UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FLAVIA MESCKO FERNANDES

# ATIVIDADES PARA CALCULAR ÁREAS E VOLUMES POR EQUICOMPOSIÇÃO

CURITIBA

2024

FLAVIA MESCKO FERNANDES

# ATIVIDADES PARA CALCULAR ÁREAS E VOLUMES POR EQUICOMPOSIÇÃO

## Activities to calculate areas and volumes by equicomposition

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2972>.
Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós.

CURITIBA

2024

4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

# RESUMO

Neste recurso educacional apresentamos atividades para calcular áreas e volumes por intermédio da equicomposição de polígonos e poliedros. As atividades exploram a confecção e o uso de materiais manipulativos, particularmente do tangram e do cubo-tangram, sendo este uma proposta dos autores para abordar a equicomposição em três dimensões. Concluímos que as atividades propostas satisfazem as competências gerais e específicas da Base Nacional Comum Curricular - BNCC no que concerne à experimentação no ensino de matemática na Educação Básica.

**Palavras-chave**: Tangram; Cubo-tangram; Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien; Terceiro problema de Hilbert.

# ABSTRACT

This educational resource presents activities to calculate areas and volumes through the equicomposition of polygons and polyhedra. The activities explore the creation and use of manipulatives, particularly the tangram and the cube-tangram, the latter being a proposal from the authors to address equicomposition in three dimensions. The proposed activities meet the general and specific competencies outlined in the National Common Curricular Base - BNCC regarding experimentation in mathematics teaching in Basic Education.



**Keywords**: Tangram; Cube-tangram; Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem; Third Hilbert Problem.

# LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

# 1 ATIVIDADE DIDÁTICA PARA CALCULAR ÁREAS

Neste recurso educacional, apresentamos duas propostas de atividades para a Educação Básica que abordam o conceito de equicomposição de polígonos e poliedros (Nós; Fernandes, 2018, 2019). Essas propostas utilizam o jogo e a resolução de problemas como estratégias de aprendizagem.

## 1.1 ATIVIDADE 1: POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS

Proposta para o Ensino Fundamental que explora o lúdico e os conceitos matemáticos associados à equicomposição no plano por meio de *puzzles* e de problemas propostos a partir deles.

*1ª parte: equicomposições com o tangram*

O tangram é um jogo chinês formado por sete peças: $5$ triângulos retângulos isósceles ($2$ grandes, $1$ médio e $2$ pequenos), $1$ quadrado e $1$ paralelogramo. Não se sabe exatamente a sua origem. Embora existam muitas lendas sobre sua criação, a mais conhecida é a que atribui as formas do tangram a um espelho quebrado por um príncipe chinês.

*i*) Construção do tangram

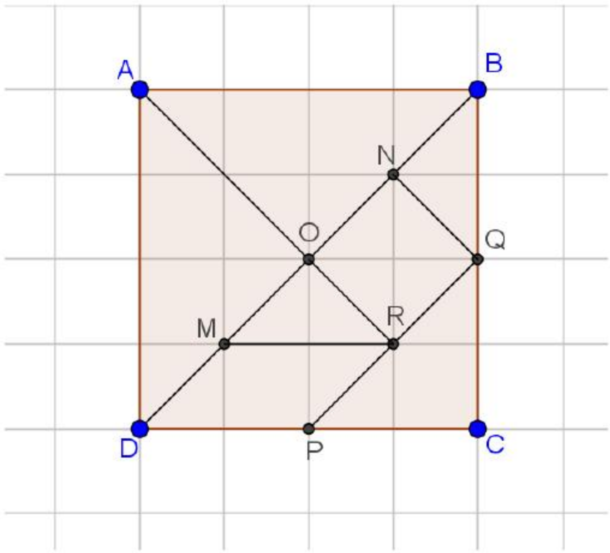
Em papel quadriculado, construa um tangram $4 \times 4$, conforme a Figura 1.1, seguindo os seguintes passos:
1º. No quadrado $ABCD$ $4 \times 4$, trace a diagonal $\overline{DB}$, marque o ponto médio $O$ de $\overline{DB}$ e trace uma perpendicular a $\overline{DB}$ em $O$ passando por $A$;
2º. Marque os pontos médios $M$ de $\overline{DO}$ e $N$ de $\overline{OB}$;
3º. Marque os pontos médios $P$ de $\overline{DC}$ e $Q$ de $\overline{CB}$;
4º. Trace o segmento $PQ$ e marque o ponto médio $R$ de $\overline{PQ}$;
5º. Trace $\overline{MR}$, $\overline{OR}$ e $\overline{NQ}$.

