Matemática Financeira com equações de recorrência no ensino médio

Março de 2024

Natália de Paula Oliveira de Andrade, Arthur da Costa Almeida
UFPA, Campus de Castanhal.

Resumo

A matemática financeira é um dos componentes da grade curricular do ensino médio e dos cursos de licenciatura em matemática. Nela, os estudantes tem a oportunidade de aprender alguns conceitos básicos como juros compostos, capitalização e amortização, assuntos que possuem importância prática para quem vive em uma sociedade capitalista como a nossa. Esses assuntos tem em comum a noção matemática de crescimento/decrescimento exponencial e, também, o fato de serem processos que evoluem em tempo discreto, como semanas, meses, anos. Neste trabalho, buscou-se dar ao professor e estudantes dessa disciplina, um enfoque matemático unificado ao estudo desses temas, usando para isso o conceito de equações de recorrência linear de primeira ordem. Dessa forma, os conceitos básicos da matemática financeira são vistos como exemplos de um mesmo tipo de modelo matemático básico a ser estudado.

Palavras-chave: matemática financeira; equações de recorrencia.

1 Introdução

A ideia de escrever este trabalho surgiu depois que os autores ministraram um minicurso sobre modelagem matemática com equações de recorrência para turmas de estudantes de licenciatura em matemática em nossa faculdade. A parte da matemática financeira era apenas um dos exemplos que

foram estudados nesse minicurso. Além dela, foram mostrados exemplos como população de peixes com cota de pesca e outros que podem ser estudados com equações de recorrência lineares de primeira ordem.
Este trabalho, entretanto, discute apenas conteúdos de Matemática Financeira, considerando-se que ela é uma disciplina importante na grade curricular do ensino médio por tratar de assuntos que dizem respeito ao dia a dia do manejo com dinheiro, compras, empréstimos, financiamentos e outras atividades econômicas. Do ponto de vista da matemática, segundo [6] só há um único problema em matemática financeira, que é o de deslocar quantias no tempo, pois o valor de uma quantia depende da época a que ela está referida. Várias abordagens estão disponíveis nos livros didáticos dessa disciplina. A maioria, usa os métodos convencionais, [1, 5], outros usam progressões geométricas [8, 9].
É a proposta deste trabalho usar um único modelo de equação matemática para abordar os assuntos principais da matemática financeira, a saber, juros compostos, capitalização e amortização. O modelo de equações de recorrencia (ou diferença) linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Essa abordagem também pode ser vista em [3], embora não de maneira sistemática. Dessa forma, será vista uma abordagem unificada do ponto de vista da matemática, o que poderá facilitar o entendimento e compreensão dos assuntos estudados.
Inicialmente, será feita uma breve explanação da equação a ser usada e, em seguida, serão estudados dois casos envolvendo o uso dessa equação, como exemplos de sua aplicação. Os gráficos mostrados nos resultados foram feitos com um programa desenvolvido na linguagem R, [7] usando o pacote gráfico ggplot2 [10].

2 Equações de recorrência

Equações de recorrência são equações com tempo discreto, que relacionam o valor presente da variável, com um ou mais valores passados da mesma variável. Um exemplo clássico é a equaçao de Fibonacci, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Neste trabalho, vamos nos deter apenas nas equações de recorrência lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.

$$x_{n+1} = ax_n + b \tag{1}$$

Este tipo de equação, embora simples, aparece em uma grande variedade de situações envolvendo modelos interessantes, que podem ser explorados no ensino médio. Tais modelos envolvem, por exemplo, temas de matemática financeira, como juros compostos, capitalização e amortização e problemas como população de peixes com cota de pesca.

A solução dessa equação é obtida por indução. Vamos, portanto, resolver a equação

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

onde a, b são constantes reais e a variável x_n terá valor inicial x_0.

