UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

RODRIGO CESAR LAGO

ATIVIDADES PARA INVESTIGAR TEOREMAS GEOMÉTRICOS COM O GEOGEBRA

CURITIBA

2024

RODRIGO CESAR LAGO

ATIVIDADES PARA INVESTIGAR TEOREMAS GEOMÉTRICOS COM O GEOGEBRA

Activities to investigate geometric theorems with GeoGebra

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3827>.
Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós.

CURITIBA

2024

4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

RESUMO

Apresentamos neste recurso educacional atividades desenvolvidas com o GeoGebra para investigar teoremas geométricos. As atividades apresentam roteiros descritivos que possibilitam explorar a inscrição de quadriláteros em uma circunferência, o comprimento das bissetrizes internas de um triângulo isósceles, bem como as propriedades da reta de Simson-Wallace. Concluímos que as atividades propostas estão em consonância com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular - BNCC sobre a experimentação no ensino de matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Quadriláteros inscritíveis; Reta de Simson-Wallace; Teorema de Steiner-Lehmus; Triângulo isósceles.

ABSTRACT

This educational resource presents activities developed with GeoGebra to investigate geometric theorems. The activities include descriptive guides that allow exploration of the inscription of quadrilaterals in a circle, the length of the internal angle bisectors of an isosceles triangle, and the properties of the Simson-Wallace line. The proposed activities align with the guidelines set by the National Common Curricular Base - BNCC regarding experimentation in mathematics education at the Basic Education level.

Keywords: Inscribed quadrilaterals; Simson-Wallace line; Steiner-Lehmus theorem; Isosceles triangle.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 ATIVIDADES INVESTIGATIVAS COM O GEOGEBRA

Apresentamos neste recurso educacional teoremas que geralmente não são objeto de estudo na Educação Básica e no Ensino Superior. Contudo, os recursos geométricos empregados, assim como as definições e teoremas auxiliares, fazem parte dos currículos de matemática. Desta forma, abordamos dinamicamente, usando o software gratuito GeoGebra, três desses teoremas: quadriláteros inscritíveis, Simson-Wallace e Steiner-Lehmus (Lago; Nós, 2020; Nós: Lago, 2019, 2020). Nas abordagens, propomos para os professores de matemática atividades de investigação geométrica. Antes disso, discorremos sobre investigação em matemática e investigação com recursos tecnológicos e detalhamos o software utilizado no processo investigativo.

1.1 INVESTIGAÇÃO EM MATEMÁTICA

Progressivamente, os currículos de matemática estão incluindo atividades de caráter investigativo. Essa concepção de currículo propicia aos estudantes o aprimoramento do raciocínio lógico e a capacidade de trabalhar de maneira autônoma. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, n.p):

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), atividades investigativas no ensino de matemática contribuem à formação do cidadão, desenvolvem metodologias que enfatizam a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia, advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

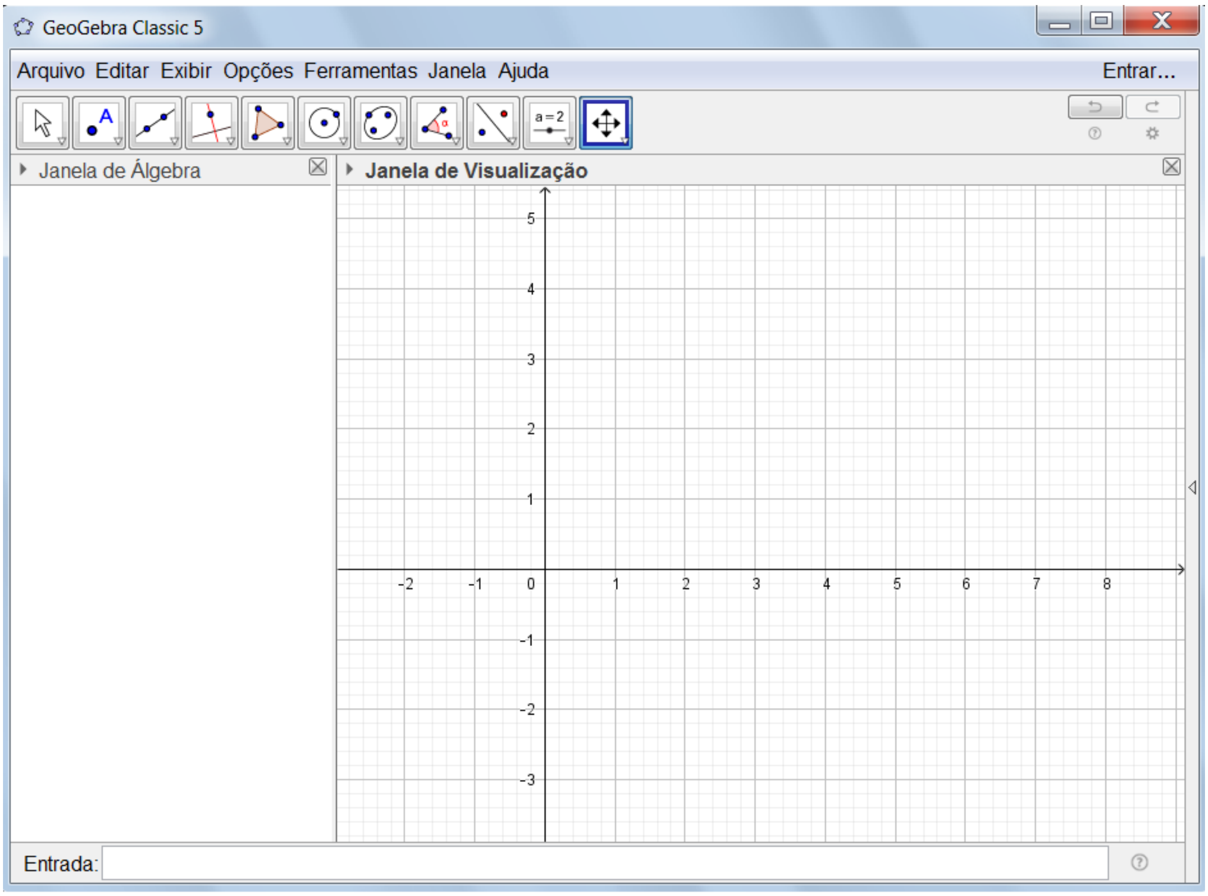
Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), na investigação de um determinado assunto em matemática o estudante assume uma postura científica, de pesquisador, formulando conjecturas acerca do que está investigando. Desse modo, o ato de investigar envolve naturalmente conceitos, procedimentos e representações, mas o que realmente caracteriza uma investigação matemática é o estilo de conjecturar, testar os resultados obtidos e finalmente demonstrá-los. Considerando a investigação como um problema em aberto, o desenvolvimento e a busca por resultados ocorre de forma diferente do que na resolução de um simples exercício. Em um contexto investigativo, o objeto não é explicitamente exposto pelo professor, somente o método de investigação é explicado.

1.2 O SOFTWARE GEOGEBRA

Desenvolvido inicialmente por Markus Hohenwarter (1976-), um professor de matemática austríaco, o GeoGebra é um software de licença livre para o desenvolvimento tanto profissional quanto didático da geometria, apresentando uma interface simples de fácil manipulação por parte do usuário.

Escrito na linguagem de programação Java, o GeoGebra pode ser operado em diversas plataformas e no decorrer dos anos foi aperfeiçoado por inúmeras versões. A interface de trabalho do GeoGebra, conforme ilustra a Figura 1.1, é composta por campos bem definidos: do lado esquerdo temos a janela de álgebra e do lado direito os eixos coordenados na janela de visualização 2D. Além disso, encontramos na parte superior o menu principal e a barra de ferramentas de desenho, enquanto que no rodapé da janela temos o campo denominado entrada.

Figura 1.1 – Interface do software GeoGebra 2D

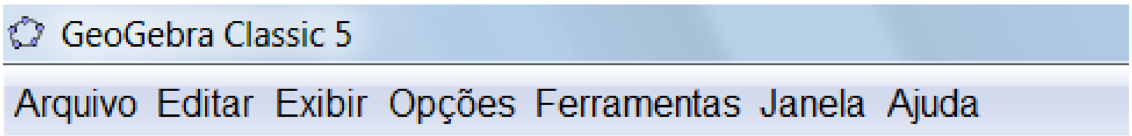


Fonte: GeoGebra (2024).

O menu principal, ilustrado na Figura 1.2, tem uma aparência muito similar aos softwares que funcionam no ambiente Windows: há sete ícones que possibilitam o acesso a uma série de novos comandos.

Já a barra de ferramentas, representada na Figura 1.3, é composta por onze ícones que permitem acessar uma grande variedade de comandos. Ao clicarmos em um desses ícones, uma

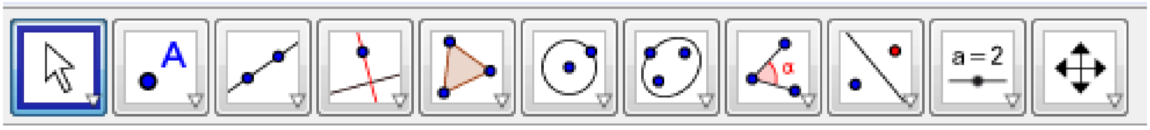
Figura 1.2 – Menu principal do software GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2024).

paleta de comandos é aberta e, ao posicionarmos o cursor do mouse sobre o ícone desejado, o GeoGebra exibe o nome do objeto e como devemos proceder para desenhá-lo na janela de visualização 2D.

