Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Ana Claudia Hott Paiva Ricardo

Recursividade Fractal no Triângulo de Pascal

Ouro Branco
Data: 27 de dezembro de 2024

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de São João del Rei - Campus Alto Paraopeba - CAP/UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Recursividade Fractal e o Triângulo de Pascal

Orientada: Ana Claudia Hott Paiva Ricardo[1]
Orientador: Maurício Reis e Silva Júnior[2]
Coorientadora: Gilcélia Regiane de Souza[3]

Resumo: Este trabalho apresenta uma proposta de atividade didática em sala de aula, voltada para estudantes de segundo ou terceiro ano do ensino médio que já saibam fazer operações básicas com polinômios. A proposta consiste em usar um processo recursivo para construir o triângulo de pascal e verificar como a divisibilidade de seus coeficientes pode ser usada para se perceber uma estrutura fractal, conhecida como Triângulo de Sierpinski, que surge como consequência dessa recursividade.

Palavras Chave: Fractais, Recursividade, Triângulo de Pascal, Planilhas Eletrônicas

Abstract: This work presents a proposal for a didactic activity in the classroom, aimed at High School Sophomore students who already know how to do basic operations with polynomials. The proposal consists of using a recursive process to construct Pascal's triangle and check how the divisibility of its coefficients can be used to perceive a fractal structure, known as the Triangle of Sierpinski, which arises as a consequence of this recursion.

Keywords: Fractals, Recursivity, Pascal's Triangle, Sheets programming

1 PROPOSTA DE ATIVIDADE PRÁTICA

Um estudo formal do assunto de fractais do ponto de vista matemático exige uma compreensão de determinadas definições e estruturas que não se fazem presentes no currículo normal de ensino fundamental e médio da Base Nacional Comum Curricular [1]. Na presente proposta, não se pretende ensinar um nível aprofundado de Geometria Fractal para o estudante. Entretanto, aspectos fundamentais de uma geometria fractal podem ser abordados e os resultados gráficos associados podem ser apreciados e usados como estímulo ao aprendizado dos estudantes do ensino médio[2, 3]. As atividades propostas para a sala de aula, portanto, pretendem usar aspectos da geometria fractal de maneira indireta, e seus resultados como estímulos. A adequação da tarefa consiste em identificar um tópico de matemática que já faça parte da BNCC e que possa surgir em processos de obtenção de fractais.

[1]Egressa do PROFMAT-UFSJ/CAP
[2]Departamento de Estatística, Física e Matemática da UFSJ. mreis@ufsj.edu.br
[3]Departamento de Estatística, Física e Matemática da UFSJ. mreis@ufsj.edu.br

1.1 Triângulo de Pascal como um fractal

Nesta atividade, o principal objetivo é estimular os estudantes a executar um algoritmo de maneira intuitiva, com o propósito de aprofundar suas compreensões das funções matemáticas em um contexto mais abrangente. Destacam-se as relações de recorrência e os efeitos que elas desempenham na formação de uma estrutura final, permitindo que os alunos observem o mecanismo de autossimilaridade presente tanto no Triângulo de Pascal quanto no Triângulo de Sierpinski. Além disso, os conceitos fundamentais, como divisibilidade e produtos notáveis serão revistos. Ao abordar essas questões, a atividade visa atingir diversos objetivos interconectados. Em primeiro lugar, aprimorar a compreensão dos fundamentos matemáticos, garantindo que os alunos assimilem os conceitos essenciais relacionados à expansão de polinômios, coeficientes binomiais e sua relação com o Triângulo de Pascal. Além disso, o Triângulo de Pascal se torna uma aplicação concreta da álgebra e uma ferramenta auxiliar.

1.2 Objetivos

De maneira geral, a atividade visa melhorar a compreensão dos fundamentos matemáticos, fazendo com que os alunos se habituem à manipulação de polinômios, mediante sua expansão e consequente obtenção dos coeficientes binomiais da enésima potência de uma soma algébrica. Como objetivos específicos relacionados ao tópico de polinômios, que é parte do conteúdo de matemática para o ensino médio, a atividade irá abordar:

1. Potências de uma soma algébrica;
2. Coeficientes da expansão binomial;
3. Funções genéricas a partir de algoritmos;
4. autossimilaridade como consequência de um processo iterativo;
5. Induzir os estudantes a executar um algoritmo de maneira intuitiva, e assim promover sua compreensão sobre funções matemáticas num sentido mais amplo;
6. Mostrar as relações de recorrência e seus efeitos no aparecimento de uma estrutura final, com consequente observação do mecanismo de autossimilaridade presentes no triângulo de Pascal e no triângulo de Sierpinski;
7. Rever temas básicos como a divisibilidade e produtos notáveis.

