UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JESSICA AUGUSTIN SCHIFLER

PROPOSTA DE ATIVIDADES COM NÚMEROS METÁLICOS UTILIZANDO INSTRUMENTOS DE DESENHO E GEOMETRIA DINÂMICA

CURITIBA
2024

JESSICA AUGUSTIN SCHIFLER

PROPOSTA DE ATIVIDADES COM NÚMEROS METÁLICOS UTILIZANDO INSTRUMENTOS DE DESENHO E GEOMETRIA DINÂMICA

Proposal for activities with metallic numbers using drawing instruments and dynamic geometry

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/24146>.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientadora: Profa. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA
2024

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos a família dos números metálicos, destacando a fórmula geral para a sua obtenção. Entre os integrantes mais conhecidos estão os números de ouro e de prata, amplamente utilizados em áreas como artes, arquitetura, engenharia, música e literatura. Propomos um conjunto de atividades direcionadas para estudantes do 6º ano ao 9º ano, nas quais os números metálicos são introduzidos no estudo de frações, razões, proporções, polígonos regulares, números irracionais e equações quadráticas. As atividades combinam conteúdos matemáticos com o uso de tecnologias, como o software GeoGebra e Planilhas Google, e vídeos explicativos. A abordagem com os números metálicos, aliada às ferramentas tecnológicas, contribui para a contextualização dos temas abordados, incentivando os estudantes a aprofundar e discutir seus conhecimentos em matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; média metálica; GeoGebra; Planilhas Google; polígonos regulares; números irracionais.

ABSTRACT

In this work, we present the family of metallic numbers, highlighting the general formula for their derivation. Among the most well-known members are the golden and silver numbers, which are widely applied in fields such as art, architecture, engineering, music, and literature. We propose a set of activities adesigned for students from the 6th to the 9th grade, introducing metallic numbers within the context of studying fractions, ratios, proportions, regular polygons, irrational numbers, and quadratic equations. These activities integrate mathematical content with the use of technologies such as the GeoGebra software, Google Sheets, and explanatory videos. The approach, which integrates metallic numbers with technological tools, enhances the contextualization of the topics covered, encouraging students to explore and discuss mathematical concepts more deeply.

Keywords: Mathematics teaching; metallic mean; GeoGebra; Google Sheets; regular polygons; irrational numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 ATIVIDADES DIDÁTICAS COM O USO DE INSTRUMENTOS DE DESENHO E O GEOGEBRA

Neste capítulo, descrevemos as atividades a serem desenvolvidas com estudantes da Educação Básica com os números metálicos. Para isso, utilizamos materiais diversificados, como papéis quadriculados, planilhas, abordando conteúdos como a sequência de Fibonacci, a proporção áurea, a relação da medida do lado de polígonos regulares com a medida de suas diagonais. As atividades podem ser aplicadas a estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

1.1 OS NÚMEROS METÁLICOS

Vera de Spinadel (Vinagre, 2014) define os elementos que fazem parte da família dos números metálicos, também conhecidos como Média Metálica, como sendo aqueles que são solução das equações quadráticas do tipo:

$$\{x \in \mathbb{R}/x^2 - px - q = 0, x > 0, p \text{ e } q \in \mathbb{N}\}. \tag{1.1}$$

Os membros dessa família foram nomeados com nomes de metais, como número de ouro, de prata, de bronze, de cobre, de níquel e de platina. Na Figura 1.1, podemos observar a equação, os coeficientes, a raiz irracional e o valor decimal aproximado de cada um dos números metálicos mais conhecidos.

O conjunto dos números metálicos é infinito, visto que, na equação (1.1), p e q admitem qualquer valor natural. Os demais números metálicos não possuem um nome de metal associado a eles.

Figura 1.1 – Nomes associados aos números metálicos

Nome	Equação	p	q	Raíz irracional	Raíz decimal aproximada
Número de Ouro	$x^2 - x - 1 = 0$	1	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618003398
Número de Prata	$x^2 - 2x - 1 = 0$	2	1	$1+\sqrt{2}$	2,41421356
Número de Bronze	$x^2 - 3x - 1 = 0$	3	1	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,30277563
Número de Cobre	$x^2 - x - 2 = 0$	1	2	2	2
Número de Níquel	$x^2 - x - 3 = 0$	1	3	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	2,30277563
Número de Platina	$x^2 - 2x - 2 = 0$	2	2	$1+\sqrt{3}$	2,73205080

Fonte: A autora.

1.2 PROPOSTA DE ATIVIDADES COM OS NÚMEROS METÁLICOS

1.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

No que diz respeito à superação das dificuldades de ensino e aprendizagem, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (Brasil, 1998) destacam a necessidade de abandonar metodologias baseadas na reprodução de procedimentos e na acumulação de informações, promovendo, em seu lugar, abordagens que atribuam significado aos conteúdos matemáticos na vida dos alunos.

Identificamos nos números metálicos uma oportunidade para desenvolver atividades contextualizadas que envolvam diversos conteúdos matemáticos, promovendo o interesse pela aprendizagem, o trabalho em equipe, a curiosidade e o interesse por pesquisas. Essas atividades também buscam conscientizar os estudantes de que a Matemática é resultado de construções históricas e está em constante transformação.

O planejamento dessas atividades foi fundamentado em quatro competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, conforme orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
>
> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
>
> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
>
> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (Brasil, 2018, p. 267)

A proposta pedagógica apresentada incorpora a aplicação de metodologias ativas. O modelo tradicional de ensino, em que o professor é visto como a autoridade máxima do conhecimento e o aluno atua apenas como receptor, sem interação significativa entre as partes, tem sido gradualmente superado. As metodologias ativas, conforme descrito por Generoso (2019, p. 15), oferecem “alternativas metodológicas com uma abordagem contrária ao ensino tradicional focado nos componentes curriculares”, posicionando o aluno como protagonista no processo de ensino-aprendizagem e incentivando o educando a ser crítico em relação às suas obras. A proposta de atividades, neste sentido, visam engajar ativamente o estudante na construção do conheicmento.

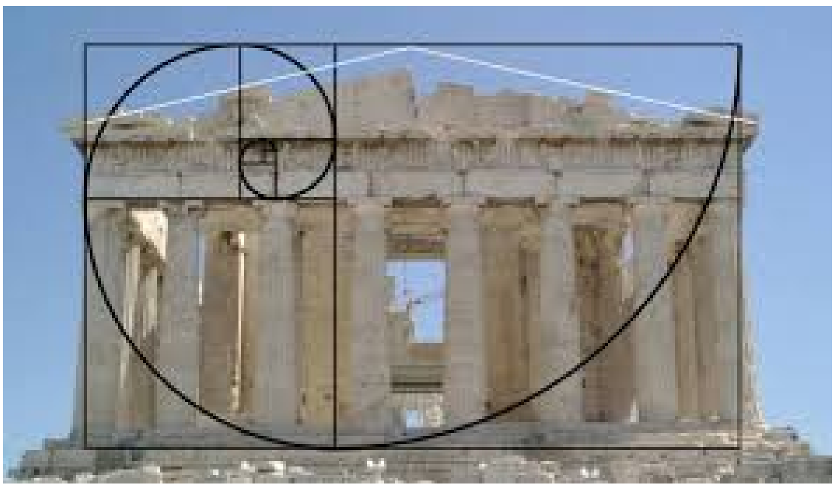
Planejamos as atividades para serem executadas inicialmente com papéis, régua, compasso e calculadoras. Etapa necessária para que, posteriormente, os alunos se sintam mais confiantes com o uso dos softwares GeoGebra (GeoGebra, s.d.) e Planilhas Google (Planilhas, s.d.). E, também mais seguros com relação aos resultados obtidos, visto que pode ser o primeiro contato da maioria deles com os aplicativos.

1.4 ATIVIDADE PARA O 6º ANO: A ESPIRAL DE FIBONACCI

1.4.1 NÚMERO DE OURO: O NÚMERO PERFEITO

Entre os números metálicos, o número de ouro é o mais conhecido e famoso deles e é representado pela letra grega phi (ϕ), $\phi = 1,618...$. Tal fama é justificada por sua presença na natureza, nas artes, nas construções, no corpo humano, nas ciências e no mercado financeiro, por exemplo. Possui um significado místico: relação com o criador, com a beleza e com a perfeição. É conhecido por outras denominações, entre elas, como razão áurea ou razão de ouro, proporção áurea ou proporção de ouro, média e extrema razão, divina proporção, razão de Phidias. Essa última denominação se deve ao arquiteto grego, Phidias, que teria utilizado o conceito de proporção áurea no projeto do Parthenon, Figura 1.2, no século V a.C. e, por esse motivo, usamos o ϕ para representá-lo. (Wikipédia, 2024)

Figura 1.2 – Fachada do Parthenon com a regra áurea



Fonte: (Lima; Maranhão; Lionn, 2017).