Temos, então, na sequencia

$$x_1 = ax_0 + b$$

$$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b$$

$$x_3 = ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b$$

$$x_4 = ax_3 + b = a(a^3x_0 + a^2b + ab + b) + b = a^4x_0 + a^3b + a^2b + ab + b$$

Por indução para o caso geral, temos

$$x_n = a^nx_0 + a^{n-1}b + \cdots + a^2b + ab + b = a^nx_0 + b(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

$$x_n = a^nx_0 + b(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

Como a expressão no interior do parêntese é a soma de uma PG de n termos com termo inicial igual a 1 e razão $q = a$, temos que

$$S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Donde concluimos que

$$x_n = a^nx_0 + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) \tag{2}$$

Essa solução é válida para $a \neq 1$. Quando $a = 1$, temos que $x_n = x_0 + nb$.

3 Matemática financeira com equações de recorrência

Nesta seção vamos abordar uma forma de estudo dos conteúdos de matemática financeira elementar, de forma unificada, usando equações de recorrência.

3.1 Juros compostos

O conceito de juros pode ser entendido como uma espécie de aluguel pelo uso de um valor em dinheiro, o capital, durante um certo período de tempo. Ele é calculado como uma porcentagem sobre o valor do capital. Quando o cálculo é feito sempre sobre o valor inicial do capital, temos os juros simples, quando ele é calculado sobre o valor atual do capital, temos os juros compostos. Dessa forma, um capital C, rende juros compostos de j por cento durante cada período de tempo. Para calcular o montante após n períodos, precisamos construir um modelo discreto que varie a cada período de tempo. Assim, se chamarmos de x_{n+1} o valor do montante no período seguinte, ele será dado pelo montante atual, x_n, mais os juros do período calculados sobre esse montante atual.

$$x_{n+1} = x_n + jx_n$$

ou

$$x_{n+1} = (1+j)x_n$$

Essa á uma equação de recorrencia do padrão da Equação (1), cuja solução é dada pela Equação (2), com $a = 1 + j$ e $b = 0$. Se fizermos $x_0 = C$ para o valor inicial, teremos como solução

$$x_n = C(1+j)^n$$

que é a equação usual dos juros compostos. Chamando o x_n de montante, M, a equação fica na sua forma mais conhecida

$$M = C(1+j)^n$$

3.2 Capitalização

Capitalização é processo de se acumular um capital em parcelas periódicas, usando-se para isso uma conta de investimento, que rende juros a cada período. Assim, em cada período, essa conta de capitalização recebe juros calculados sobre o valor presente na conta. Portanto, o saldo seguinte dessa conta x_{n+1} será dado pelo saldo atual, x_n, acrescido dos juros calculados sobre esse saldo e mais uma parcela, P, de valor constante, depositada a cada período.

Seu modelo em tempo discreto, passa a ser

$$x_{n+1} = x_n + jx_n + P \tag{3}$$

Arrumando a equação e tomando como valor inicial $x_0 = 0$, fica assim

$$x_{n+1} = (1 + j)x_n + P \tag{4}$$

Portanto, verificamos que ela é também uma equação do padrão (1) cuja solução geral é dada por (2). Fazendo em (2) $a = 1 + j$, $b = P$ e chamando x_n de M temos

$$M = P \times \frac{(1 + j)^n - 1}{j} \tag{5}$$

que é a equação da capitalização. O fator

$$\frac{(1 + j)^n - 1}{j}$$

é conhecido como fator de capitalização.

Para ilustrar o seu uso, faremos uma aplicação interessante.

Seja um jovem docente de matemática que após o seu primeiro emprego resolve se aposentar daqui a 35 anos, tendo acumulado um capital de 1 milhão de reais. Para isso, investe todos os meses uma quantia fixa, P, de seu salário, em uma conta remunerada que rende 1% de juros ao mês. Qual será o valor da parcela mensal que ele precisará depositar?

