{aligned} log_{49}(x+1)^2 = \frac{log_7(x+1)^2}{log_7 49} &= \frac{log_7(x+1)^2}{log_7 7^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot log_7(x+1)^2 \\ &= log_7[(x+1)^2]^{1/2} \\ &= log_7(x+1). \end{aligned}$$

Também,

$$log_{1/7} 6 = \frac{log_7 6}{log_7 7^{-1}} = -log_7 6.$$

Assim,

$$\begin{aligned} log_7 x + log_{49}(x+1)^2 + log_{1/7} 6 = 0 &\Rightarrow log_7 x + log_7(x+1) - log_7 6 = 0 \\ &\Rightarrow log_7\left(\frac{x \cdot (x+1)}{6}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x}{6} = 7^0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0.$$

As raízes desta equação são $x = -3$ *e* $x = 2$*. Como* $x > 0$ *pela condição de existência,* $x = 2$ *é a única solução da equação logarítmica dada. Letra "C".*

Questão 2.6.6. *(IBADE - Pref. de Vitória - ES 2019) Seja a equação* $x^2 - 4x + \log M = 0$*. O valor de* M *para que admita duas 0raízes de sinais contrários é:*

(A) $0 < M < 2$.

(B) $0 < M < 1$.

(C) $-1 < M < 0$.

(D) $1 < M < 3$.

(E) $1 < M < 2$.

Solução. *Pela condição de existência de logaritmo,* $M > 0$.
Resolvendo a equação do segundo grau, temos

$$\Delta = 16 - 4 \cdot log\, M = 4 \cdot (4 - log\, M).$$

Daí,

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - log\, M}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - log\, M}\,.$$

Os sinais destas raízes serem contrários quer dizer que o seu produto é negativo, assim

$$\left(2+\sqrt{4-log\,M}\right)\left(2-\sqrt{4-log\,M}\right)<0 \Leftrightarrow 4-(4-log\,M)<0$$
$$\Leftrightarrow log\,M<0$$
$$\Leftrightarrow M<10^0=1.$$

Logo, $0 < M < 1$. *Letra "B".*

Questão 2.6.7. *(IBADE - Pref. de Vitória - ES 2019) Sofia investiu* $R\$\,900{,}00$ *em uma aplicação a juros compostos com taxa de* $3\%\ a.m.$ *E um outro valor de* $R\$\,1000{,}00$, *também a juros compostos com uma taxa de* 2% *a.m. Para que os montantes se igualem serão necessários, no mínimo:*

Dados: $\log(1{,}1111)=0{,}045$ *e* $\log(1{,}0098)=0{,}004$.

(A) 8 *meses.*

(B) 9 *meses.*

(C) 10 *meses.*

(D) 11 *meses.*

(E) 12 *meses.*

Solução. *Temos que:*

$$M_1=900\cdot(1{,}03)^3 \ e\ M_2=1000\cdot(1{,}02)^n,$$

onde n é o prazo que iguala os dois montantes.

Assim,

$$M_1=M_2 \Rightarrow 900\cdot(1{,}03)^n=1000\cdot(1{,}02)^n$$

$$\Rightarrow \frac{(1{,}03)^n}{(1{,}02)^n} = \frac{1000}{900}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1{,}03}{1{,}02}\right)^n = 1{,}1111$$
$$\Rightarrow (1{,}0098)^n = 1{,}1111$$
$$\Rightarrow log(1{,}0098)^n = log(1{,}1111)$$
$$\Rightarrow n \cdot log(1{,}0098) = log(1{,}1111)$$
$$\Rightarrow n = \frac{log(1{,}1111)}{log(1{,}0098)} = \frac{0{,}045}{0{,}004} \times \frac{1000}{1000} = \frac{45}{4}$$
$$\Rightarrow n = 11{,}25.$$

Como o enunciador quer saber o tempo mínimo para os montantes se igualarem, devemos ter $n = 12$ *meses. Letra "E".*

Questão 2.6.8. *(VUNESP - SEE - SP 2007) A sequência de números (a, ½, b, c) forma uma progressão geométrica de razão* $1/10$. *O valor da expressão* $\log c - \log a$ *é*

(A) 10^{-3}.

(B) 1/3.

(C) -3.

(D) 3.

(E) 10^3.

Solução. *Seja* $f(n) = a \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n, n \geq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *a função exponencial, de domínio natural, que determina qualquer termo da sequência dada.*

Temos que:
$f(0) = a$ $(primeiro\ termo)$;

$f(1) = a \cdot \frac{1}{10}$, *ou seja,* $\frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{10}$ *donde* $a = 5$;

$f(2) = 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{20}$, *ou seja,* $b = \frac{1}{20}$;

$f(3) = 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 5 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{200}$, *isto é,* $c = \frac{1}{200}$.

Logo,

$$\log c - \log a = \log \frac{1}{200} - \log 5 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3.$$

Gabarito: letra "C".

Questão 2.6.9. *(VUNESP - SEE - SP 2007) De acordo com a lei de resfriamento de Newton, a diferença de temperatura* D, *entre um objeto aquecido e o meio que o contém, decresce a uma taxa de variação proporcional a essa diferença. A lei se traduz matematicamente da seguinte forma: se* $D(t)$ *representa a diferença de temperatura num instante* t *e* $D_0 = D(0)$, *então* $D(t) = D_0 e^{-\alpha t}$*_t, onde α é uma constante que depende do material de que é constituída a superfície do objeto. Numa cozinha com temperatura ambiente constante igual a 30°C, uma panela com água fervia à temperatura 100°C. Após 5 minutos de o fogo ter sido apagado, a temperatura da água foi de 60°C. O valor da constante α é:*

$(A)\ \frac{1}{5} ln\left(\frac{4}{3}\right).$

$(B) \frac{1}{5} ln\left(\frac{5}{3}\right).$

$(C)\ \frac{1}{5} ln(2).$

$(D)\ \frac{1}{5} ln\left(\frac{7}{3}\right).$

$(E)\ \frac{1}{5} ln\left(\frac{8}{3}\right).$

Solução. *Temos que:* $D(t) = D_0 e^{-\alpha t}$, *onde* $D_0 = D(0)$*.*

O problema nos dá a informação de que a temperatura do ambiente é de 30°C e a panela sai do fogo com 100°C, resultando numa diferença de 70°C.

Perceba que o instante em que a panela sai do fogo é $t = 0$, *assim* $D(0) = 70°C$, *ou seja,* $D_0 = 70°C$.

Assim,

$$D(t) = 70e^{-\alpha t}.$$

Após 5 minutos, a temperatura passa a ser 60°C, isto é, no instante $t = 5$, *a diferença entre a temperatura da água e a temperatura do ambiente é de 30°C, o que nos dá* $D(5) = 30°C$. *Temos,*

$$\begin{aligned} 30 = 70 \cdot e^{-5\alpha} \Rightarrow e^{-5\alpha} = \frac{3}{7} \Rightarrow \ln e^{-5\alpha} = \ln\left(\frac{3}{7}\right) & \\ \Rightarrow -5\alpha \cdot \ln e = \ln\left(\frac{3}{7}\right) & \\ \Rightarrow -5\alpha = \ln\left(\frac{3}{7}\right) & \\ \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{3}{7}\right) & \\ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{7}{3}\right). & \end{aligned}$$

Gabarito: letra "D".

Questão 2.6.10. *(VUNESP - SEE - SP 2011) O valor de* $log_{\frac{1}{2}} 64$ é: *é:*

(A) -6.

(B) -4.

(C) -2.

(D) 8.

(E) 32.

Solução. *Vamos fazer uma mudança de base no logaritmo em questão, temos*

$$log_{\frac{1}{2}} 64 = \frac{log_2 64}{log_2 \frac{1}{2}} = \frac{log_2 2^6}{log_2 2^{-1}} = \frac{6}{-1} = -6$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.6.11. *(VUNESP - SEE - SP 2012) Um professor que queira ensinar aos seus alunos a calcular o valor de log4 3 com uma calculadora científica, contendo as funções logaritmo na base 10 e na base e, precisará, por exemplo, explicar para os alunos que:*

$(A)\ log_4 3 = ln(3) \cdot ln(4)$.

$(B)\ log_4 3 = \frac{1}{ln(4 \cdot 2)}$.

$(C)\ log_4 3 = \frac{ln\, 3}{ln\, 4}$.

$(D)\ log_4 3 = log_4 2 + log_4 2$.

$(E)\ log_4 3 = co\ log \frac{4}{3}$.

Solução. *É uma questão sobre mudança de base de logaritmo, então basta saber esta propriedade. Vamos mudar para a base e, assim* $\log_4 3 = \frac{\ln 3}{\ln 4}$. *Letra "C".*

Questão 2.6.12. *(VUNESP - SEE - SP 2012) Em uma sala do 1° ano do Ensino Médio, após abordar as propriedades dos logaritmos, um professor pediu para os alunos resolverem a seguinte situação, proposta no material didático: a população N de um determinado município cresce exponencialmente desde a sua fundação, há* 20 anos, *de* *acordo com a expressão* $N = 3000 \cdot 10^{0,1t}$, *sendo* t *em anos. Calcule depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingirá* 600000.

A fim de facilitar para os alunos que não tinham uma calculadora científica em mãos, o professor complementou com a seguinte informação: utilize $\log 2 \approx 0{,}3$. *A resposta correta, em anos, esperada por esse professor é:*

(A) 23.

(B) 24.

(C) 25.

(D) 26.

(E) 27.

Solução. *Temos que:* $N = 3000 \cdot 10^{0,1t}$. *Queremos saber o valor de* t *tal que* $N = 600000$. *Temos,*

$$600000 = 3000 \cdot 10^{0,1t} \Rightarrow 10^{0,1t} = 200 \Rightarrow log\,10^{0,1t} = log\,200$$
$$\Rightarrow 0{,}1t = 2{,}3$$
$$\Rightarrow t = \frac{2{,}3}{0{,}1}$$
$$= t = 23.$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.6.13. *(UPA – Pref. de Cedro – PE 2011) A sigla PH significa Potencial Hidrogeniônico, e consiste num índice que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer. Os valores de PH variam de 0 a 14, valores abaixo de 0 e acima de 14 são possíveis, porém muitos raros e não podem ser medidos com as sondas normais. As substancias que possuem valores de PH 0 a 7, são consideradas ácidas, valores em torno de 7 são neutras e valores acima de 7 são denominadas básicas ou alcalinas. O PH de uma substancia pode varias de acordo com sua composição, concentração de sais, metais, ácidos, bases e substâncias orgânicas e da temperatura. O PH de uma solução é* *o inverso do logaritmo decimal da concentração de H30+. Qual é o PH de uma solução cuja concentração de H30+ é 0,01 mol/l?*

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

(E) 2,5.

Solução. *O inverso do logaritmo de N na base a é o logaritmo* $-\log_a N$*. Neste caso,*

$$PH = -\log(0{,}01) = -\log 10^{-2} = -(-2) = 2.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.6.14. *(UPA – Pref. de Caririaçu – CE 2012) O domínio da função* $f(x) = e^{\ln(x^3+3x-2)}$ *é:*

(A) $(-\infty, 2) \cup (-1, +\infty)$.

(B) $(0, +\infty)$.

(C) $(-2, -1)$.

(D) $\mathbb{R}$.

Solução. *Temos que:*

$$f(x) = x^3 + 2x - 2.$$

Esta função é válida para qualquer número real. Letra "D".

Questão 2.6.15. *(CESGRANRIO – Pref. de Manaus – AM – 2014) Suponha que, após ingerir uma quantidade de bebida alcóolica, o nível de álcool no sangue de uma determinada pessoa decresça de acordo com a fórmula* $A(t) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$*, onde t representa o tempo, em horas, a partir do momento em que a bebida é ingerida. Sabe-se que o limite* *permitido de álcool no sangue de um motorista é 0,8 gramas por litro. Considerando log2 = 0,3, o tempo que essa pessoa deve esperar para dirigir com segurança é:*

(A) 40 min.

(B) 1 h.

(C) 1 h 20 min.

(D) 1 h 40 min.

(E) 2 h.

Solução. *Como o limite de álcool no sangue é 0,8 gramas por litro, devemos calcular t de modo que A(t) = 0,8. Temos,*

$$0{,}8 = 2 \cdot (1/2)^t \Rightarrow \log 0{,}8 = \log[2 \cdot (1/2)^t] = \log 2 + \log 2^{-t}$$

$$\Rightarrow \log \frac{2^3}{10} = \log 2 - t \cdot \log 2$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \log 2 - \log 10 = \log 2 - t \cdot \log 2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log 2 - \log 10 = -t \cdot \log 2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 0{,}3 - 1 = -t \cdot 0{,}3$$

$$\Rightarrow t = \frac{-0{,}4}{-0{,}3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow t = 1 + \frac{1}{3}.$$

Então o tempo gasto é de 1 hora mais 1/3 de hora, ou seja, 1 hora e 20 minutos.

Letra "C".

Questão 2.6.16. *(CETREDE – Pref. de Juazeiro do Norte – CE – 2019) Sejam* $a^2 + b^2 = 214 \cdot ab$*, m =* $log_5 2$ *e n =* $log_5 3$*. Qual é o valor de* $log_5 \frac{(a+b)^2}{2ab}$ *em função de m e n?*

(A) 3mn.

(B) 3m + 2n.

(C) m + n.

(D) 3m · 2n.

(E) 2m + 3n.

Solução. *Temos:*

$$a^2 + b^2 = 214 \cdot ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 214ab + 2ab = 216ab$$

$$\Rightarrow \ (a+b)^2 = 108 \cdot 2ab$$

$$\Rightarrow \ 108 \ = \ \frac{(a+b)^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow \log_5 108 = \log_5 \frac{(a+b)^2}{2ab}$$

Então basta determinar $log_5 108$ em função de m e n. Assim,

$$log_5 108 = log_5 2^2 \cdot 3^3 = log_5 2^2 + log_5 3^3$$

$$= 2\, log_5 2 + 3\, log_5 3$$

$$= 2m + 3n.$$

Gabarito: letra "E".

A Figura 2.21 é para a Questão 2.6.17.