Na matemática, observamos a presença da razão áurea na sequência de Fibonacci que é um padrão numérico no qual o primeiro e o segundo termos são iguais a 1, e cada termo subsequente, a partir do terceiro, é calculado somando-se os dois termos anteriores, ou seja, é dada por $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...\}$ e a razão entre qualquer termo dessa sequência e seu antecessor converge para o valor de ϕ à medida que avançamos nos termos da sequência como, por exemplo, $\phi \approx \frac{144}{89} = 1,617...$.

1.4.2 ASSINTINDO VÍDEOS SOBRE O NÚMERO DE OURO

Os estudantes iniciam a atividade assistindo a três vídeos que abordam o assunto. O primeiro vídeo “Sequência de Fibonacci e número de ouro” (Ravaelmvp, 2008), que traz um pouco da biografia de Leonardo Fibonacci, o problema da reprodução dos coelhos, a sequência de Fibonacci e o número de ouro. O segundo vídeo “As digitais do Criador – Sequência de Fibonacci” (RaciocínioCristão, 2016) aborda a relação entre o número de ouro e os elementos da natureza que apresentam esses padrões.

E, para finalizar essa etapa, apresentamos um terceiro vídeo “O número de ouro: a mágica por detrás do belo” (Alecrim, 2012) que faz uma rápida abordagem sobre a sequência de Fibonacci, as formas de se obter o número de ouro, como construir uma espiral de ouro e um retângulo de ouro, sua existência na natureza, as aplicações desses conhecimentos nas construções, nos objetos e na arte, sua relação com o que é considerado harmônico e belo e em fatos históricos e contemporâneos. A espiral de ouro também é conhecida como espiral áurea ou espiral de Fibonacci.

Após assistir aos vídeos, os alunos podem responder aos questionamentos:

1) Você já havia tido algum contato anterior com o tema: sequência de Fibonacci e número de ouro?

2) Quem foi Leonardo Fibonacci?

3) Como é a sequência de Fibonacci?

4) Onde podemos observar a sequência de Fibonacci e o número de ouro na natureza?

Observação: Essa etapa pode ser realizada com todas as séries.

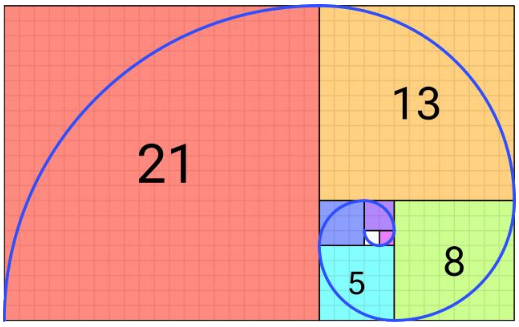
1.4.3 CONSTRUINDO A ESPIRAL DE FIBBONACCI

A habilidade EF06MA22 da BNCC que envolve o uso de régua e compasso para construir figuras é:

- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros (Brasil, 2018, p. 303).

Nessa segunda etapa da atividade vamos reproduzir a espiral de Fibonacci, Figura 1.3, utilizando papel quadriculado, régua e compasso.

Figura 1.3 – Espiral de Fibonacci

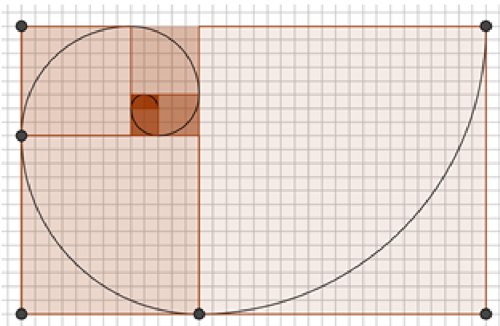


Fonte: (Wikimedia, 2022).

Iniciamos a atividade com a exposição da sequência de Fibonacci na lousa, com a participação dos alunos no cálculo dos próximos números da sequência. Eles comparam a razão entre dois números consecutivos e que a cada etapa obtém uma melhor aproximação para o número de ouro.

Em seguida, cada aluno recebe uma folha com um espaço quadriculado, inicia o desenho dos quadrados e retângulos para, posteriormente, obter a espiral áurea. Iniciar com o quadrado de lado medindo 1 uc (uc: unidade de comprimento), na 6^a linha e 10^a coluna da parte quadriculada, para que não haja problema de espaço ao construir a espiral, Figura 1.4. Este quadrado é comparado ao primeiro termo da sequência de Fibonacci.

Figura 1.4 – Espiral de Fibonacci no GeoGebra



Fonte: A autora.

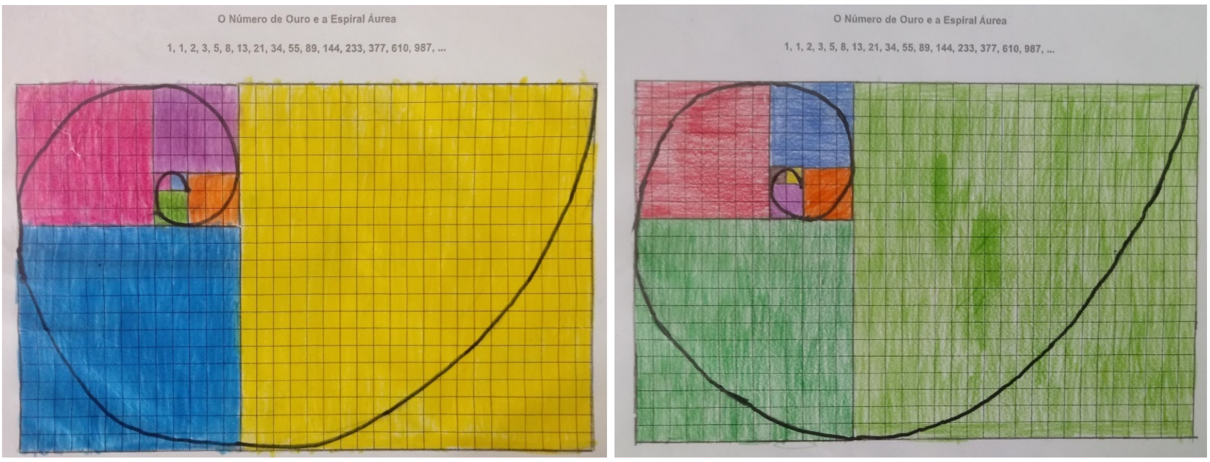
O segundo quadrado é desenhado à esquerda do primeiro e comparado ao segundo termo da sequência de Fibonacci. O quadrado seguinte é desenhado abaixo dos dois anteriores, com lado medindo 2 uc e comparado com o terceiro termo da sequência e, assim sucessivamente.

Repetimos esse padrão com quadrados cujos lados possuem medidas associadas aos termos da sequência de Fibonacci e no sentido anti-horário, até o preenchimento de todo o papel quadriculado, terminando com o desenho do quadrado de lado medindo 21 uc. Observamos que os lados dos retângulos formados medem, em uc, 1×2, 2×3, 3×5, 5×8, e assim por diante e a aproximação com os retângulos áureos.

Posteriormente, constrói a espiral por meio da concordância dos arcos de circunferências obtidos com o uso do compasso e para finalizar, os alunos podem realizar a pintura dos desenhos, destacando os retângulos áureos.

A concordância dos arcos é destacada, reforçando o traçado da espiral à mão livre, como nos dois exemplos apresentados na Figura 1.5.

Figura 1.5 – Desenho da espiral áurea concluída por estudantes com destaque para os retângulos áureos obtidos



Fonte: A autora.

1.4.4 A ESPIRAL DE FIBONACCI NO GEOGEBRA

Para a terceira etapa da atividade, planejamos refazer a atividade anterior utilizando o GeoGebra. A ideia é realizar a atividade individualmente ou em grupo.