Figura 1.3 – Barra de ferramentas do GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2024).

Na parte inferior da tela do GeoGebra, no campo denominado "Entrada", ilustrado na Figura 1.4, podemos digitar os comandos ao invés de selecioná-los através dos ícones.

Figura 1.4 – Entrada de comandos do GeoGebra

Fonte: GeoGebra (2024).

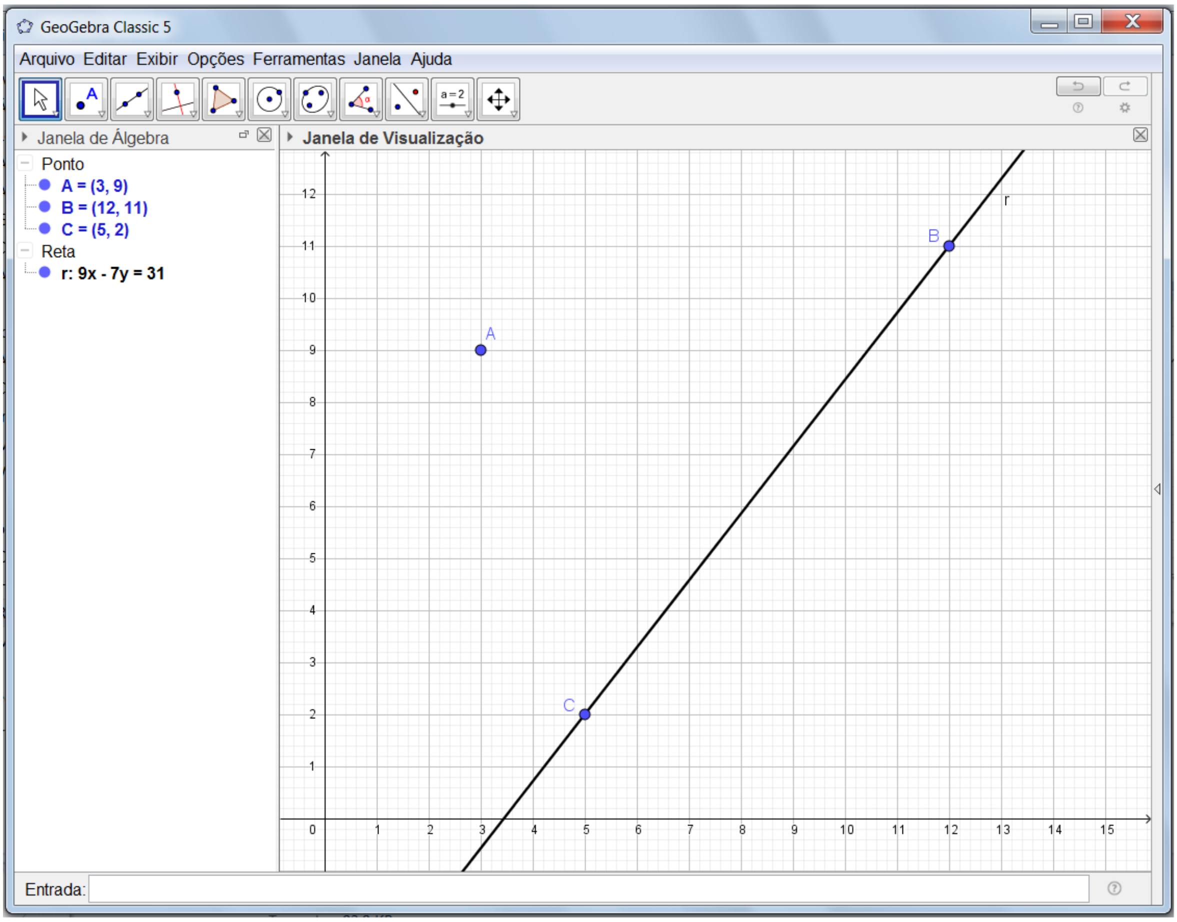
As janelas de álgebra e de visualização 2D, ilustradas na Figura 1.1, permitem que um mesmo objeto seja mostrado em diferentes representações. Exemplificando, quando representamos graficamente pontos, retas, circunferências etc, na janela de visualização 2D, a janela de álgebra automaticamente mostra as coordenadas cartesianas dos pontos, as equações associadas às retas, às circunferências etc. O GeoGebra é uma notável ferramenta para o desenho geométrico justamente devido à interação entre essas duas janelas, ou seja, um objeto criado via janela de visualização 2D automaticamente já está relacionado na janela de álgebra e vice-versa. Na Figura 1.5, mostramos a interação entre as janelas de visualização 2D e de álgebra.

1.3 INVESTIGAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra pode substituir satisfatoriamente um caderno de desenho geométrico, sendo uma das suas inúmeras vantagens a possibilidade de manipulação da construção sem a perda do vínculo geométrico (Gerônimo; Barros; Franco, 2010).

De acordo com Vaz (2012), o GeoGebra permite uma boa interatividade, possibilitando a releitura de teoremas, o teste de hipóteses e a construção de conjecturas; a interação entre as janelas de álgebra e de visualização 2D permite ao usuário relacionar as várias faces de um mesmo objeto matemático.

Figura 1.5 – Interação entre as janelas do GeoGebra



Fonte: Os autores.

Nas atividades de investigação que propomos a seguir, utilizamos a versão GeoGebra Classic 5.0.423.0-d. O atalho para o download do software bem como informações sobre o mesmo podem ser obtidos em GeoGebra (2024).

1.4 PRIMEIRA ATIVIDADE INVESTIGATIVA: QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero ser inscritível é possuir ângulos opostos suplementares (Dolce; Pompeo, 2005). Nesta primeira atividade, representamos um quadrilátero graficamente e investigamos a inscrição do mesmo em uma circunferência.

Desenvolvimento da atividade

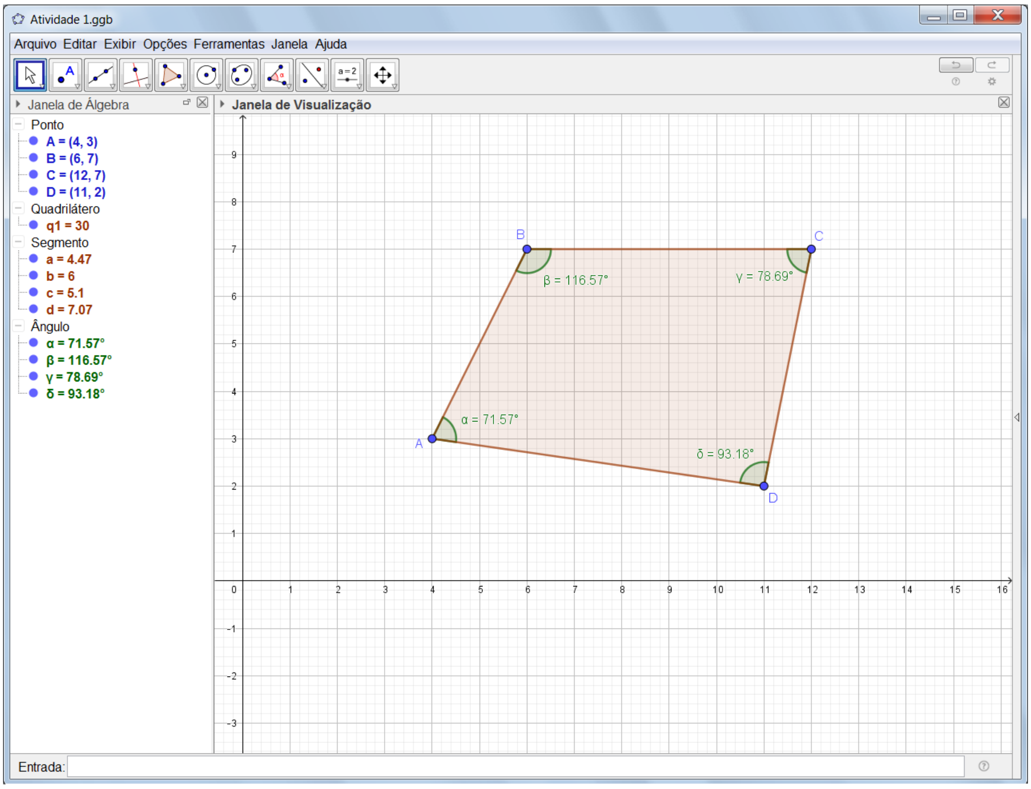
1. Abra um novo arquivo no GeoGebra, selecione a opção “GRAVAR” no menu principal e nomeie como Atividade 1.

2. Na barra de ferramentas, selecione o botão “PONTO” e marque na janela de visualização $A = (4, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (12, 7)$ e $D = (11, 2)$.

3. Selecione a ferramenta “POLÍGONO” e desenhe o quadrilátero $ABCD$. Com o botão direito do mouse, clique sobre cada um dos lados, selecione a opção “EXIBIR RÓTULO” e desmarque a, b, c, d.

4. Com a ferramenta “ÂNGULO”, determine a medida de cada ângulo interno do quadrilátero $ABCD$, como na Figura 1.6. Importante: selecione os pontos no sentido horário.

Figura 1.6 – Ângulos internos do quadrilátero $ABCD$



Fonte: Os autores.

5. Agora selecione “CÍRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS” e marque os pontos A, B e D, defindo assim a circunferência λ, conforme ilustrado na Figura 1.7.