1.3 Desenvolvimento da atividade

Nessa atividade serão feitas expansões de polinômios[4] com consequente identificação de seus coeficientes no triângulo de Pascal e posteriormente sua relação com o triângulo de Sierpinski a partir da coleção de divisores de cada coeficiente. No início da tarefa, os estudantes são instruídos a registrar o polinômio inicial na folha de exercícios, conforme definido a seguir:

$$P_0(x) = 1. \tag{1}$$

Assim, inicia-se o processo de multiplicação dos polinômios por $Q(x) = 1 + x$ e, ao mesmo tempo, em uma folha à parte, os alunos são orientados a manter anotações de todos produtos obtidos durante a atividade. O processo recursivo implica na repetição dessa operação para gerar os resultados subsequentes. O primeiro produto seria obtido pela multiplicação de $P_0(x)$ por $Q(x)$, ou seja:

$$P_0(x)Q(x) = P_1(x) = 1 + x \tag{2}$$

Em seguida, continuando a atividade, o polinômio $P_1(x)$ obtido pela equação 2 será multiplicado por $Q(x) = 1 + x$, obtendo:

$$\begin{aligned}
P_1(x)Q(x) &= (1+x)(1+x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2 = P_2(x) \\
P_2(x)Q(x) &= (1+x)^2(1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1+x)^3 = P_3(x) \\
P_3(x)Q(x) &= (1+x)^3(1+x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^3 = (1+x)^4 = P_4(x) \\
&\vdots \\
P_{n-1}(x)Q(x) &= (1+x)^{n-1}(1+x) = P_n(x)
\end{aligned}$$

À medida que a atividade é desenvolvida, pode-se perceber o processo recursivo, pois, para se conseguir o próximo produto de polinômios, é necessário utilizar o resultado anterior multiplicado por $Q(x)$. Em outros termos, $P_n(x) = P_{n-1}(x)Q(x)$. Agora os coeficientes de x em $P_n(x)$ precisam ser identificados e coletados. Isso significa agrupar os diversos termos relacionados a x em graus variados, e colecionar os coeficientes. Os coeficientes devem ser registrados em uma folha a parte onde os alunos documentam seus resultados de acordo com a expansão do polinômio $P_n(x)$. A Tabela 1 a seguir é um modelo que pode ser usado para o registro dos coeficientes:

Observa-se que esta atividade, apesar de sua simplicidade inicial, se torna tediosa à medida que o grau dos polinômios envolvidos aumenta. Portanto, uma estratégia que pode ser usada é que os alunos realizem essa tarefa em duplas, com um dos estudantes encarregados da multiplicação e o outro responsável pela coleta e combinação dos termos semelhantes, de preferência, alternando suas funções. Os alunos devem fazer a expansão polinomial até n=4 pelo menos. Os próximos coeficientes serão obtidos seguindo as orientações abaixo.

1.4 Obtenção de demais coeficientes

Neste estágio da atividade, inicia-se a introdução do Triângulo de Pascal e a demonstração de seu potencial na criação de fractais. O Triângulo de Pascal é uma matriz numérica amplamente empregada na matemática, sobretudo em aplicações de simulação e na expansão de polinômios binomiais. Após o registro dos coeficientes até a ordem "n" selecionada, os alunos devem ser orientados para que os coeficientes restantes sejam calculados por meio da adição dos dois termos do polinômio anterior, cujo resultado será atribuído à coleta dos termos. Por exemplo: Concomitantemente ao preenchimento da tabela, será promovida uma discussão a respeito das observações realizadas pelos alunos. Eles serão incentivados a identificar padrões, especialmente aqueles relacionados à relação entre os coeficientes e o valor de "n". Pode ser destacada a notável característica do Triângulo de Pascal, que revela padrões distintos nas somas ao longo de diagonais específicas. Por exemplo, na primeira diagonal da esquerda para a direita, só aparece o número 1. Na segunda diagonal aparece uma sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, $\cdots$), e na terceira diagonal surge uma sequência dos números chamados 'triangulares' (1, 3, 6, 10, $\cdots$)