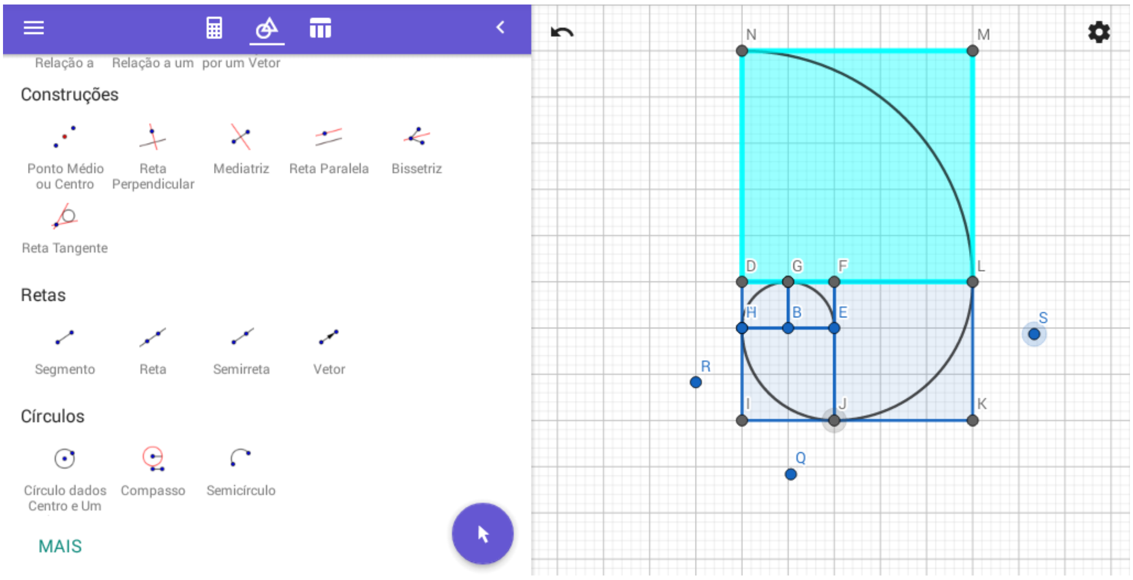
Lembrando que, as atividades em grupo são uma forma de desenvolver competências gerais e habilidades específicas da BNCC. As habilidades desenvolvidas variam de acordo com o componente curricular e a atividade proposta pelo professor.

Algumas das competências gerais que podem ser desenvolvidas por meio dessa atividade em grupo são a cooperação, a comunicação, a argumentação e o pensamento crítico e criativo.

Para melhor apresentação da atividade e interação com os alunos é interessante espelhar (projetar) a tela do computador ou tablet para que a sequência de comandos realizada pelo docente seja visualizada por todos os estudantes facilitando, dessa forma, o acompanhamento do passo-a-passo e reprodução das etapas da construção da espiral no aplicativo.

Inicialmente, configuramos uma tela sem eixos e em uma malha quadriculada fixa composta de quadrados de tamanho 1 uc. Construímos quadrados de lado igual aos elementos da sequência de Fibonacci, com a ferramenta "polígono regular". E, por último, construímos a espiral com a ferramenta “arco circular”, Figura 1.6.

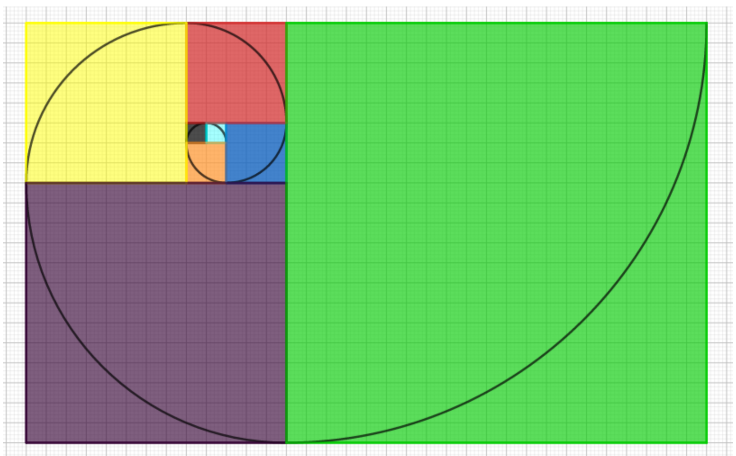
Figura 1.6 – Tela de comandos do Geogebra, e início da construção da espiral áurea



Fonte: A autora.

Para uma melhor visualização da imagem, os pontos referentes aos vértices dos quadrados são ocultados da tela com a ferramenta “exibir objeto” e alteradas as cores e transparência dos quadrados na opção “configurações”, Figura 1.7.

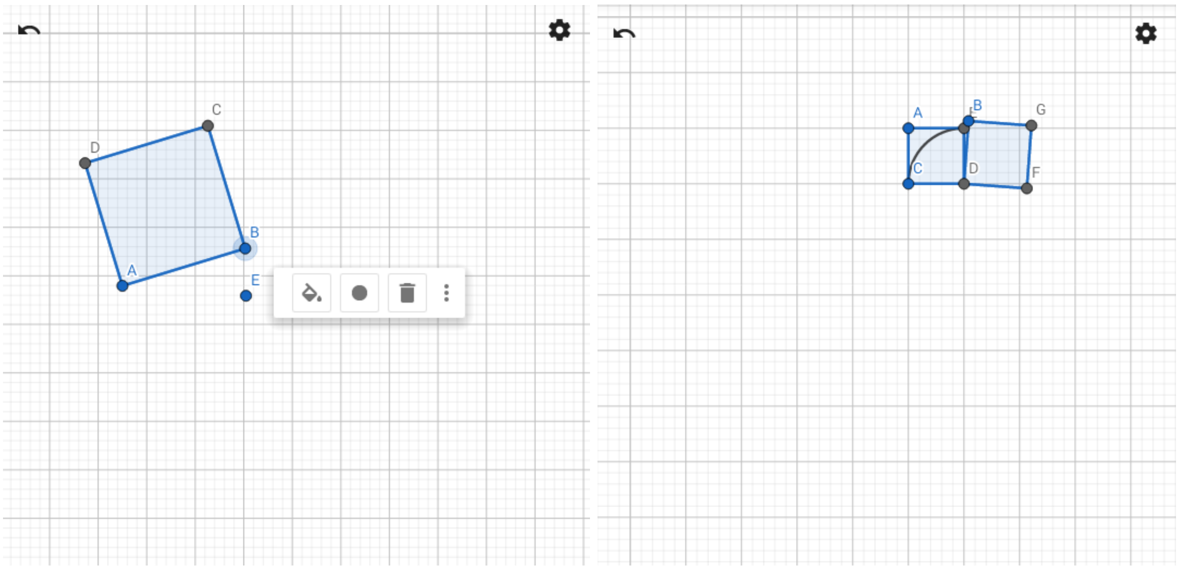
Figura 1.7 – Espiral áurea construída no GeoGebra



Fonte: A autora.

Algumas dificuldades que podem surgir durante a realização dessa atividade: primeiro contato dos alunos com o software GeoGebra, dificuldade inicial ao criar pontos “indesejados”, ou alterar o formato do polígono ao tentar aumentar a imagem na tela, Figura 1.8 (a); ainda, coincidir os lados dos polígonos com a malha, Figura 1.8 (b). É importante comentar sobre outras ferramentas disponíveis nos ícones, como usar o ícone “desfazer” em caso de alterações indesejadas e o uso da ferramenta “mover” para ampliar ou reduzir a imagem da tela.

Figura 1.8 – Dificuldades encontradas na construção: (a) ponto E “indesejado”; (b) mudança no formato do polígono



Fonte: A autora.

No decorrer da atividade pode ocorrer diferenças nas etapas em que cada aluno se encontra, o que pode gerar uma certa agitação, ansiedade, dúvidas se vão ou não conseguir realizar a atividade. É necessário explicar que será disponibilizado tempo para realização da tarefa e a importância da troca de ideias com os colegas.

1.5 ATIVIDADE PARA O 7º ANO: PENTÁGONO REGULAR

A BNCC não especifica habilidades relacionadas a goniômetros, mas sim habilidades relacionadas a medições e geometria. Assim, esta atividade tem como objetivos: desenvolver a habilidade no uso do goniômetro na construção do pentágono regular, observar as características de um polígono regular quanto a ângulos e lados, verificar que o número de ouro está presente na razão entre a medida da diagonal e a medida do lado do pentágono regular e explorar as possibilidades de aplicação das tecnologias para visualizar essa relação.