*ii*) Roteiro

1 Munido com as peças do Tangram:
a) Construa retângulos usando $3$, $4$, $5$ e $6$ peças;
b) Construa polígonos convexos utilizando todas as peças. Desenhe esses polígonos em seu caderno, nomeie cada um deles e escreva suas características;
c) Compare o perímetro e a área dos polígonos convexos construídos no item b com o perímetro e a área do quadrado composto pelas sete peças.

2 Considerando o quadrado formado com as sete peças do tangram:
a) Determine a fração da área que representa cada uma das sete peças;

Figura 1.1 – Construção do tangram




Fonte: Os autores.

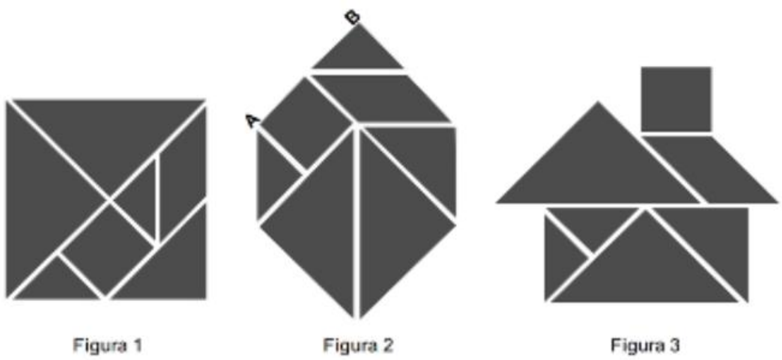
b) Calcule a área do triângulo retângulo isósceles menor de duas maneiras diferentes;
c) Explique como calcular a área de cada polígono convexo construído no item 1 do roteiro.

3 Usando as peças do tangram, construa polígonos convexos cuja área seja a metade da área do quadrado inicial (composto pelas sete peças).

4 Utilizando todas as peças de dois jogos de tangram, construa três quadrados tais que a soma das áreas dos dois primeiros seja igual a área do terceiro. Utilize esses quadrados para comprovar o teorema de Pitágoras.

5 **(ENEM - 2008)** O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da Figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas Figuras 2 e 3 - Figura 1.2.

Figura 1.2 – ENEM 2008




Fonte: INEP (2024).

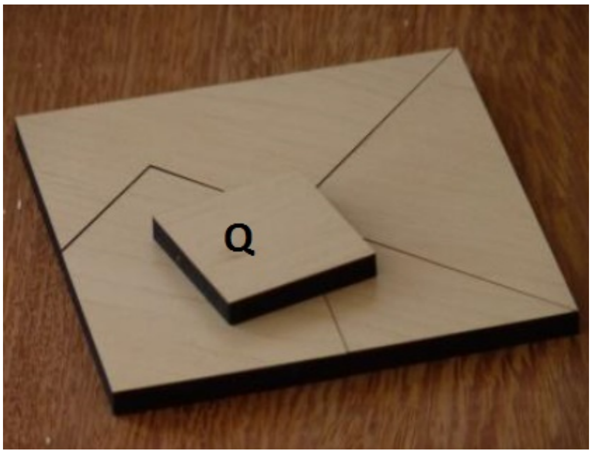
Se o lado AB do hexágono mostrado na Figura 2 mede $2cm$, então a área da Figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a) $4cm^2$ b) $8cm^2$ c) $12cm^2$ d) $14cm^2$ e) $16cm^2$

*$2^a$ parte: outras equicomposições*

6 O *Q. C. Quadrado* é um *puzzle* de cinco peças, ilustrado na Figura 1.3, que corretamente encaixadas formam um quadrado.

Figura 1.3 – Q. C. Quadrado

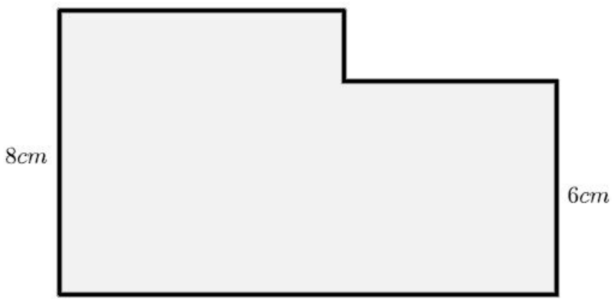



Fonte: Viegas, Linder e Mallman (2017).