Tabela 1: Tabela de coeficientes dos polinômios

P_0													
P_1													
P_2													
P_3													
P_4													
P_5													
P_6													
P_7													
P_8													

1.5 Triângulo de Sierpinski pela divisibilidade dos coeficientes

Nesta parte, serão obtidos aspectos visuais que podem ser vistos pela divisibilidade dos coeficientes no triângulo de Pascal. Os alunos devem inicialmente colorir os coeficientes ímpares e deixar em branco os coeficientes pares. Um padrão semelhante ao do triângulo de Sierpinski deverá ficar evidente. Na Figura 1, é um exemplo de como ficaria a tabela após os coeficientes serem coloridos

Na Tabela 4.1, pode-se visualizar alguns padrões de figuras geométricas. E à medida que se aumenta o número de linhas, esse padrão se tornará um fractal , ou melhor, o fractal Triângulo de Sierpinski. Na Figura 10 (Anexo 1), é possível visualizar o Triângulo de Sierpinski gerado após esse aumento de linhas. Nesse momento dessa atividade, uma outra estratégia pode ser abordada, pois existe a possibilidade de trabalhar recursos tecnológicos como programa de planilhas, EXCEL.

A seguir segue o passo a passo para aplicação da atividade no EXCEL. Todas as figuras deste capítulo foram feitas pela autora.

Como inserir as fórmulas no EXCELL?

P_0	1															
P_1	1	1														
P_2	1	2	1													
P_3	1	3	3	1												
P_4	1	4	6	4	1											
P_5	1	5	10	10	5	1										
P_6	1	6	15	20	15	6	1									
P_7	1	7	21	35	35	21	7	1								
P_8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
P_9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
P_{10}	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
P_{11}	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
P_{12}	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
P_{13}	1	13	78	286	715	1.287	1.716	1.716	1.287	715	286	78	13	1		
P_{14}	1	14	91	364	1.001	2.002	3.003	3.432	3.003	2.002	1.001	364	91	14	1	
P_{15}	1	15	105	455	1.365	3.003	5.005	6.435	6.435	5.005	3.003	1.365	455	105	15	1

Figura 1: Tabela com coeficientes coloridos.

Inicia com a digitalização dos coeficientes que foram obtidos das duas primeiras linhas da Tabela 4.1 . Esses coeficientes serão digitalizados nas linhas 1 e 2, conforme a Figura 2.

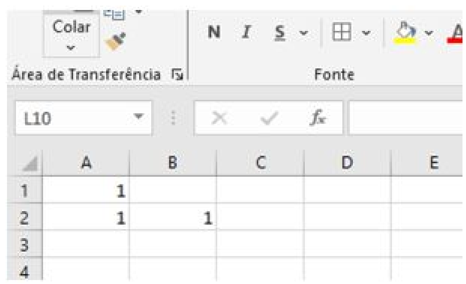


Figura 2: Figura mostrando tabela com primeiros coeficientes digitados.

Agora, com a ajuda de um mouse, as células A1 e A2 serão selecionadas. Após a seleção, aparecerá a alça de preenchimento como mostra a Figura 3:

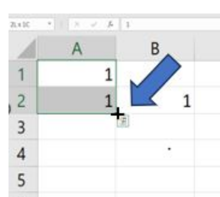


Figura 3: A Figura mostra a alça de preenchimento (sinal +)

O aluno deve clicar na alça de preenchimento e arrastá-la até a linha 22 [1]. Nesse momento, ficar atento para manter a seleção na colunas A (Figura 4).