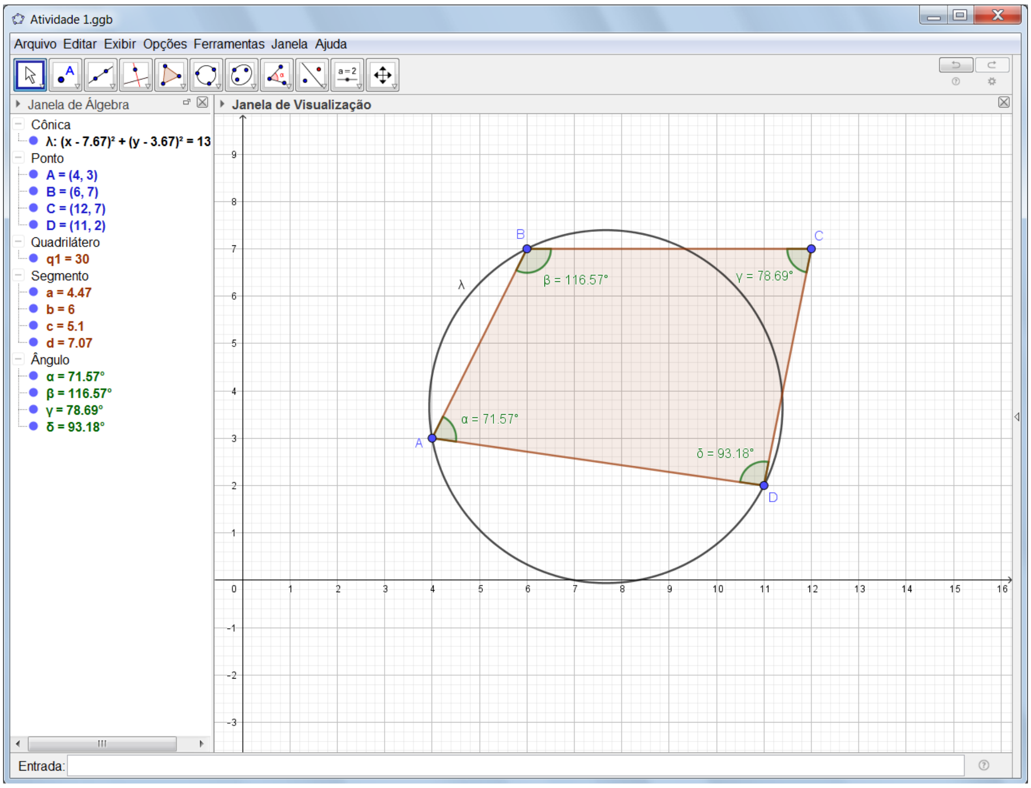
6. Usando o botão “RELAÇÃO ENTRE OBJETOS”, indicado na Figura 1.8, verifique que o ponto C não pertence à circunferência λ.

7. No menu principal, selecione em “EXIBIR” o item PLANILHA e clique com o botão direito do mouse no ângulo $\beta = A\widehat{B}C$ e escolha a opção “GRAVAR PARA A PLANILHA DE CÁLCULO”. Repita o procedimento para o ângulo $\delta = A\widehat{D}C$. Observe que os valores de β aparecem na coluna A e os de δ na coluna B.

8. Movimente os pontos A e C aleatoriamente e observe, na planilha, os valores de β e δ.

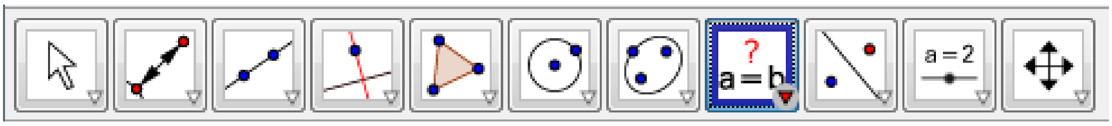
9. Na coluna C da planilha, digite na célula $C2$ o comando, $= SOMA(A2 : B2)$ e arraste verticalmente para baixo. Na Figura 1.9, temos um exemplo do rol de valores dos ângulos β e δ.

Figura 1.7 – Quadrilátero $ABCD$ e a circunferência λ



Fonte: Os autores.

Figura 1.8 – Comando “RELAÇÃO ENTRE OBJETOS” na barra de ferramentas



Fonte: GeoGebra (2024).

10. Nessa condição, os ângulos internos β e δ do quadrilátero $ABCD$ são suplementares?

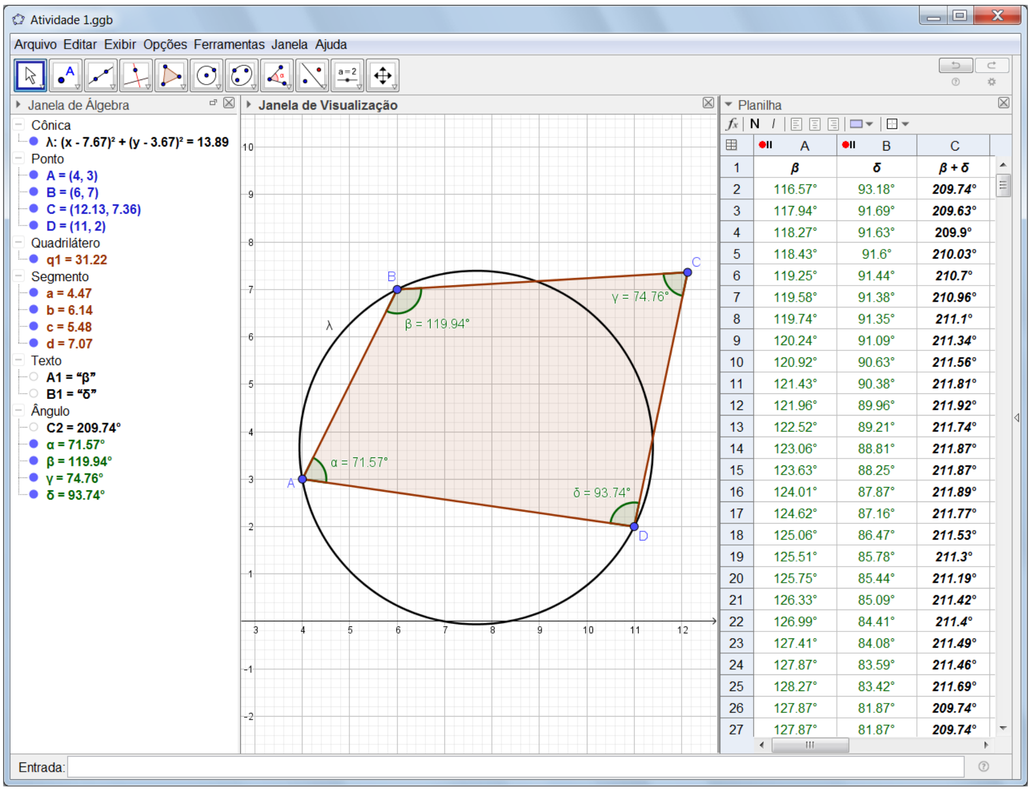
11. Escolha agora a ferramenta “VINCULAR/DESVINCULAR PONTO”, selecione o ponto C e a circunferência λ. Com o botão direito do mouse clique no ponto C, escolha a opção “PROPRIEDADES” e marque a opção “DEFINIR COMO OBJETO AUXILIAR”.

12. Na planilha, apague os dados das colunas A e B clicando com o botão direito do mouse sobre a coluna e escolhendo a opção “APAGAR OBJETOS”.

13. Por fim, movimente o ponto C e observe as medidas dos ângulos β e δ sendo compiladas na planilha, como mostra a Figura 1.10.

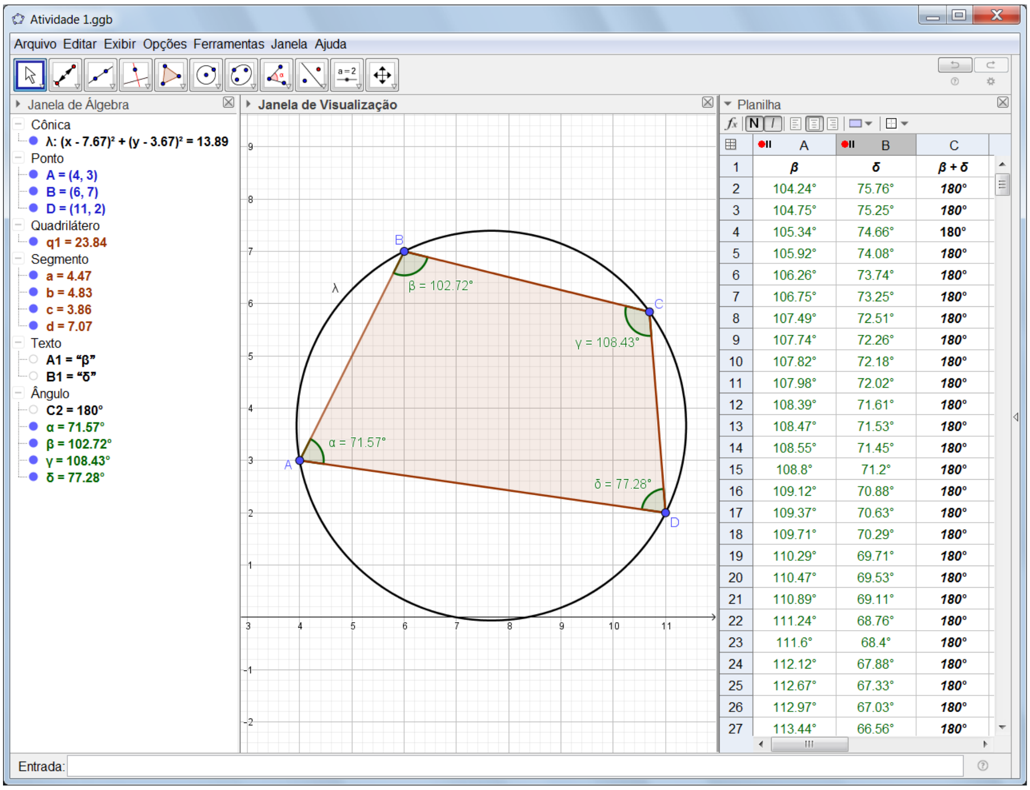
14. Nesse caso, quanto vale a soma dos ângulos opostos β e δ do quadrilátero $ABCD$?