Utilizando as peças do *Q. C. Quadrado*, construa dois quadrados: um com quatro peças (sem usar o quadrado $Q$) e outro com as cinco peças (usando o quadrado $Q$). Em seguida, compare a área de cada um desses quadrados com a área do quadrado $Q$.

7 **(Banco de questões da OBMEP 2016)** *Cortando a escada para formar um quadrado*. A Figura 1.4 mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado $8cm$ e um de lado $6cm$. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.

Figura 1.4 – Questão 24 do Banco de questões da OBMEP 2016

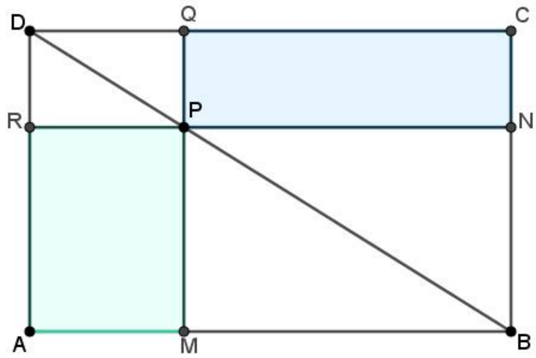



Fonte: IMPA (2016).

a) Qual é a medida do lado do quadrado que deverá ser formado no final?
b) Utilizando apenas um lápis, uma régua de $20$ *cm*, com marcações de $1$ *cm* em $1$ *cm*, e uma tesoura, indique como realizar a tarefa desejada.

8 Os retângulos $AMPR$ e $CQPN$ da Figura 1.5 são equivalentes? Justifique.

Figura 1.5 – Retângulos equivalentes




Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013).

## 1.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1

Neste modelo de atividade, quebra-cabeças como o tangram ou o Q. C. Quadrado podem ser utilizados nos diversos níveis de ensino. Ao acrescentarmos ou retirarmos questões da atividade proposta, podemos trabalhar diversos conceitos matemáticos, como por exemplo, frações e equações do 1° e 2° graus. Questões envolvendo a construção geométrica, tais como o traçado de perpendiculares e a determinação dos pontos médios, podem ser discutidas no início da atividade.

O cálculo da área pode ser feito de duas maneiras:

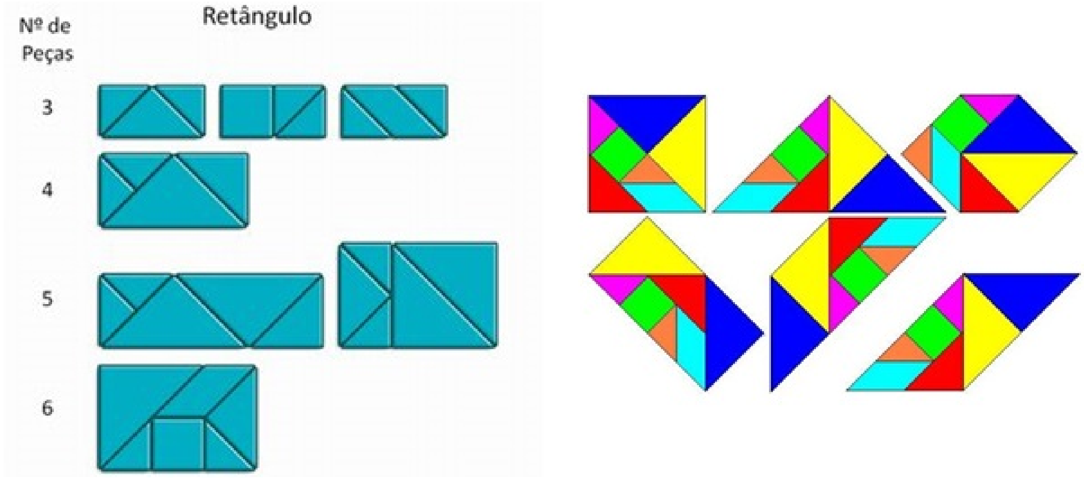
- ◇ preenchendo a superfície do polígono com os quadrados da malha quadriculada;
- ◇ comparando a área de uma peça com a área da figura construída.

