<DESIGUALDADES>

Walcy Santos

Sumário

1 Introdução

Uma inequação em uma ou mais variáveis, quando resolvida, o resultado dá lugar a uma desigualdade que é válida para um certo conjunto de valores. Alguns exemplos simples de desigualdades são os seguintes:

1. $x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com a igualdade se verificando se e somente se $x \geq 0$.

2. $x^2 \leq x$, para todo x com $0 \leq x \leq 1$, com a igualdade se e somente se $x = 0$ ou $x = 1$.

3. $(x - y)^2 \geq 0$, para quaisquer x e y reais, com a igualdade se e somente se $x = y$.

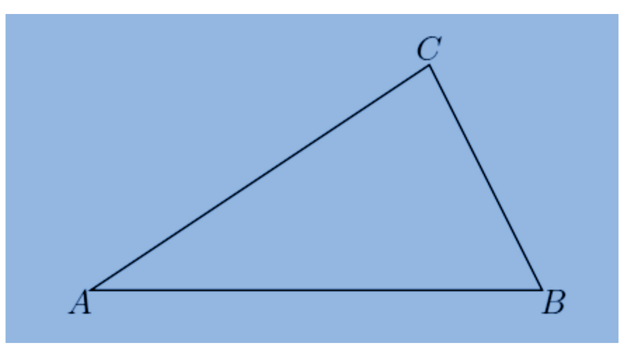
4. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \leq 2$, para quaisquer $x; y > 0$.

2 Desigualdade Triangular

Um resultado que vimos no curso de Geometria é o seguinte resultado:

Teorema 1 *(Desigualdade Triangular). Dado um triângulo $\triangle ABC$ o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja,*

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$$
$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$
$$\overline{BC} < \overline{BA} + \overline{AC}$$



Corolário 1 *Dados 3 pontos A, B e C, então*

$$\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB},$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se A, B e C são colineares com C um ponto do segmento de reta AB.

Em outras palavras, a desigualdade triangular é a formulação matemática da idéia intuitiva de que o caminho reto é mais curto entre os pontos A e B. Em analogia com a geometria plana temos uma versão da desigualdade triangular para números reais.

Proposição 1 *Sejam a e b números reais quaisquer, então*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Prova: Demonstração. Se $a + b \geq 0$, então $|a + b| = a + b$ e neste caso,

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|.$$

No caso que $a + b < 0$, então

$$|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|,$$

o que termina a prova.

Corolário 2 *As seguintes desigualdades valem*

$$|a - b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|,$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

Demonstração. Para a primeira, escrevemos $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$. A segunda desigualdade decorre de

$$|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|.$$

A última desigualdade é consequência da segunda, trocando os papéis de a e b.

3 Desigualdade das Médias

Definição 1 *Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reais positivos. Definimos*

1. *Média Harmônica,* $m_h(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.

2. *Média Geométrica,* $m_g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1.a_2.\cdots.a_n}$

3. *Média Aritmética,* $m_a(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

4. *Média Quadrádica,* $m_q(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$.

A seguir provaremos alguns resultados que estabelecem relações de desigualdades entre as médias definidas acima.

Proposição 2 *(Desigualdade das Médias Aritmética e Quadrática). Dados $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reais positivos tem-se*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

ou seja, $m_a(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq m_q(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Além disso, a igualdade vale se, e somente se,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Demonstração: Usando a igualdade

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (a_i - a_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} a_i a_j,$$

concluímos que,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} a_i a_j \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Somando-se $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ a ambos os lados da desigualdade acima, temos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} a_i a_j \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Logo,
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Portanto, dividindo por n^2 e tomando a raiz quadrada, segue-se o resultado.

Observamos que a igualdade é verdadeira se, e somente se,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (a_i - a_j)^2 = 0,$$

o que é verdade se, e somente se,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Proposição 3 *(Desigualdade das médias Geométrica e Aritmética). Dados* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *números reais positivos tem-se*

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.\cdots.a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

isto é, $m_g(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq m_a(a_1, a_2, \cdots, a_n)$*. Além disso, a igualdade vale se, e somente se,*
$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

A prova deste resultado usa indução matemática e foi vista nos cursos MA11 e MA12.

