Universidade Federal de Mato Grosso-CUA
Curso de Licenciatura em Matemática

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA- UMA ABORDAGEM A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS (Teste)

Autores
Professores do curso, 2024

Sumário

Autores

Márcio Lemes de Sousa: Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás (2003), Especialização em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2005), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2008) e Doutorado pela Universidade Federal de Goiás (2015). Atualmente é professor associado I na Universidade Federal do Mato Grosso/ Campus Universitário do Araguaia/ ICET (UFMT/ICET/CUA). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Geometria e Topologia.

Roberta de Jesus Santos: Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás (2012), Especialização em Matemática e Estatística pela Faculdade de Tecnologia Darwin (2012), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso (2020, Profmat). Atualmente é assessora pedagógica, professora formadora de Matemática na Secretaria Municipal de Educação de Barra do Garças e articuladora municipal RENALFA. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase na Educação Básica e Avaliação.

Carta ao Leitor

No Ensino Médio, a área da Matemática tem como objetivo fomentar o entendimento de conceitos, estratégias e procedimentos que possibilitem uma futura formação acadêmica e a preparação para o mundo do trabalho. Assim, é importante que os estudantes saibam aplicar as ferramentas matemáticas em diferentes contextos, sejam elas na ciência, na tecnologia ou em situações cotidianas.

Dessa forma, o Ministério da Educação e Cultura (MEC), por meio da competência 5, específica de "Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio" da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e pela habilidade 08 (EM13MAT508)[1] , enuncia a necessidade de apresentar as noções de séries infinitas de maneira significativa no Ensino Médio, em particular, no que tange as Progressões Geométricas, visto que, atualmente, este objeto de conhecimento aparece nos livros didáticos de modo abstrato.

Após os estudos dos conceitos essenciais de Progressão Geométrica, tais como: "Termo geral da P.G." e a "Soma dos n termos de uma P.G. finita", o professor terá em mãos as ferramentas necessárias para introduzir, ampliar e consolidar os conceitos em relação a "Soma infinita dos n termos de uma P.G.".

Nesta perspectiva, o objetivo desta sequência didática é apresentar, de forma intuitiva, a conjectura das "Progressões Geométricas" e da "Soma infinita de uma PG" a partir de situações problemas.

Portanto, espera-se que este material possa contribuir de forma significativa na prática do professor da Educação Básica no ensino de Progressões Geométrica e Soma de Séries Infinitas.

[1]"Identificar e associar progressões geométricas (P.G.) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (BRASIL, p. 547, 2019).

Capítulo 1

Correspondência do objeto de conhecimento nas matrizes de referência da BNCC, SAEB E AVALIA-MT

Nesta sequência didática, será abordada a habilidade (EM13MAT508), da BNCC- Ensino Médio, bem como sua correspondência na matriz de referência do SAEB 2001-2023 e na avaliação somativa- AVALIA-MT.

BNCC: COMPETÊNCIA ESPECÍFICA, UNIDADE TEMÁTICA, OBJETO DE CONHECIMENTO E HABILIDADE

Competência específica: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Unidade temática: Números e Álgebra

Objeto de conhecimento: Progressão Geométrica

Habilidade: (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA DO SAEB E AVALIA-MT: TEMAS E SEUS DESCRITORES

Tema: Tema: Progressão Geométrica

Descritor: D22- Resolver problema envolvendo P.A./P.G., dada a fórmula do termo geral.

Capítulo 2

Aula 1: Fórmula geral de uma progressão geométrica

2.1 Objetivos

Conteúdo: Fórmula do termo geral de uma P.G.
Habilidade: (EM13MAT508)

2.2 Fórmula geral de uma progressão geométrica

Para introduzir o conceito do termo geral de uma progressão geométrica, utilizaremos o exemplo a seguir, que relaciona três objetos de conhecimento: juros, progressão geométrica e função exponencial. Posteriormente, faremos a sistematização da fórmula por meio de demonstração.

2.3 Proposta - Matemática Financeira

1° **momento: Situação- problema**

Considere um capital de $R\$\ 25000,00$ aplicado a uma taxa de 10% ao ano, no regime de juros compostos. Analise o crescimento do montante ao final de cada ano.