Trata-se de um modelo típico de capitalização, cuja solução é dada pela Equação (6). Nesse caso, temos $j = 0,01$, $M = 1000000$, o número de períodos n em meses, é dado por $n = 35 \times 12 = 420$ e a parcela P, é desconhecida. Fica assim, substituindo-se os valores em (5).

$$1000000 = P \times \frac{(1 + 0,01)^{420} - 1}{0,01} = P \times \frac{1,01^{420} - 1}{0,01}$$

$$1000000 = 6430,959 \times P$$

$$P = \frac{1000000}{6430,959} = 155,50$$

Encontramos o valor da parcela como sendo

$$P = 155,50$$

reais por mês.

Sugere-se o uso do aplicativo calculadora, hoje presente mesmo nos mais simples smartphones, para o cálculo de $(1 + 0,01)^{420} = 1,01^{420}$ ou de expressões similares, que ainda aparecerão mais à frente. Nesses aplicativos, essa função está indicada, normalmente, por uma tecla x^y. As alternativas que usam tecnologias analíticas podem incluir o Binõmio de Newton ou o uso de logaritmos. Entretanto, o Binômio de Newton, neste caso particular, mostra-se inviável, pois envolveria o cálculo de uma soma de 421 parcelas, além de outras tantas exponenciais. O uso de logaritmos tambem demandaria o uso de uma tábua de logaritmos, calculadora ou aplicativo. Portanto, parece-nos a mais viável o uso do aplicativo calculadora, em um celular. No caso deste trabalho, o cálculo foi feito no ambiente interativo do programa R em um computador.

Como curiosidade adicional, se esse mesmo valor de R$ 155,50 for aplicado durante o mesmo período em uma caderneta de poupança que rende $0,5\%$ ao mês, no final terá acumulado um montante de R$ 221.452,00 reais. Uma diferença de meio ponto na taxa de juros mensal, ao longo de 35 anos, gera uma enorme diferença no rendimento, por conta do crescimento exponencial do montante, conforme pode ser visualizado na Figura 1.

Obviamente, esses modelos são idealizados e fictícios. Dificilmente, encontra-se uma aplicação bancária que renda essa taxa de juros de 1% ao mês durante todo esse tempo; o cálculo não leva em conta o efeito da inflação ao longo do período, mas apenas o valor nominal; aqui no Brasil, tivemos períodos de instabilidade econômica, inclusive com várias mudanças de moeda num prazo assim tão longo. Mesmo assim, vale como exemplo e serve para estimular planejamento de aposentadorias em nós e em nossos estudantes.

No mundo real de aplicações financeiras ou investimentos, sejam ou não para aposentadoria, é preciso levar em conta além dos juros, a correção monetária para repor o valor perdido pela inflação do período e também a tributação imposta pelo Governo Federal, pois ambos fazem o investimento render menos ou até perder valor. No caso da correção monetária para repor a perda causada pela inflação, existem os índices econômicos oficiais, os mais usados sendo o IPCA, IGP-M, INPC e Selic.

O IPCA é o índice oficial de inflação do Brasil. Ele é medido pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) e tem como base os preços de produtos e serviços consumidos por famílias residentes em áreas urbanas com renda mensal de 1 a 40 salários-mínimos. O IGP-M, Índice Geral de Preços-Mercado também é um indicador de inflação, mas é medido pela Fundação Getúlio Vargas (FGV). Ele mede a variação dos preços de bens e serviços comercializados no atacado, varejo e na construção civil e é utilizado, principalmente, em contratos de aluguel e de venda de imóveis em construção. O INPC, Índice Nacional de Preços ao Consumidor, é semelhante ao IPCA, medido pelo IBGE, mas tem como base os preços de produtos e serviços consumidos por famílias com renda mensal de até 5 salários-mínimos. Finalmente, a taxa Selic, a taxa básica de juros da economia brasileira, é mais um índice que pode ser utilizado para correção monetária. Ela é definida pelo Banco Central e serve como referência para outras taxas de juros praticadas no mercado.