Proposição 4 *(Desigualdade das médias Harmonica e Geométrica). Dados* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *números reais positivos tem-se*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1.a_2.\cdots.a_n},$$

isto é, $m_h(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq m_g(a_1, a_2, \cdots, a_n)$*. Além disso, a igualdade vale se, e somente se,*
$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Prova. Como $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números positivos, pela proposição anterior, temos que
$$m_g(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}) \leq m_a(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}).$$

Logo,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i},$$

Esta desigualdade implica que,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1.a_2.\cdots.a_n}} \leq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n}.$$

Portanto o resultado decorre invertendo esta desigualdade.

$$m_g(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}) = m_a(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}),$$

que acontece se e somente se

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \cdots = \frac{1}{a_n},$$

isto é, quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Suponha que os números reais positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ estão ordenados de forma que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n.$$

Temos então que $\forall i \; a_1 \leq a_i$ e $a_n \geq a_i$.

Logo,

$$m_h(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1}}$$

$$= a_1 = min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

De modo análogo,

$$m_q(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leq \sqrt{\frac{a_n^2 + a_n^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

$$= a_n = max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

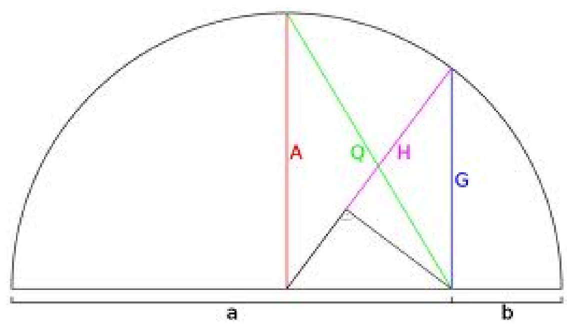
Provamos então o seguinte teorema:

Teorema 2 *(Desigualdade das Médias) Dados $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reais positivos tem-se*

$$\begin{aligned} min(a_1, a_2, \cdots, a_n) &\leq m_h(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ &\leq m_g(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ &\leq m_a(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ &\leq m_q(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq max(a_1, a_2, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$



4 Desigualdade Isoperimétrica

Exemplo 1 *(Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos). Entre todos os triângulos com perímetro fixado p o de maior área é o triângulo equilátero.*

Prova: Se a, b, c são os comprimentos dos lados do triângulo T, então a Fórmula de Herón para a área $A(T)$ do triângulo T, temos

$$A(T) = \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{p}{2} - a)(\frac{p}{2} - b)(\frac{p}{2} - c)}.$$

Usando que $m_g((\frac{p}{2} - a), (\frac{p}{2} - b), (\frac{p}{2} - c)) \leq m_a((\frac{p}{2} - a), (\frac{p}{2} - b), (\frac{p}{2} - c))$, temos que

$$A(T) \leq \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Observe que se T é um triângulo equilátero de perímetro p, então seus lados medem $\frac{p}{3}$ e portanto sua área é

$$A_{eq} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Logo, para todo triângulo T, de perímetro p, tem-se

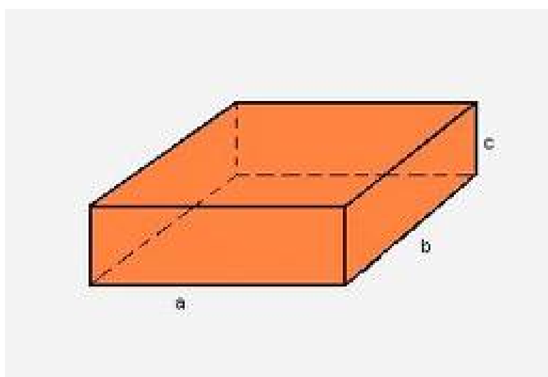
$$A(T) \leq A_{eq}.$$

Resta saber se quando a igualdade é atingida, T é necessariamente equilátero. No caso de termos a igualdade, devemos ter

$$(p-a) = (p-b) = (p-c),$$

e, portanto, $a = b = c$ e T é equilátero.