Próximo passo, clicando na célula B3, e digitar o seguinte comando(Figura 5):
= A2+B2

[1]Dúvida de como utilizar a alça de preenchimento, poderá acessar o vídeo no site: ¡https://www.youtube.com/watch?v=8bE71JVxEOQ ¿

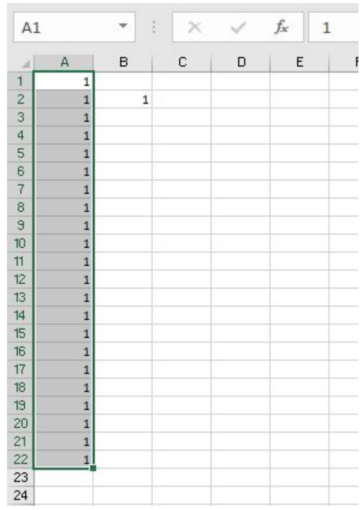


Figura 4: A Figura mostra a coluna A que foi preenchida com o mesmo valor.

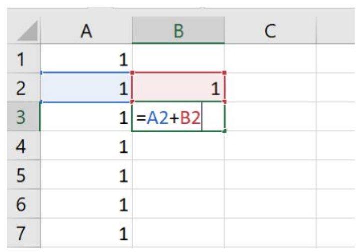


Figura 5: A Figura mostra como aparecerá a fórmula na digitação.

Com essa fórmula, a célula B3 será uma soma. Essa soma poderá ser repetida para as outras células usando a alça de preenchimento. Após a digitação de qualquer fórmula deve-se apertar a tecla ENTER, para que a planilha aceite o comando.

Para preencher a tabela com a fórmula de soma de coeficientes, deve-se seguir os seguintes passos: Clicar na célula B3, acionar a alça de preenchimento e arrastá-la até a célula V22 (Figura 6).

- Como colorir as células?

Para colorir somente os números ímpares, será utilizado uma função que se chama FORMATAÇÃO CONDICIONAL.

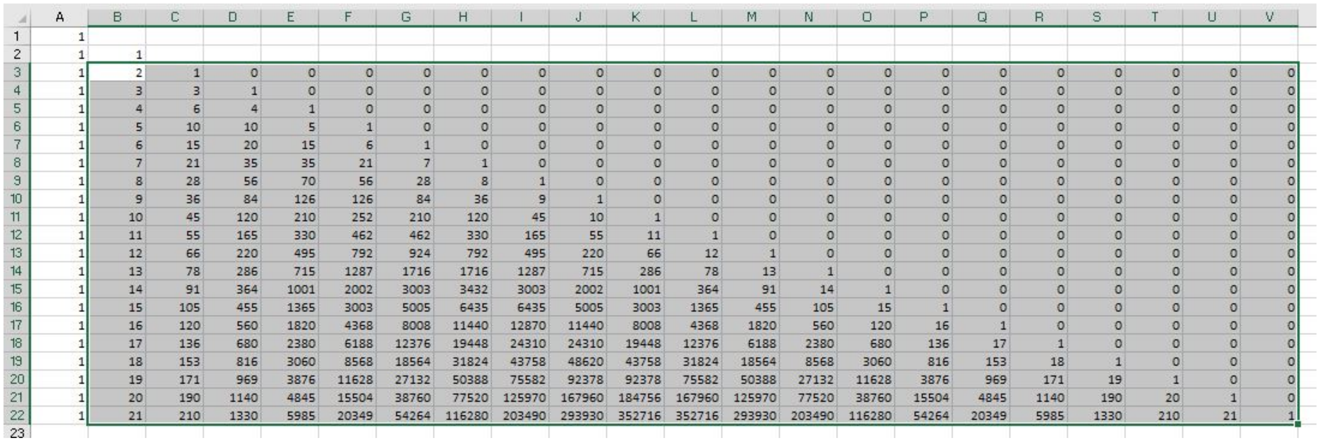
Primeiro, deve-se clicar na barra de ferramentas o ícone Formatação Condicional (Figura 7).

Segundo passo, aparecerá uma tela com várias informações como mostra a Figura 8.

Nessa tela mostrada na Figura 8, existe as opções de 'Selecione um Tipo de Regra', nessa parte deverá clicar em 'Usar uma fórmula para determinar quais células devem ser formatadas'. Assim que clicar aparecerá uma aba: 'Formatar valores que esta fórmula é verdadeira', logo abaixo terá um espaço para digitar o comando: =ÉIMPAR(A1) (Figura 8)

Depois clicar em 'Formatar' como mostra na Figura 8, selecionando a opção FONTE, e a cor desejada(Figura 9).