Saindo dos modelos teóricos de sala de aula e entrando no mundo real, observa-se que para se formar um plano de aposentadoria, existem dois padrões no Brasil: o administrado pelo Governo Federal, INSS, para todos os trabalhadores que trabalham regidos pela CLT ou por conta própria e o privado, administrado por bancos e fundos de previdência, que podem ser contratados por quem quiser e dispuser de algum dinheiro para isso. No do INSS, o trabalhador desconta mensalmente de seu salário uma alíquota definida pelo Governo e o empregador tambem recolhe uma parcela igual. E, depois de um prazo, também definido pelo Governo, passa a receber mensalmente um salário de aposentadoria. Além disso, o trabalhador também tem direito a pensão por morte, auxílio doença e aposentadoria por invalidez. O valor da aposentadoria paga pelo INSS tem um teto, de 5 salarios mínimos. Para trabalhadores que recebem acima desse valor, a perda na hora da aposentadoria pode ser significativa. Por outro lado, a chamada aposentadoria complementar é oferecida por empresas financeiras ou seguradoras privadas. Em comum aos planos públicos e privados, sempre existe um período de acumulação do capital (capitalização) e um período de usufruto da renda acumulada (amortização), conforme mostrado no modelo simplificado.

3.3 Amortização

Amortização tem a ver com pagamento de dívidas de forma parcelada. No nosso caso, para simplificar, com valor fixo da prestação mensal. Neste item, tem-se uma dívida, com valor inicial $x_0 = V$ e a cada mês é efetuado um pagamento parcial de valor fixo, P. O novo saldo devedor é obtido da seguinte forma: toma-se o saldo devedor atual, calcula-se os juros devidos sobre o saldo devedor atual e subtrai-se o valor da amortização paga no mês atual. Dessa forma, tem-se

$$x_{n+1} = x_n + jx_n - P$$

ou

$$x_{n+1} = (1 + j)x_n - P \tag{6}$$

com $x_0 = V$, o valor total da dívida à vista a ser paga.

Observa-se que essa é uma equação do mesmo padrão da equação (1) cuja solução é dada pela equação (2), fazendo-se $a = 1 + j$, $b = -P$ e $x_0 = V$. Portanto, a solução vai ser

$$x_n = (1 + j)^n \times V - P \times \frac{(1 + j)^n - 1}{j}$$

Mas, após o último pagamento, a divida zera, isto é, tem-se $x_n = 0$, portanto a equação da amortização fica

$$V = P \times \frac{(1 + j)^n - 1}{j \times (1 + j)^n} \tag{7}$$

onde V é o valor à vista da dívida e P o valor da prestação mensal fixa.
O fator

$$\frac{(1 + j)^n - 1}{j \times (1 + j)^n}$$

é conhecido como fator de amortização.
Um exemplo interessante a seguir, une os dois conceitos de capitalização e amortização para se calcular quanto se deve investir por mês, durante um certo tempo, para, depois ficar recebendo os rendimentos durante um outro período de tempo.
O exemplo a seguir foi retirado de um exercício do texto [6]

> *Prob. 5-26. Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir durante 30 anos para obter ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda mensal de R$ 100,00?* (Morgado e Carvalho, 2015, p. 103)

Para resolver este problema, observa-se que ele envolve inicialmente uma capitalização e na segunda parte uma amortização. Considerando os dados disponíveis, devemos começar perguntando qual deve ser o montante inicial necessário para ser consumido (amortizado) em 30 anos, com a mesma taxa mensal de juros, com uma parcela de R$ 100,00. E, na segunda parte, já conhecido o montante a ser obtido, qual deve ser a parcela mensal que deve ser investida para obter-se esse montante.
Portanto, temos a equação

$$x_n = (1 + j)^n \times V - P \times \frac{(1 + j)^n - 1}{j}$$

como $x_n = 0$, $P = 100$, $j = 0,005$, $n = 360$ e V, o montante, desconhecido. Para se obter o valor numérico das exponenciais que aparecem nesta equação foi utilizado o ambiente interativo do programa R, em um computador. Mas elas tamb[em podem ser resolvidas usando-se a função x^y no aplicativo Calculadora, disponível em qualquer smartphone.