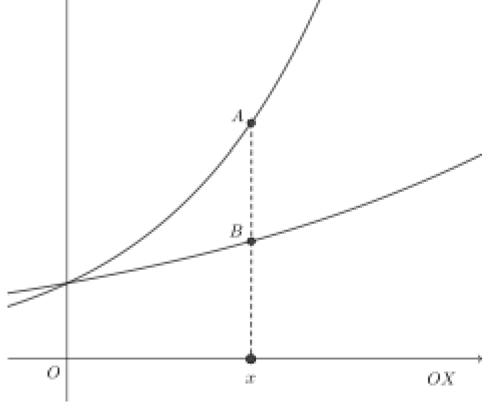


Figura 2.21: Gráficos das funções $y = 1{,}6^x$ e $y = 1{,}2^x$.

Questão 2.6.17. *(FGV – SEE – SP – 2013) A Figura 2.21 mostra uma parte dos gráficos das funções* $y = 1{,}6^x$ *e* $y = 1{,}2^x$*. Para certo valor de x, a ordenada do ponto A, sobre o gráfico da primeira função, é o dobro da ordenada de B, sobre o da segunda. Considerando log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, esse valor de x é,*

(A) 2,12.

(B) 2,28.

(C) 2,41.

(D) 2,50.

(E) 2,58.

Solução. *Note que:* $1{,}6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ *e* $1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Podemos escrever

$$f(x) = \left(\frac{8}{5}\right)^x \text{ e } g(x) = \left(\frac{6}{5}\right)^x.$$

O problema nos dá as informações

$$B = (x, g(x)) \text{ e } A = (x, f(x)),$$

Onde $f(x) = 2g(x)$.

De $f(x) = 2g(x)$*, tem-se*

$$\left(\frac{8}{5}\right)^x = 2\left(\frac{6}{5}\right)^x \Rightarrow \log\left(\frac{8}{5}\right)^x = \log\left[2\left(\frac{6}{5}\right)^x\right] = \log 2 + \log\left(\frac{6}{5}\right)^x$$

$$\Rightarrow x \cdot \log\left(\frac{8}{5}\right) = \log 2 + x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 8 - x \cdot \log 5 = \log 2 + x \cdot \log 6 - x \cdot \log 5$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 2^3 = \log 2 + x \cdot \log(2 \cdot 3)$$

$$\Rightarrow\ 3x \cdot \log 2 = \log 2 + x \cdot \log 2 + x \cdot \log 3$$

$$\Rightarrow\ 2x \cdot \log 2 - x \cdot \log 3 = \log 2$$

$$\Rightarrow\ x \cdot (2\log 2 - \log 3) = \log 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 2}{2\log 2 - \log 3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{0{,}301}{2 \cdot 0{,}301 - 0{,}477} = \frac{301}{125}$$

$$\Rightarrow x = 2{,}408 \approx 2{,}41$$

Letra "C".

Questão 2.6.18. *(FGV – SEE – SP – 2013) Considere a desigualdade*

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0$$

O menor valor inteiro de x que satisfaz essa desigualdade é:

(A) $2013^{2014} + 1$

(B) $2014^{2013} + 1$.

(C) $2014^{2015} + 1$.

(D) $2015^{2014} + 1$.

(E) 2016.

Solução. *Temos,*

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0 \Rightarrow \log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > \log_{2013} 2013^0$$

$$\Rightarrow \log_{2014}(\log_{2015} x) > 1$$

$$\Rightarrow \log_{2014}\ (\log_{2015}\ x) > \log_{2014}\ 2014^1$$

$$\Rightarrow \log_{2015}\ x > 2014$$

$$\Rightarrow \log_{2015}\ x > \log_{2015}\ 2015^{2014}$$

$$\Rightarrow x > 2015^{2014}.$$

Como essa desigualdade é estrita e deseja-se saber o primeiro valor inteiro de x a satisfazer a desigualdade inicial, devemos ter $2015^{2014}+1$. *Letra "D".*

Questão 2.6.19. *(FGV – SEDUC – AM – 2014) Seja f(x) = log(x) a função logaritmo decimal (base 10). Sabe-se que* $f(a^2b^2) = 6$ *e f(ab³) = 5. O valor de* $f\left(\frac{a}{b}\right)$ *é*

(A) 1/2.

(B) 1.

(C) 6/5.

(D) 3/2.

(E) 2.

Solução. *De* $f(a^2b^2) = 6$, *tem-se*

$$\log\,(a^2b^2) = 6 \;\Rightarrow \log\,a^2 + \log\,b^2 = 6$$

$$\Rightarrow 2\log\,a + 2\log\,b = 6$$

$$\Rightarrow \log\,a + \log\,b = 3$$

$$\Rightarrow \log\,a = 3 - \log\,b(1).$$

De $f(ab^3) = 5$, *segue*

$$\log\,(ab^3) = 5 \;\Rightarrow\; \log\,a + \log\,b^3 = 5$$

$$\Rightarrow\; \log\,a + 3\log\,b = 5$$

$$\Rightarrow \log\,a = 5 - 3\log\,b(2).$$

De (1) em (2), vem

$$3 - \log\,b = 5 - 3\log\,b \Rightarrow 2\log\,b = 2 \Rightarrow \log\,b = 1\;(3).$$

De (3) em (1), log a = 3 – 1 = 2.

Temos que:

Log a = 2 e log b = 1.

Disso, $f\left(\frac{a}{b}\right) = log\left(\frac{a}{b}\right) = log\ a - log\ b = 2 - 1 = 1.$

Gabarito: letra "B".

2.7 Funções Trigonométricas

Questão 2.7.1. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/CE 2009) Em certa região, a temperatura média (medida em graus Fahrenheit), ao longo de determinado ano, foi descrita pela função* $f(x) = 37sen\left[\frac{2\pi(x-101)}{365}\right] + 25$, *em que x representa o número de dias transcorridos a partir de 1° de janeiro do referido ano. Nesse caso, é correto afirmar que a temperatura máxima dessa região, nesse ano, ocorreu em*

(A) abril.

(B) maio.

(C) junho.

(D) julho.

Solução. *A temperatura máxima ocorrerá quando o valor do seno em questão for máximo, o maior valor que ele pode assumir é 1, o que ocorre no arco* $\pi/2$. *Então devemos achar o valor de x na equação* $\frac{2\pi(x-101)}{365} = \frac{\pi}{2}$. *Resolvendo, chegamos ao valor* $x \cong 192$ *dias. Vejamos, janeiro tem 31 dias, fevereiro: 28 (estamos supondo o ano sendo não-bissexto); março: 31; abril: 30; maio: 31 e junho: 30. Somando, tem-se 181 dias. Como para 192 sobram 11 dias, a temperatura máxima ocorrerá no mês de julho. Alternativa "D".*

Texto para as Questões de 2.7.2 a 2.7.4.

Um fazendeiro construiu um canal para levar água de um rio até o curral de sua fazenda. A secção transversal desse canal tem a forma de um trapézio isósceles e, para determinar o fluxo de água do canal, o fazendeiro utilizou a seguinte função:

$$f(\theta) = 3\text{sen}\left(\sqrt{\theta^2 - 1}\right) - \text{sen}\left(\sqrt{4(\theta^2 - 1)}\right).$$

Em que $\sqrt{\theta^2 - 1}$ é o ângulo que a base menor do trapézio faz com a lateral.

Questão 2.7.2. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/MT 2007) Com base no texto, é correto afirmar que*

(A) $\theta \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(B) $\theta \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{5}$.

(C) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2} \leq \theta \leq \sqrt{\pi^2 + 1}$.

Solução. $\sqrt{\theta^2 - 1}$ *é o ângulo que a base menor do trapézio faz com a lateral, então* $90° \leq \sqrt{\theta^2 - 1} \leq 180°$, *em radianos,* $\frac{\pi}{2} \leq \sqrt{\theta^2 - 1} \leq \pi$. *Para entender isto, basta prestar atenção na figura de um trapézio qualquer. Resolvendo* $\sqrt{\theta^2 - 1} \geq \frac{\pi}{2}$, *temos* $\theta^2 - 1 \geq \frac{\pi^2}{4}$, *donde* $\theta \geq \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}$. *Na outra inequação,* $\theta^2 - 1 \leq \pi$, *isto é,* $\theta \leq \sqrt{\pi + 1}$. *Portanto,* $\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2} \leq \theta \leq \sqrt{\pi^2 + 1}$. *Letra "D".*

Questão 2.7.3. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/MT 2007) Se* $cos\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, *então o valor de* $f(\theta)$ *é igual a*

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) $\frac{4}{3}$.

(C) $\frac{3-\sqrt{5}}{3}$.

(D) $\frac{18-4\sqrt{5}}{9}$.

Solução. *Vamos usar a Proposição 1.7.7 para reescrever a função dada. Temos,*

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3sen\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) - sen\,(2\sqrt{(\theta^2 - 1)}) \\ &= 3sen\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) - 2sen\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) \cdot cos\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) \end{aligned}$$

$$= sen(\sqrt{\theta^2 - 1}) \cdot (3 - 2cos\,(\sqrt{\theta^2 - 1})).$$

De $cos\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, *pelo Teorema 1.7.3, vem*

$$sen(\sqrt{\theta^2 - 1}) = \frac{2}{3}.$$

Gabarito: letra "D".

Questão 2.7.4. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/MT 2007) Considerando* $-\frac{1}{2} \leq cos\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) \leq 0$, *assinale a opção incorreta.*

(A) $0 \leq \text{sen}(\sqrt{\theta^2 - 1}) \leq \frac{1}{2}$.

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \text{sen}(\sqrt{\theta^2 - 1}) \leq 1$.

(C) $f(\theta) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $f(\theta) \leq 4$.

Solução. *Como* $(\sqrt{\theta^2 - 1})$ *é o ângulo que a base menor do trapézio faz com a lateral, temos*

$$\frac{\pi}{2} \leq \sqrt{\theta^2 - 1} \leq \pi$$

Note que:

$$\cos\,(\sqrt{\theta^2 - 1}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\theta^2 - 1} = \pi/2 \Leftrightarrow \text{sen}(\sqrt{\theta^2 - 1}) = 1.$$

$$\Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2(\sqrt{\theta^2 - 1}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2(\sqrt{\theta^2 - 1}) < 1$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(\sqrt{\theta^2 - 1}) < 1,$$

onde usamos a relação fundamental da trigonometria, vide Teorema 1.7.3.

Assim, sen $(\sqrt{\theta^2 - 1}) \leq 1$.

Se $cos\ (\sqrt{\theta^2 - 1}) \geq -1/2$

$$\cos\ (\sqrt{\theta^2 - 1}) \geq -1/2 \Leftrightarrow \sqrt{\theta^2 - 1} \geq 2\pi/3 \Leftrightarrow \mathrm{sen}(\sqrt{\theta^2 - 1}) \geq \sqrt{3}/2.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \mathrm{sen}(\sqrt{\theta^2 - 1}) \leq 1.$$

Portanto, a única opção que está incorreta é a letra "A".

Questão 2.7.5. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/PA 2006) Considere que a posição de um corpo em movimento, preso a uma mola, é descrita pela função periódica P(t)* $= 100 - 20\cos\frac{5\pi t}{3}$*, em que* $t \geq 0$ *é o tempo, em segundos. Se* $P_{min,}$ *é a posição mais baixa atingida pelo corpo* P_{max} *é a mais alta, define-se um ciclo desse movimento como o tempo gasto pelo corpo para sair do* P_{min} *, atingir* P_{max} *e retornar ao* P_{min} *. Nesse caso, em um minuto, a quantidade de ciclos desse movimento é igual a*

(A) 100.

(B) 70.

(C) 50.

(D) 30.

Solução. *Lembremos que a função cosseno varia de 1 a –1, onde o valor máximo é atingido no arco 0 rad e o valor mínimo, em π rad, sendo* 2π *o período. Neste caso, a posição mais alta de P(t) é atingida quando* $cos\ \frac{5\pi t}{3} = 1$*, o que ocorre se, e somente se,* $cos\ \frac{5\pi t}{3} = 0$*, donde t = 0 s. A posição mínima ocorre quando o valor de* $cos\ \frac{5\pi t}{3}$ *for mínimo, o que ocorre se, e somente se,* $\frac{5\pi t}{3} = \pi$*, donde* $t = \frac{3}{5}$*, ou seja, t = 0,6 s. Como o ciclo completo se dá saindo da posição máxima para a mínima e depois retornar para a máxima, o tempo para isso ocorrer é* $2 \times 0{,}6 = 1{,}2$ *s. Em 1 minuto tem 60 segundos, assim a quantidade de ciclos completos em 60 segundos é obtida dividindo 60 por 1,2, pois queremos saber quantos 1,2 s cabem em 60 s. Portanto* $60 \div 1{,}2 = 50$*. A alternativa correta é a "C".*

Questão 2.7.6. *(UECE – SEDUC/CE 2018) Sejam u e v funções reais de variável real definidas por u(x) =* $\operatorname{sen}(3^x)$ *e v(x) =* $3^{\operatorname{sen}(x)}$*. Se a é o maior valor que v pode assumir e b é o menor valor que u pode assumir, então, o produto a · b é igual a*

(A) 6.

(B) – 3.

(C) – 6.

(D) 3.

Solução. *O maior valor de v é atingido quando sen(x) = 1, então a =* $3^1 = 3$*. O menor valor de u ocorre quando* $\operatorname{sen}(3^x) = -1$*, ou seja, b = – 1. Daí, a · b =* $3 \cdot (-1) = -3$*. Letra "B".*

Questão 2.7.7. *(IBADE – Pref. de Manaus – AM 2018) Considere uma função f, de domínio real, dada pela relação:*

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 3}.$$

Dessa forma, calcule o máximo valor assumido pela imagem de f.

(A) 16.

(B) 64.

(C) 32.

(D) 8.

Solução. *Como 0 < 1/2 < 1, quanto maior for o valor de* $2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 3$*, menor será o valor de f(x) ao passo que quanto menor for* $2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 3$*, maior será f(x).*

Então $2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 3$ *será mínimo quando sen(x) = – 1, daí*

$$2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 3 = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3 = -5.$$

Logo,

$$f_{max}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 32.$$

Gabarito: letra "C".