Figura 1.9 – Valores aleatórios dos ângulos β e δ no quadrilátero $ABCD$



Fonte: Os autores.

Figura 1.10 – Ângulos suplementares β e δ do quadrilátero $ABCD$



Fonte: Os autores.

1.5 SEGUNDA ATIVIDADE INVESTIGATIVA: PROPRIEDADES DA RETA DE SIMSON-WALLACE

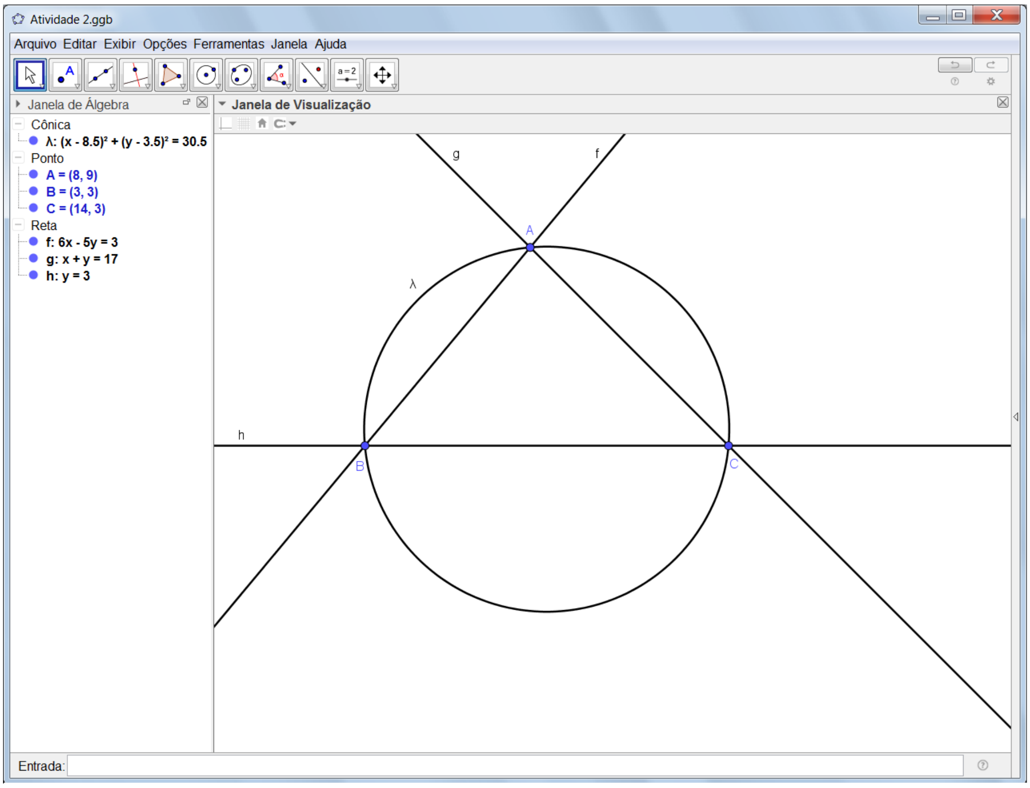
O objetivo principal desta atividade é construir e explorar dinâmicamente a reta de Simson-Wallace e suas propriedades.

1.5.1 A RETA DE SIMSON-WALLACE

Desenvolvimento da atividade

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra e o nomeie como Atividade 2.
2. Na barra de ferramentas, selecione o botão "PONTO" e marque na janela de visualização três pontos não colineares A, B e C. Em seguida, escolha a ferramenta "RETA" e trace nessa ordem as retas $AB = f$, $AC = g$ e $BC = h$.
3. Selecione o botão "CÍRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS" e marque os vértices A, B e C do triângulo, determinando então a circunferência λ circunscrita a ABC. Oculte os eixos coordenados e a malha na janela de visualização selecionando os botões "EXIBIR OU ESCONDER OS EIXOS COORDENADOS" e "EXIBIR OU ESCONDER MALHA". Na Figura 1.11, exemplificamos uma possível construção do triângulo ABC.

Figura 1.11 – Exemplo de um triângulo ABC inscrito na circunferência λ



Fonte: Os autores.

4. Selecione a ferramenta "PONTO EM OBJETO" e marque na circunferência λ o ponto D diferente de A, B e C.

5. Agora selecione o botão "PERPENDICULAR" e trace, por D, perpendiculares relativas às retas f, g e h nessa ordem.

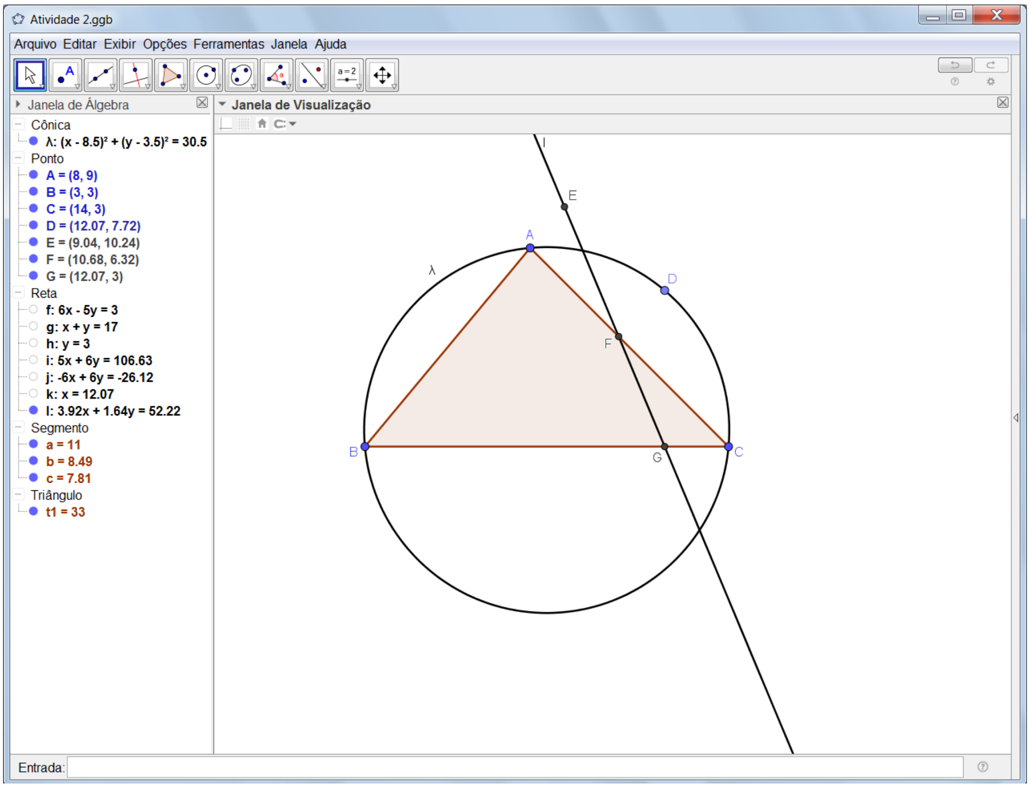
6. Com o botão "INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS", marque a intersecção das perpendiculares i, j e k com as retas f, g e h respectivamente nessa ordem, definindo assim os pontos E, F e G.

7. Com o botão "RETA", selecione os pontos E, F e G e trace a reta l que passa por eles.

8. Para uma melhor visualização da construção geométrica, selecione com o botão direito do mouse cada uma das retas f, g, h, i, j e k e desmarque a opção "EXIBIR OBJETO".

9. Com a ferramenta "POLÍGONO", desenhe o triângulo ABC e, com o botão direito do mouse, selecione os segmentos AB, BC e AC e desmarque a opção "EXIBIR RÓTULO". Temos na Figura 1.12 um exemplo de toda a construção geométrica até então realizada.

Figura 1.12 – Triângulo ABC inscrito na circunferência λ e a reta l



Fonte: Os autores.