Exemplo 2 *(Desigualdade Isoperimétrica para Paralelepípedos). Entre todos os paralelepípedos com área lateral fixada A o de maior volume é o cubo (ou seja, o paralelepípedo com todos seus lados iguais).*



Lembramos que a área lateral de um paralelepípedo de dimensões a, b e c é dada por

$$A = 2(ab + ac + bc).$$

Seja V o volume do paralelepípedo. Temos que $V = a.b.c.$ Temos então que

$$V^2 = ab.ac.cb \leq \left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^3 = \left(\frac{A}{6}\right)^3.$$

Portanto o maior valor possível de V é $\left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$, e este valor deve ser atingido por um paralelepípedo com $ab = bc = ac$, isto é, $a = b = c$. Observe finalmente que o cubo de área lateral A possui volume igual a $\left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$, o que termina a prova.

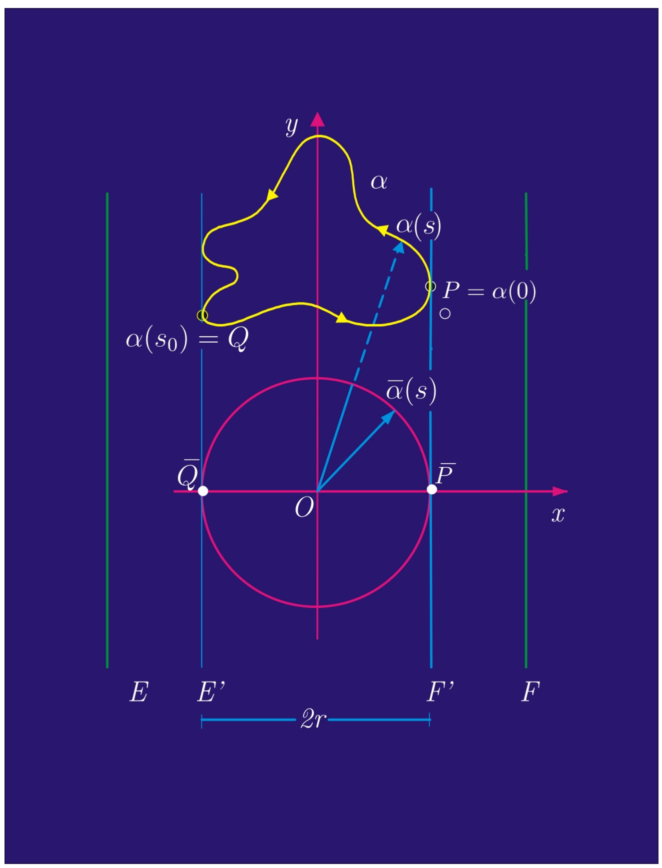
Teorema 3 *Dentre todas as curvas regulares e de Jordan com um mesmo comprimento fixado, o círculo delimita a maior área. Em outras palavras: se L é o comprimento de uma curva α regular e de Jordan e A é a área da região que o traço de α delimita, então*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \qquad (\bigstar)$$

Além disso, a igualdade ocorre em $(\bigstar)$, se e somente se o traço de α é um círculo.

Lema 1 *Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, simples, orientada positivamente e definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então*

$$\begin{aligned} A &= -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt \end{aligned}$$



- $\alpha(s) = (x(s), y(s)),\ s \in [0, L],$ com $\alpha(0) = \alpha(L)$.
- $\overline{\alpha} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$,
$$\overline{\alpha}(s) = (\overline{x}(s), \overline{y}(s)),$$
- Usando o Lema, temos que
$$A = \int_0^L x(s)y'(s)\, ds \qquad \text{e} \qquad \overline{A} = -\int_0^L \overline{y}(s)x'(s)\, ds = \pi r^2.$$