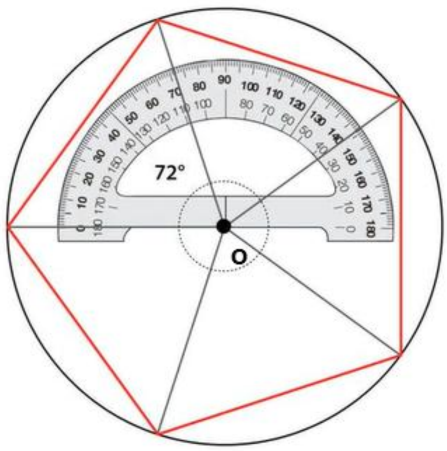
1.5.1 CONSTRUINDO UM PENTÁGONO REGULAR COM O GONIÔMETRO

Construir um pentágono regular utilizando régua, compasso e goniômetro (transferidor), Figura 1.9.

Procedimento:

- Desenhar uma circunferência, destacando o centro **O**;
- Com o auxílio do goniômetro, desenhar 5 arcos de circunferência com centro em **O** e ângulo central de 72º, obtendo os 5 vértices do pentágono;
- Traçar os 5 segmentos de reta consecutivos obtendo o pentágono regular inscrito na circunferência.

Figura 1.9 – Pentágono Regular



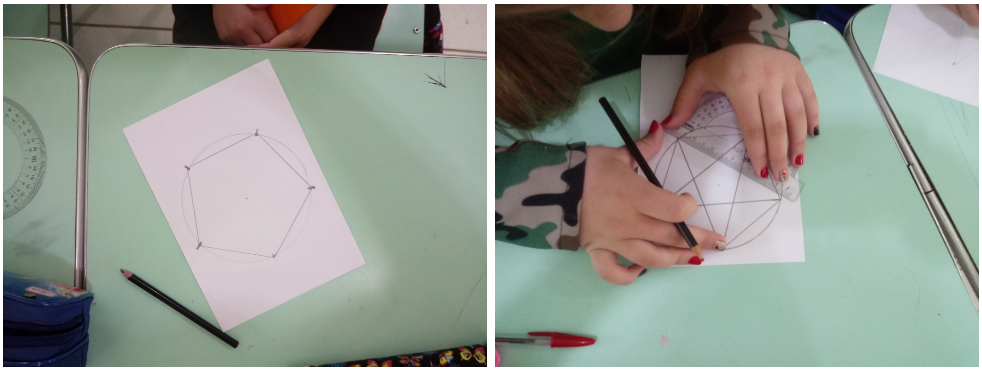
Fonte: (Slideplayer, 2024).

Unimos todos os pontos através de segmentos de reta, formando um pentágono regular com os segmentos externos, Figura 1.10 (a), e um pentagrama com os segmentos internos Figura 1.10 (b)

Solicitamos aos alunos que observem o pentágono regular formado no interior do pentagrama e a repetição do processo de ligação dos pontos, que resulta na formação de uma estrutura fractal. Em seguida, os alunos realizam o aferimento das medidas dos lados e das diagonais dos pentágonos desenhados, registrando-as no caderno, e calculam a razão entre as medidas obtidas. É importante destacar que as razões calculadas podem variar entre os estudantes, dependendo da precisão com que realizam as medições.

Explicamos que estes valores se aproximam do número de ouro, e que quanto maior for a precisão no desenho e no aferimento das medidas mais a razão se aproximará do número de ouro.

Figura 1.10 – Construção do pentagrama no papel: (a) pentágono regular; (b) pentagrama



(a) (b)

Fonte: A autora.

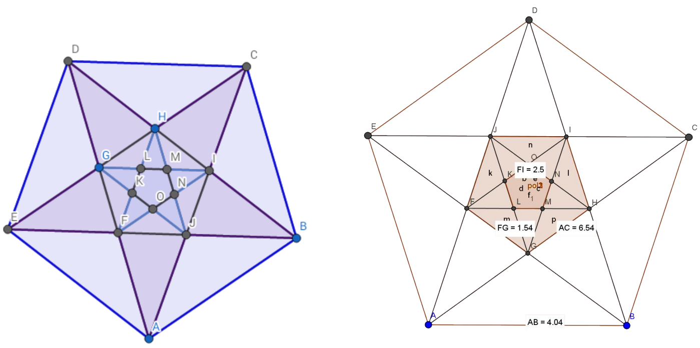
1.5.2 CONTRUINDO O PENTÁGONO REGULAR NO GEOGEBRA

A segunda etapa da atividade constitui-se na retomada do roteiro de construção dos pentágonos, mas utilizando o software GeoGebra.

Recomendamos também o uso da técnica de compartilhamento de tela do tablet ou computador em um sistema de projeção, a fim de facilitar a visualização e a compreensão dos passos a serem seguidos por todos os alunos.

Iniciamos pela configuração da janela sem malha e sem eixos. Na sequência, utilizamos a ferramenta “polígono regular” para construir o primeiro pentágono. Com o ferramenta “segmento de reta”, traçamos as diagonais formando a estrela, que é evidenciada com a ferramenta “polígono”, Figura 1.11 (a).

Figura 1.11 – Atividade no GeoGebra: (a) construção do pentágono regular e pentagrama; (b) algumas medidas realizadas



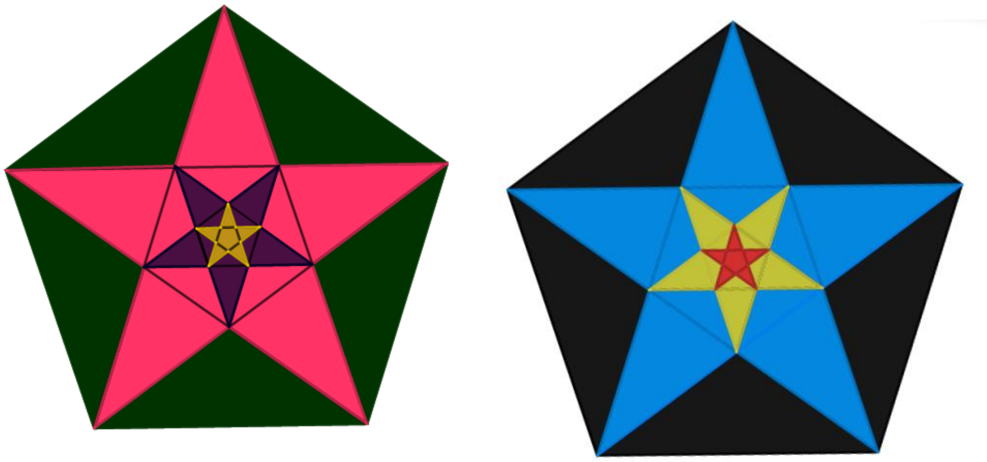
(a) (b)

Fonte: A autora.

Então, determinamos a medida dos lados e das diagonais com a ferramenta “distância”, Figura 1.11 (b), e efetuamos os cálculos das razões na calculadora.

Para finalizar, trabalhamos a imagem, a aparência visual, ocultando os pontos e a identificação dos polígonos com a ferramenta “exibir objeto” e as colorindo, Figura 1.12.

Figura 1.12 – Arte final: pentágono e pentagrama coloridos



Fonte: A autora.

Para verificar o conhecimento, interesse e motivação dos estudantes, em ambas as etapas, no papel e utilizando o GeoGebra, podemos realizar os seguintes questionamentos:

1) Você já conhecia o aplicativo GeoGebra? Já havia utilizado para construir polígonos regulares?

2) Você sabe o que é um polígono estrelado? E um pentagrama?

3) Você já conhecia o termo "estruturas fractais"?

4) Você onhecia o número de ouro ou razão áurea?

Os estudantes geralmente afirmam que preferem a construção no GeoGebra em comparação ao papel. Eles justificam essa preferência destacando a maior rapidez, a possibilidade de manipular as figuras, a agilidade para colorir, a precisão nos ângulos e a facilidade de corrigir erros ao desfazer ações.