- 1° **ano**

$$\begin{aligned} M(1) &= \frac{10}{100}\cdot 25000 + 25000 \\ &= \left(\frac{10}{100}+1\right)\cdot 25000 \\ &= 1,1\cdot 25000 \\ &= 27500 \end{aligned}$$

- 2° **ano**

$$\begin{aligned} M(2) &= \frac{10}{100}\cdot 1,1\cdot 25000 + 1,1\cdot 25000 \\ &= \left(\frac{10}{100}+1\right)\cdot 1,1\cdot 25000 \\ &= 1,1^2\cdot 25000 \\ &= 30250 \end{aligned}$$

- 3° **ano**

$$\begin{aligned} M(3) &= \frac{10}{100}\cdot 1,1^2\cdot 2500 + 1,1^2\cdot 25000 \\ &= \left(\frac{10}{100}+1\right)\cdot 1,1^2\cdot 25000 \\ &= 1,1^3\cdot 25000 \\ &= 33275 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

- k° **ano**

$$\begin{aligned} M(k) &= \frac{10}{100} \cdot 1,1^{k-1} \cdot 2500 + 1,1^{k-1} \cdot 25000 \\ &= \left(\frac{10}{100} + 1\right) \cdot 1,1^{k-1} \cdot 25000 \\ &= 1,1^k \cdot 25000 \end{aligned}$$

Portanto, ao final de k anos, tem-se o montante

$$M(k) = 1,1^k \cdot 25000. \tag{2.1}$$

2° momento: Generalização por meio de função exponencial

Considere a função

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & f(k) \end{cases}$$

que descreve o exemplo acima. Logo, podemos conlcuir

$$f(k) = M(k) = 1,1^k \cdot 25000.$$

Portanto, trata-se de uma função exponencial.

3° momento: Generalização por meio de Progressão Geométrica

Observe que a sequência apresentada é uma progressão geométrica, onde $k = 0$, para a_1, onde $k = 1$, para a_2, e sucessivamente. Assim,

$$\begin{aligned} f(k) &= 1,1^k \cdot 25000 \\ k = 0 \Rightarrow f(0) &= 1,1^{0} \cdot 25000 = 25000 \\ k = 1 \Rightarrow f(1) &= 1,1^{1} \cdot 25000 = 27500 \\ k = 2 \Rightarrow f(2) &= 1,1^{2} \cdot 25000 = 30250 \\ k = 3 \Rightarrow f(3) &= 1,1^{3} \cdot 25000 = 33275 \\ &\vdots \end{aligned}$$

é uma sequência com as propriedades de uma P.G., onde $a_1 = 25000$ e $q = 1,1$.

De modo geral, pode-se afirmar que a função da forma $f(x) = b \cdot a^x$, com $x \in \mathbb{N}^*$, representa uma P.G., onde $a_1 = b$ (primeiro termo) e $q = a$ (razão).

Geralmente, os estudantes possuem dificuldades em reconhecer a regularidade de uma progressão. Dessa forma, utilizando uma situação cotidiana, o estudante pode compreender os conceitos iniciais de P.G de forma intuitiva e posteriormente, generalizar os conceitos por meio da fórmula.

4° momento: Sistematização da fórmula geral de uma P.G.

Em seguida, relembremos o conceito de progressão geométrica, como segue:

Definição 2.1

Dada uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente por uma constante q, essa sequência é chamada de **progressão geométrica**, que é comum ser abreviada pelos símbolos P.G. O número q é chamado de razão da P.G. O elemento a_k de uma P.G., representa o posicionamento do elemento, isto é, a_k é o k-ésimo elemento da P.G. ou está na k-ésima posição.

As progressões geométricas são classificadas em crescente, decrescente, constante, oscilante ou estacionária.

Dizemos que uma P.G. é dita finita quando ela possui uma quantidade finita de termos, que denotamos como segue:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k).$$

Neste caso, a P.G. possuem k elementos.