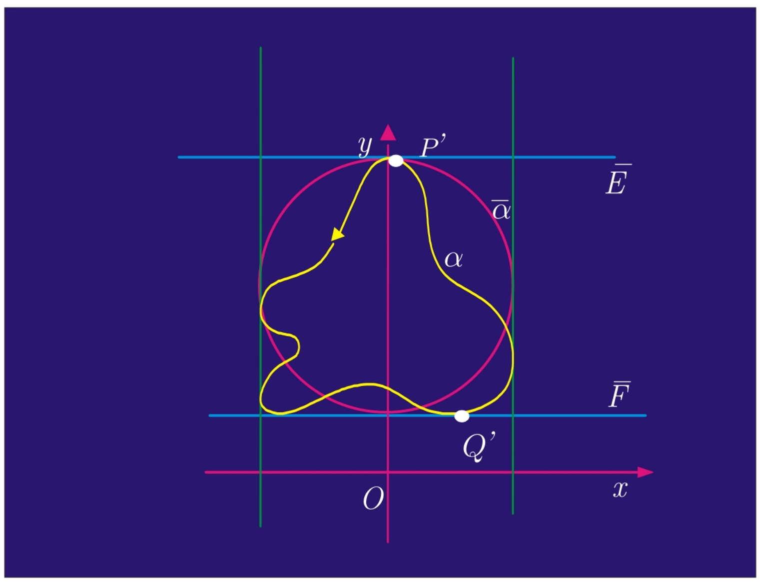
Portanto
$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L x(s)y'(s) - \overline{y}(s)x'(s)\, ds \\ &\leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \overline{y}(s)x'(s))^2}\, ds \\ &= \int_0^L \sqrt{x^2(y')^2 - 2xy'\overline{y}x' + \overline{y}^2(x')^2}\, ds. \end{aligned}$$
Visto que
$$-2ab \leq a^2 + b^2, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
$$A + \pi r^2 \leq$$
$$\begin{aligned} &\leq \int_0^L \sqrt{(x\, y'(s))^2 + (x\, x'(s))^2 + (\overline{y}\, y'(s))^2 + (\overline{y}\, x'(s))^2}\, ds \\ &= \int_0^L \sqrt{((x(s))^2 + (\overline{y}(s))^2)((x'(s))^2 + (y'(s))^2}\, ds \\ &= \int_0^L \sqrt{((x(s))^2 + (\overline{y}(s))^2)}\, ds \\ &= \int_0^L \sqrt{((\overline{x}(s))^2 + (\overline{y}(s))^2)}\, ds \\ &= \int_0^L r\, ds = Lr. \end{aligned} \tag{2}$$
Usando o fato de que
$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$
com $a \geq 0$ e $b \geq 0$, vemos que
$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}Lr. \tag{3}$$

Concluímos, portanto, que

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Suponha que $L^2 = 4\pi A$.

- $A\pi r^2 = \dfrac{1}{4}(A + \pi r^2)^2$, isto é, $(A - \pi r^2)^2 = 0$.
- A distância $2r$ entre E' não depende da direção do par de retas paralelas.
- $x'(s)x(s) = a = -b = -\overline{y}(s)y'(s)$.
- $(x(s))^2 = r^2(y'(s))^2$.



Sejam P' e Q' pontos sobre o traço de α tais que suas coordenadas y sejam máxima e mínima, respectivamente. Como α é diferenciável nesses pontos, as retas tangentes à curva α em P' e Q' são paralelas ao eixo Ox.

Podemos repetir o último argumento e obter que

$$(y(s) + a)^2 = r^2(x'(s))^2.$$

Portanto,

$$(x(s))^2 + (y(s) + a)^2 = r^2[(x'(s))^2 + (y'(s))^2] = r^2.$$

Isso significa que o traço de α é um círculo.

5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema 4 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Dados $a_1, \cdots, , a_n$ e $b_1, \cdots, b_n$ números reais tem-se*

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

Além disso, a igualdade só ocorre se existir um número real α, tal que $a_1 = \alpha b_1, \cdots, a_n = \alpha b_n$ ou $b_1 = \alpha a_1, \cdots, b_n = \alpha a_n$.

Observação 1 *Se V e W sâo vetores em $\mathbb{R}^n$ com coordendas em uma base ortonormal dada por $V = (a_1, \cdots, a_n)$ e $W = (b_1, \cdots, b_n)$, então a Desigualdade de Cauchy-Schwarz diz que*

$$|\langle V, W\rangle| \leq ||V||.||W||,$$

com a igualdade se e somente se um dos vetores é múltiplo do outro.

Demonstração. Usando a identidade de Lagrange:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_i - a_jb_j)^2,$$

temos que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

o que prova a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Além disso, a igualdade ocorre se e somente se

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_i - a_jb_j)^2 = 0,$$

que é equivalente a

$$a_ib_i - a_jb_j = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Isto acontece se e somente se existe α tal que $a_1 = \alpha b_1, \cdots, a_n = \alpha b_n$ ou $b_1 = \alpha a_1, \cdots, b_n = \alpha a_n$.