$$(1+0,005)^{360} \times V - 100 \times \frac{(1+0,005)^{360}-1}{0,005} = 0$$

$$(1,005)^{360} \times V - 100 \times \frac{(1,005)^{360}-1}{0,005} = 0$$

$$6,0225V = 100 \times 1004,515$$

$$V = \frac{100 \times 1004,515}{6,0225} = 16679,16$$

Desta forma, obtém-se para o montante, o valor V=R$ 16.679,16. Esse é o montante, em reais, que deve ser alcançado na primeira parte, a da capitalização. Agora, vamos usar a equação da capitalização para encontrar o valor da parcela mensal.

$$M = P \times \frac{(1+j)^n - 1}{j}$$

onde $M = 16679,16$, $n = 360$, $j = 0,005$ e P é o valor desconhecido.

$$16679,16 = P \times \frac{(1+0,005)^{360}-1}{0,005}$$

$$P \times \frac{(1,005)^{360}-1}{0,005} = 16679,16$$

$$1004,515P = 16679,16$$

$$P = \frac{16679,16}{1004,515} = 16,60$$

Portanto, o valor mensal P a ser investido é de R$ 16,60.
A evolução anual do montante é mostrada na Figura 2.

Na Figura 2, nota-se que os dois gráficos possuem o mesmo domínio $[0,30]$ mas, na Figura 3, foi feita uma justaposição dos dois gráficos para que seja visto como se comporta o modelo ao longo dos 60 anos, 30 de acumulação do capital (capitalização) e os outros 30 de usufruto da renda (amortização).

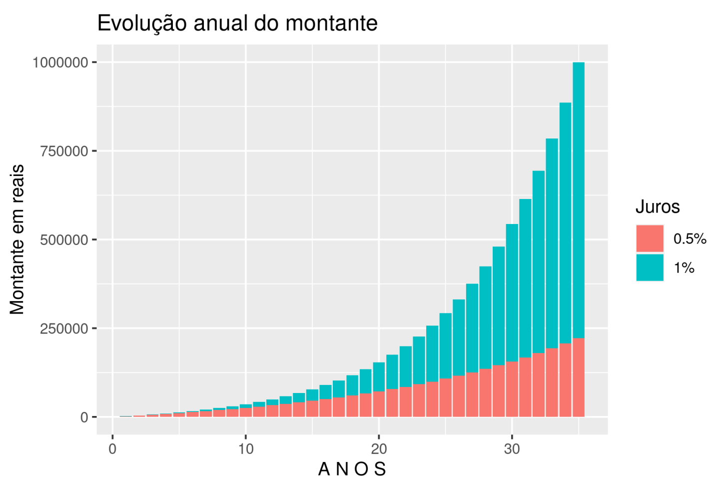

Figura 1: Evolução anual da capitalização.