Por outro lado, alguns pontos negativos também podem ser apontados, como as dificuldades para selecionar o ponto ou segmento corretos, a deformação das figuras e a criação involuntária de pontos e polígonos indesejados.

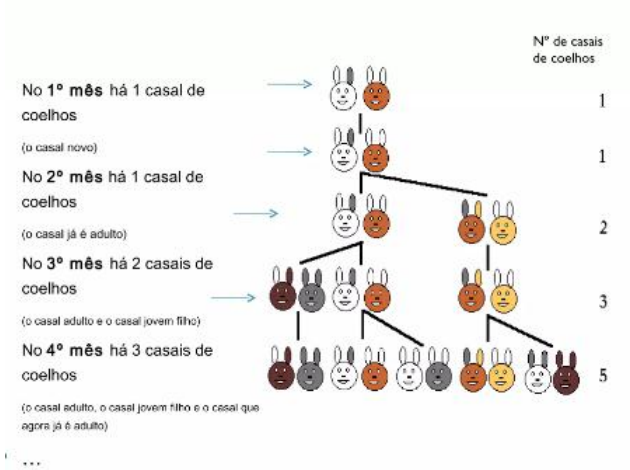
1.6 ATIVIDADE PARA O 8º ANO: NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS, A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

Com a turma do 8º ano, é possível trabalhar o número de ouro em conjunto com as definições de números racionais e irracionais, conceitos que, geralmente, demandam mais tempo para serem compreendidos pelos alunos.

1.6.1 NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Para iniciar a atividade, introduzimos o estudo do número de ouro a partir da sequência de Fibonacci e do problema dos coelhos, Figura 1.13. E, posteriormente, calculamos as razões entre os termos da sequência para que os alunos observem que as razões são valores racionais, que tendem a um valor irracional.

Figura 1.13 – Problema dos coelhos e a sequência de Fibonacci



Fonte: (Slideshare, 2009).

.

Finalmente, calculamos a razão entre as medidas de alguns objetos dos alunos e da sala, como penal, caixa de giz, apontador, e também a razão entre as partes do corpo humano em busca da razão áurea.

Iniciamos a atividade com o estudo do problema dos coelhos e suas possíveis soluções, destacando que a sequência de Fibonacci é apenas uma das soluções possíveis, considerando um caso ideal. Verificamos, então, o padrão que forma a sequência, de que cada termo é a soma dos dois anteriores.

Na Figura 1.14 é disponibilizada uma tabela para completar com o valor decimal da razão entre um termo da sequência e o seu antecessor.

Figura 1.14 – Razão entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci

Sequência de Fibonacci

Razão entre	Cálculo aproximado
$\frac{1}{1}$	
$\frac{2}{1}$	
$\frac{3}{2}$	
$\frac{5}{3}$	
$\frac{8}{5}$	
$\frac{13}{8}$	
$\frac{21}{13}$	
$\frac{34}{21}$	
$\frac{55}{34}$	
$\frac{89}{55}$	
$\frac{144}{89}$	
$\frac{233}{144}$	
$\frac{377}{233}$	
$\frac{610}{377}$	
$\frac{987}{610}$	
$\frac{1597}{987}$	
$\frac{\quad}{\quad}$	
$\frac{\quad}{\quad}$	

Fonte: A autora.

E, calculamos a razão entre os termos consecutivos e anotamos os resultados, Figura 1.15.

Figura 1.15 – Razão entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci, calculadas pelos alunos

$\frac{1}{1}$	1
$\frac{2}{1}$	2
$\frac{3}{2}$	1,5
$\frac{5}{3}$	1,66666
$\frac{8}{5}$	1,6
$\frac{13}{8}$	1,625
$\frac{21}{13}$	1,61538461538
$\frac{34}{21}$	1,61904761904
$\frac{55}{34}$	1,61764705882
$\frac{89}{55}$	1,6181818181818
$\frac{144}{89}$	1,61797752808
$\frac{233}{144}$	1,61805555555
$\frac{377}{233}$	1,61802575107
$\frac{610}{377}$	1,61803713527
$\frac{987}{610}$	1,61803278688

Fonte: A autora.

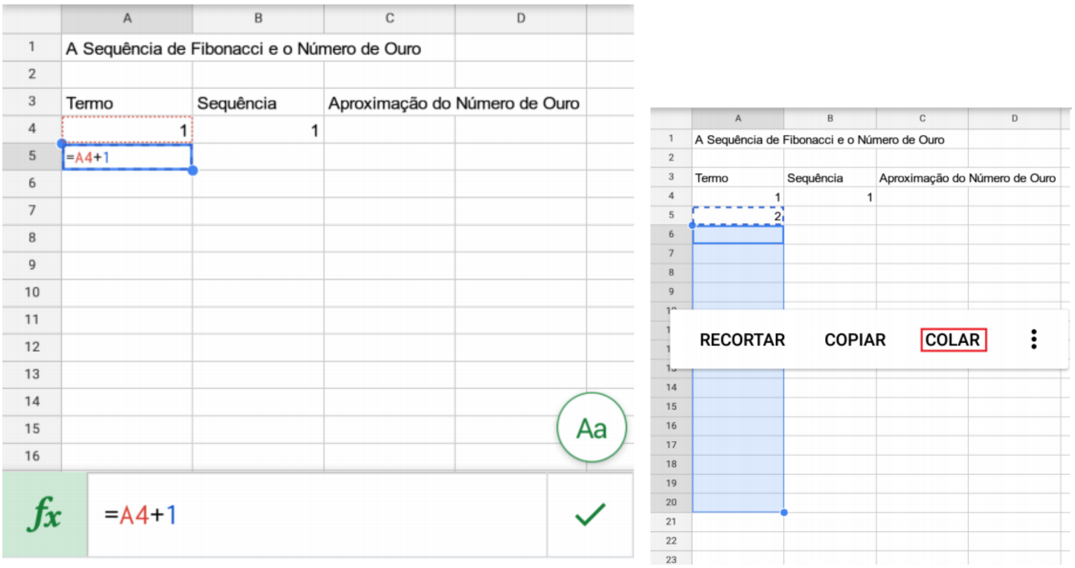
Observamos que todos os valores calculados são números racionais, pois são resultados da divisões de dois números inteiros e que a cada linha da tabela (cada divisão), nos aproximamos do valor do número de ouro, com maior precisão, mas nunca o atingindo, pois o número de ouro, assim como qualquer número irracional, não pode ser gerado por uma razão entre dois números inteiros.

1.6.2 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO PLANILHAS GOOGLE

Repetimos a atividade utilizando o aplicativo Planilhas Google, um software livre semelhante ao Excel. Nele, criamos uma tabela e programamos o cálculo automático dos valores da sequência de Fibonacci, bem como das razões entre seus termos.

Preenchemos as células $A1$, $A3$, $B3$ e $C3$ com a identificação das colunas. Na coluna A, com os termos, iniciando pelo número 1 na célula $A4$ e programando a célula $A5 = A4 + 1$. Essa célula é então replicada para as demais células da coluna A, formando a sequência 1, 2, 3, 4, 5..., Figura 1.16.

Figura 1.16 – Preenchimento da coluna A do Planilhas Google

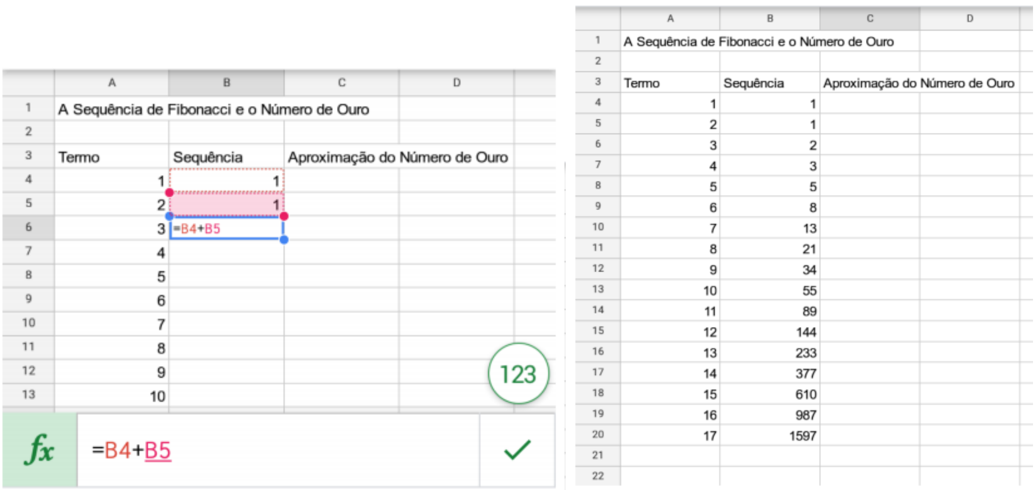


Fonte: A autora.

