Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Recurso Educacional: Usando Materiais Pedagógicos para Estudar Propriedades dos Triângulos Planos e Esféricos

Mestre Edson Marinho de Lima - Profmat - UFPB
Doutor Pedro A. Hinojosa - Universidade Federal da Paraíba

Introdução

O presente trabalho apresenta um recurso educacional desenvolvido no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat), com o objetivo de aprofundar o ensino das propriedades dos triângulos planos e esféricos. A proposta insere-se no contexto de metodologias pedagógicas que visam inovar e qualificar o ensino da matemática na educação básica, utilizando materiais didáticos e sequências de atividades que tornam o aprendizado mais dinâmico e acessível. Propomos uma sequência didática voltada para estudantes do 3º ano do Ensino Médio, abordando temas como paralelismo, soma dos ângulos internos de um triângulo, área da esfera e área do fuso esférico.

A literatura pedagógica destaca a importância de recursos educacionais para fomentar a aprendizagem significativa. Segundo Moreira e Nardi [1], produtos criados em cursos de mestrado profissional devem ser aplicáveis e capazes de transformar práticas educativas, promovendo melhorias no ensino. Sob essa perspectiva, [2] classifica esses recursos em categorias como sequências didáticas e materiais didáticos, ferramentas que servem tanto para apoiar professores quanto para engajar alunos em conceitos matemáticos relevantes.

Neste trabalho, o foco está em mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode não ser 180^0, por exemplo, para triângulos esféricos esta soma ultrapassa esse valor. A proposta se baseia em atividades práticas, como o uso de softwares e construção de modelos físicos, possibilitando ao aluno uma compreensão mais ampla do tema abordado. Além disso, essa abordagem contribui para a introdução de geometrias não euclidianas, um tema raramente explorado na educação básica, apesar de sua relevância nos currículos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3].

Ao final da atividade didática, o estudante deve:

- Entender que em um triângulo no plano, a soma dos ângulos internos é 180°
- Saber que existe uma geometria onde a soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180°
- Saber que na geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°

O nosso ponto de partida é o Axioma das Paralelas e um estudo de ângulos e triângulos

Antes de começar de fato essa proposta de atividade, não podemos deixar de comentar que o ensino da Geometria Euclidiana é raramente abordado nas escolas, apesar de estar presente em documentos oficiais brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular. Geometrias Não-Euclidianas nem sequer são mencionadas.

Acreditamos que ensinar conteúdos de Geometria Esférica na Educação Básica permite aos alunos conectar esse conhecimento com o seu cotidiano, entender os diferentes modelos geométricos que os rodeiam, e expandir seu repertório de pensamento geométrico.

Neste trabalho, propomos atividades de ensino de Geometria Esférica fundamentadas nos princípios do Desenho Universal para a Aprendizagem, de forma acessível a todos os estudantes. Essas atividades podem estimular novas discussões sobre o ensino de Geometrias Não-Euclidianas e proporcionar uma compreensão mais ampla aos estudantes, considerando suas experiências cotidianas.

A sequência está dividida em 4 atividades:

- A primeira atividade é voltada para que o estudante conheça sobre ângulos, suas medidas, instrumentos para medir ângulos e se utilizar desses conhecimentos para compreender, utilizando instrumentos de medidas de ângulos, que na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer mede 180^0 (desconsiderando erros de instrumento e erros de procedimentos de medida).

- A segunda atividade é mais conceitual. O professor apresentará o Axioma das Paralelas para demonstrar que de fato a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é 180^0. Sugerimos que isto seja feito usando o software de Geometria Dinâmica, GEOGEBRA, onde o estudante pode ver de forma dinâmica a preservação dos ângulos e a demonstração do Teorema.

- Na terceira atividade, o estudante terá uma nova percepção sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Utilizando agora, retas não paralelas, o professor irá mostrar que existe a possibilidade de que a soma desses ângulos seja diferente de 180^0. Introduzindo o conceito de geometria esférica, o aluno irá perceber uma nova abordagem sobre triângulos, entendendo a ideia de retas sobre regiões curvas, medidas de ângulos e o fato de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser diferente de 180^0. Para isto, com ajuda do GEOGEBRA, construirá um triângulo esférico, com três ângulos retos, o que no plano é impossível.

- A quarta atividade é dividida em duas partes: na primeira parte, o professor irá lançar mão da fórmula para cálculo de área de uma esfera, para explicar e calcular a área de um fuso esférico (uma regra de três simples). Na segunda parte da atividade, os alunos irão pintar os fusos esféricos formados por um triângulo esférico e com isso mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo, na geometria esférica, é maior que 180^0.

Primeira atividade

Esta atividade será desenvolvida em uma aula, na qual estudaremos o conceito de ângulo, suas unidades de medida e como medi-lo utilizando o transferidor. A seguir, os alunos medirão, usando um transferidor, os ângulos internos de triângulos previamente impressos com a finalidade de observar que essa soma é de 180^0.