Ressaltamos que, no item 3 do roteiro, podemos construir polígonos convexos com a metade da área do quadrado inicial empregando as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$. Ainda, o teorema de Pitágoras é explorado conforme Almeida (2016) no item 4 do roteiro.

## 1.3 RESPOSTAS DA ATIVIDADE 1

1 a) e b): Figura 1.6.

Figura 1.6 – Possíveis construções geométricas: (a) retângulos; (b) polígonos convexos com todas as peças




(a) (b)

Fonte: Os autores.

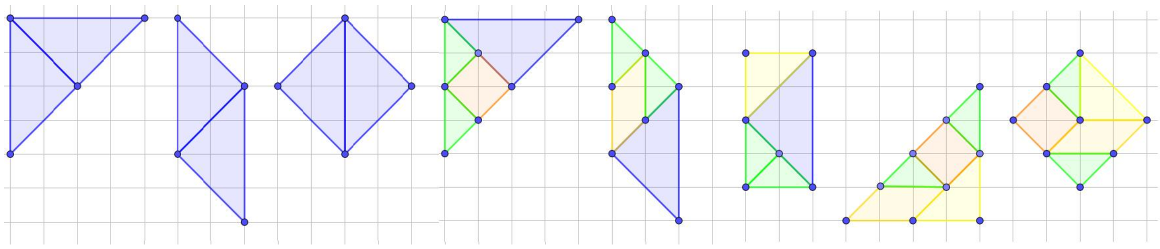
c) Problema aberto, com várias soluções possíveis dependendo da resposta do item b.

2 a)

- Triângulos retângulos isósceles maiores: $\frac{1}{4}$.
- Triângulos retângulos isósceles menores: $\frac{1}{16}$.
- Triângulo retângulo isósceles intermediário: $\frac{1}{8}$.
- Paralelogramo: $\frac{1}{8}$.
- Quadrado: $\frac{1}{8}$.

3 A Figura 1.7 mostra algumas construções possíveis.

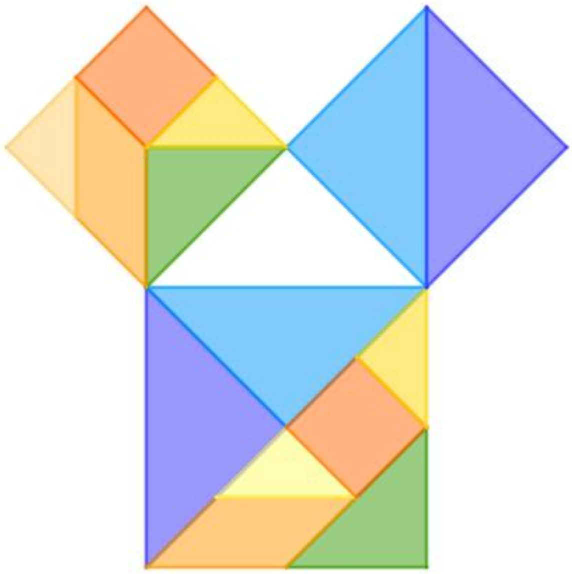
Figura 1.7 – Exemplos de polígonos convexos com metade da área do quadrado inicial



Fonte: Os autores.

4 A Figura 1.8 mostra o uso das peças de dois jogos de tangram para verificar a validade do teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo isósceles.

Figura 1.8 – O tangram e o teorema de Pitágoras



Fonte: Os autores.

5 As Figuras 1, 2 e 3 são equivalentes (têm a mesma área) pois são formadas por todas as peças do tangram. Assim, a área da casinha (Figura 3) é igual à área do quadrado (Figura 1). Como o lado do quadrado mede $2\sqrt{2}cm$, temos que a área da casinha é $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8cm^2$. Portanto, a resposta correta é a alternativa (b).