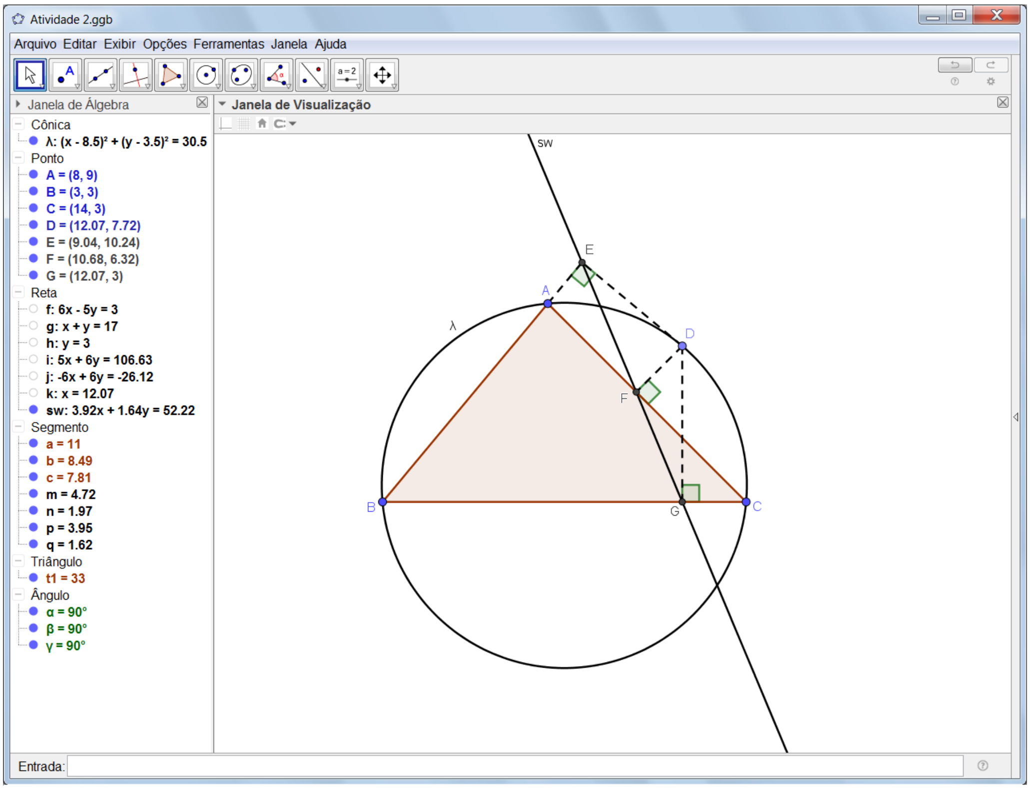
10. Selecione o botão "SEGMENTO" e determine os segmentos DG, DF, DE e AE. Com o botão direito do mouse, clique em cada um dos segmentos DG, DF, DE e AE e desmarque a opção "EXIBIR RÓTULO". Novamente com o botão direito do mouse,

selecione “PROPRIEDADES” e, em seguida, “ESTILO” e modifique para tracejado cada um desses segmentos.

11. Com o botão “ÂNGULO”, selecione no sentido horário e na sequência os pontos A, E e D, em seguida C, F e D e por fim C, G e D. Com o botão direito do mouse, selecione os ângulos $A\widehat{E}D$, $C\widehat{F}D$ e $C\widehat{G}D$ e desmarque a opção “EXIBIR RÓTULO”.

12. Renomeie a reta l para sw clicando com o botão direito do mouse e selecionando a opção “RENOMEAR”. A reta sw é a reta de Simson-Wallace e a construção assim definida está ilustrada na Figura 1.13.

Figura 1.13 – A reta sw de Simson-Wallace



Fonte: Os autores.

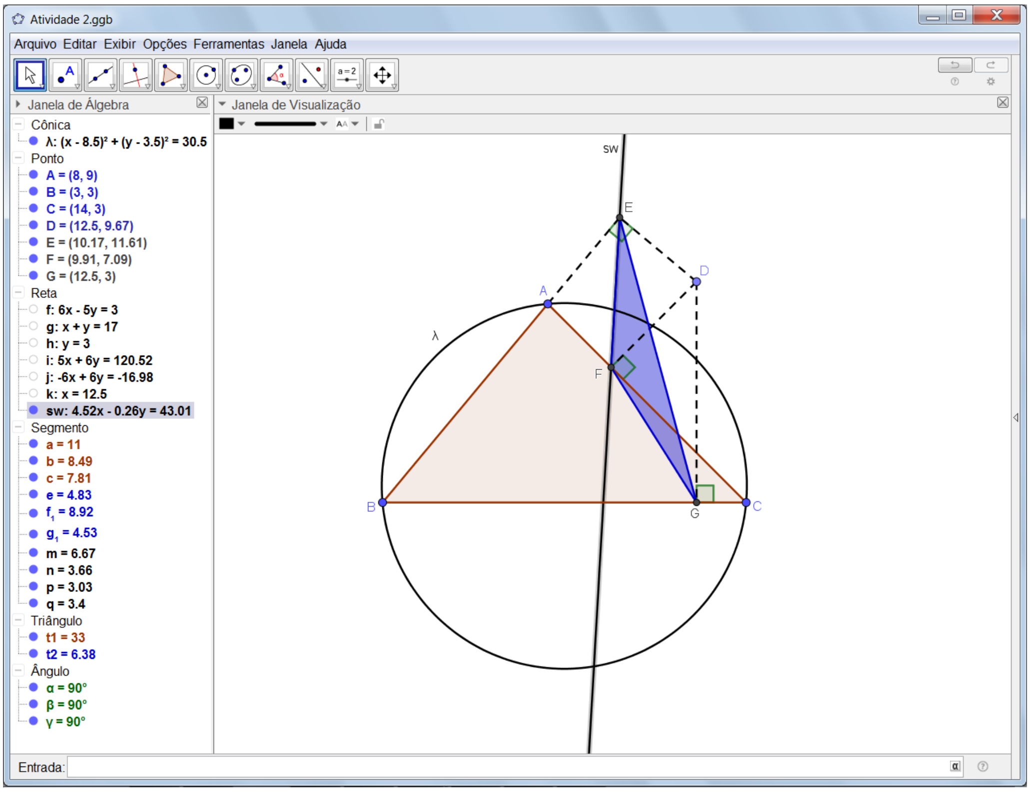
13. Movimente o ponto D sobre a circunferência λ e observe o comportamento dos ângulos retos $A\widehat{E}D$, $C\widehat{F}D$ e $C\widehat{G}D$. Ocorre alguma modificação na medida desses ângulos ao movimentarmos o ponto D? Movimentando os vértices A, B e C do triângulo, a reta sw de Simsom-Wallace se mantém?

14. Agora com a ferramenta “POLÍGONO”, selecione sequencialmente os pontos E, F, G e E. Com o botão direito do mouse, clique sobre e, f_1 e g_1 (rótulos que aparecem na janela de álgebra quando usamos a ferramenta “POLÍGONO”) e desmarque a opção “EXIBIR RÓTULO”.

15. Clique com o botão direito do mouse sobre o triângulo t_2 na janela de álgebra ou sobre EFG na janela de visualização, e selecione em "PROPRIEDADES" a opção "COR" e modifique.

16. Com a opção "VINCULAR / DESVINCULAR PONTO", desvincule o ponto D da circunferência λ e observe o triângulo pedal EFG, conforme mostra a Figura 1.14. Movimente o ponto D e observe outros triângulos pedais.

Figura 1.14 – Triângulo pedal EFG



Fonte: Os autores.

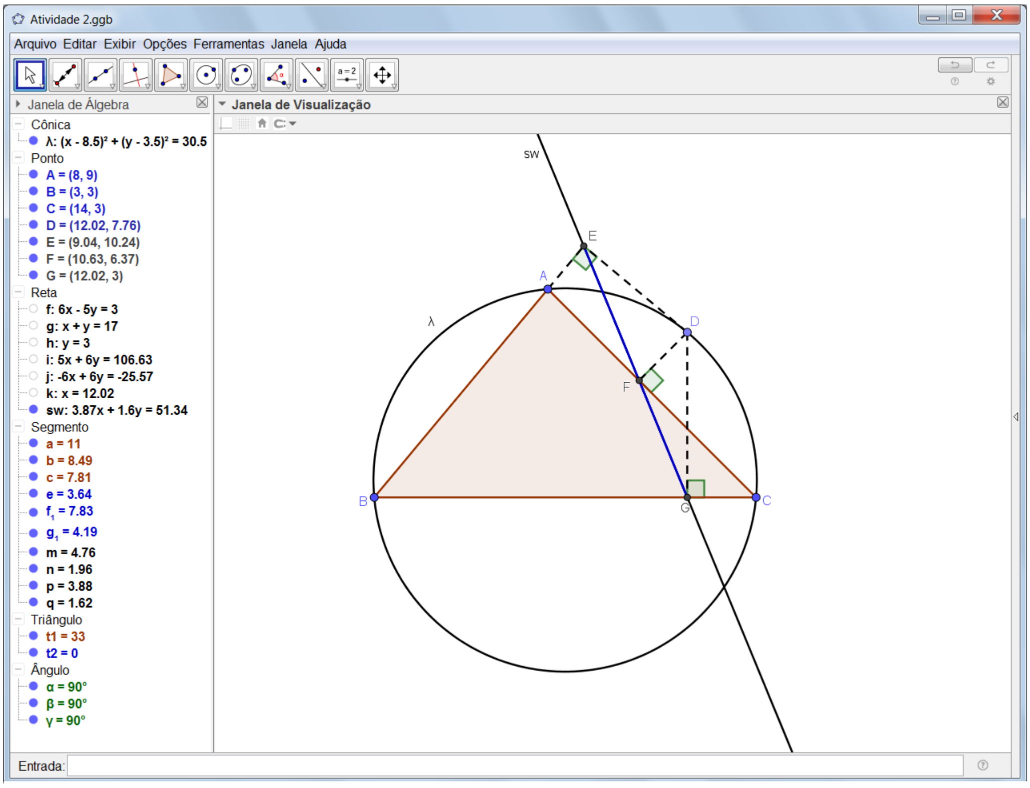
17. Vinculando novamente o ponto D à circunferência λ, obtemos o triângulo pedal EFG degenerado. A Figura 1.15 mostra o triângulo pedal EFG degenerado na janela de visualização e $t_2 = EFG$ na janela de álgebra.