Questão 2.7.8. *(UECE – SEDUC/CE 2018) A temperatura média T em (°C) de Manaus é expressa pela função* $T(t) = 27 - 10(-[\text{sen}(3\pi t)])$ *em que t é o tempo dado em semanas. Dessa forma, a maior temperatura média semanal registrada na cidade de Manaus foi de:*

(A) 37.

(B) 40.

(C) 30.

(D) 27.

Solução. *Temos,* $T(t) = 27 - 10(-[\text{sen}(3\pi t)])$. *T será máxima quando* $\text{sen}\,(3\pi t) = 1$. *Logo,* $T(t) = 27 + 10 \cdot 1 = 37$. *Letra "A".*

Questão 2.7.9. *(VUNESP – SEE – SP 2011) O gráfico da função* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \cos(x)$*, em que* $\mathbb{R}$ *representa o conjunto dos números reais, possui* -1 *como valor mínimo e 1 como valor máximo. Já o gráfico da função* $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*, dada por* $g(x) = 1 + \cos(x)$*, possui, como valores mínimos e máximo, respectivamente,*

(A) 0 e 4.

(B) 0 e 2.

(C) – 1 e 3.

(D) – 1 e 2.

(E) – 2 e 2.

Solução. *O máximo da função* $g(x) = 1 + \cos(x)$ *é obtido quando* $\cos(x) = 1$ *e o mínimo, se* $\cos(x) = -1$*. Assim* $g_{max}(x) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ *e* $g_{min}(x) = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$*. Portanto, a alternativa correta é a "C".*

Questão 2.7.10. *(UEPB – Estado da Paraíba – PB – 2005) Considere a função f(x) =* $5^{-sen\ (2x)}$ *definida no intervalo de [0, 2π]. O valor de x que a maximiza é:*

(A) $3\pi/2$.

(B) $\pi/2$.

(C) $\pi/4$.

(D) $3\pi/4$.

(E) $3\pi/8$.

Solução. *O valor de sen(2x) que maximiza f é –1, pois* $f_{max}(x) = 5^{-(-1)} = 5$. *Temos, sen(2x) = – 1. Considerando o intervalo [–* $\pi/2$, $\pi/2$*], vamos aplicar a função arco seno, assim arcsen(2x) = arcsen(– 1), donde* $2x = 3\pi/2$, *pois o arco cujo seno é – 1 é* $3\pi/2$. *Dessa equação, resulta* $x = 3\pi/4$. *Alternativa "D".*

Questão 2.7.11. *(FCC – SEDUC – ES – 2016) Na função trigonométrica g(x) = sen(x), com x ∈ ℝ,* $g(\frac{13\pi}{3})$ *é igual a*

(A) $g(\frac{5\pi}{2})$.

(B) $g(\frac{\pi}{4})$.

(C) $g(\frac{2\pi}{3})$.

(D) $g(\pi)$.

(E) $g(\frac{\pi}{3})$.

Solução. *A função seno é periódica de período* 2π, *isso quer dizer que*

$$sen(x) = sen\ (x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso, temos

$$g(\frac{13\pi}{3}) = g(\frac{12\pi + \pi}{3}) = sen\ \left(\frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi\right) = sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Gabarito: letra "E".

2.8 Noções Básicas de Cálculo

O texto abaixo é referente às Questões de 2.8.1 a 2.8.3:

Uma partícula possui movimento retilíneo uniforme e a distância percorrida, em metros, é determinada pela função x(t), em que t é o tempo medido em segundos. A velocidade média dessa partícula, no intervalo de tempo [a. b] é definida por $v_m = \frac{x(b)-x(a)}{b-a}$; a velocidade instantânea e a aceleração constante são definidas, respectivamente, por $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ e por $a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$. Com base nessas informações e assumindo que a velocidade instantânea da partícula seja dada pela função v(t) = 2t + 3, julgue os itens que se seguem.

Questão 2.8.1. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/AM 2011) A velocidade média da partícula no intervalo [2, 6] é igual à média aritmética das velocidades instantâneas em t = 2 s e t = 6 s.*

Solução. *A velocidade instantânea da partícula é dada pela função v(t) = 2t + 3, então a média aritmética das velocidades instantâneas em t = 2s e t = 6 s é 11 s. Para se chegar à velocidade média da partícula no intervalo [2, 6], precisamos obter uma expressão para x(t). Como* $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$*, vamos aplicar a integral definida a ambos os membros da igualdade. Temos*

$$\int_2^6 v(t)dt = \int_2^6 \frac{dx(t)}{dt}dt \Rightarrow x(t)_{t\in[2,6]} = [t^2 + 3t]_2^6.$$

A velocidade média em [2, 6] é dada por

$$\frac{x(6)-x(2)}{6-2} = \frac{[t^2+3t]_2^6}{4} = \frac{6^6+3\cdot 6-(2^2+3\cdot 2)}{4} = 11.$$

Logo, o item está correto.

Questão 2.8.2. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/AM 2011) A velocidade média da partícula no intervalo [1, 3] é igual a 6 m/s.*

Solução. *Pela questão anterior, a velocidade média da partícula no intervalo [1, 3] é*

$$\frac{[t^2+3t]_1^3}{3-1} = \frac{3^2+3\cdot 3-(1^2+3\cdot 1)}{2} = 7\ m/s.$$

Logo, o item está errado.

Questão 2.8.3. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/AM 2011) A aceleração da partícula em t = 2 s é igual a 3 m/s^2 .*

Solução. *Sendo* $x(t) = t^2 + 3t$, *temos que*

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2t + 3 \; e \; \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2.$$

Logo, a aceleração em qualquer instante é 2 m/s. Portanto o item está errado.

Questão 2.8.4. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/CE 2009) Se o volume de um balão esférico estiver aumentando à taxa de 0,8 m^3 / min, então, no momento em que o raio desse balão for igual a 50cm, a área de sua superfície estará aumentando à taxa de*

(A) 0, 0048 m^2 / min.

(B) 0,032 m^2 / min.

(C) 3,2 m^2 / min.

(D) 4,8 m^2 / min.

Solução. *O volume de uma esfera é dado pela fórmula* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, *onde R é o raio. Prestemos atenção, o enunciado diz que este volume sofre uma variação, então é razoável supormos que a solução desse problema passa pela noção de derivada. Derivando a fórmula do volume da esfera,*

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 . \frac{dR}{dt},$$

Onde t representa o tempo, medido em minutos.

Isolando $\frac{dR}{dt}$ *temos*

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dV}{dt} \times \frac{1}{4\pi R^2} \text{ (1).}$$

A área superficial da esfera é obtida pela fórmula $A = 4\pi R^2$*. Novamente, como o problema pede para achar a taxa de variação dessa área, vamos derivar, assim*

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi R\,\frac{dR}{dt} \text{ (2).}$$

De (1) em (2),

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi R\,\frac{dV}{dt}\,\frac{1}{4\pi R^2} = \frac{2}{R}\frac{dV}{dt}.$$

Como $\frac{dV}{dt} = 0{,}8\ m^3/min$ *e* $R = 0{,}5\ m$*, temos*

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2\cdot 0{,}8}{0{,}5} \times \frac{10}{10} = \frac{2\cdot 8}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2\ m^2/min.$$

Gabarito: letra "C".

Questão 2.8.5. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/CE 2009) Considere que a população de determinada cidade cresça à taxa de* $\frac{40000}{\sqrt{t+4}}$ *habitantes por ano, em que t é a quantidade de anos desde 1° de janeiro de 2001, e que em 1°/1/2006 a população da cidade era de 100.000 habitantes. Nesse caso, em 1°/1/2013, a população dessa cidade será de*

(A) 125.330 habitantes.

(B) 136.200 habitantes.

(C) 180.000 habitantes.

(D) 200.000 habitantes.

Solução. *Seja P(t) a função que nos dá a população da cidade, como esse problema diz que essa população cresce à taxa de* $\frac{40000}{\sqrt{t+4}}$ *habitantes por ano, então*

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{40000}{\sqrt{t+4}} \quad\Rightarrow\quad P(t) = \int 40000 \cdot (t+4)^{-1/2}\,dt$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{40000 \cdot (t+4)^{1/2}}{1/2} + C$$

$$\Rightarrow P(t) = \sqrt{t+4} \cdot 80000 + C,$$

Em que C é uma constante.

Como em 1°/1/2006 a população da cidade era de 100000 habitantes, então

$$P(5) = 100000$$

Assim, $100000 = \sqrt{5+4} \cdot 800000 + C.$

Efetuando os cálculos, chegando a C = 140000.

Dessa forma,

$$P(t) = \sqrt{t+4} \cdot 80000 - 140000.$$

Em 1°/1/2013, terá passado 12 anos, ou seja, devemos considerar t = 12 em P(t). Calculando P(12), chegamos a P(12) = 180000 habitantes. Logo, a alternativa correta é a letra "C".

Questão 2.8.6. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/CE 2013) A respeito de uma função f(x) tal que g(x) =* $3x^2 - 6x - 9$ *é a função derivada de f, assinale a opção correta.*

(A) x = 3 é ponto de máximo local de f.

(B) x = 1 é ponto de inflexão de f.

(C) Se f(0) = 0, então f(x) = $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x.$

(D) f possui três pontos críticos.

(E) x = 1 é ponto mínimo local de f.

Solução. *Se g é a função derivada de f, então f é a função integral de g, assim f(x) =* $x^3 - 3x^2 - 9x$. *Vamos obter o ponto de inflexão de f. Pelo que vimos no Teorema 1.8.31 e na observação 1.8.32, o ponto de inflexão da função f é obtido extraindo a raiz da equação* $f''(x) = 0$. *Temos* $f'(x) = g(x) = 3x^2 - 6x - 9$ *e* $f''(x) = 6x - 6$. *A raiz de* $6x - 6 = 0$ *é x = 1. Assim, o ponto de inflexão de f é x = 1. Logo, o item correto é o "B".*

Questão 2.8.7. *(CESPE/CEBRASPE – SEDUC/CE 2013) A taxa de variação percentual de uma função Q(x) é definida pela expressão* $100 \times \frac{Q'(x)}{Q(x)}$. *Dessa forma, se Q(x) =* $10 \times e^{0,05x}$, *então a taxa de variação percentual de Q(x) será igual a*

(A) $10 \times e^{-0,05x}$.

(B) 5.

(C) 100.

(D) $1000 \times e^{x}$.

(E) $5 \times e^{0,05x}$.

Solução. *Sendo* $Q(x) \ = 10 \times e^{0,05x}$, *temos que* $Q'(x) = 10 \cdot e^{0,05x} \cdot 0{,}05 = 0{,}5 \cdot e^{0,05}$.

Assim, a taxa de variação percentual de Q(x) é: $\frac{100 \cdot 0{,}5 \cdot e^{0,05x}}{10 \cdot e^{0,05x}} = \frac{5 \cdot e^{0,05x}}{e^{0,05x}} = 5$. *Letra "B".*

Questão 2.8.8. *(UECE – SEDUC/CE 2018) Dentre todos os números reais positivos, aquele que somado com o dobro do seu inverso multiplicado resulta no menor valor possível é*

(A) $\sqrt{3}$.

(B) $\frac{3\sqrt{6}t}{5}$.

(C) $\frac{5\sqrt{5}}{8}$.

(D) $\sqrt{2}$.

Solução. *Dado x ∈ ℝ, com x > 0, temos f(x) =* $x + \frac{2}{x}$. *Podemos escrever*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x}$$

Queremos saber o valor de x que minimiza esta função. Aplicaremos o Teorema de 1.8.35.

Derivando f, obtemos

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+2)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}.$$

Como x > 0, o ponto crítico de f é

$$x = \sqrt{2}.$$

Considere $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$*, onde* $x_1 < x < x_2$*. Temos*

$$f(x_1) = -1 < 0 \quad e \quad f(x_2) = 2 > 0.$$

Como o sinal muda de negativo para positivo, $x = \sqrt{2}$ *de fato minimiza f.*

Gabarito: letra "D".

Veja a representação gráfica do problema na Figura 2.22.

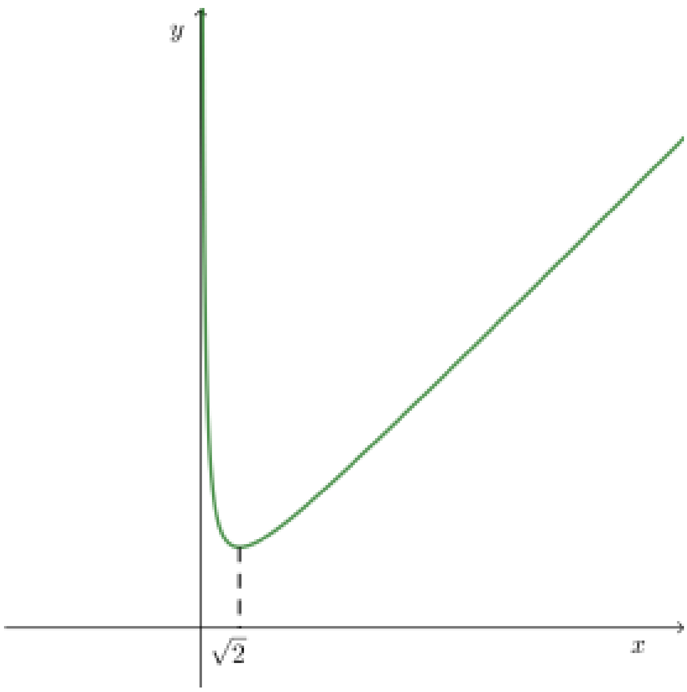


Figura 2.22: Gráfico da função f(x) = $x + \frac{2}{x}$*.*

Questão 2.8.9. *(UECE – SEDUC/CE 2018) Uma função real de variável real f, cuja derivada (em relação a x) é igual a* $x^3 + 2x + \frac{1}{x} - a$*, onde a é uma constante real, pode ser f(x) =*

(A) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2} - ax + 2018$.

(B) $\frac{x^4}{4} + x^2 + \ln \frac{1}{|x|} - ax + 2018$.

(C) $\frac{x^4}{4} + x^2 + \ln |x| - ax + 2018$.