É recomendável ter vários tipos de triângulos: equiláteros, retângulos, obtusângulos, acutângulos, etc.

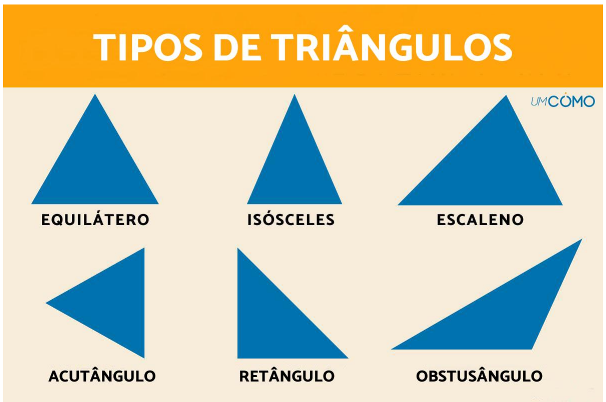

Figura 1: Tipos de Triângulos
Fonte: https://educacao.umcomo.com.br/artigo/classificacao-dos-triangulos-tipos-e-caracteristicas-30679.html Acesso em 31 de julho de 2024

A aula será finalizada com as seguintes questões para os alunos:

1. Escreva com suas palavras o que é um ângulo
2. Quais as unidades de medidas utilizadas para medir o ângulo?
3. Qual a unidade de medida mais comum para medir ângulo?
4. Quantos ângulos internos tem um triângulo?
5. Em cada triângulo, meça a medida dos ângulos internos.
6. Quanto deu a soma dos ângulos internos em cada triângulo? (isso pode mudar, na prática, dependendo da habilidade de quem manuseia o transferidor)
7. Os valores das somas são próximos um do outro? Qual seria o valor "aproximado"?

Figura 2: Medindo ângulos

No final desta atividade - aula, o estudante deverá ter condições de determinar o valor aproximado da medida dos ângulos internos de um triângulo, independente do seu formato.

Segunda Atividade

Nesta atividade o professor explicará os conceitos de retas paralelas e transversais e a relação entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal, deverá mencionar : ângulos correspondentes, ângulos colaterais internos e externos, ângulos alternos internos e externos.

Feito isto, desenhará, no quadro, duas retas paralelas e por um ponto qualquer de uma das retas, duas transversais, formando assim um triângulo. Usando as relações conhecidas entre os ângulos adjacentes e os alternos internos, determinará a relação entre os ângulos do triângulo, fazendo com que o aluno perceba que a soma dos três ângulos do triângulo é 180^0.

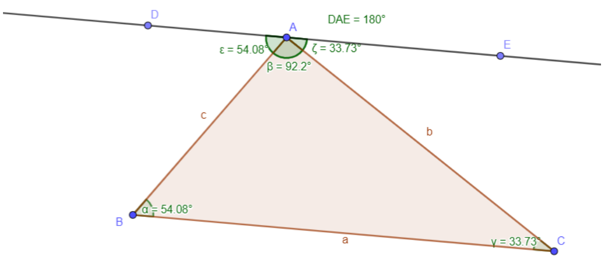

Figura 3: Triângulo Entre Retas Paralelas

Sugerimos que esta atividade seja feita também utilizando o GEOGEBRA. Podendo seguir o roteiro abaixo:

1. Marque dois pontos distintos A, B;
2. Trace a reta r_{AB} que passa pelos pontos A e B;
3. marque um ponto P fora da reta r_{AB};
4. Trace a reta paralela à r_{AB}, passando pelo ponto P;
5. Marque o triângulo ABP;
6. Marque os ângulos internos e os ângulos alternos internos do triângulo ABP.

O item 6 permitirá ao aluno observar que, independente do formato do triângulo gerado, esses ângulos se preservam, então calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo é o mesmo que formar um ângulo raso (180°).

Veja: https://www.geogebra.org/m/h5ry6ub2

Terceira Atividade

A terceira atividade, terá duas etapas que acontecerão em uma aula.

Na primeira etapa, o professor construirá, a reta r_{BC} que passa pelos pontos B e C, marcando um ponto A fora da reta r_{BC}. A partir daí, vai construir uma reta, passando por A, que não seja paralela a reta r_{BC} e marcará os pontos D e E sobre esta reta, de maneira que A esteja entre D e E. Logo pedirá que os estudantes meçam os ângulos internos do triângulo ABC e os ângulos $\sphericalangle(BAE)$ e $\sphericalangle(CAD)$ e notarem que $\sphericalangle(BAE)$ não é igual a $\sphericalangle(CBA)$ e que $\sphericalangle(CAD)$ não é igual a $\sphericalangle(BCA)$. Induzindo os estudantes a supor que a soma dos ângulos internos do triângulo não seja 180^0.