18. Aproveitando a característica dinâmica do GeoGebra, desmarque na janela de álgebra o triângulo $EFG = t_2$, selecione com o botão direito do mouse o ponto D e escolha a opção "ANIMAR". Na janela de visualização há um botão de *p*lay - pause no canto inferior esquerdo. Clique nesse botão e manipule o movimento da reta sw de acordo com a maneira que desejar.

19. Pause a animação e marque a opção "HABILITAR RASTRO", clicando com o botão direito do mouse sobre sw.

20. Em seguida, clique no botão *p*lay e deixe o ponto D se movimentar na circunferência λ, pause novamente a animação e observe o envelope das retas de Simson-Wallace formando

Figura 1.15 – Triângulo pedal degenerado EFG



Fonte: Os autores.

a curva denominada deltóide de Steiner. Na Figura 1.16, optamos por modificar a cor e a espessura da reta sw para uma melhor visualização. Para fazer o mesmo, marque a reta sw com o botão direito do mouse, selecione “PROPRIEDADES” e em seguida “COR” e “ESTILO”. Salve e feche o arquivo.

1.5.2 A RETA DE SIMSON-WALLACE E O ORTOCENTRO DO TRIÂNGULO

Exploramos agora o teorema que relaciona o ortocentro do triângulo inscrito ABC e a reta de Simson-Wallace.

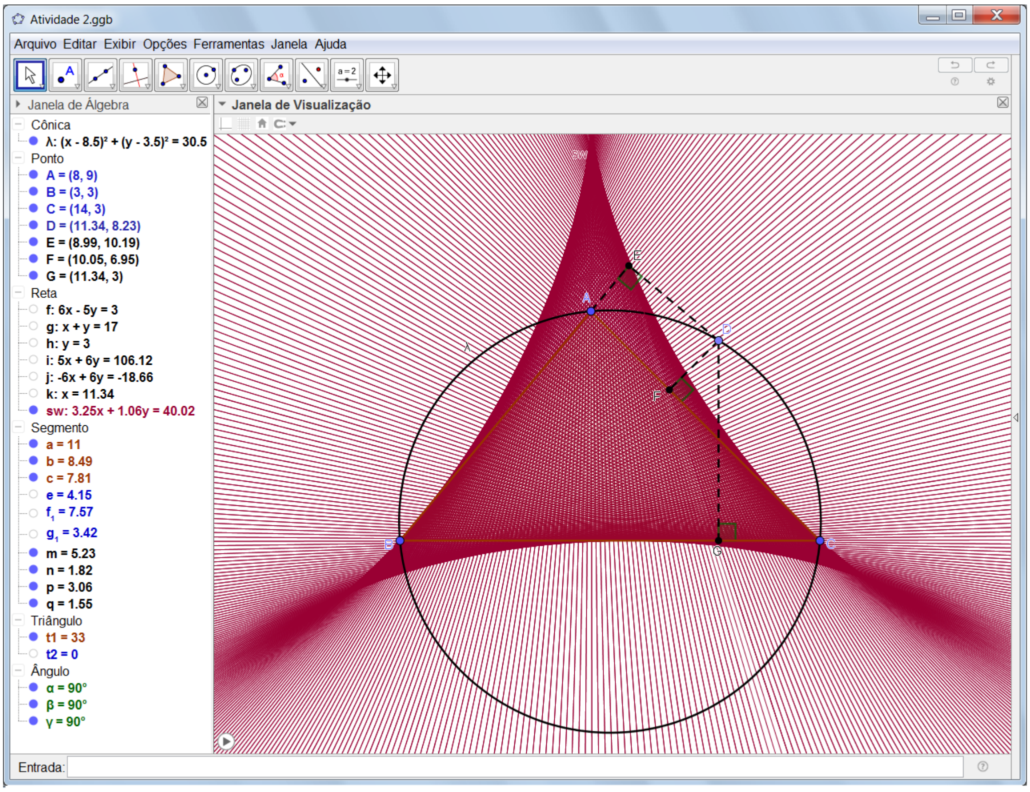
Desenvolvimento da atividade

1. Abra o arquivo Atividade 2.ggb e grave como Atividade 2a.ggb.

2. Com o botão “RETA PERPENDICULAR”, trace a perpendicular ao segmento BC passando por A e a perpendicular passando por C relativa ao lado $\overline{AB}$. Em “INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS”, determine o ponto H, ortocentro do triângulo ABC.

3. Com o botão “SEGMENTO”, trace o segmento HD e, com o botão “INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS”, defina o ponto I de intersecção entre a reta sw e o segmento HD.

Figura 1.16 – Envelope das retas de Simson-Wallace e o deltóide de Steiner



Fonte: Os autores.

4. Para finalizar, selecione "DISTÂNCIA" e determine o comprimento dos segmentos HI e ID, confirmando assim que I é o ponto médio do segmento HD.

5. Selecione com o botão direito do mouse as perpendiculares r e l e oculte essas retas com a opção "EXIBIR OBJETO". Ainda com o botão direito do mouse, marque o segmento HD e retire o rótulo s com "EXIBIR RÓTULO".

6. Movimentando o ponto D, observe que o ponto I se mantém como ponto médio. A Figura 1.17 ilustra um exemplo de configuração da reta sw, do ponto médio I e do segmento HD. Salve e feche o arquivo.

1.5.3 O ÂNGULO FORMADO POR DUAS RETAS DE SIMSON-WALLACE

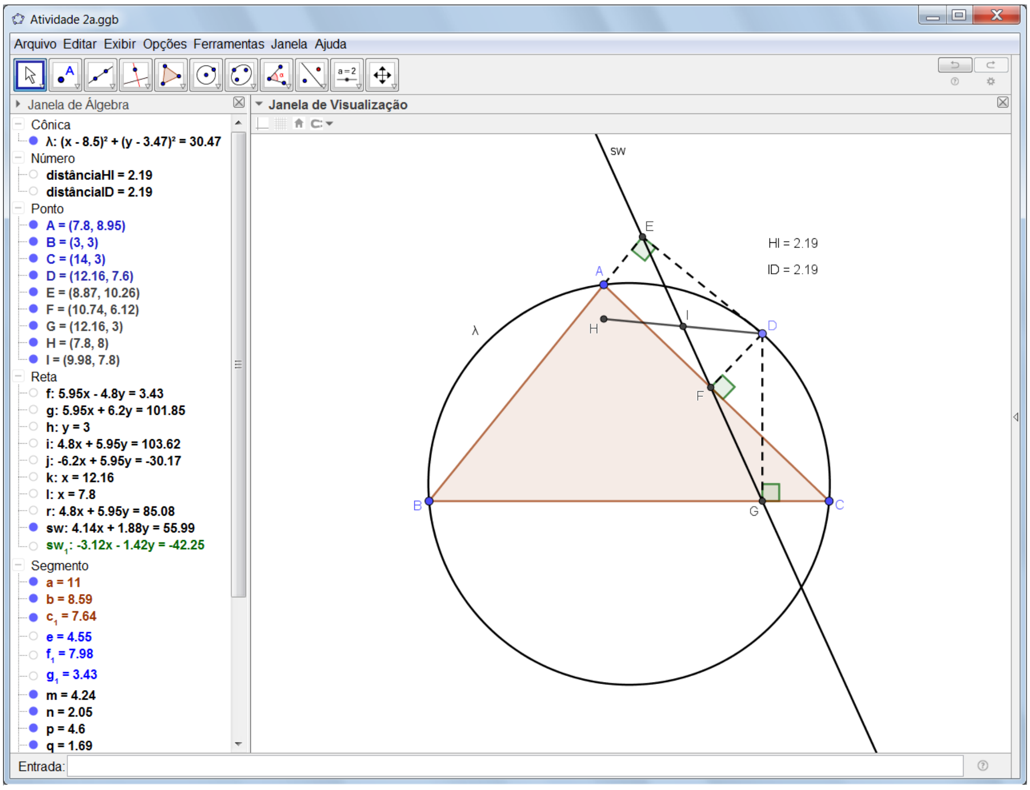
Investigamos nesta atividade o teorema que relaciona o ângulo formado por duas retas de Simson-Wallace e o ângulo inscrito na circunferência que circunscreve um triângulo ABC.

Desenvolvimento da atividade

1. Abra o arquivo Atividade 2a.ggb e grave como Atividade 2b.ggb.

2. Escolha o botão "PONTO SOBRE UM OBJETO" e defina o ponto J pertencente à circunferência λ.

Figura 1.17 – Reta de Simson-Wallace sw e o ponto médio I



Fonte: Os autores.

3. Com o botão "RETA PERPENDICULAR", trace por J as perpendiculares relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ nessa ordem.

4. Marque a intersecção das perpendiculares que passam por J com os lados do triângulo ABC, começando pelo segmento AB e em seguida o segmento BC. Utilize o botão "INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS". Em seguida, oculte essas perpendiculares desmarcando-as na janela de álgebra ou clicando com o botão direito do mouse sobre cada perpendicular e escolhendo a opção "EXIBIR OBJETO".