(D) $\frac{x^4}{4} + 2x^2 + \frac{2}{x^2} - ax + 2018$.

Solução. *Temos que:* $f'(x) = x^3 + 2x + \frac{1}{x} - a$. *Sabendo que a integração é a operação inversa da diferenciação, então integrando* f', *obteremos* f. *Devemos lembrar de colocar uma constante no final, pois se trata de uma integral indefinida. Assim,*

$$f(x) = \int \left(x^3 + 2x + \frac{1}{x} - a\right) dx = \int x^3 dx + 2\int x dx + \int \frac{1}{x} dx - a\int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + x^2 + \ln |x| - ax + C,$$

em que C é uma constante.

Analisando as alternativas, vemos que a correta é a "C", onde basta considerarmos C = 2018.

Questão 2.8.10. *(CONSULPAM – Pref. de Martinópole 2015) A força eletromotriz de um circuito elétrico com um gerador simplificado é E(t) volts em t segundos, onde E(t) =* $50\text{sen}\,(120\pi t)$. *Assinale a alternativa que contém a taxa de variação de E(t) em relação a t em 0,2 s.*

(A) 6000π.

(B) 5500π.

(C) 4000π.

(D) 3000π.

Solução. *Derivando E(t) =* $50\text{sen}\,(120\pi t)$ *em relação a t, obtemos*

$$\frac{dE(t)}{dt} = 50\cos(120\pi t) \cdot 120\pi$$

$$= 6000\pi \cdot \cos(120\pi t),$$

Onde usamos a regra da cadeia

Como essa derivada é em 0,2 s, fazendo t = 0,2 na derivada, obtemos

$$\frac{dE(0,2)}{dt} = 6000\pi$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.8.11. *(CONSULPAM – Pref. de Martinópole – CE 2015) A distância entre dois pontos é dada pelo limite* $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. *Qual a distância entre esses dois pontos?*

(A) 1/4 u.c.

(B) 1/2 u.c.

(C) 2/3 u.c.

(D) 3/2 u.c.

Solução. *Temos que:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Gabarito: letra "B".

Questão 2.8.12. *(CONSULPAM – Pref. de Nova Olinda – CE 2015) Qual o valor do limite abaixo, assumindo que todos os valores sejam reais?*

$$\lim_{[x,y] \to [\infty,0]} \frac{y}{x-2}$$

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 0.

Solução. *Temos,* $\lim_{[x,y]\to[\infty,0]} \frac{y}{x-2} = \frac{0}{\infty} = 0.$ *Letra "D".*

Questão 2.8.13. *(CONSULPAM – Pref. de Nova Olinda – CE 2015) Qual o resultado da derivada abaixo?*

$$\frac{dn}{dm}\left(\frac{m+2}{2}\right)$$

(A) $0{,}5.$

(B) $2.$

(C) $m^2.$

(D) $m.$

Solução. *Temos* $\frac{dn}{dm}\left(\frac{m+2}{2}\right) = \frac{dn}{dm}\left(\frac{m}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$ *Letra "A".*

Questão 2.8.14. *(CONSULPAM – Pref. de Pentecoste – CE 2014) Calcule o limite abaixo*

$$\lim_{x\to 3} \frac{5x^2 - 8x - 13}{x^2 - 5}$$

(A) 2.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 8.

Solução. *Temos que:*

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-8x-13}{x^2-5} = \frac{5\cdot 3^2-8\cdot 3-13}{3^2-5}$$

$$= \frac{45-24-13}{4}$$

$$= \frac{45-37}{4}$$

$$= \frac{8}{4} = 2$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.8.15. *(AOCP – IBC – 2013) Assinale a alternativa que indica a área, no plano cartesiano, da região limitada pela curva* $y = \sqrt{x+1}$ *e pelas retas* $x = 0$, $y = 0$ *e* $x = 8$.

(A) 16/3 unidades de área.

(B) 27/2 unidades de área.

(C) 26 unidades de área.

(D) 52/3 unidades área.

(E) 81/2 unidades de área.

Solução. *A interpretação geométrica foi feita na Figura 2.23. Através dela, consegue ver que a área deve ser calculada de* $x = 0$ *a* $x = 8$, *com* $y \geq 0$, *tendo por base a função* $y = \sqrt{x+1}$. *Isso nos remete à noção de integral. Temos,*

$$A = \int_0^8 \sqrt{x+1}dx = \int_0^8 (x+1)^{1/2}dx = \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^8$$

$$= \frac{52}{3}.$$

Gabarito: letra "D"

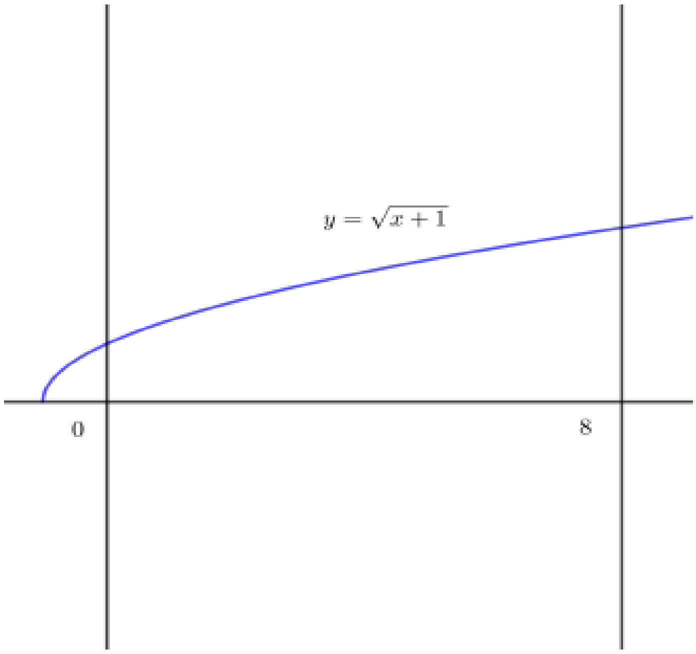


Figura 2.23: Interpretação geométrica do problema.

Questão 2.8.16. *(FGV – SEE – SP – 2013) Seja R a região do plano cartesiano definida pelas desigualdades* $2 \leq x \leq 10$ *e* $0 \leq y \leq \frac{x+8}{2}$. *A área da região R é igual a*

(A) 50.

(B) 56.

(C) 58.

(D) 62.

(E) 64.

Solução. *A região R é dada conforme a Figura 2.24. Calcular áreas de regiões delimitadas por retas e funções nos sugere integral definida. Neste caso, a área da região R é dada pela integral de* $y = \frac{x+8}{2}$ *de 2 até 10. Temos,*

$$A_R = \int_2^{10} \left(\frac{x+8}{2}\right) dx = \int_2^{10} \left(\frac{1}{2}x + 4\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} + 4x\right]_2^{10}$$

$$= 56.$$

Portanto, $A_R = 56$. *Letra "B".*

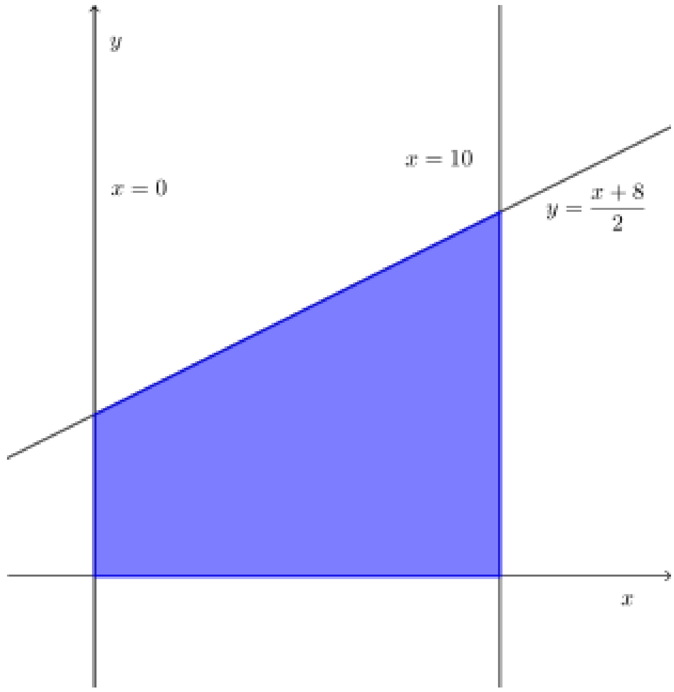


Figura 2.24: Cálculo da área da região R.

Questão 2.8.17. *Assinale o item que corresponde ao valor de* $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$.

(A) 12

(B) 10

(C) 14

(D) 0

Solução. *Temos*

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(-2)^3+8}{-2+2} = \frac{0}{0}.$$

Temos uma indeterminação do tipo 0/0, pela regra de L'Hôspital, vide Teorema 1.8.28, vem

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{3x^2}{1} = 3 \cdot (-2)^2 = 12.$$

Gabarito: letra "A".

2.8 Vestibular da URCA

Questão 2.9.1. *(2020.2) Se* $\cos x = \frac{1}{3}$*, então* $|\text{sen } 2x| + |\cos 2x|$ *vale:*

(A) 1

(B) $\frac{17}{81}$

(C) $\frac{4\sqrt{2}+7}{9}$

(D) $\frac{4\sqrt{2}-7}{9}$

(E) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

Solução. *De acordo com a Proposição 1.7.7, temos que:*

$$\text{sen } 2x = 2\text{sen}\, x \cos\, x \text{ e } \cos\, 2x = \cos^2\, x - \text{sen}^2\, x.$$

Agora considere o triângulo retângulo ABC da Figura 2.25:

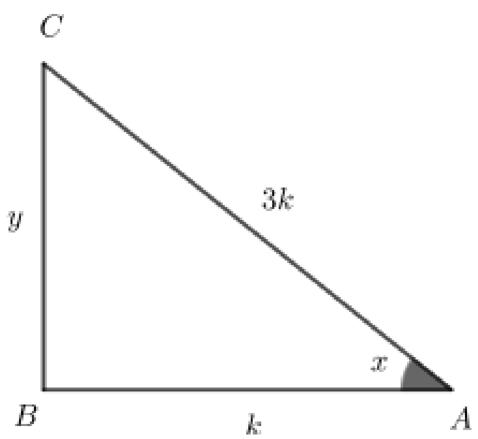


Figura 2.25: Triângulo retângulo ABC.

Fizemos as denotações $\overline{AB} = k$*,* $\overline{AC} = 3k$ *e* $\overline{BC} = y$*, onde* k *é uma constante real. Utilizando o Teorema de Pitágoras, vide Teorema 1.7.1, chegamos a* $y = 2\sqrt{2}k$*, donde* $\text{sen } x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$*. Temos que:*

$$\text{sen } 2x = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \text{ donde } |\text{sen } 2x| = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ e}$$

$$cos\ 2x\ = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = -\frac{7}{9},\ donde\ |\cos\ 2x| = \frac{7}{9}$$

Logo, $|senx2x| + |\cos\ 2x| = \frac{4\sqrt{2}+7}{9}$. *Alternativa "C".*

Questão 2.9.2. *(2020.2) Dada a função f(x)* $= \log_{10}\left(\frac{x}{10}\right) + 2020$, *qual o valor de* $f^{-1}(2020)$*?*

(A) $\frac{1}{10}$

(B) 1

(C) 10

(D) 100

(E) 1000

Solução. *Denotando f(x) = y e sabendo que a função exponencial é a inversa da função logarítmica, vamos ter*

$$y = log_{10}\left(\frac{x}{10}\right) + 2020 \ \Rightarrow\ 10^y = 10^{\left[log_{10}\left(\frac{x}{10}\right)+2020\right]}$$

$$\Rightarrow\ 10^y = 10^{\log_{10}\left(\frac{x}{10}\right)} \cdot 10^{2020}$$

$$\Rightarrow\ 10^y = \frac{x}{10} \cdot 10^{2020}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{10^{y+1}}{10^{2020}}$$

Assim, $f^{-1}(y) = \frac{10^{y+1}}{10^{2020}}$ *e, portanto,* $f^{-1}(2020) = 10$. *Letra "C".*

Questão 2.9.3. *(2020.2) O conjunto solução da inequação* $2\,\text{sen}^2\,x + \cos x > 2$ *para* $0 \leq x \leq \frac{n}{2}$ *é:*

(A) S = $\{x \in \mathbb{R}|\pi/4 < x < \pi/2\}$

(B) S = $\{x \in \mathbb{R}|\pi/3 < x < \pi/4\}$

(C) S = $\{x \in \mathbb{R}|\pi/6 < x < \pi/3\}$

(D) $S = \{x \in \mathbb{R} | \pi/6 < x < \pi/2\}$

(E) $S = \{x \in \mathbb{R} | \pi/3 < x < \pi/2\}$*]*

Solução. *Utilizando a relação fundamental, vide Teorema 1.7.3, temos*

$$2\sec^2 x + \cos x > 2 \Rightarrow 2 \cdot (1 - \cos^2 x) + \cos x - 2 > 0 \Rightarrow -2\cos^2 x + \cos x > 0.$$

Fazendo $\cos x = z$*, tem-se que* $-2z^2 + z > 0$.

Devemos analisar o comportamento da função quadrática $f(z) = -2z^2 + z$. *Suas raízes são* $z = 0$ *e* $z = 1/2$. *Como o coeficiente de* z^2 *é negativo, a concavidade do gráfico de f estará voltada para cima. Esta situação está representada pela Figura 2.26:*

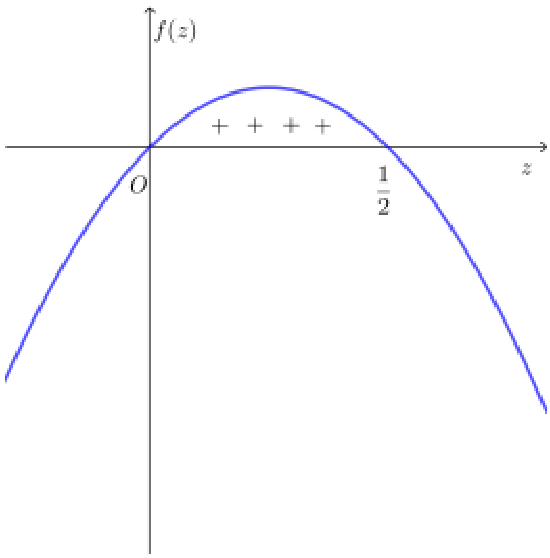


Figura 2.26: Gráfico da função $f(z) = -2z^2 + z$.