Exemplo 3 *Entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triângulo isósceles.*

Solução. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$a + b = a.1 + b.1 \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{1^2 + 1^2} = c\sqrt{2}.$$

Este valor máximo é atingido quando $a = \alpha.1$ e $b = \alpha.1$, isto é, $a = b$ e portanto o triângulo é isósceles.

Proposição 5 *(Desigualdade de Minkowski). Dados números reais $a_i; b_i$ com $1 \leq i \leq n$, tem-se*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Prova: Partimos da seguinte igualdade:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito da igualdade acima temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Temos então que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2$$

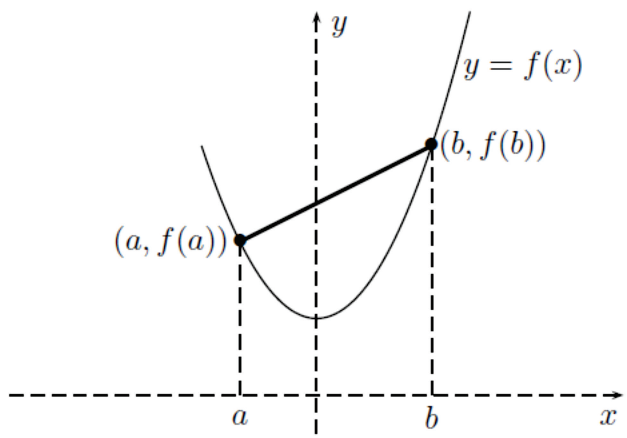
Tomando raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade acima obtemos a desigualdade de Minkowski.

6 Desigualdade de Jensen

A Desigualdade de Jensen está estreitamente relacionada com o conceito de convexidade.

Definição 2 *Uma função* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *é dita convexa se para quaisquer* $a, b \in [\alpha, \beta]$ *e para todo* $\lambda \in [0, 1]$ *satisfaz*

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$



Exemplo 4 *A função* $f(x) = x^2$ *é convexa em todo intervalo* $[\alpha, \beta]$.

Exemplo 5 *A função* $f(x) = \frac{1}{x}$ *é convexa em todo intervalo* $[\alpha, \beta]$*, com* α *positivo.*

Observemos que, usando a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática obtemos

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n},$$

ou seja,

$$(m_a(a_1, \cdots, a_n))^2 \leq m_a(a_1^2, \cdots, a_n^2).$$

Por outro lado, a desigualdade entre as médias harmônica e aritmética nos garantem que

$$\frac{1}{m_a(a_1, a_2, \cdots, a_n)} \leq m_a(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n})$$

A Desigualdade de Jensen vai nos mostrar que estas propriedades que são validas considerando as funções convexas x^2 e $\frac{1}{x}$, na verdade valem para qualquer função convexa.

Teorema 5 *(Desigualdade de Jensen). Seja $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ uma função convexa e sejam $\lambda_i \in [0,1]$ $(i = 1, \cdots n)$ tais que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. Então, para quaisquer $a_i \in [\alpha, \beta]$ $(i = 1, \cdots n)$ vale*

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n) \quad (\bigstar).$$

Observação 2 *Observemos que, quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, a desigualdade de Jensen nos diz que*

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n},$$

ou seja,

$$f(m_a(a_1, \cdots, a_n)) \leq m_a(f(a_1), \cdots, f(a_n)).$$

Demonstração. Faremos a prova por indução. Para n = 2 a desigualdade é verdadeira diretamente da definição de função convexa.

Suponhamos que dado n natural ($\bigstar$) vale, então temos que provar que ($\bigstar$) se verifica para $(n+1)$, isto é,

$$f(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j \leq \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(a_j).$$

Observe que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j + \lambda_{n+1} a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j + (1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j) a_{n+1}$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} a_j + (1 - \alpha) a_{n+1},$$

onde $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ Assim, usando que $\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} = 1$ e a hipótese de indução,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j\right) \leq \alpha f(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} a_j) + (1 - \alpha) f(a_{n+1})$$

$$\leq \alpha \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} f(a_j) + (1 - \alpha) f(a_{n+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(a_j).$$