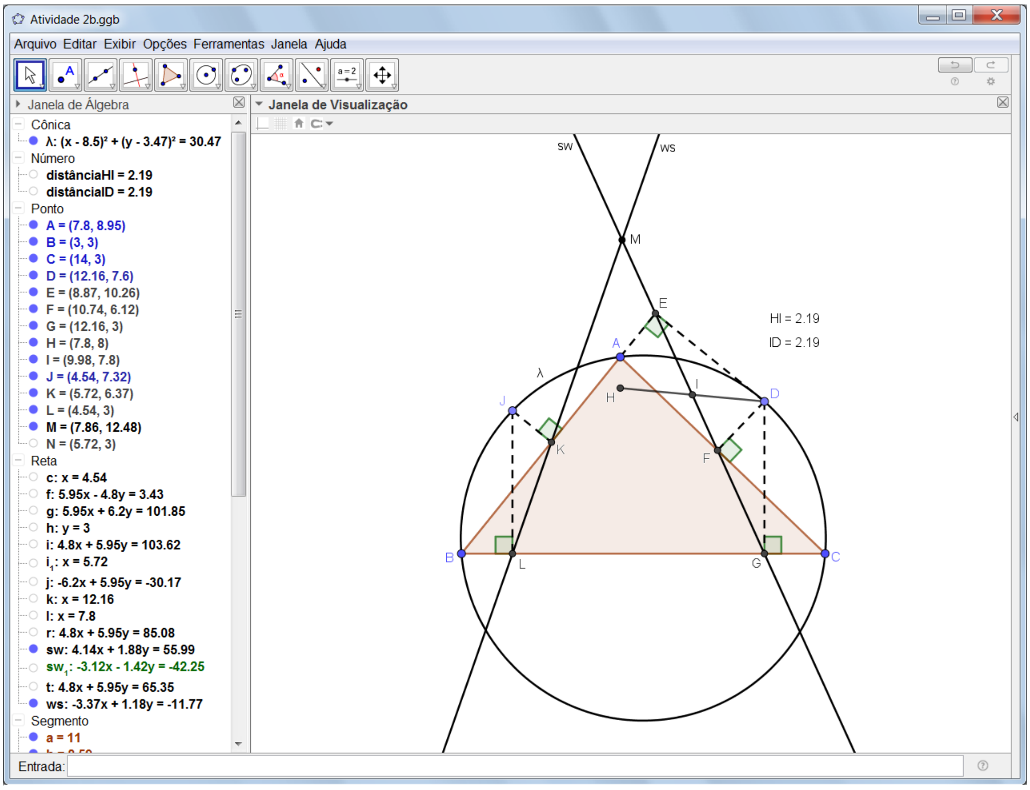
5. Selecione a ferramenta "SEGMENTO" e defina os segmentos JK e JL. Logo em seguida, clique com o botão direito do mouse e desmarque a opção "EXIBIR RÓTULO" e modifique o "ESTILO" de cada um desses segmentos para tracejado.

6. Com o botão "ÂNGULO", no sentido horário, determine os ângulos retos $A\widehat{K}J$ e $J\widehat{L}B$. Em cada ângulo, selecione a opção "EXIBIR RÓTULO" e retire o rótulo.

7. Por fim, selecione "RETA" e trace a reta de Simson-Wallace que passa por L e K. Renomeie essa reta como ws e com o botão "INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS" selecione sw e ws definindo assim o ponto de intersecção M, conforme ilustrado na Figura 1.18.

8. Com o botão "ÂNGULO", defina o ângulo entre as retas sw e ws, selecionando nesta ordem os pontos K, M e E.

Figura 1.18 – As retas sw e ws de Simson-Wallace



Fonte: Os autores.

9. A partir do vértice B, trace os segmentos BJ e BD. Com o botão "ÂNGULO", defina o ângulo $D\widehat{B}J$.

10. Para melhorar a visualização, mantenha apenas o triângulo ABC, a circunferência λ, os segmentos BJ e BD e as retas sw e ws. Oculte os demais objetos, clicando com o botão direito do mouse e escolhendo a opção "EXIBIR OBJETO".

11. Se julgar necessário, clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo inscrito $D\widehat{B}J$, selecione "PROPRIEDADES" e edite o ângulo. O mesmo procedimento pode ser realizado para o ângulo entre as retas sw e ws, obtendo assim uma construção similar à ilustrada na Figura 1.19.

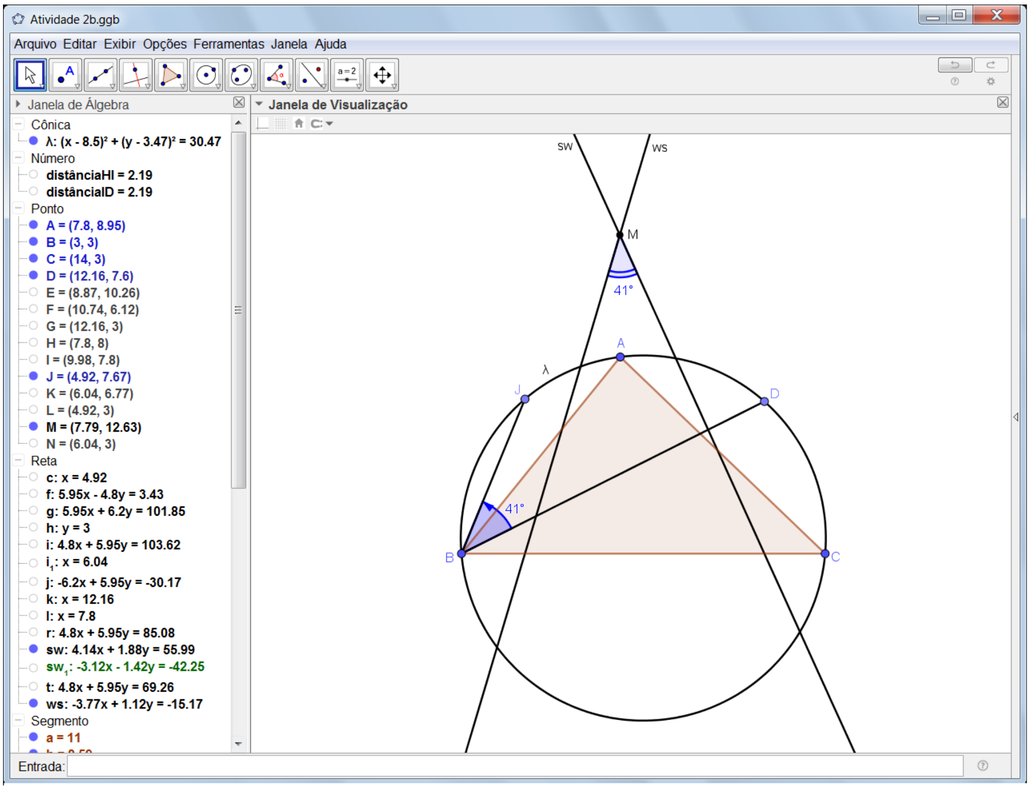
1.6 TERCEIRA ATIVIDADE INVESTIGATIVA: O TEOREMA DE STEINER-LEHMUS

Nesta terceira atividade, abordamos o teorema de Steiner-Lehmus e o seu recíproco. A declaração simples porém desafiadora do teorema pode ser comprovada com certa facilidade no GeoGebra.

Desenvolvimento da atividade

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra e o nomeie como Atividade 3.

Figura 1.19 – Ângulo inscrito $D\widehat{B}J$ e o ângulo formado pelas retas sw e ws



Fonte: Os autores.

2. Selecione o botão “POLÍGONO” e desenhe um triângulo ABC de base $\overline{BC} = 12$.

3. Clique com o botão direito do mouse e desmarque “EXIBIR RÓTULO” para cada um dos segmentos AB, AC e BC.

4. Agora, com o botão “BISSETRIZ”, construa as duas bissetrizes internas f e g relativas aos ângulos da base $\overline{BC}$, conforme ilustrado na Figura 1.20.

5. Selecione o botão “INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS” e determine o ponto D de intersecção entre o lado $\overline{AB}$ e a bissetriz do ângulo $A\widehat{C}B$, assim como o ponto E de intersecção entre o lado $\overline{AC}$ e a bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$.