Assim, f(z) > 0 se, e somente se, 0 < z < 1/2, isto é, $-2\cos^2 x + \cos x > 0$ se, e somente se, 0 < cos x < 1/2.

Se cos x = 0, tem-se que $x = \frac{\pi}{2}$.

Se $\cos x = \frac{1}{2}$, temos $x = \frac{\pi}{3}$.

Veja a representação gráfica de 0 < cos x < 1/2 na Figura 2.27

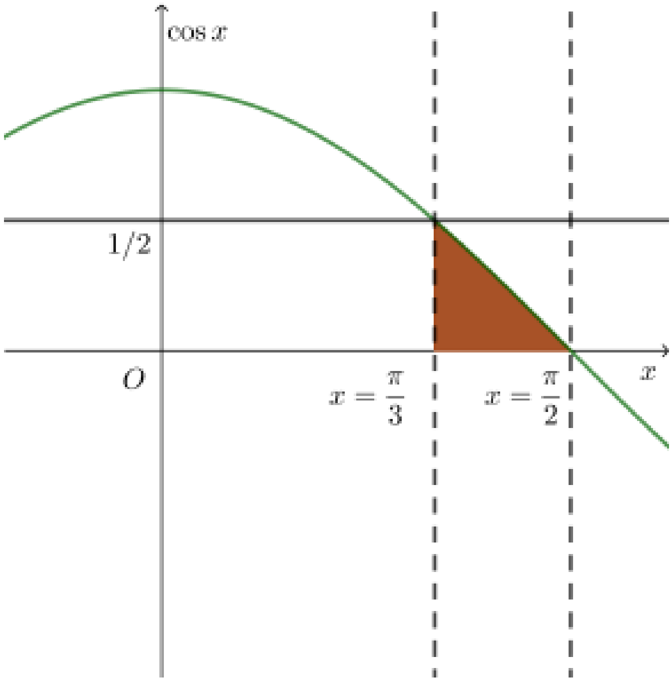


Figura 2.27: Representação gráfica de 0 < cos x < 1/2.

Logo $0 < \cos x < \frac{1}{2}$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ocorre se, e somente se, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

Gabarito: letra "E".

Questão 2.9.4. *(2020.1) Sabendo que A* = {1, 2, 3} *e B* = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, *quantas funções f : A → B injetoras existem?*

(A) 120

(B) 720

(C) 60

(D) 90

(E) 70

Solução. *Para a função f : A → B ser injetiva, dados x_1, x_2 ∈ A, distintos, devemos ter $f(x_1) \neq (x_2)$ em B. Dessa maneira, sem perda de generalidade, tomando o elemento 1 ∈ A, existem 6 possibilidades de correspondência em B. Para o elemento 2 ∈ A, vamos* *ter 5 possíveis escolhas em B e, por fim, considerando 3 ∈ A, tem-se 4 possibilidades em B. Portanto, o número de funções injetivas f : A → B é* $6 \times 5 \times 4 = 120.$ *Gabarito: letra "A".*

Questão 2.9.5. *(2020.1) Considere a função de segundo grau f(x) =* $ax^2 + 2x + 1$, *onde* $a \neq 0$. *É INCORRETO afirmar que:*

(A) A pré-imagem de f no ponto 1 é $f^{-1}(1) = \{0, -2/a\}$.

(B) Se a > 0, o valor da ordenada do vértice de f é diferente de 1.

(C) Se a < 0, o valor da abscissa do vértice de f é positivo.

(D) Se a > 0, e f tem duas raízes distintas, então o ponto da abscissa do vértice pode ser maior que 1.

(E) se a < 0, então f não tem raízes iguais.

Solução. *Analisemos cada um dos itens separadamente.*

A) Denotamos D(f) como sendo o domínio de f, de acordo com o Elon, vide referência [6], a pré-imagem ou imagem inversa de f no ponto 1 é o conjunto

$$f^{-1}(1) = \{x \in D(f) | f(x) = 1\}$$

Assim, $f(x) = 1 \Rightarrow ax^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $x = -2/a$.

Daí, $f^{-1}(1) = \{0, -2/a\}$. *Portanto, o item está correto.*

B) Temos que: $\Delta = 4 - 4a$, *ou seja,* $\Delta = 4 \cdot (1 - a)$. *Assim,*

$$y_v = -\frac{4\cdot(1-a)}{4a} = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}.$$

Como a > 0, então $-\frac{1}{a} < 0$, *assim* $1 - \frac{1}{a} < 1$, *portanto este item também está correto.*

C) A abscissa do vértice de f é dada por:

$$x_v = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a}.$$

Como a < 0, temos $-\frac{1}{a} > 0$. *Assim, este item também está correto.*

D) Do item "B", sabemos que $\Delta = 4 \cdot (1 - a)$. *Como a > 0 e f admite duas raízes reais distintas, temos que 0 < a < 1. Com efeito, pois se não fosse, teríamos 1 – a < 0 e* *consequentemente* $\sqrt{1-a}$ *não estaria definida em* $\mathbb{R}$*, fazendo com que a função f não tivesse raiz real alguma.*

Do item "C", sabemos que a abscissa do vértice de f é $x_v = -1/a$.

Agora note que:

$$a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow -\frac{1}{a} < -1.$$

Disso concluímos que este item está errado. Portanto, a alternativa a ser marcada é a "D".

E) Pelo item "B", temos $\Delta = 4 \cdot (1-a)$*. Se a < 0, temos* $-a > 0$ *e assim* $1 - a > 0$. *Logo* $\Delta > 0$*, o que mostra a validade do item.*

Questão 2.9.6. *(2020.1) Considerando as retas*

$$r : x - y + 1 = 0;\; s : 2x - y + 4 = 0 \text{ e } t : x = -3.$$

É correto afirmar que:

(A) As retas r e s são paralelas.

(B) As retas r e t são perpendiculares.

(C) As retas r, s e t se intersectam num único ponto.

(D) A reta s intersecta a circunferência de centro (0, 0) e raio 1.

(E) Nenhuma das anteriores.

Solução. *Reescrevendo as equações das retas r e s em sua forma reduzida, temos*

$$r : y = x + 1;\; s : y = 2x + 4$$

De acordo com a Proposição 1.2.11, r e s são concorrentes. Sendo (x, y) essa interseção temos

$$x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = -3.$$

Como a abscissa da interseção é $x = -3$*, que é a equação da reta t, vemos que r, s e t se intersectam num único ponto, que é* $x = -3$*. Letra "C".*

Questão 2.9.7. *(2020.1) O conjunto solução da inequação* $\log_{\frac{1}{10}} x^2 > \log_{\frac{1}{10}} (2x-1)$ *em* $\mathbb{R}$ *é:*

(A) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

(B) $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$

(C) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$

(D) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1/2\}$

(E) $S = \emptyset$

Solução. *Como a função logarítmica é decrescente para base entre 0 e 1, vide Proposição 1.6.8, temos*

$$\log_{\frac{1}{10}} x^2 > \log_{\frac{1}{10}} (2x-1) \Rightarrow x^2 < 2x-1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 0.$$

Analisemos o comportamento da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Como o coeficiente de x^2 *é positivo, então a concavidade do gráfico de f está voltada para cima.*

Note que $\Delta = 0$. *Assim, f tem raiz única, à saber, 1. Logo, f é não-negativa em todo o seu domínio e portanto a inequação em questão não admite solução real alguma, isto é,* $S = \emptyset$. *Alternativa "E".*

Veja o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ *na Figura 2.28:*

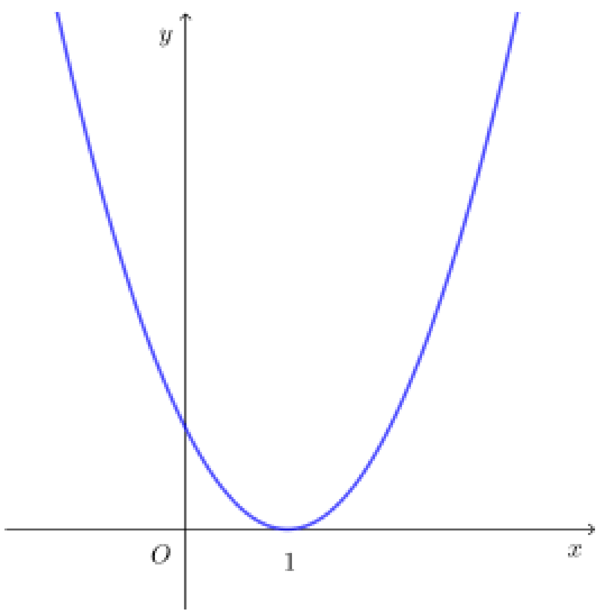


Figura 2.28: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Questão 2.9.8. *(2020.1) Seja c a circunferência dada pela equação* $x^2 + y^2 = 1$ *e r a reta dada pela equação* $y = -x + 7$. *A equação da reta que é paralela a r, tangencia a circunferência e é interceptada pelo eixo y num ordenada positiva é:*

(A) $y = -x + 2\sqrt{2}$

(B) $y = -x + 5$

(C) $y = -x + \sqrt{2}$

(D) $y = -x + 1$

(E) $y = -x + 3/2$

Solução. *Sendo s a reta procurada, da Seção 1.2, sabemos que a equação de s segue a lei da uma função afim. Como s é paralela a r, o coeficiente angular de s é – 1 (Proposição) 1.2.11, item 1). Sendo d um número real, temos* $s: y = -x + d$.

Como o coeficiente angular de s é – 1, a sua inclinação vale $3\pi/4$ *(lembremos de que o coeficiente angular é igual à tangente de sua inclinação). Tomemos uma terceira reta, à saber, r' de modo que r' seja perpendicular a s e passa pela origem. Assim, a inclinação de r' é* $\pi/4$. *Segue disso que o ponto de tangência de s com c é igual à interseção de s com r'. A situação está representada na Figura 2.29:*

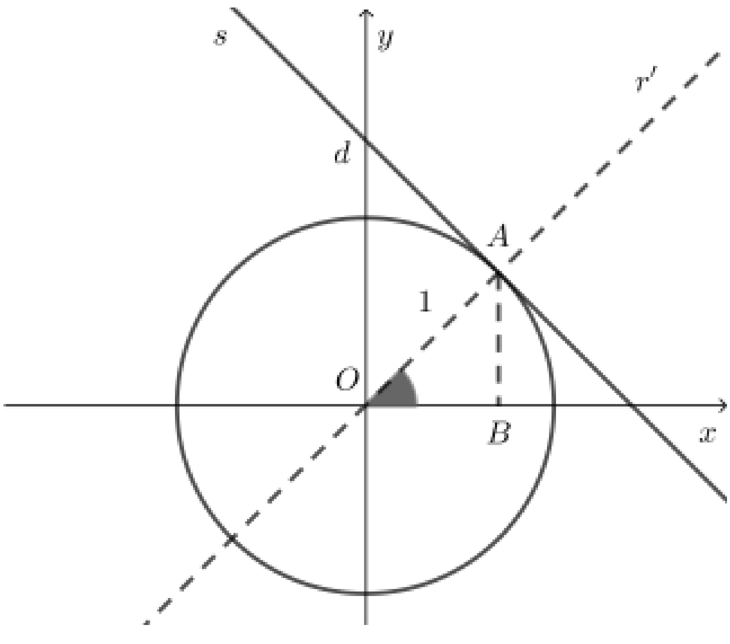


Figura 2.29: *Representação gráfica do problema.*

Considerando o triângulo retângulo OAB, de hipotenusa $1(x^2 + y^2 = 1$ *é uma circunferência de raio 1), chegamos que* $\overline{OB} = \overline{BA} = \sqrt{2}/2$.

Assim, o ponto A, interseção da reta s com a circunferência c, possui coordenadas $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. *Substituindo na equação de s, temos* $\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + d$, *donde* $d = \sqrt{2}$.

Logo, $s\colon y = -x + \sqrt{2}$. *Letra "C".*

Questão 2.9.9. *(2019.2) Assinale a alternativa incorreta.*

(A) A soma de dois números irracionais pode ser um número racional.

(B) A função $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *dada por* $f(x) = x^2$ *é injetiva.*

(C) Dados os conjuntos não vazios A, B e C temos $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B \cup C)$.

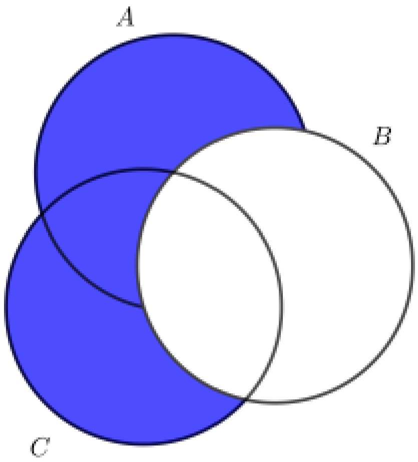
(D) $(\sqrt{10} - 3)^{-1} = \sqrt{10} + 3$.

(E) $0{,}999\cdots = 1$.