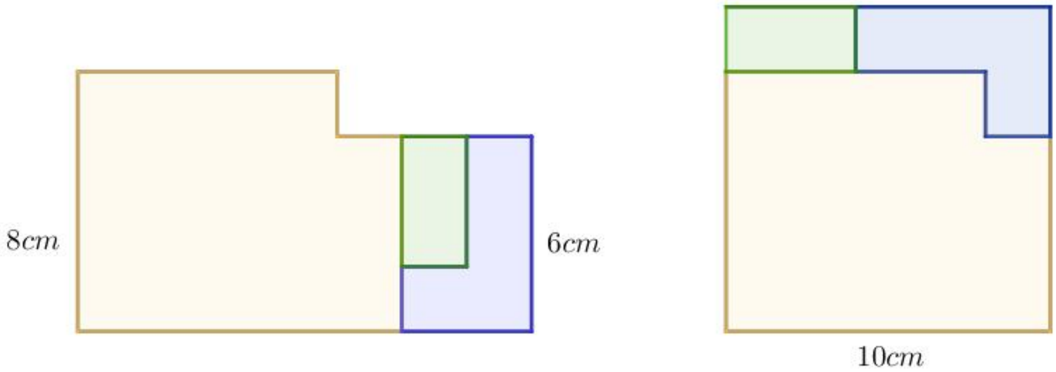
6 O quadrado construído com $4$ peças é $8$ vezes maior do que a peça quadrada $Q$; o construído com $5$ peças é $9$ vezes maior do que a peça quadrada $Q$.

7 a) Como o quadrado não deve ter buracos, a área final deve ser igual à área original, isto é, a soma das áreas dos dois quadrados. Denotando por $l$ o lado do quadrado, temos que:

$$\begin{aligned} l^2 &= 8^2 + 6^2; \\ l^2 &= 64 + 36; \\ l^2 &= 100; \\ l &= 10. \end{aligned}$$

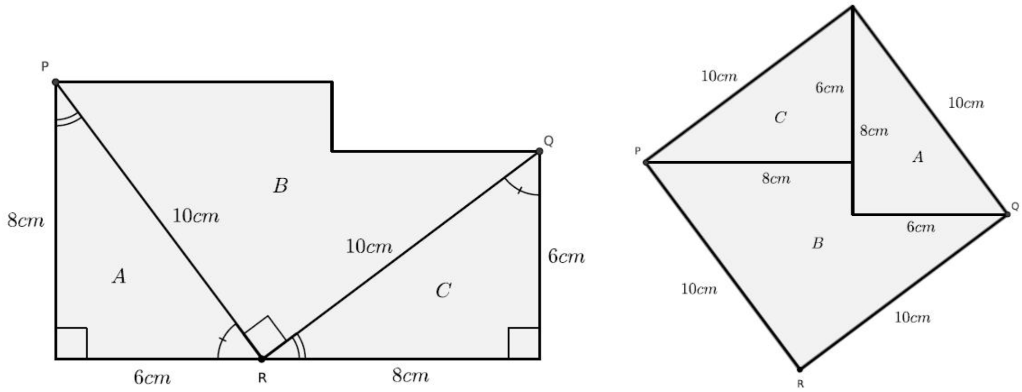
b) Figuras 1.9 e 1.10.

Figura 1.9 – Primeira decomposição para a questão 7(b)




Fonte: Os autores.

Figura 1.10 – Segunda decomposição para a questão 7(b)




(a) (b)

Fonte: IMPA (2016).

8 O retângulo $ABCD$ é dividido ao meio pela diagonal $BD$. Logo, os triângulos retângulos $BAD$ e $BCD$ são congruentes. Como os triângulos retângulos $DRP$ e $DQP$ e $BMP$ e $BNP$ também são congruentes, temos que as áreas dos retângulos $AMPR$ e $CQPN$ devem ser iguais. Logo, os retângulos $AMPR$ e $CQPN$ são equivalentes.

# 2 ATIVIDADE DIDÁTICA PARA CALCULAR VOLUMES

Proposta para o Ensino Médio que explora a decomposição de sólidos em *puzzles* tridimensionais para estabelecer a relação entre o volume de prismas e de pirâmides.