Ao passo que uma P.G. é dita infinita quando ela possue uma quantidade infinita de termos, que denotamos como segue:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots).$$

Após tudo que definimos e comentamos, segue que,

$$\begin{array}{lllllll} a_2 & = & a_1 q & & & & \\ a_3 & = & a_2 q & = & a_1 q \cdot q & = & a_1 q^2 \\ a_4 & = & a_3 q & = & a_1 q^2 \cdot q & = & a_1 q^3 \\ & \vdots & & & & & \\ a_n & = & a_1 q^{n-1} & & & & \end{array}$$

Assim a fórmula do termo geral é definido por:

Definição 2.2

Seja (a_n) uma P.G. de razão q, então a expressão algébrica de seu termo geral é

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{2.2}$$

Para apropriação e ampliação de conhecimentos, sugerimos as atividades a seguir.

2.4 Atividade - Carpete de Sierpinski

(ENEM PPL 2012) Uma maneira muito útil de se criar belas figuras decorativas utilizando a matemática é pelo processo de autossemelhança, uma forma de se criar fractais. Informalmente, dizemos que uma figura é autossemelhante se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo. Um exemplo clássico é o "Carpete de Sierpinski", criado por um processo recursivo, descrito a seguir:

- ✓ Passo 1: Considere um quadrado dividido em nove quadrados idênticos (conforme a figura (2.1)). Inicia-se o processo removendo o quadrado central, restando 8 quadrados pretos (conforme a figura (2.2)).
- ✓ Passo 2: Repete-se o processo com cada um dos quadrados restantes, ou seja, divide-se cada um deles em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um, restando apenas os quadrados pretos (conforme a figura (2.3)).
- ✓ Passo 3: Repete-se o passo 2.

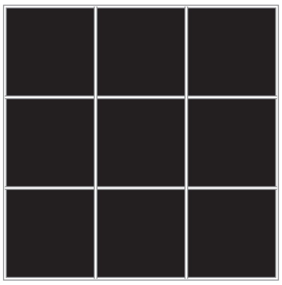

Figura 2.1: Figura 1

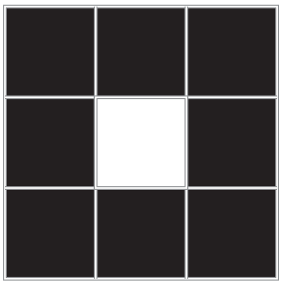

Figura 2.2: Figura 2

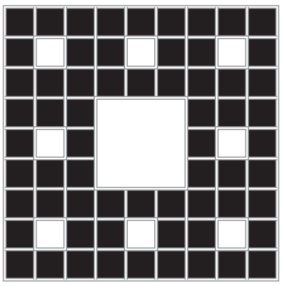

Figura 2.3: Figura 3

Admita que esse processo seja executado 3 vezes, ou seja, divide-se cada um dos quadrados pretos da figura (2.3) em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um deles. Dessa forma, o número de quadrados pretos restantes nesse momento é

(A) 64.

(B) 512.

(C) 568.

(D) 576.

(E) 648.

2.5 Atividade - Formato-base de uma folha retangular de papel

(ENEM 2016 Reaplicação/PPL) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A_0, cujas dimensões são $84,1\ cm$ e $118,9\ cm$. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura (2.4): A_1 tem o formato da folha A_0 dobrada ao meio uma vez, A_2 tem o formato da folha A_0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.

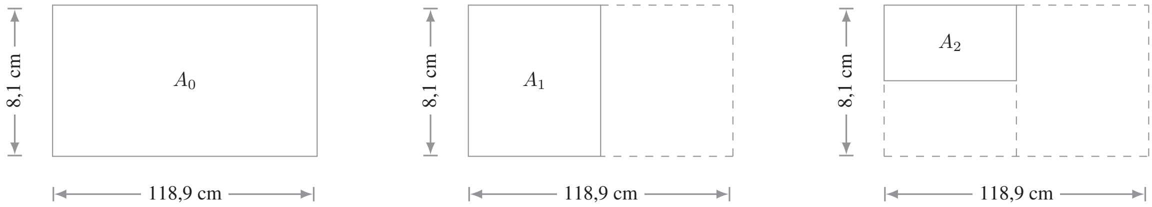

Figura 2.4: Padrão Internacional ISO 216.

Quantas folhas de tamanho A_8 são obtidas a partir de uma folha A_0?

2.6 Atividade - Razão geométrica do Triâgulo de Sierpinski

(UFRN) Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência, na figura (2.5).