Para a atividade acima, os estudantes podem movimentar os pontos no GEOGEBRA e notar que os ângulos não se preservam, quando as retas não são paralelas

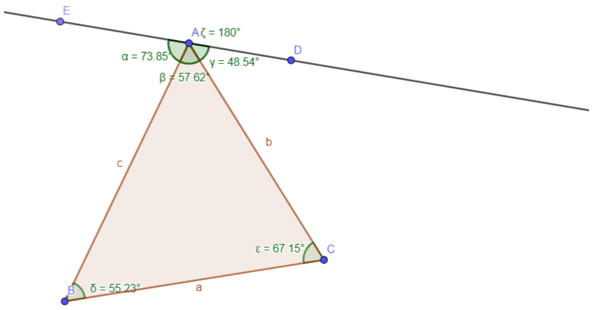

Figura 4: Triângulo Entre Retas Concorrentes

Pode ser usado, o link abaixo
https://www.geogebra.org/m/ewnebt9j

Na segunda parte, ele pede cortar $\frac{1}{8}$ da laranja e fazer com que os alunos notem, que se conseguem 3 ângulos retos, somando 270^0 e então comentar, que existem geometrias, onde essa soma não dá 180^0. Essa é uma geometria onde não existem retas paralelas. Essa percepção se dará, após o professor introduzir os conceitos desta geometria (Geometria Esférica).

Quarta Atividade

Esta atividade será desenvolvida em duas aulas que terão como objetivo o cálculo da área de um fuso esférico de ângulo α e, na segunda aula, mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que π.

Primeira Aula:

Nesta primeira aula, lembraremos a fórmula do cálculo da área A, de uma esfera de raio r, $A = 4\pi r^2$. a seguir calcularemos a área de fusos esféricos. A ideia do cálculo é a seguinte: um fuso de ângulo 2π cobre a esfera toda e como vimos, a área de esfera é $4\pi r^2$, então fazendo uma regra de três entre a área do fuso de ângulo α, que denotaremos por (A_f) e a área da esfera. Obtemos,

$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

donde,

$$A_f = \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2.$$

Usando estas fórmulas o estudante calculará a área de algumas esferas e alguns fusos.

Segunda Aula:

Nesta aula, usaremos uma esfera de isopor, marcaremos 3 pontos, que não estejam no mesmo grande círculo, e vamos traçar os círculos máximos que passam por cada par de esses pontos, formando desta maneira um triângulo esférico com ângulos internos α, β e γ. Essa construção forma 3 fusos esféricos duplos, dois de cada ângulo. Estes fusos têm áreas $4\alpha r^2$, $4\beta r^2$ e $4\gamma r^2$. Se A, B e C são os vértices do triângulo acima formado e A', B' e C' são os pontos antípodas de A', B' e C', respectivamente, os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ têm a mesma área. Agora somando a área dos fusos duplos obtemos:

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\alpha r^2 = \text{área}(\mathbb{S}^2_r) + 2\text{área}(\Delta ABC) + \text{área}(\Delta A'B'C')$$

Donde,

$$4r^2\big(\alpha + \beta + \gamma\big) = 4\pi r^2 + 4\text{área}(\Delta ABC)$$

e portanto,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\text{área}(\Delta ABC)}{r^2}.$$

Concluindo assim que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180^o.

Por exemplo, se consideramos uma esfera de raio r, com centro na origem, o triangulo que fica no primeiro octante do sistema de coordenadas tem 3 ângulos retos cuja soma é 270^o, ou seja $\frac{3\pi}{2}$ que corresponde a $\pi + \frac{4\pi r^2}{8}$.

A fim de tornar esta aula mais lúdica, os estudantes podem pintar os fusos formados de cores diferentes para notar que tem duas regiões que são pintadas mais de uma vez, é o excesso da área do triângulo esférico. Com base nesta percepção, poderemos explicar que a área dos 3 pares de fusos é igual à área da esfera, mais o fuso que foi pintado a mais, concluindo o resultado sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Figura 5: Esfera Dividida em Fusos

Referências

[1] MOREIRA, M. A.; NARDI, R. O mestrado profissional na área de ensino de ciências e matemática: alguns esclarecimentos. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 3, p. 1-9, dez. 2009. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/549/398. Acesso em: 14 abr. 2024.

[2] SOUZA, M.; MELO, T. d. O.; VILELA, L.; RIBEIRO, E. d. L.; DIOGO, R. C.; GUIMARÃES, C. S. Análise dos produtos de programas de mestrado profissional: um recorte envolvendo o ensino de matemática na região sul do Brasil. X Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – ENPEC, Águas de Lindóia, SP, 2015.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/educacao-basica/base-nacional-comum-curricular-bncc. Acesso em: 14 abr. 2024.