## 2.1 ATIVIDADE 2: POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

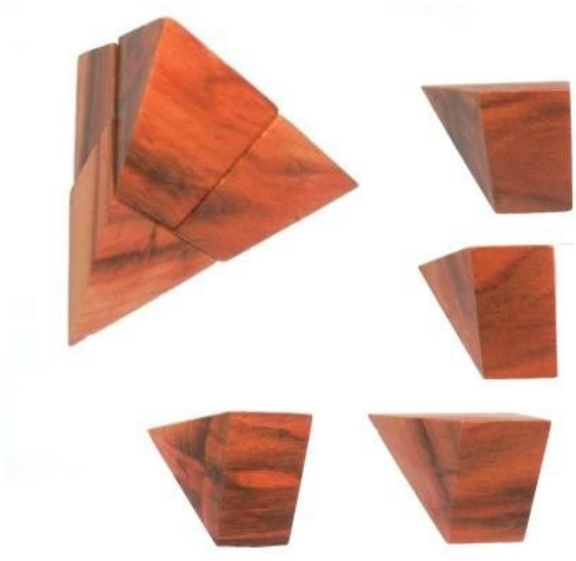
1 Utilizando $8$ cubos de aresta $a$:

a) Quantos paralelepípedos reto retângulos distintos podem ser construídos? Desenhe esses paraelelepípedos.

b) Compare a área total e o volume desses paralelepípedos.

2 Os puzzles de madeira são jogos de lógica e estratégia. A pirâmide de 4 peças congruentes é um deles, como mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1 – Puzzle tridimensional: pirâmide de 4 peças congruentes



Fonte: Google (2024).

a) Construa um tetraedro regular com as 4 peças congruentes;

b) Sabendo que as arestas do tetraedro regular têm medida $a$, determine o volume de cada peça.

3 Assista ao vídeo *Cubic Kaleidocycle Disney*, ilustrado na Figura 2.2 e disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=mP4XoFNf-a8>.

a) Quais poliedros convexos são formados na manipulação do caleidociclo?

b) O que podemos concluir sobre o volume de cada um desses poliedros convexos?

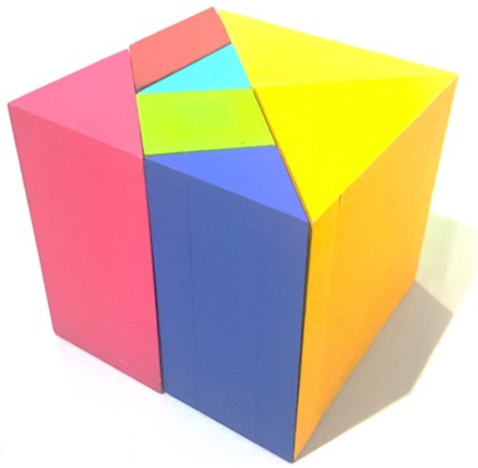
Figura 2.2 – Cubic Kaleidocycle Disney

Fonte: Ugalde (2009).

4 Um cubo de $6cm$ de aresta foi decomposto em seis pirâmides congruentes, com vértices no centro do cubo e cada uma tendo uma das faces do cubo como base.
a) Desenhe o cubo e as seis pirâmides congruentes.
b) Calcule o volume da pirâmide de duas maneiras diferentes.

5 Seja um cubo de volume $C$, cuja base quadrada é seccionada como o tangram - Figura 2.3.

Figura 2.3 – Cubo-tangram



Fonte: Fernandes (2018, p. 105).

a) Componha 2 prismas convexos distintos com as seguintes peças: o paralelepípedo de base quadrada e os dois prismas triangulares cujas bases são os dois triângulos retângulos isósceles menores. Para construir prismas equivalentes aos prismas compostos anteriormente, podemos substituir o paralelepípedo de base quadrada por qual peça? Justifique.
b) Usando as peças do cubo-tangram, construa 3 prismas distintos tal que o volume de cada um deles é $\frac{1}{2}C$.
c) É possível compor um prisma convexo cujo volume é $\frac{3}{4}C$? Justifique.

6 O *caixote* é um brinquedo de madeira, produzido pela Oficina do Aprendiz, que consiste de uma caixa de dimensões $7,5 \times 7,5 \times 6,5cm$ contendo 9 peças de madeira com dois tamanhos distintos: $2 \times 2 \times 2cm$ e $4 \times 4 \times 2cm$, como mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4 – Caixote

Fonte: Viegas, Linder e Mallman (2017).

O objetivo da brincadeira é encaixar as nove peças sem deixar buracos e sem que as peças ultrapassem a face superior da caixa. É possível compor um poliedro convexo com as 9 peças que seja distinto do paralelepípedo reto retângulo que constitui a caixa?