Para completar a coluna B com a sequência de Fibonacci, preenchemos as células $B4$ e $B5$ com o número 1, e a célula $B6 = B4 + B5$, realizando também a cópia de $B6$ para as demais células da coluna B, Figura 1.17.

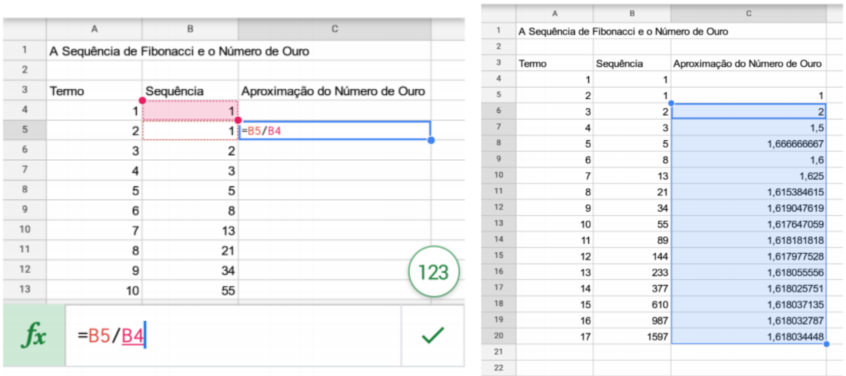
E preenchemos a coluna C, Figura 1.18, com as razões entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci, obtendo aproximações para o número de ouro. Para isso, a célula $C5$ é programada como $C5 = B5/B4$ e copiada para as demais células da coluna C.

Figura 1.17 – Preenchimento da coluna B do Planilhas Google



Fonte: A autora.

Figura 1.18 – Preenchimento da coluna C do Planilha Google



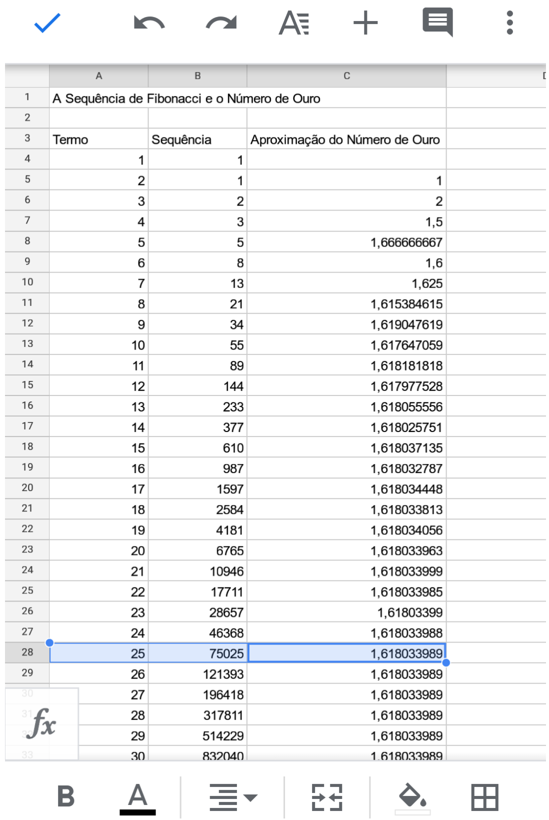
	A	B	C
1	A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro		
2			
3	Termo	Sequência	Aproximação do Número de Ouro
4	1	1	
5	2	1	=B5/B4
6	3	2	
7	4	3	
8	5	5	
9	6	8	
10	7	13	
11	8	21	
12	9	34	
13	10	55	

	A	B	C
1	A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro		
2			
3	Termo	Sequência	Aproximação do Número de Ouro
4	1	1	
5	2	1	1
6	3	2	2
7	4	3	1,5
8	5	5	1,666666667
9	6	8	1,6
10	7	13	1,625
11	8	21	1,615384615
12	9	34	1,619047619
13	10	55	1,617647059
14	11	89	1,618181818
15	12	144	1,617977528
16	13	233	1,618055556
17	14	377	1,618025751
18	15	610	1,618037135
19	16	987	1,618032787
20	17	1597	1,618034448
21			
22			

Fonte: A autora.

O preenchimento da coluna C continua até a célula em que a razão se estabiliza, Figura 1.19. Observamos que, com 9 casas decimais, a razão se mantém constante a partir dos termos 24 e 25 da sequência. Ressaltamos que, em softwares com maior precisão de algarismos significativos, poderia ser necessário calcular mais termos para que a estabilização ocorresse.

Figura 1.19 – Cálculo das aproximações do número de ouro no software Planilhas Google



	A	B	C
1	A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro		
2			
3	Termo	Sequência	Aproximação do Número de Ouro
4	1	1	
5	2	1	1
6	3	2	2
7	4	3	1,5
8	5	5	1,666666667
9	6	8	1,6
10	7	13	1,625
11	8	21	1,615384615
12	9	34	1,619047619
13	10	55	1,617647059
14	11	89	1,618181818
15	12	144	1,617977528
16	13	233	1,618055556
17	14	377	1,618025751
18	15	610	1,618037135
19	16	987	1,618032787
20	17	1597	1,618034448
21	18	2584	1,618033813
22	19	4181	1,618034056
23	20	6765	1,618033963
24	21	10946	1,618033999
25	22	17711	1,618033985
26	23	28657	1,61803399
27	24	46368	1,618033988
28	25	75025	1,618033989
29	26	121393	1,618033989
	27	196418	1,618033989
	28	317811	1,618033989
	29	514229	1,618033989
	30	832040	1,618033989

Fonte: A autora.

Para contextualizar o estudo, finalizamos a atividade com a busca de objetos ou partes do corpo humano em que a razão entre determinadas partes se aproxime da razão áurea, Figura 1.20, com base nas relações apresentadas no segundo vídeo, “As digitais do Criador – Sequência de Fibonacci”. Os valores obtidos são anotados e compartilhados com a turma, verificando, por exemplo, qual dedo da mão mais se aproximava da proporção áurea e poderia ser considerado “o mais bonito” nesse aspecto. Essa atividade final proporciona maior fixação dos conteúdos trabalhados e promove uma interação mais significativa entre os estudantes.

Figura 1.20 – Razão áurea no corpo humano

Aluno(a): ______________________________________ Série: ______

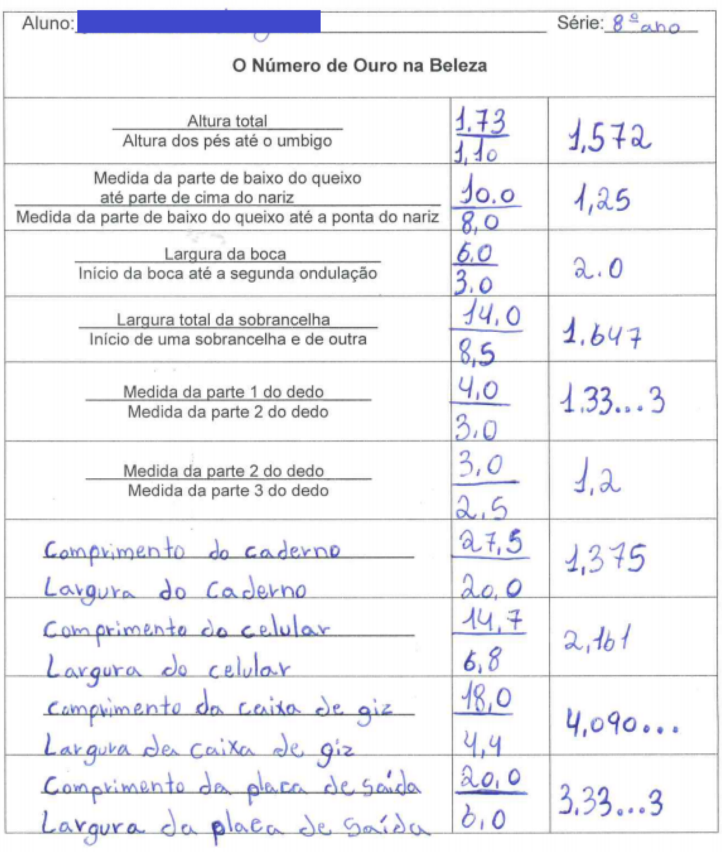
Proporção áurea – buscando pela presença do número de ouro