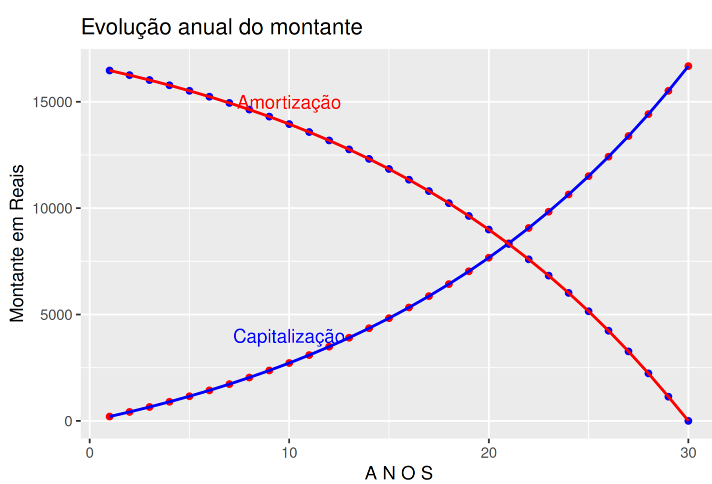

Figura 2: Capitalização e Amortização

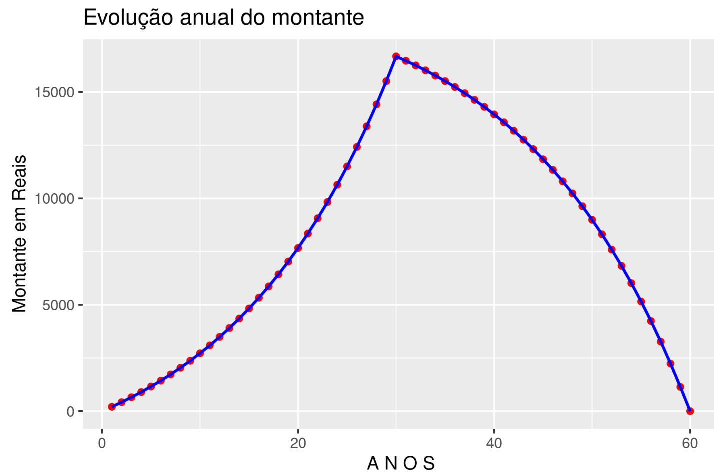

Figura 3: Capitalização e Amortização ao longo do tempo

Esses dois gráficos são muito parecidos com os graficos que mostram o processo de carga e descarga de um capacitor em física elementar. Estudando-se este modelo em tempo contínuo, o gráfico seria uma curva exponencial contínua e não um conjunto de pontos indicando os valores ao fim de cada ano, como é o nosso caso do modelo discreto. A convexidade da primeira fase ocorre porque o modelo contínuo é uma exponencial com expoente positivo, enquanto que na segunda parte, é uma exponencial com expoente negativo. Isso ocasiona uma primeira derivada positiva no primeiro caso e negativa no segundo. E uma segunda derivada também negativa no segundo caso, o que caracteriza a curva, como convexa na fase de capitalização e como côncava na fase da amortização.

4 Considerações Finais

As equações de recorrência são um campo vasto de pesquisa que se expandiu muito nas décadas finais do século XX, graças ao uso intensivo de computadores. Elas são a ferramenta adequada para se fazer a modelagem de fenômenos que evoluem no tempo. São consideradas como o equivalente das equações diferenciais em tempo discreto [4]. Seu estudo se estende para muito além da simples aplicação vista neste trabalho e para quem se interessar, um mundo inteiro de conhecimento e descobertas está disponivel em vários textos elementares, tais como [2]. Assuntos como o comportamento caótico da equação logística enchem, hoje, milhares de publicações em livros e revistas especializadas.

Referências

[1] Assaf Neto, A. *Matemática Financeira - Edição Universitária*. Editora Atlas, SP, 2021.

[2] Devaney, R. L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Ed. CRC Press, London, 2020.

[3] Elaydi, S. *An Introduction to Difference Equations*. Ed. Springer, Texas, USA, 2000.

[4] Holmgren, R. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Editora Springer, Alemanha, 1996.

[5] Iezzi, G., Hazzab, S., Degenszajn, D. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 11: Matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva*. Editora Saraiva, 2019.

[6] Morgado, A. C e Carvalho P. C. P. *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT, Editora SBM, RJ, 2015.

[7] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, Disponível em <:https://www.R-project.org/>, 2023.

[8] Rodrigues, M., Petry, V. *Progressões geométricas e o estudo da matemática financeira*. Revista PMO, v.3, n.1, 2015, Editora SBM, RJ, Disponível em: < https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/11/art3$_v ol3_2015_S BM_P MO.pdf$ ¿$.Acessoem : 3deagostode$2023.

[9] Wagner, E., Morgado, A. C e Zani, S. *Progressões e Matemática Financeira*. Editora SBM, Rio de Janeiro, Brasil, 2022.

[10] Wickham, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Ed. Springer-Verlag, New York, USA, 2016.