A Figura 10 mostra o início da construção do Triângulo de Sierpinski, após a utilização dos procedimentos (partindo da célula A1).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	1																					
2	1	1																				
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	0	0	0	0	0	0	0
16	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	0	0	0	0	0	0
17	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1	0	0	0	0	0
18	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1	0	0	0	0
19	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	0	0	0
20	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	0	0
21	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1	0
22	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264	20349	5985	1330	210	21	1
23																						

Figura 6: A Figura mostra tabela preenchida até V22.

Figura 7: Ícone de Formatação Condicional

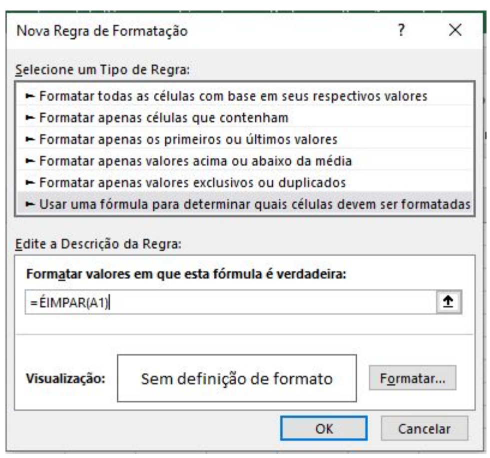


Figura 8: A Figura mostra a tela Nova Regra de Formatação.

Na Figura 11, é possível visualizar o Triângulo de Sierpinski que foi gerado aplicando as orientações até a linha 64.

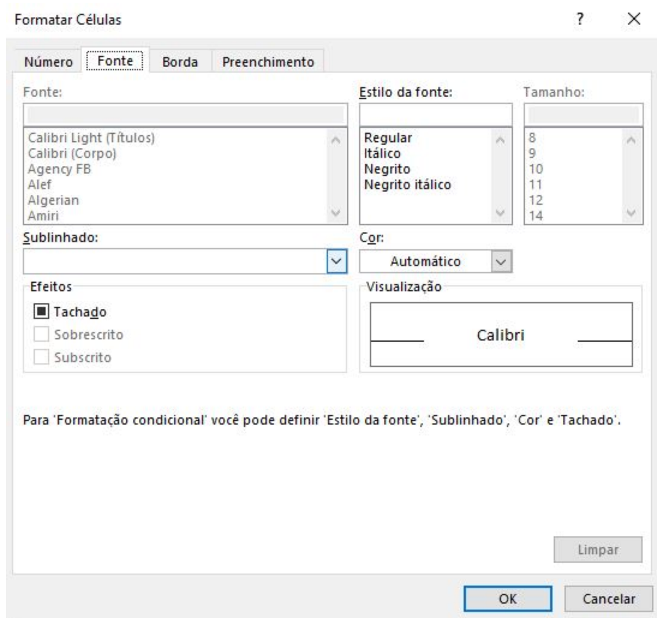
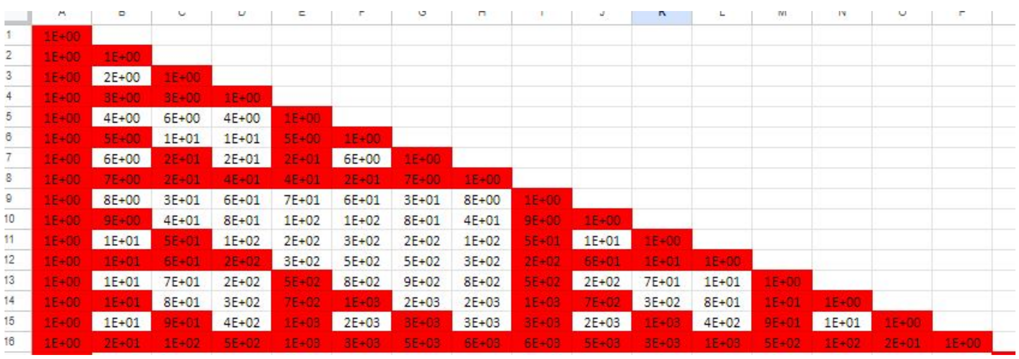