Razão entre	**Medidas**	**Cálculo aproximado**
$\frac{\text{Altura de uma pessoa}}{\text{Distância dos pés ao umbigo}}$	______	
$\frac{\text{Medida da parte de baixo do queixo até a parte de cima do nariz}}{\text{Medida da parte de baixo do queixo até a ponta do nariz}}$	______	
$\frac{\text{Comprimento da boca}}{\text{Distância da extremidade da boca até o Arco do Cupido (meio da boca)}}$	______	
$\frac{\text{Comprimento da sombrancelha}}{\text{Distância entre as sombrancelhas}}$	______	
$\frac{\text{Medida total do dedo}}{\text{Distância da dobra central até a primeira dobra}}$	______	
$\frac{\text{Medida total do dedo}}{\text{Distância da dobra central até a segunda dobra}}$	______	
______________________________	______	
______________________________	______	
______________________________	______	
______________________________	______	
______________________________	______	

Fonte: A autora.

A tabela pode ser complementada com objetos de acordo com pesquisas ou curiosidades por parte dos alunos, como na Figura 1.21.

Figura 1.21 – Razão áurea no corpo humano e em objetos



Aluno: [redacted] Série: 8º ano

O Número de Ouro na Beleza

Altura total / Altura dos pés até o umbigo	1,73 / 1,10	1,572
Medida da parte de baixo do queixo até parte de cima do nariz / Medida da parte de baixo do queixo até a ponta do nariz	10.0 / 8,0	1,25
Largura da boca / Início da boca até a segunda ondulação	6.0 / 3.0	2.0
Largura total da sobrancelha / Início de uma sobrancelha e de outra	14,0 / 8,5	1.647
Medida da parte 1 do dedo / Medida da parte 2 do dedo	4,0 / 3,0	1.33...3
Medida da parte 2 do dedo / Medida da parte 3 do dedo	3,0 / 2,5	1,2
Comprimento do caderno / Largura do Caderno	27,5 / 20,0	1,375
Comprimento do celular / Largura do celular	14,7 / 6,8	2,161
comprimento da caixa de giz / Largura da caixa de giz	18,0 / 4,4	4,090...
Comprimento da placa de saída / Largura da placa de saída	20,0 / 6,0	3,33...3

Fonte: A autora.

1.7 ATIVIDADE PARA O 9º ANO: OS NÚMEROS METÁLICOS E A EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Vera de Spinadel (Vinagre, 2014) define os elementos que fazem parte da família dos números metálicos, também conhecidos como Média Metálica, como sendo aqueles que são solução das equações quadráticas do tipo

$$\{x \in \mathbb{R}/x^2 - px - q = 0, x > 0, p \text{ e } q \in \mathbb{N}\}. \quad (1.2)$$

Compusemos as atividades unindo os estudos de equações do segundo grau com os números metálicos e polígonos regulares e, novamente, utilizamos como ferramentas o GeoGebra e o Planilhas Google.

1.7.1 OBTENDO OS NÚMEROS METÁLICOS NA EQUAÇÃO QUADRÁTICA $\{x \in \mathbb{R}/x^2 - px - q = 0, x > 0, p \text{ e } q \in \mathbb{N}\}$

Para iniciar a atividade, apresentamos a equação $x^2 - x - 1 = 0$, e solicitamos aos alunos para que calculem possíveis soluções pelo método já estudado, ou seja, usando o conhecimento prévio sobre as soluções da equação do segundo grau pela Fórmula de Báskara. Os resultados a serem obtidos são $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ que na forma decimal representam, aproximadamente, $1,618$ e $-0,618$. A raiz positiva calculada é o número de ouro e, apresentamos então a definição de números metálicos como sendo as raízes positivas das equações da forma $x^2 - px - q = 0$, com p e $q \in \mathbb{N}$.

Para calcular os valores decimais dos números metálicos, construímos uma tabela no Planilhas Google. A programação para o cálculo das raízes da equação $x^2 - px - q = 0$ é baseada nos valores dos coeficientes p e q.

Iniciamos pelo preenchimento da identificação das colunas nas células $A1$, $A2$, $B2$, $C2$, $D2$ e $E2$, colocando o nome de cada número metálico na coluna A, Figura 1.22.

Figura 1.22 – Preenchimento da coluna A, com nome dos números metálicos

	A	B	C	D	E
1	Números Metálicos				
2	nome	equação	p	q	raíz
3	Ouro				
4	Cobre				
5	Níquel				
6	Prata				
7	Bronze				
8	Platina				
9					
10					

Fonte: A autora.

Na sequência, preenchemos as colunas B, C e D com as equações e os valores de p e q, Figura 1.23.

Figura 1.23 – Preenchimento das colunas B, C e D, com a equação do segundo grau associada ao número metálico

	A	B	C	D	E
1	Números Metálicos				
2	nome	equação	p	q	raíz
3	Ouro	x^2-x-1=0	1	1	
4	Cobre	x^2-x-2=0	1	2	
5	Níquel	x^2-x-3=0	1	3	
6	Prata	x^2-2=0	2	1	
7	Bronze	x^2-3=0	3	1	
8	Platina	x^2-2x-2=0	2	2	
9					
10					

Fonte: A autora.

Para realizar o cálculo das raízes, programamos a célula $E3$ com a fórmula resolutiva das equações quadráticas, com base nos valores de $C3$ e $D3$. Inicialmente, observamos que o coeficiente de x^2 é sempre 1, o que simplifica a fórmula de cálculo. Ainda, observamos que os coeficientes de x e os termos independentes da equação são sempre negativos e os valores de p e q são positivos. Assim, a fórmula para a programação é $x = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ou, na linguagem do Planilhas Google $E3 = (C3 + (C3 \wedge 2 + 4 * D3) \wedge (1/2))/2$, Figura 1.24.

Figura 1.24 – Programação para o cálculo das raízes da equação $x^2 - px - q = 0$ no Planilhas Google

	A	B	C	D	E
1	Números Metálicos				
2	nome	equação	p	q	raíz
3	Ouro	x^2-x-1=0	1	1	=(C3+(C3^2+4*D3)^
4	Cobre	x^2-x-2=0	1	2	
5	Níquel	x^2-x-3=0	1	3	
6	Prata	x^2-2=0	2	1	
7	Bronze	x^2-3=0	3	1	
8	Platina	x^2-2x-2=0	2	2	
9					
10					
11					

fx =(C3+(C3^2+4*D3)^(1/2))/2

Fonte: A autora.

Copiamos a célula $E3$ para as demais linhas da coluna E, obtendo as raízes positivas das demais equações. Observamos nessa programação que, alterando os valores de p e q, e o cálculo da raiz é feito automaticamente para qualquer número metálico desejado, Figura 1.25.

Figura 1.25 – Raízes das equações associadas aos números metálicos no Planilhas Google

	A	B	C	D	E
1	Números Metálicos				
2	nome	equação	p	q	raíz
3	Ouro	x^2-x-1=0	1	1	1,618033989
4	Cobre	x^2-x-2=0	1	2	2
5	Níquel	x^2-x-3=0	1	3	2,302775638
6	Prata	x^2-2=0	2	1	2,414213562
7	Bronze	x^2-3=0	3	1	3,302775638
8	Platina	x^2-2x-2=0	2	2	2,732050808
9					
10					

Fonte: A autora.