## 2.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2

O intuito da atividade proposta é analisar a equicomposição de sólidos, associando-a à equivalência. Isto é possível particularmente para prismas, em decorrência direta da decomposição de polígonos, ou seja, do teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Assim, os conceitos de equicomposição explorados em duas dimensões com o uso do tangram foram estendidos para três dimensões com o cubo-tangram.

Propomos a questão 6 para discutir o terceiro problema de Hilbert com os estudantes, ou seja, o fato de que dois sólidos de mesmo volume não são necessariamente equicompostos.

Materiais manipulativos são imprescindíveis para aprimorar as concepções geométricas espaciais. Há uma série de puzzles tridimensionais, dois deles ilustrados na Figura 2.5, que o professor de matemática pode empregar em sala de aula para abordar a equicomposição em três dimensões e, consequentemente, melhorar a concepção espacial dos sólidos estudados.

## 2.3 RESPOSTAS DA ATIVIDADE 2

1 a) São $3$ paralelepípedos reto retângulos distintos, como mostra a Figura 2.6.

b) Os paralelepípedos reto retângulos têm áreas iguais a $24a^2$ (cubo), $28a^2$ e $34a^2$, respectivamente. Os três sólidos são equivalentes de volume igual a $8a^3$.

2 a) Figura 2.1.

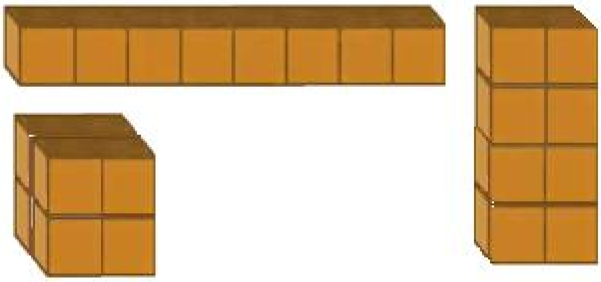
Figura 2.5 – Puzzles tridimensionais: (a) cubo; (b) prisma

(a)

(b)

Fonte: Yaroslavskiy (2008).

Figura 2.6 – Paralelepípedos reto retângulos compostos por 8 cubos



Fonte: Os autores.

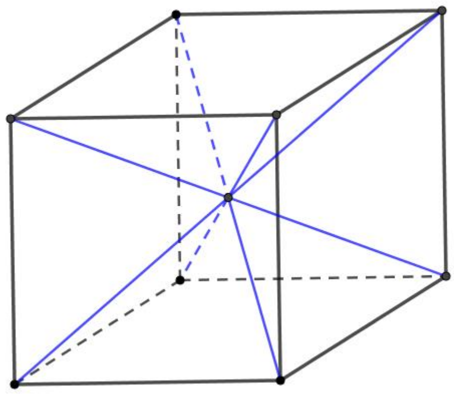
b) $V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$; $V_{\text{peça}} = \dfrac{1}{4}V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{48}a^3$.

3 a) São formados $6$ sólidos distintos: $2$ prismas de base triangular e $4$ paralelepípedos reto retângulos, sendo um destes $4$ um cubo.

b) Os seis sólidos são equivalentes, ou seja, têm o mesmo volume.

4 a) Figura 2.7.