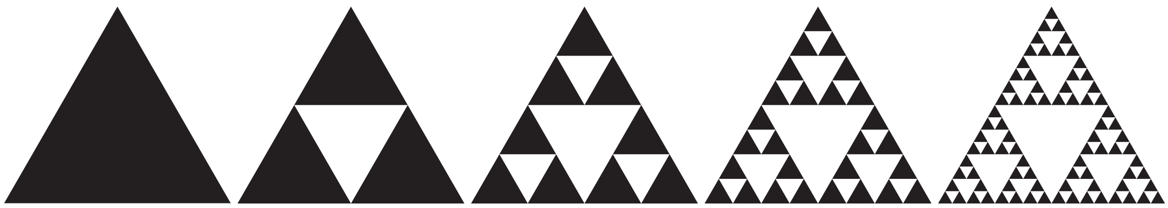

Figura 2.5: Triângulo de Sierpinski

Podemos afirmar que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão:

(A) $3/4$.

(B) $1/2$.

(C) $1/3$.

(D) $1/4$.

(E) $1/8$.

Capítulo 3

AULA 2: Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita e convergente

3.1 Objetivos

Conteúdo: Soma dos termos de uma PG infinita e convergente
Habilidade: (EM13MAT508)

Nesta aula, utilizaremos um trecho da dissertação "A prova de Euler para a resolução do problema da Basileia" e o plano de aula da professora Me Juliana Grassman dos Santos, para instrumentalizar o ensino da "soma de n termos de uma progressão geométrica infinita". Posteriormente, faremos a sistematização da fórmula a partir de sua demonstração.

3.2 Proposta - O Triângulo de Sierpinski

1° **Momento - Introdução**

Inicialmente, divida os alunos em duplas ou trios. Cada agrupamento precisará de:

✓ Régua;

✓ Compasso;

✓ Folha sulfite;

✓ Lápis;

✓ Borracha.

Em seguida, distribua aos agrupamentos as seguintes orientações:

Nesta atividade, vocês irão construir os quatro primeiros estágios do triângulo de Sierpinski e, posteriormente, responderão um questionário.

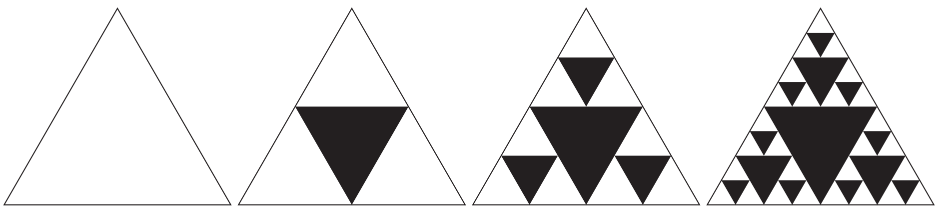

Figura 3.1: Triângulo de Sierpinski

Triângulo Original

Estágio 1:

✓ Construa um triângulo equilátero, com 16 cm de lado, com auxílio da régua e compasso;

✓ Divida cada lado do triângulo em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);

✓ Trace um triângulo no centro e ilustre-o da maneira que preferir.

Estágio 2**:**

✓ Repita o estágio um;

✓ Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);

✓ Trace um triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

Estágio 3**:**

✓ Repita o estágio dois;

✓ Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);

✓ Trace um triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

Estágio 4**:**

✓ Repita o estágio três;

✓ Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);

✓ Trace um triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

Questionário

1. Escreva os cinco primeiros termos da sequência em que o 1° termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio original, o 2° termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio 1, e assim sucessivamente.
   Resposta: $1, 3, 9, 81, 243.$

2. Qual é o próximo termo desta sequência?
   Resposta: $729.$

3. O que acontece a cada novo termo?
   Resposta: Espera-se que o aluno perceba que a cada novo termo, o número de triângulos brancos triplica.

4. Se continuarmos o processo, quantos triângulos brancos teremos no estágio 10?
   Resposta: 19683 triângulos brancos.

5. Agora, vamos analisar o número total de triângulos em cada estágio. Escreva os cinco primeiros termos da sequência em que o 1° termo indica a quantidade de triângulos no estágio original, o 2° termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio 1, e assim sucessivamente.
   Resposta: $1, 4, 13, 94, 337.$

6. Qual é o próximo termo desta sequência?
   Resposta: $337 + 729 = 1066.$

7. Oque acontece a cada novo termo?
   Resposta: Espera-se que o aluno perceba que o n-ésimo termo dessa sequência é igual à soma dos n primeiros termos da sequência construída na questão 1.

8. Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente?
   Resposta: Teremos um número infinito de triângulos.

Observe que foi solicitado ao aluno que, a cada etapa da construção do triângulo de Sierpinski, pintasse o triângulo do centro. No entanto, o triângulo central deve ser removido, mas optamos pela ilustração para facilitar o manuseio dos materiais e a aplicação da atividade em sala de aula.

2° **Momento**

Depois que os grupos terminarem de registrar as respostas, comente que, ao continuarmos a construção do triângulo de Sierpinski indefinidamente, haverá um número infinito de triângulos. Em seguida, proponha a seguinte questão: Já que o número de triângulos é infinito, é possível dizer que a área pintada também será infinita? O objetivo é que eles reflitam, pois em geral, os alunos se surpreendem com a ideia de que a soma da área de infinitos triângulos não é um número infinito.

Você pode conduzir essa discussão da seguinte maneira:

1. Construa a tabela com os valores da medida do lado do triângulo branco (cm) e a área de cada triângulo branco (cm^2), em cada estágio.

E	l	A
0	16	$64\sqrt{3}$
1	8	$16\sqrt{3}$
2	4	$4\sqrt{3}$
3	2	$\sqrt{3}$
4	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$

Tabela 3.1: Área do triângulo branco

Na tabela 3.1

- **E** representa o estágio da construção;
- **l** representa a medida do lado do triângulo branco;
- **A** representa a área de cada triângulo branco (em cm^2) em cada estágio.

2. Pergunte o que ocorre com a medida do lado do triângulo branco a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo, a medida do lado do triângulo branco se reduz à metade.

3. Pergunte o que ocorre com a área do triângulo branco a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo, a área do triângulo branco se reduz à quarta parte.

4. Peça aos alunos que calculem à área dos triângulos brancos nos seis primeiros estágios. Basta multiplicar a área do triângulo branco pela quantidade de triângulos brancos em cada estágio.

5. Pergunte o que ocorre com a soma da área dos triângulos brancos a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo, a área do triângulo branco é multiplicada por $\frac{3}{4}$.

6. Peça aos alunos que calculem a área pintada do triângulo nos seis primeiros estágios. Basta subtrair a soma da área dos triângulos brancos da área do triângulo inicial.

E	A	Q	S
0	$64\sqrt{3}$	1	$64\sqrt{3}$
1	$16\sqrt{3}$	3	$48\sqrt{3}$
2	$4\sqrt{3}$	9	$36\sqrt{3}$
3	$\sqrt{3}$	27	$27\sqrt{3}$
4	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	81	$\frac{81\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	243	$\frac{243\sqrt{3}}{16}$

Tabela 3.2: Soma das áreas dos triângulos brancos.

Na tabela 3.2:

- **E** representa o estágio da construção;

- **A** representa a área de cada triângulo branco (em cm^2) em cada estágio;
- **Q** representa a quantidade de triângulos brancos;
- **S** representa a soma das áreas dos triângulos brancos (em cm^2).

7. A cada novo termo, a área pintada se aproxima da área do triângulo inicial, ou seja, a área tende a $64\sqrt{3}$. Esse valor é o resultado de
$$64\sqrt{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 64\sqrt{3} \approx 64\sqrt{3},$$
pois, observe que à medida que n aumenta a expressão
$$\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
fica cada vez menor, para concluir tal afirmação.

3° **Momento: Sistematização**

Sistematize a soma infinita de n termos de uma P.G. A formalização poderá ser realizada a partir de sua demonstração. Em seguida, relacione a atividade anterior à fórmula e proponha novas questões.