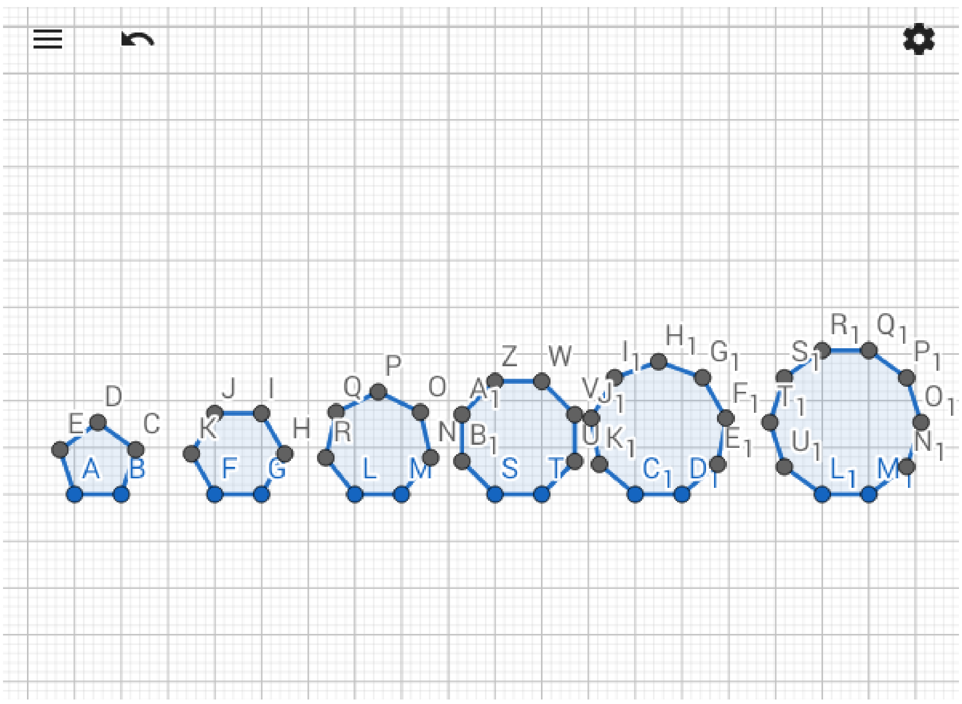
Esses são os números metálicos mais conhecidos, mas o conjunto dos números metálicos é infinito e os demais elementos não são nominados.

1.7.2 RELACIONANDO OS NÚMEROS METÁLICOS E AS DIAGONAIS DOS POLÍGONOS REGULARES

Dando continuidade, podemos verificar a relação entre os números metálicos e os polígonos regulares com o uso do GeoGebra. Para iniciar, os eixos são retirados e a malha quadriculada configurada em uma escala de 10000 unidades $\times$ 10000 unidades, para aumentar a quantidade de algarismos nas medidas das diagonais.

Na sequência, construir 6 polígonos regulares, com $5, 6, 7, 8, 9$ e 10 lados e com a medida do lado coincidindo com a malha, Figura 1.26. Assim, temos os seguintes polígonos regulares: pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono e decágono. Com a ferramenta "segmento de reta" marcamos as diagonais dos polígonos, e obtemos as suas medidas com a ferramenta "distância", Figura 1.27.

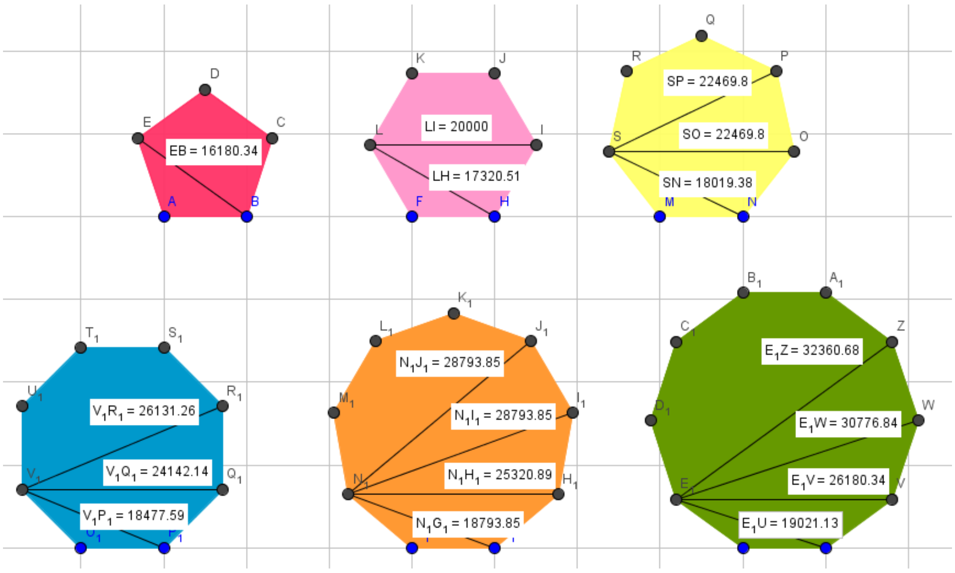
Figura 1.26 – Polígonos regulares construídos no GeoGebra



Fonte: A autora.

Fazemos, então, a comparação entre as medidas realizadas e os números metálicos obtidos na planilha da Figura 1.25, verificando a presença do número de ouro na medida da diagonal do pentágono, do número de cobre na medida da diagonal do hexágono e do número de prata na medida da diagonal do octógono. Também observamos que a medida de outra diagonal do hexágono apresenta relação com o número de platina $= 2,732050...$ sendo uma unidade a menos $1,732050....$

Figura 1.27 – Números metálicos nos polígonos regulares



Fonte: A autora.

Alguns questionamentos que podem ser feito aos alunos:

1) Já havia tido uma experiência anterior com o Planilhas Google ou ferramenta semelhante? Qual?
2) O que acharam de programar a equação quadrática no aplicativo?
3) Comparando com o uso dos instrumentos de desenho e calcularora, o que você achou do uso do Planilhas Google?
4) Cite as principais dificuldades verificadas na construção dos polígonos regulares e destaque das diagonais e suas medidas no GeoGebra.

E, no final da atividade é possível mostrar que há a presença do número de ouro nos mais variados lugares como mostra a tirinha, Figura 1.28.

Figura 1.28 – O número de ouro está em todos os lugares

(Humorcomciencia, s.d.).

REFERÊNCIAS

ALECRIM, R. **O número de Ouro: a mágica por detrás do belo**. 2012. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8>. Acesso em: 20 set. 2024. 10

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Pcn. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2021. 8

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 18 set. 2020. 8, 11

GENEROSO, L. H. C. **Modelagem Matemática e Metodologia Ativa: práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, 2019. 9

GEOGEBRA. **Baixar aplicativos GeoGebra**. s.d. Disponível em: <https://chromewebstore.google.com/detail/planilhas/felcaaldnbdncclmgdcncolpebgiejap?hl=pt-BR&pli=1>. Acesso em: 23 jan. 2024. 9

GOOGLE. **Planilhas**. s.d. Disponível em: <https://chromewebstore.google.com/detail/planilhas/felcaaldnbdncclmgdcncolpebgiejap?hl=pt-BR>. Acesso em: 08 abr. 2024. 9

HUMORCOMCIENCIA. **Proporção**. s.d. Disponível em: <https://www.humorcomciencia.com/tagtirinha/proporcao>. Acesso em: 15 de outubro de 2019. 28

LIMA, A.; MARANHÃO, J.; LIONN, R. **Projeto Batente**. 2017. Disponível em: <https://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura>. Acesso em: 27 de julho de 2020. 9

RACIOCÍNIOCRISTÃO. **As digitais do Criador - Sequência de Fibonacci**. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=57JC2S4bb58>. Acesso em: 20 set. 2024. 10

RAFAELMPV. **Sequência de Fibonacci e Número de Ouro**. 2008. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8>. Acesso em: 20 set. 2024. 10

SLIDEPLAYER. **Polígonos inscritos em um circunferência**. 2024. Disponível em: <https://slideplayer.com.br/slide/9564627/>. Acesso em: 08 abr. 2024. 15

SLIDESHARE. **Sequência de Fibonacci**. 2009. Disponível em: <https://slideplayer.com.br/slide/9564627/>. Acesso em: 08 abr. 2024. 18

VINAGRE, F. Números metálicos. **Escola Secundária da Azambuja**, 2014. Disponível em: <https://www.academia.edu/8050675/Números_Metálicos>. Acesso em: 20 de outubro de 2019. 7, 24

WIKIMEDIA. **Spiral of fibonacci number over tiled squares**. 2022. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=Fibonacci&title=Special:MediaSearch&type=image>. Acesso em: 20 dez. 2024. 11

WIKIPÉDIA. **Proporção áurea**. 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea>. Acesso em: 20 dez. 2024. 9