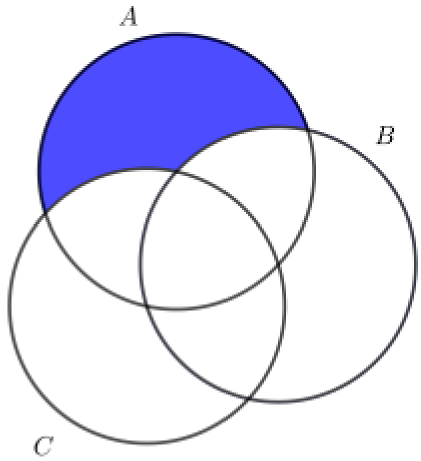
Solução. *(A) Item correto. Exemplo: Consideremos os números irracionais* $\sqrt{2}$ *e* $-\sqrt{2}$, *donde* $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, *que é racional.*

(B) Item correto. Como a f não é definida no ponto 0, então ela não tem valor mínimo. Entretanto, sabemos que a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x^2$ *tem valor mínimo em 0. Sabendo disso, pelo que vimos na Seção 1.3, a função f é crescente em todo* $(0, +\infty)$, *isto é, ela é injetiva para todo ponto de seu domínio.*

(C) Item incorreto. A argumentação será feita por meio da Figura 2.30:



(a) $(A - B) \cup C$



(b) $(A \cup C) - (B \cup C)$

Figura 2.30: Conjuntos *A, B e C.*

Para um estudo mais rigoroso acerca dos conjuntos, recomendamos a leitura do primeiro capítulo do livro Curso de Análise do Elon, vide referencia [6].

(D) $(\sqrt{10} - 3)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \frac{1}{\sqrt{10}-3} \cdot \frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3} = \frac{\sqrt{10}+3}{10-9} = \sqrt{10} + 3.$

Portanto, o item está correto.

(E) Seja $0{,}999\cdots = 1$*, temos*

$$10x = 9{,}999\cdots = 9 + 0{,}999\cdots = 9 + x \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1.$$

Logo, o item está correto.

Questão 2.9.10. *(2019.1) Se* $\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_y 2} + \frac{1}{\log_z 2} = 3$*, com x, y, z* $\in \mathbb{N}$ *e x, y, z estão em progressão geométrica nessa ordem, encontre o valor de y.*

(A) 4

(B) 6

(C) 2

(D) 1

(E) 8

Solução. *Se x, y e z formam uma P. G. nessa ordem, sendo* $q \in \mathbb{R}_*^+$ *a razão, temos*

$$y = x \cdot q \text{ e } z = x \cdot q^2.$$

Devemos encontrar y. Usando a propriedade mudança de base dos logaritmos (Proposição 1.6.4, item 4), temos

$$\log_y 2 = \frac{\log_x 2}{\log_x y} \text{ e } \log_z 2 = \frac{\log_x 2}{\log_x z}.$$

Então

$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_y 2} + \frac{1}{\log_z 2} \Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} + \frac{\log_x y}{\log_x 2} + \frac{\log_x z}{\log_x 2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1+\log_x y+\log_x y}{\log_x 2} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + \log_x (y \cdot z) = 3\log_x 2$$

$$\Rightarrow \log_x x + \log_x (y \cdot z) = \log_x 2^3$$

$$\Rightarrow x \cdot (x \cdot q) \cdot (x \cdot q^2) = 8$$

$$\Rightarrow (x \cdot q)^3 = 8$$

$$\Rightarrow x \cdot q = 2.$$

Logo, y = 2. Gabarito: letra "C"

Questão 2.9.11. *(2019.1) O conjunto solução da equação* $| x - 2 | + | x - 3 | = 1$ *é:*

(A) {2}

(B) {3}

(C) {2, 3}

(D) [2, 3]

(E) [0, 3]

Solução. *Note que:*

$$\begin{cases} |x-2|+|x-3|>0, se x \geq 3 \\ |x-2|+|x-3|<0, se x \leq 2 \\ |x-2|+|x-3|<0, se 2<x<3 \end{cases}$$

Se $x \geq 3$, *então* $|x-2|+|x-3|=(x-2)+(x-3)$, *donde* $x\ =\ 3$.

Se $x \leq 2$, *temos* $|x-2|+|x-3|=(2-x)+(3-x)$, *ou seja,* $x\ =\ 2$.

Se $2<x<3$, *tem-se que* $|x-2|+|x-3|=(x-2)+(3-x)=1$.

Portanto, sendo S o conjunto solução da equação modular dada, temos

S = [2, 3].

Letra "D".

Questão 2.9.12. *(2017.1) Assinale a alternativa que contém uma função que é sempre injetora.*

(A) A função que associa a cada morador de uma cidade, a sua idade.

(B) A função que associa a cada país que possui um presidente, seu presidente.

(C) A função que associa a cada aluno de uma escola, a sua mãe.

(D) a função que associa a cada música que possui um único compositor, seu compositor.

(E) A função que associa a cada time que possua um único patrocinador, seu patrocinador.

Solução. *Uma função* $f : A \to B$ *é injetiva quando dados* $x_1, x_2 \in A$, *distintos, temos* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *em B. Em outras palavras, cada elemento do domínio deve ter uma única imagem. Vamos agora analisar as alternativas.*

Na alternativa "A", para a referida função ser injetiva, cada morador de uma cidade deve ter uma idade diferente, o que não é verdade, é comum existir pessoas que possuam a mesma idade.

Na letra "B", a função em questão é de fato injetiva. Note que cada país tem um único presidente e eles são diferentes, isto é, não existem dois países com um presidente em comum. A resposta correta é a letra "B"

A função da letra "C" claramente não é injetiva, basta notar que que pode acontecer de dois ou mais alunos serem irmãos, isto é. Terem uma mãe em comum.

A função de letra "D" também não é injetiva, pois sabemos que existem compositores que fizeram mais de uma música sozinho.

Na letra "E", também não temos uma função injetiva. Note que existem patrocinadores que estampam a marca de mais um time sozinhos.

Questão 2.9.13. *(2017.1) A região do plano delimitada pelas retas x = 0, y = 0, a reta que passa por (– 3, 4) e (0, 2) e a reta* $5x + 6y - 30 = 0$ *possui área igual a:*

(A) 12 u.a.

(B) 18 u.a.

(C) 24 u.a.

(D) 32 u.a.

(E) 25 u.a.

Solução. *Seja* $r: y = ax + b$ *a reta que passa por (– 3, 4) e (0, 2) temos a = – 2/3 e b = 2. Assim,* $r: y = -\frac{2}{3}x + 2.$

A equação reduzida de $5x + 6y - 30 = 0$ *é* $-\frac{5}{6}x + 5.$

Tomando as funções $f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ *e* $f_2(x) = -\frac{5}{6}x + 5$*, a região desejada fica compreendida entre os gráficos de* f_1 *e* f_2*, de x = 0 a x = 6 (x = 6 é a interseção do gráfico de* f_2 *com o eixo OX).*

A Figura 2.31 nos traz uma representação gráfica da situação:

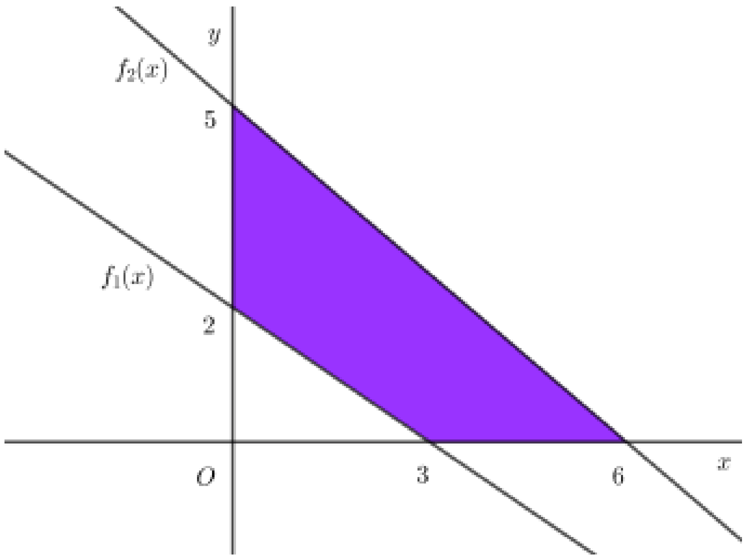


Figura 2.31: Área entre os dois gráficos

A área da região desejada é dada pela diferença entre as áreas dos triângulos maiores e menores. Sendo A essa área, temos

$$A = \frac{6 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 15 - 3 = 12\ u.a.$$

A resposta correta é a letra "A", mas esse exemplo pode também ser solucionado por meio da noção de integral.

Pelo que foi visto nas seções 1.8 e 2.8, a área A é igual a à integral definida de $f_2(x)$*, de x = 0 a x = 6 menos a integral definida de* $f_1(x)$*, de x = 0 a x = 3. Assim*

$$\begin{aligned}\int_0^6 \left(-\tfrac{5}{6}x + 5\right)dx - \int_0^3 \left(-\tfrac{2}{3}x + 2\right)dx &= \left[-\tfrac{5}{12}x^2 + 5x\right]_0^6 - \left[-\tfrac{1}{3}x^2 + 2x\right]_0^3 \\ &= \left[-\tfrac{5}{12} \cdot 6^2 + 5 \cdot 6\right] - \left[-\tfrac{1}{3} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3\right] \\ &= 12\ u.a.\end{aligned}$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.9.14. *(2016.2) Seja n > 1 um número natural. O valor de*

$$1 - \log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right]$$

é

(A) n

(B) 1/n

(C) 3

(D) 1

(E) 4

Solução. *Temos que:*

$$
\begin{aligned}
1 - \log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right] &= \log_n n + \log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right]^{-1} \\
&= \log_n n + \log_n \frac{1}{\log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right]} \\
&= \log_n \frac{n}{\log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right]} \\
&= \log_n \frac{n}{\log_n n n^{\frac{1}{3}}} \\
&= \log_n \frac{n}{1/n^3} = \log_n n^4 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Gabarito: letra "E".

Questão 2.9.15. *(2016.1) Uma quantidade $r_0 = r(0)$ de uma substância radioativa de desintegra com o passar do tempo t de acordo com a formula $r(t) = C3^{-5t}$, onde $C \neq 0$ é uma constante. Em que instante t haverá exatamente um terço da quantidade inicial da substância?*

(A) $t = 1/5$

(B) $t = 1/3$

(C) 2/5

(D) 2/3

(E) $t = 2$

Solução. *Devemos encontrar t tal que* $r(t) = \frac{1}{3} r_0$.

Temos que $r_0 = C$, assim

$r(t) = \frac{1}{3} r_0 \Rightarrow C \cdot 3^{-5t} = \frac{1}{3} C \Rightarrow 3^{-5t} = 3^{-1} \Rightarrow t = \frac{1}{5}$. *Letra "A".*

Questão 2.9.16. *(2016.1)* Se tg(x) = 2, então é correto afirmar que:

(A) cos(x) = $1/2$ *e* sen(x) = 1

(B) cos(x) = $\sqrt{2}/2$ *e* sen(x) = $\sqrt{2}$

(C) sen(x) = $1/\sqrt{5}$ *ou* sen(x) = $-1/\sqrt{5}$

(D) cos(x) = $1/\sqrt{5}$ *ou* cos(x) = $-1/\sqrt{5}$

(E) cos(x) = $\sqrt{3}/2$ *e* sen(x) = $\sqrt{3}$

Solução. *Sendo k um número real, vamos considerar o triângulo retângulo ABC dado na Figura 2.32:*

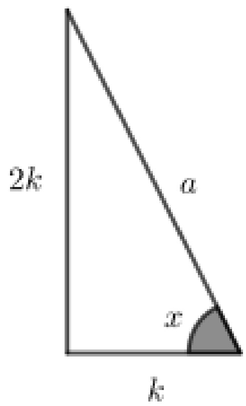


Figura 2.32: Triângulo *ABC*.

Por Pitágoras, $a = \pm\sqrt{5}k$.

Se $a = \sqrt{5}k$, *então cos(x)* = $1/\sqrt{5}$; *se* $a = -\sqrt{5}k$, *temos cos(x)* = $-1/\sqrt{5}$.

Gabarito: letra "D".

Questão 2.9.17. *(2014.1) Se k* = $\log\frac{5}{6} + \log\frac{6}{7} + \log\frac{7}{8} + \cdots + \frac{49}{50}$, *então* k^2 *vale:*

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solução. *Temos que:*

$$
\begin{aligned}
k &= \log\frac{5}{6}+\log\frac{6}{7}+\log\frac{7}{8}+\cdots+\frac{49}{50}\\
&= (\log\ 5-\log\ 6)+(\log\ 6-\log\ 7)+(\log\ 7-\log\ 8)+\cdots+(\log\ 49-\log\ 50)\\
&= \log\ 5+\log\frac{1}{50}\\
&= \log\left(5\cdot\frac{1}{50}\right)\\
&= -1\ .
\end{aligned}
$$

Logo, $k^2 = 1.$

Gabarito: letra "D"

Questão 2.9.18. *(2013.2) Ao preço de R$1,50, um vendedor ambulante pode vender 500 unidades de uma certa mercadoria que custa 70 centavos cada. Para cada centavo que o vendedor abaixa no preço, a quantidade vendida aumenta em 25 unidades. Nestas condições, para obter um lucro máximo, o vendedor deve vender a mercadoria por:*

(A) R$0,30

(B) R$0,60

(C) R$0,90

(D) R$1,10

(E) R$1,20

Solução. *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *o número de descontos de um centavo (R$0,01) na venda da mercadoria.*

Sejam R(n), C(n) e L(n) as funções, de domínio natural, que nos fornecem os valores da receita, do custo e do lucro em função de n, respectivamente.

A receita da operação é dada pelo produto do preço da mercadoria pelo número de unidades vendidas. Como para cada centavo abatido no preço, consegue-se vender 25 unidades a mais, temos

$$\begin{aligned} R(n) &= (1{,}5 - 0{,}01n) \cdot (500 + 25n) \\ &= -0{,}25n^2 + 32{,}5n + 750. \end{aligned}$$

O custo de produção das mercadorias é igual ao produto do custo de cada item, que é 70 centavos (R\$0,70), pelo número de quantidades vendidas, que é $500 + 25n$. *Assim,*

$$C(n) = 17{,}5n + 350.$$

Tendo em vista que o lucro é obtido pela diferença entre a receita e o custo, tem-se que:

$$L(n) = -0{,}25n^2 + 15n + 400.$$

Perceba que L(n) é uma função quadrática, com domínio restrito a $\mathbb{N}$. *Como o sinal do coeficiente de* n^2 *é negativo, a função lucro terá um valor máximo. Nestas condições, o valor de n para que o lucro seja máximo é*

$$n_v = = \frac{-15}{-0{,}5} = 30.$$

Logo, ao desconto de 30 centavos, o lucro da operação será máximo e, portanto, essa mercadoria deverá ser vendida por R\$1,20 a unidade. Alternativa "E".