Figura 9: Janela de formatação de cor para célula A1.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1E+00															
2	1E+00	1E+00														
3	1E+00	2E+00	1E+00													
4	1E+00	3E+00	3E+00	1E+00												
5	1E+00	4E+00	6E+00	4E+00	1E+00											
6	1E+00	5E+00	1E+01	1E+01	5E+00	1E+00										
7	1E+00	6E+00	2E+01	2E+01	2E+01	6E+00	1E+00									
8	1E+00	7E+00	2E+01	4E+01	4E+01	2E+01	7E+00	1E+00								
9	1E+00	8E+00	3E+01	6E+01	7E+01	6E+01	3E+01	8E+00	1E+00							
10	1E+00	9E+00	4E+01	8E+01	1E+02	1E+02	8E+01	4E+01	9E+00	1E+00						
11	1E+00	1E+01	5E+01	1E+02	2E+02	3E+02	2E+02	1E+02	5E+01	1E+01	1E+00					
12	1E+00	1E+01	6E+01	2E+02	3E+02	5E+02	5E+02	3E+02	2E+02	6E+01	1E+01	1E+00				
13	1E+00	1E+01	7E+01	2E+02	5E+02	8E+02	9E+02	8E+02	5E+02	2E+02	7E+01	1E+01	1E+00			
14	1E+00	1E+01	8E+01	3E+02	7E+02	1E+03	2E+03	2E+03	1E+03	7E+02	3E+02	8E+01	1E+01	1E+00		
15	1E+00	1E+01	9E+01	4E+02	1E+03	2E+03	3E+03	3E+03	3E+03	2E+03	1E+03	4E+02	9E+01	1E+01	1E+00	
16	1E+00	2E+01	1E+02	5E+02	1E+03	3E+03	5E+03	6E+03	6E+03	5E+03	3E+03	1E+03	5E+02	1E+02	2E+01	1E+00

Figura 10: Visualização inicial do Triângulo de Sierpinski.

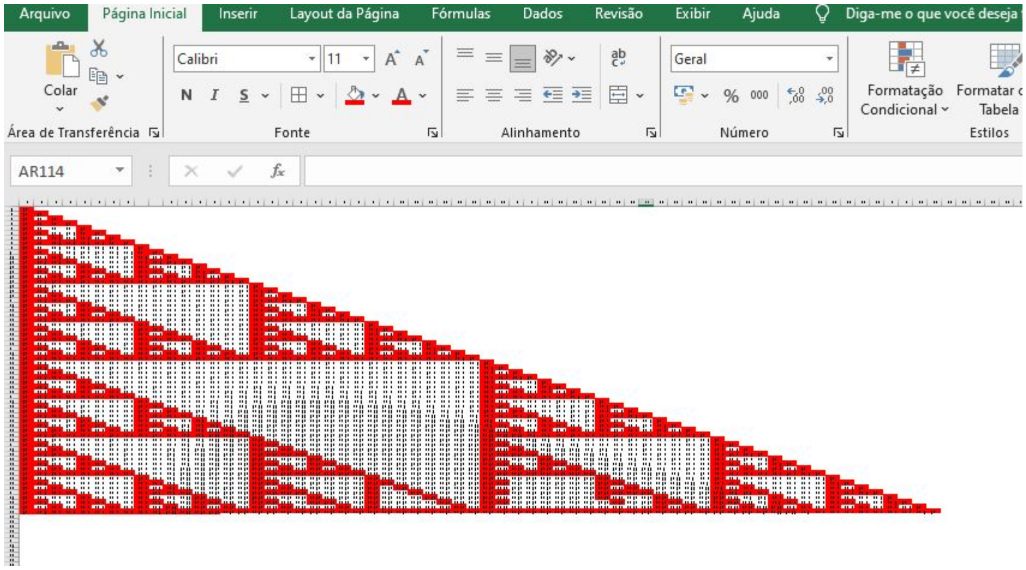


Figura 11: Triângulo de Sierpinski gerado através de uma tabela.

2 Referências

Referências

[1] Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 01 fev. 2023.

[2] Ana Cláudia Hott Paiva Ricardo. Fractais no Ensino de Polinômios: uma abordagem prática. Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2024.

[3] Sallum, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática. N o 57, 2o quadrimestre, 2005.

[4] Hefez, Abramo. *Aritmética.* SBM, 2016.