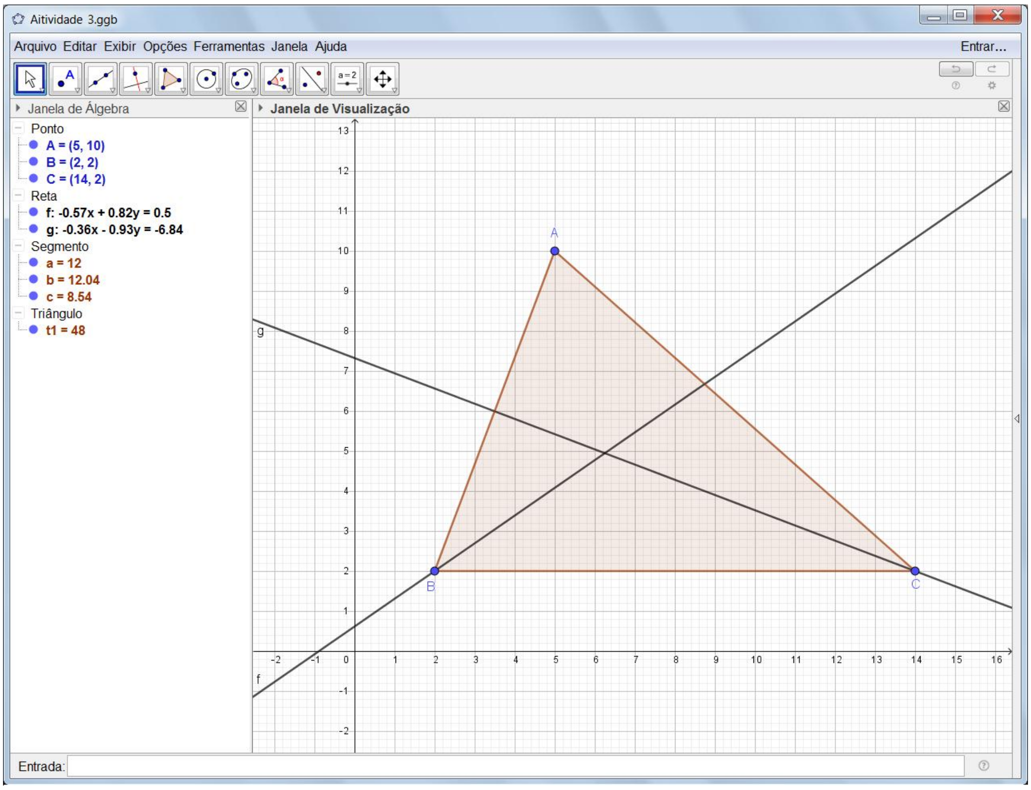
6. Na janela de álgebra, oculte a retas f e g.

7. Com a ferramenta “SEGMENTO”, construa os segmentos BE e CD, clique com o botão direito em $\overline{BE}$ e em “PROPRIEDADES”, selecione “EXIBIR RÓTULO” e modifique o estilo do segmento para tracejado. Repita o mesmo procedimento para o segmento CD.

8. Usando a ferramenta “DISTÂNCIA”, determine o comprimento das bissetrizes $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$. Uma possível configuração da construção geométrica até então realizada é ilustrada na Figura 1.21.

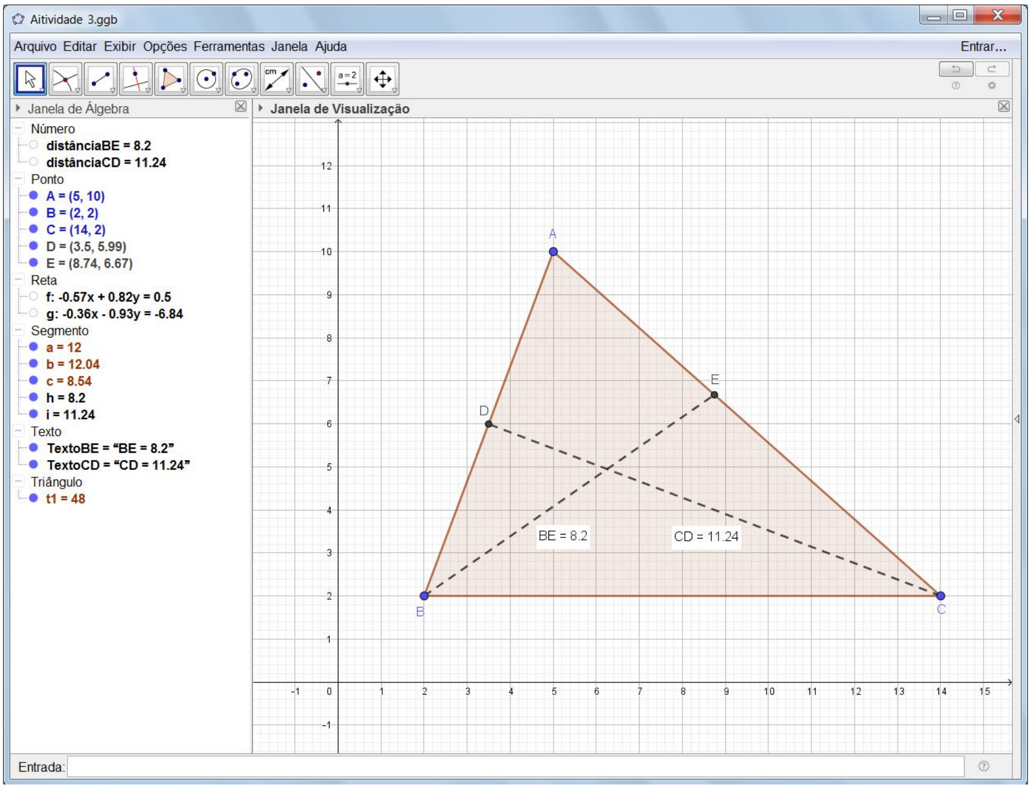
9. Movimente o vértice A do triângulo ABC de tal maneira que as bissetrizes $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ se mantenham congruentes.

Figura 1.20 – Retas suportes f e g das bissetrizes internas relativas aos ângulos da base do triângulo ABC



Fonte: Os autores.

Figura 1.21 – Bissetrizes internas $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ do triângulo ABC



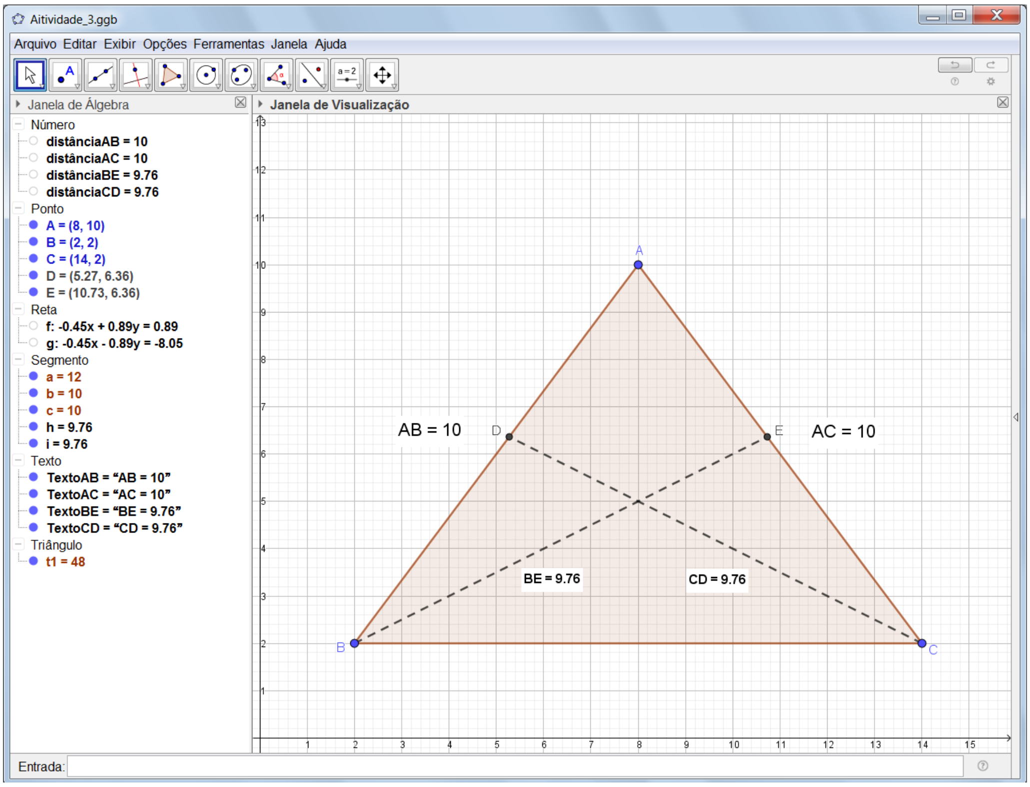
Fonte: Os autores.

10. Novamente com a ferramenta “DISTÂNCIA”, defina o comprimento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC.

11. Movimente o vértice A mantendo as bissetrizes $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ congruentes e comprove a veracidade do teorema de Steiner-Lehmus e do seu recíproco.

12. Na Figura 1.22, ilustramos um exemplo de movimento para o vértice A. Observe a formação de um triângulo ABC isósceles.

Figura 1.22 – Triângulo isósceles ABC e as bissetrizes internas $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$



Fonte: Os autores.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 30 dez. 2024. 7

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 8a. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 9. 10

GEOGEBRA. **GeoGebra Apps**. 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 30 dez. 2024. 8, 9, 10, 12

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S. **Geometria euclidiana plana: um estudo com o software GeoGebra**. 1a. ed. Maringá: UEM, 2010. 9

LAGO, R. C.; NÓS, R. L. Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra. **Revista do Instituo GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 15–29, 2020. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/47972>. Acesso em: 30 dez. 2024. 7

NÓS, R. L.; LAGO, R. C. O triângulo isósceles e o teorema de Steiner-Lehmus. **Revista do Professor de Matemática**, n. 100, p. 47–50, 2019. 7

NÓS, R. L.; LAGO, R. C. Investigando dinamicamente teoremas de geometria plana. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2020. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2739>. Acesso em: 30 dez. 2024. 7

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 7

VAZ, D. A. de F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o geogebra. **Educativa**, v. 15, n. 1, p. 39–51, 2012. Disponível em: <https://seer.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/article/view/2491>. Acesso em: 30 dez. 2024. 9