Questão 2.9.19. *(2012.2) Sejam f, g :* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções tais que f(g(x))* $= x^2 + 2$ *e g(x)* $= 3x + 5$. *O gráfico de f(x) é tal que:*

(A) *Intersecta o eixo X em dois pontos.*

(B) *Intersecta o eixo X em um ponto.*

(C) *Não intersecta o eixo X.*

(D) *É uma reta.*

Solução. *Como* $f(3x+5) = x^2 + 2$, *substituindo x por* $-\frac{5}{3} + \frac{x}{3}$, *temos*

$$f(x) = f\left(3\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{x}{3}\right)+5\right)$$
$$= \left(-\frac{5}{3}+\frac{x}{3}\right)^2 + 2$$
$$= \frac{1}{9}\cdot(x^2-10x+43).$$

Como $\Delta = -72 < 0$, *f(x) não possui raízes reais. Geometricamente, o seu gráfico não intersecta o êxito X. Letra "C"*

Questão 2.9.20. *(2012.1) Seja* $\tau\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *a função que a cada* $n\in\mathbb{N}$ *associa a soma de seus divisores positivos, assim, se* $p\in\mathbb{N}$ *é um número primo, então* $\tau(p)=p+1$. *A partir desta definição, a soma dos divisores positivos de* p^n, *onde p é um número primo, isto é,* $\tau(p^n)$, *é :*

(A) p^n+1

(B) $p^{n+1}-1$

(C) $\frac{p^n-1}{p-1}$

(D) $\frac{p^{n+1}+1}{p-1}$

(E) $\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$

Solução. *A alternativa correta é a "E". Vamos provar por meio de indução em n,* $n\in\mathbb{N}$, *a validade dessa proposição.*

Se n = 1, vamos ter o número primo p, onde

$$r(p) = \frac{p^{1+1}-1}{p-1} = \frac{p^2-1}{p-1} = \frac{(p-1)(p+1)}{p-1} = p+1.$$

Assim, a proposição é validade no seu passo base. Supondo a validade dela para um certo n, $n\in\mathbb{N}$, *temos*

$$1+p+p^2+\cdots+p^n = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}.$$

Somando a ambos os membros da hipótese de indução o número natural p^{n+1}, *vamos ter*

$$\begin{aligned} 1+p+p^2+\cdots+p^n+p^{n+1} &= \frac{p^{n+1}-1}{p-1}+p^{n+1}\times\frac{p-1}{p-1} \\ &= \frac{p^{n+1}-1}{p-1}+\frac{p^{n+2}-p^{n+1}}{p-1} \\ &= \frac{p^{n+2}-1}{p-1}. \end{aligned}$$

Assim, a proposição é válida para n + 1 e, portanto, ela vale para todo n, $n \in \mathbb{N}$.

Questão 2.9.21. *(2011.2) Seja C_1 um cilindro de raio da base igual e 2cm, cujo volume é igual ao zera "positivo" da função $f(x) = x^2 - 38x - 80$ multiplicado por π. Seja C_2 um cone de duas folhas inscrito dentro de C_1, conforme a Figura 2.33. O volume de C_1 menos o volume de C_2 é:*

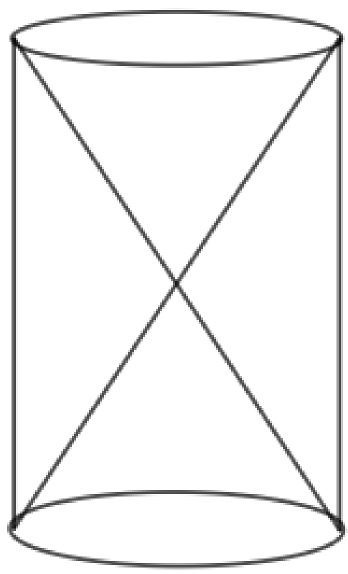


Figura 2.33: Cilindro C_1

(A) $\frac{70}{3}\pi cm^3$

(B) $\frac{80}{3}\pi cm^3$

(C) $\frac{40}{3}\pi cm^3$

(D) $\frac{100}{3}\pi cm^3$

(E) $\frac{50}{3}\pi cm^3$

Solução. *Considerando-se a equação do segundo grau* $x^2 - 38x - 80 = 0$, *temos* $\Delta = 1764$, *donde x = 40. Assim o volume de* C_1, *denotado por* V_1, *é* $V_1 = 40\pi cm^3$.

Sendo h a altura do cilindro, temos também $V_1 = 4\pi \cdot h$, *ou seja* $h = 10cm$.

Quanto ao volume do cone C_2, *vamos calcular o volume de uma das folhas e multiplicar por 2. Sendo* V_2 *o volume do cone 2, temos*

$$V_2 = 2 \cdot \left(\frac{4\pi \times 5}{3}\right) = \frac{40}{3}\pi cm^3.$$

Logo, $V_1 - V_2 = 40\pi - \frac{40}{3}\pi = \frac{80}{3}\pi$. *Alternativa "B".*

Questão 2.9.22. *(2011.1) Seja r a reta que passa pelos pontos A =* $(0,2/x_0)$ *e B =* $(2x_0, 0)$, *onde* $x_0 \neq 0$. *Seja P o ponto de interseção da reta r com o gráfico da função* $f(x) = 1/x$, *no primeiro quadrante. A área do triângulo cujos vértices são P, B e a origem é:*

(A) 1 u. a.

(B) 2 u. a.

(C) $2x_0 u.a.$

(D) $x_0 u.a.$

(E) $1/x_0 u.a.$

Solução. *Seja* $r: y = ax + b$ *a reta que passa pelos pontos A =* $(0,2/x_0)$ *e B =* $(2x_0, 0)$, *então* $a = -\frac{1}{x_0^2}$ *e* $b = \frac{2}{x_0}$. *Assim,* $r: y = -\frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{x_0}$.

Vamos agora achar as coordenadas de P. Temos que:

$$y = f(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{x_0} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 2x_0 x + x_0^2 = 0.$$

Como a única solução dessa equação do 2° grau é $x = x_0$, *a abscissa de P é* x_0.

De $y = -\frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{x_0}$, *temos* $x = -x_0^2 y + 2x_0$ *e de* $y = \frac{1}{x}$, *tem-se que* $x = \frac{1}{y}$, $y \neq 0$. *Assim,*

$$-x_0^2 y + 2x_0 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x_0}.$$

Logo, $P = \left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$.

A equação da reta que passa pela origem e pelo ponto P é s : $y = \frac{1}{x_0^2} x$.

A Figura 2.34 nos dá uma representação gráfica da situação:

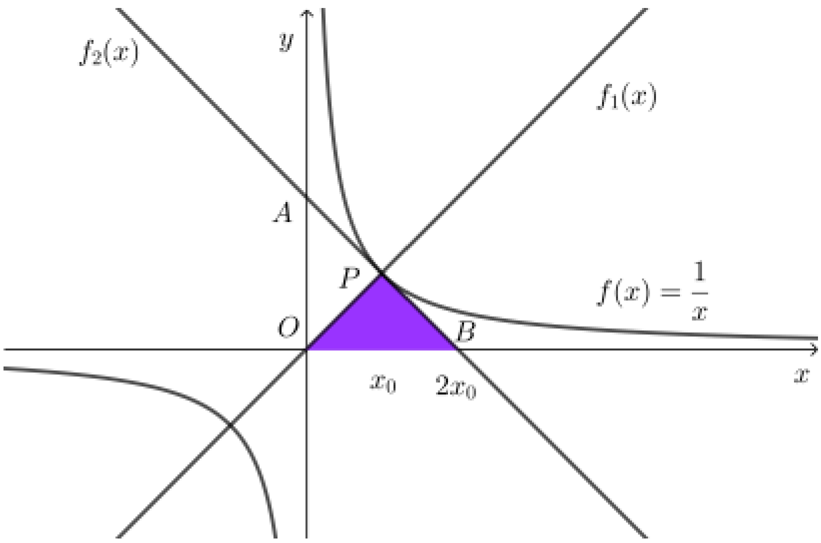


Figura 2.34: Representação gráfica.

Considerando as funções $f_1(x) = \frac{1}{x_0^2}x$ *e* $f_2(x) = -\frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{x_0}$*, a área do triângulo OPB é igual à integral definida de* $f_1(x)$*, de x = 0 até* $x = x_0$ *mais a integral definida de* $f_2(x)$*, de x = 0 até* $x = 2x_0$*. Sendo A a área procurada, temos*

$$A = \int_0^{x_0} \frac{1}{x_0^2} x dx + \int_{x_0}^{2x_0} \left(-\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2x_0^2}\right]_0^{x_0} + \left[-\frac{x^2}{2x_0^2} + \frac{2x}{x_0}\right]_{x_0}^{2x_0}$$

$$= 1 \; u.\, a.$$

Gabarito: letra "A".

Questão 2.9.23. *(2009.2) Sabe-se que o valor aproximado de* $\log_2 1{,}08$ *é* $0{,}111$. *Investindo seu capital a juros mensais de 87%, em quanto tempo, aproximadamente, você dobrará o seu capital inicial?*

(A) 10 meses.

(B) 8 meses.

(C) 11 meses.

(D) 9 meses.

(E) 7 meses.

Solução. *Chamando de C o capital investido, devemos encontrar t (tempo da operação) de modo que o montante seja 2C. Temos,*

$$2C = C \cdot (1{,}08)^t \Rightarrow 2 = (1{,}08)^t \quad \Rightarrow \quad \log_2 2 = t \cdot \log_2 (1{,}08)$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{0{,}111} \times \frac{1000}{1000} = \frac{1000}{111}$$

$$\Rightarrow t \approx 9.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra "D".

Capítulo 3

Analise das provas de concursos

Os capítulos 1 e 2 nos traz o aporte necessário para cumprirmos com o objetivo do trabalho, que é se tornar material de estudos para concursos e vestibulares. Além disso, de modo a enriquecer esta obra, fizemos uma análise das provas de concursos e do vestibular da URCA consultadas. Neste capítulo, apresentaremos os dados. Vamos tratar primeiro da análise das provas de concursos e, em seguida, do vestibular da URCA.

Iniciamos o trabalho fazendo a coleta das provas de concursos para educar em Matemática, retiramos-as dos sites PCI Concursos e QConcursos, vide referências [20] e [21]. A maioria das provas encontradas nesses sites foram usadas neste trabalho, o intuito era obter um número maior de provas, mas não foi possível, pois as bancas não disponibilizaram mais provas. A amostragem considerada é de 100 provas, distribuídas em 13 bancas, à saber, Assessoria em Organização de Concursos Públicos – AOCP, Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio – CESGRANRIO, Centro Brasileiro de Pesquisa em Avaliação e Seleção e de Promoção de Eventos – CEBRASPE (banca que sucede a CESPE/UBN), Consultoria Público – Privada – CONSULPAM, Fundação Carlos Chagas – FCC, Fundação Getúlio Vargas – FGV, Instituto Brasileiro de Apoio e Desenvolvimento Executivo – IBADE, Universidade Estadual do Ceará – UECE, Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Universidade Patativa do Assaré – UPA, Universidade Regional do Cariri – URCA e, por fim, Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista – VUNESP.

Das 100 provas, a distribuição nas 13 bancas é dada na Figura 3.1:

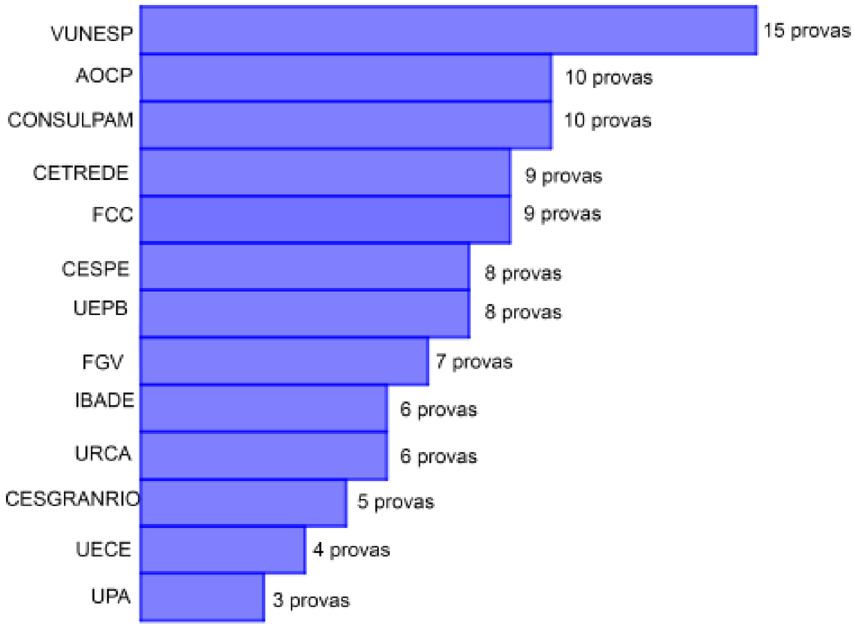


Figura 3.1: Número de provas por banca.

O passo seguinte se deu pela análise das provas, analisamos cada uma das 100 provas coletadas acerco do tópico de funções, onde foram consideradas as seguintes questões: recorrência do assunto de funções nas provas, os tipos de funções que aparecem com maior frequência e o nível de dificuldade das bancas nas questões envolvendo funções.

Ao todo foram encontradas 2710 questões especificadas de Matemática, das quais 598 correspondem a funções; percentualmente, 22% aproximadamente da prova especifica de Matemática se refere a funções. No capítulo 2, apresentamos como exemplos 146 destas questões. Por meio desses dados inicias, podemos concluir que o tópico de funções tem uma recorrência considerável nas provas de concursos para educador em Matemática, pois num contexto amplo de conteúdos de Matemática a serem cobrados numa prova de concurso, 22% é um dado que deve ser levado em consideração .