Figura 2.7 – Cubo decomposto em $6$ pirâmides congruentes

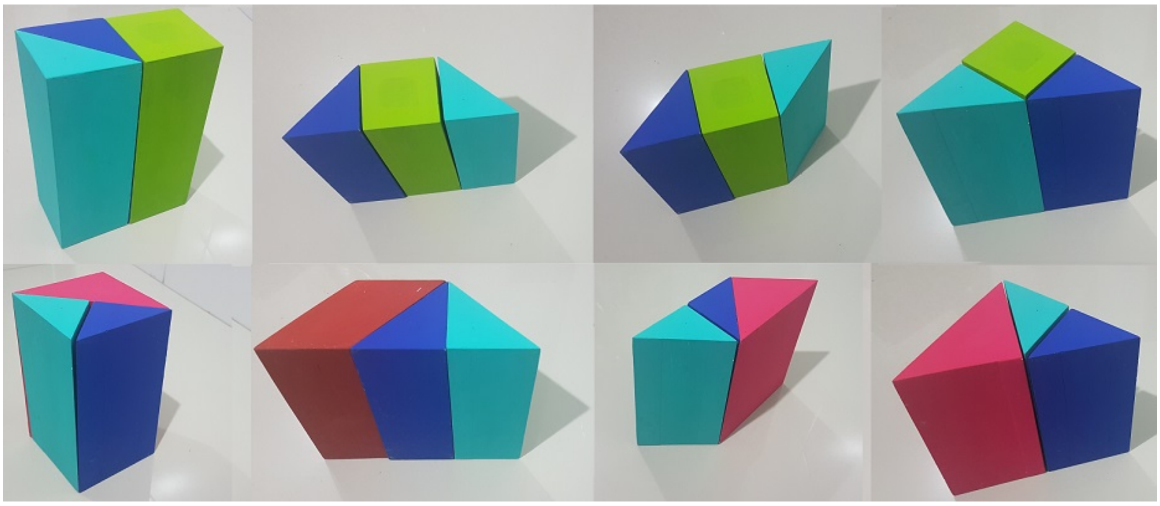


Fonte: Os autores.

b) $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{6}V_{\text{cubo}} = \frac{1}{6}6^3 = 36cm^3$; $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}6^2 3 = 36cm^3$.

5 a) Podemos compor um paralelepípedo reto retângulo e prismas retos cuja base é um paralelogramo, um trapézio ou um triângulo, como mostra a Figura 2.8.

Figura 2.8 – Construções possíveis no item 5(a)

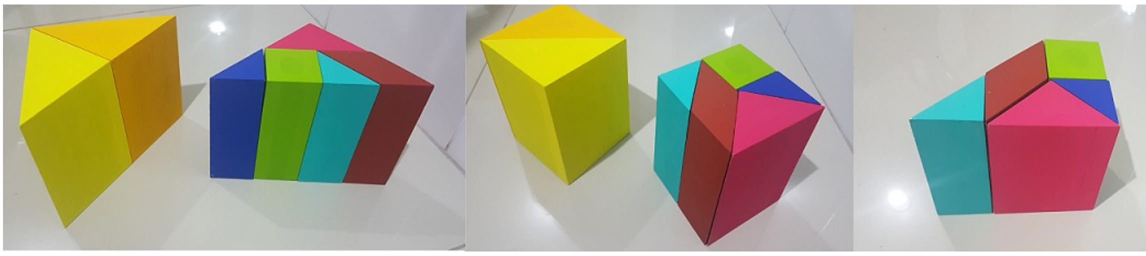


Fonte: Fernandes (2018, p. 116).

Podemos substituir o paralelepípedo reto retângulo pelo prisma reto cuja base é o triângulo retângulo isósceles intermediário na decomposição do tangram, ou pelo prisma reto cuja base é o paralelogramo na decomposição do tangram. Os dois prismas são equivalentes (têm o mesmo volume).

b) A Figura 2.9 mostra algumas construções possíveis.

Figura 2.9 – Prismas cujo volume é a metade do volume do cubo-tangram



Fonte: Fernandes (2018, p. 116).

c) Sim, é possível. É preciso descartar um dos prismas retos cuja base é o triângulo retângulo isósceles maior na decomposição do tangram e utilizar as demais peças para compor um prisma.

6 Não é possível.

# REFERÊNCIAS


ALMEIDA, T. A. S. d. **A demonstração no ensino da geometria**. 2016. Monografia (Licenciatura em Matemática), UTFPR, Curitiba, Brasil. 10

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. 7a. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10. 10

FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. Dissertação (Mestrado) — UTFPR Curitiba, 2018. 15, 18

IMPA. **Banco de questões da OBMEP 2016**. 2016. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/noticias.DO?id=382>. Acesso em: 28 dez. 2024. 9, 13

INEP. **ENEM - Provas e gabaritos**. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 28 dez. 2024. 8

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2209>. Acesso em: 28 dez. 2024. 7

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121–137, 2019. 7

UGALDE, H. **Caleidociclo cúbico**. 2009. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mP4XoFNf-a8>. Acesso em: 28 dez. 2024. 15

VIEGAS, O.; LINDER, N.; MALLMAN, C. S. **Desafios do mundo**. 2017. Disponível em: <http://http://oficinadoaprendiz.com.br/>. Acesso em: 05 de dezembro de 2017. 9, 16

YAROSLAVSKIY, V. **Vladimir Yaroslavskiy's puzzles**. 2008. Disponível em: <https://www.shapeways.com/product/Z9CVGYXCL/little-chop-24-cube>. Acesso em: 05 jan. 2018. 17