Algumas bancas merecem destaque por terem uma recorrência elevada de funções em suas provas específicas de Matemática. Veja as bancas que mais de destacaram na Figura 3.2:

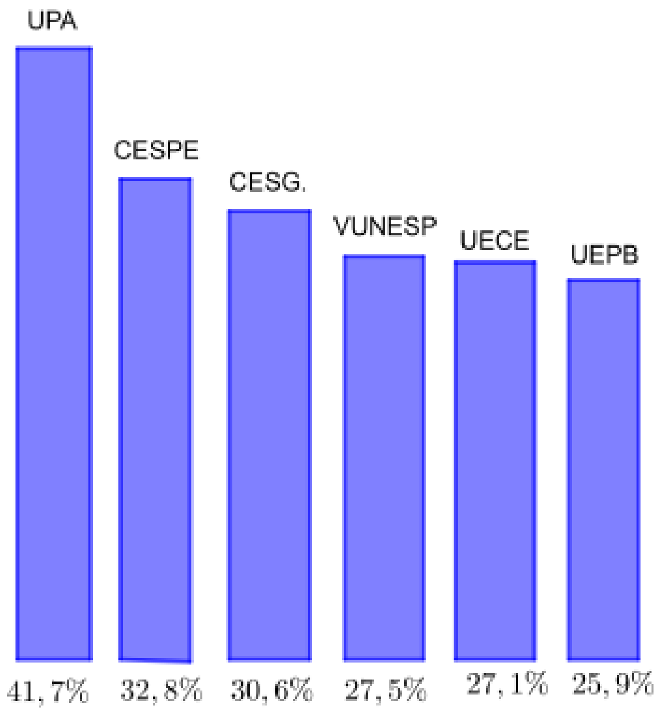


Figura 3.2: Gráfico de recorrência de algumas bancas.

Através dos dados da Figura 3.2 vemos que bancas conceituadas, tais como CESGRANRIO, CESPE e VUNESP, apresentaram percentual alto da prova específica de Matemática constando de funções. Portanto, aos que pretendem prestar concursos em uma das três bancas citadas anteriormente, este trabalho poderá ser um instrumento de estudo relevante. A UPA foi a banca que apresentou maior percentual, com uma amostragem baixa, apenas 3 provas. Ainda tentamos entrar em contato com a banca, mas não conseguimos obter mais provas. No capítulo 3, apresentamos alguns exemplos da UPA.

Agora considerando as 598 questões de funções encontradas, segue na Figura 3.3 os dados de recorrências dos tipos de funções abordados no Capítulo 2, onde temos:

FA: função afim;

FQ: função quadrática;

FM: função modular;

FE: função exponencial;

FL: função logarítmica;

FT: funções trigonométricas.

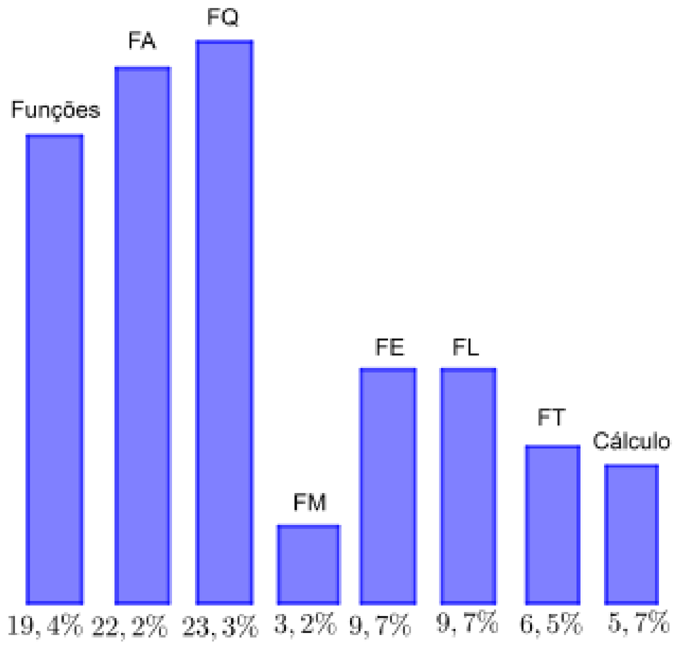


Figura 3.3: Gráfico de recorrência dos tipos de funções.

Através da Figura 3.3, podemos inferir que a função Quadrática e Função Afim são os tipos de funções que mais recaem. Função Exponencial e Função Logarítmica têm recorrênciais iguais, as duas juntas representam um percentual perto de 20%. Percentual equivalente possui as propriedades gerais das funções. Então esses eixos juntos possuem percentual que ultrapassa os 80% das questões de funções, sendo, portanto, os mais recorrentes dos tipos de funções. Para completar a nossa argumentação, ressaltemos que Função Modular, Funções Trigonométricas e Noções de Cálculo, embora apresentem recorrências inferiores , têm a sua importância no contexto dos concursos públicos, onde uma aprovação pode ser decidida por uma margem pequena.

Quanto ao nível de dificuldade das bancas, em geral, não ocorre muita variação, ou seja, na maioria delas, o nível de dificuldade das questões envolvendo funções é bem próximo. O grau de dificuldade é definido levando em consideração a contextualização do tema, o potencial de reflexão que o enunciador leva o candidato a fazer e os meios de se chegar à solução. Por exemplo, uma questão que consiste somente na aplicação direta de determinados valores, o grau de dificuldade é classificado como baixo. Por outro lado, uma questão que relaciona o tema com outros contextos, tais como a interpretação de texto, a modelagem de determinados fenômenos da natureza e a contextualização com os outros ramos da Matemática leva o candidato a montar estratégias de resolução e a empregar um raciocínio mais sofisticado. Questões desse tipo classificamos como difícil. Então, no geral, as bancas possuem questões de nível de dificuldades baixo e alto e não há diferenças consideráveis entre elas. Entretanto, uma das bancas consultadas se destaca em relação às outras, que é a CESPE.

As questões da CESPE, em sua maioria, são contextualizadas. É comum aparecer um texto introduzindo o tema trazendo informações a serem interpretadas, exigindo construções matemáticas, onde uma informação vai ligando à outra, é como uma teia de aranha, onde todas as partes da solução estão relacionadas. Um outro ponto que torna a CESPE uma banca rigorosa são as questões de certo e errado, das oito provas da banca usadas para análise, em três delas tivemos essa característica, em algumas situações uma questão errada pode anular uma certa, isso reduz bastante a interferência do fator sorte. Somando a tudo isso, tem-se toda uma prova de concurso a ser feita, assim o candidato poderá fazer a específica de Matemática cansado e com tempo curto.

Não há fórmula pronta que garanta uma aprovação em um concurso público, porém acreditamos que o estudo, principalmente das questões mais difíceis, aumenta as chances de aprovação. Por isso das 146 questões apresentadas no Capítulo 2, selecionamos as que possuem maior nível de dificuldade.

Para completar a nossa análise, apresentemos os dados sobre a análise das provas do vestibular da URCA consultadas. Primeiramente, vamos justificar a escolha. Sabemos que existem diversos tipos de vestibulares realizados ao longo do país, com várias bancas examinadores. Escolhemos a URCA, pois é uma universidade da região Cariri, mesma da UFCA. O contexto é o ideal, pois entre outros objetivos estipulados, esse trabalho poderá ser usado especificamente para o vestibular da URCA.

Conseguimos obter 24 provas do vestibular da URCA, à saber, 2020.2, 2020.1, 2019.2, 2019.1, $\cdots$ 2009.2, 2009.1, retiramos-as do site Brasil Escola, vide referencias [22]. Tentamos conseguir mais provas, mas não obtemos sucesso. O total de questões de Matemática encontradas é de 375, das quais 113 correspondem a funções, percentualmente, 30% aproximadamente. No Capítulo 2, criamos uma seção onde apresentamos como exemplos 23 questões do vestibular da URCA, vide seção 2.9. Nesta análise, não fizemos a separação por tipos de funções, como nas provas de concursos, levamos em conta se a questão analisada está relacionada com os tópicos apresentados neste trabalho.

Portanto, em meio ao resultado das análises apresentado nesse capítulo, esperamos fortalecer a relevância do trabalho no contexto dos concursos públicos e vestibulares, sobretudo no vestibular da URCA.

Capítulo 4

Considerações Finais

Ao terminar o curso de Licenciatura em Matemática, muitos estudantes se depararem com um novo desafio: a qualificação nos concursos públicos. Sabemos que estudar Matemática superior não é garantia de sucesso em exames desse tipo, pois o modelo das provas tem particularidades que precisam ser trabalhadas, tais como organização com o tempo, adaptação ao estilo de cada banca e o desenvolvimento de raciocínio rápido e simples, que vão de encontro ao que se pede. Dessa maneira, uma pesquisa na área dos concursos públicos se faz necessária para dar o aporte de que o estudante precisa.

De modo a atingir o objetivo desta dissertação, que é se tornar material de estudo para concursos públicos para educador em Matemática, realizamos uma pesquisa com 100 provas distribuídas em 13 bancas, onde no Capítulo 3 apresentamos os resultados do nosso levantamento. Através da análise realizada, podemos concluir que o tópico de funções se mostrou relevante no contexto dos concursos públicos, apresentando uma recorrência considerável nas provas específicas de Matemática. Assim por meio de funções consegue-se solucionar problemas de Geometria Analítica, Matemática Financeira, Trigonometria, áreas, Movimentos de corpo, crescimentos e decrescimentos populacionais, etc.

Nos Capítulos 1 e 2, apresentamos o material necessário para o estudante de concurso usar em seu dia a dia. Destacamos o Capítulo 2, onde apresentamos como exemplo 146 questões de concursos para educar em Matemática, retiradas de 13 banca. Procuramos selecionar questões contextualizadas que exijam soluções sofisticadas, conforme explicado no Capítulo 3. Assim, esperamos que o objetivo deste trabalho de ser tornar material de estudo para concursos para educar em Matemática possa ser atingido.

Esperamos também que com o que foi apresentado, este trabalho possa cumprir um outro objetivo estipulado, que é ser usado na educação básica. Então o professor de Matemática poderá utilizar esta dissertação nas aulas de funções no Ensino Médio como material didático e os alunos poderão estudar pelo trabalho para os vestibulares que irão fazer. Para aproximar o trabalho à educação básica, fizemos uma análise do vestibular da URCA, onde consideramos 24 provas. No Capítulo 2, criamos uma seção extra, à saber, Seção 2.9, onde apresentamos como exemplos 23 questões, algumas delas estão resolvidas de duas formas. Assim nos cursinhos preparatórios para vestibular da URCA, esta dissertação poderá ser um material específico para essa prova.

Vivemos em um país que realiza concurso públicos frequentemente. Atualmente, em 2021, estamos atravessando um período de crise sanitária com a pandemia da COVID-19, a tendência é que a procura e a concorrência sejam ainda maiores futuramente. O mesmo acontece nos vestibulares, onde esse tipo de prova representa a ponte que separa o aluno do Ensino Médio a um curso superior de que ele deseja.

Portanto, pelo que foi apresentado, a pesquisa na área dos concursos públicos e vestibulares é de suma importância, pois muitas pessoas podem ser beneficiadas, desde um professor de Matemática que seja a efetivação no ensino público a um aluno de Ensino Médio que busca uma vaga no ensino superior. Este trabalho não representa um encerramento de um curso, e sim uma continuação dele, que pode se estender na formação de muitos professores de Matemática.

Referências

[1] SILVA, J.B. ***Análise Combinatória no Contexto dos Concursos e Vestibulares***. Dissertação (Mestrado) – Universidade Regional do Cariri – UFCA, 2021

[2] BRASIL. ***Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias.*** Brasília: MEC, 2000.

[3] BONJORNO J. R.; GIOVANNI, J. R. ***Matemática Completa***. 2^a. Ed. São Paulo: FTD 2005. v. 1.

[4] DANTE, L. R. ***Matemática: contextos e aplicações.*** 1^a. ed. São Paulo: Ática, 2012. v. 1.

[5] IEZZI G.; MURAKAMI, C. ***Fundamentos de Matemática Elementar***. 3^a. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 1.

[6] LIMA, E. L. ***Curso de Análise***. 14^a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1.

[7] LIMA, E. L. ***Números e Funções Reais***. 1^a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[8] NETO, A. A. ***Matemática Financeira e Suas Aplicações***. 12^a. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

[9] DOLCE O.; IEZZI, G. M. C. ***Fundamentos de Matemática Elementar***. 9^a. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 2.

[10] NETO, A. C. M. ***Geometria***. 1^a. ed. Fortaleza: SBM, 2013.

[11] BONJORNO J. R.; GIOVANNI, J. R. ***Matemática Completa***. 2^a. ed. São Paulo: FTD, 2005. v. 2.

[12] DANTE, L. R. ***Matemática: contextos e aplicações***. 1^a. ed. São Paulo: Ática, 2012. v. 2.

[13] IEZZI, G. ***Fundamentos de Matemática Elementar***. 2^a. ed. São Paulo: Atual, 2977. v. 3.

[14] BONJORNO J. R.; GIOVANNI, J. R. ***Matemática Completa***. 2^a. ed. São Paulo: FTD, 2005. v. 3.

[15] DANTE, L. R. ***Matemática: contextos e aplicações***. 1^a. ed. São Paulo: Ática, 2012. v. 3.

[16] GUIDORIZZI, H. L. ***Um curso de Cálculo***. 5^a. ed. São Paulo: LTC, 2001. v. 1.

[17] FLEMMING D. M.; GONÇALVES, M. B. ***Cálculo A***. 6^a. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

[18] STEWART, J. ***Cálculo***. *Tradução de EZ2 Translatea*. 1^a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.

[19] THOMAS, G. B. ***Cálculo***. *Tradução de Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo*. 11^a. ed. São Paulo: Pearson, 2009. v. 1.

[20] PCI Concursos. ***pciconcursos***. *Página inicial*. 2021. Acesso em: 26 de fev. de 2021. Disponível em <www.qconcursos.com>.

[21] QConcursos. ***qconcursos***. *Página inicial*. 2021. Acesso em: 26 de fev. de 2021. Disponível em: <www.qconcursos.com>.

[22] Brasil Escola. ***brasilescola***. *Página inicial*. 2021. Acesso em: 25 de Jun. de 2021. Disponível em: <brasilescola.vol.com.br>.