3.3 Soma dos termos de uma PG infinita e convergente

Definição 3.1

Seja (a_n) uma P.G. infinita de razão q, dizemos que (a_n) é convergente, se $-1 < q < 1$. Dessa forma, é possível obter a soma dos infinitos termos utilizando a fórmula:
$$S_\infty = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \frac{1}{1-q}. \tag{3.1}$$

Observe que a definição (3.3) por ser vista, como segue. Considere a P.G.
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots),$$
a soma de seus infinitos termos é dada por:
$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots,$$
ou seja,
$$S_\infty = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots. \tag{3.2}$$
Multiplicando ambos os membros da equação (3.2) por q, obtemos
$$qS_\infty = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots. \tag{3.3}$$

Subtraindo a equação (3.2) da equação (3.3), obtemos
$$S_\infty - qS_\infty = a_1 \Leftrightarrow S_\infty(1-q) = a_1,$$
como estamos supondo $-1 < q < 1$, concluímos que
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Para melhor apropriação, sugerimos as atividades a seguir.

3.4 Atividade - Raiz da planta do mangue

(UEL 2012- Adaptada) A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz, e, em cada uma delas, surgem mais duas ramificações, e assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim da mesma, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.

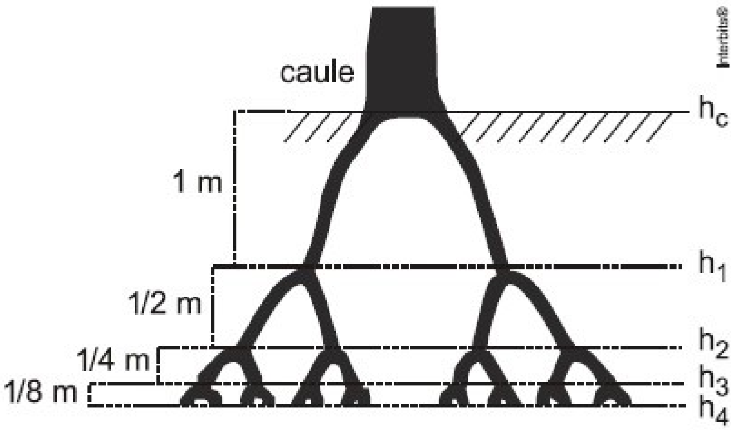

Figura 3.2: Modelo de raiz de planta do mangue.
Fonte: Lima (2018).

3.5 Atividade - Área dos círculos

A figura 3.3 mostra quadrados inscritos em circunferências cujas medidas dos lados são termos de uma sequência infinita, em que $a_1 = 4\ cm, a_2 = 2\ cm, a_3 = 1\ cm$, e assim, sucessivamente.

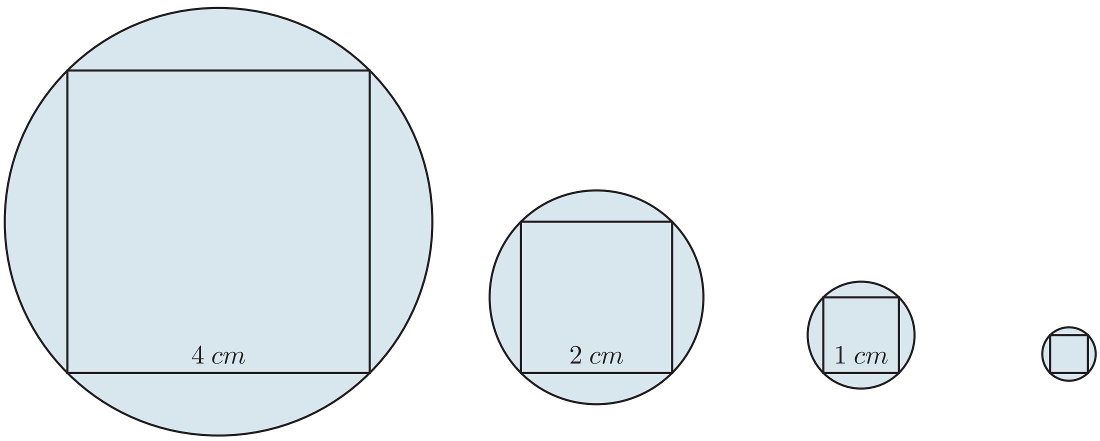

Figura 3.3: Quadrados inscritos em circunferências.

Diante do exposto, é correto afirmar que a soma de todas as áreas dos círculos delimitados por essas circunferências converge para

A. $\dfrac{128\pi}{3}\ cm^2$.

B. $\dfrac{32\pi}{3}\ cm^2$.

C. $\dfrac{64\pi}{3}\ cm^2$.

D. $16\pi\ cm^2$.

A. $32\pi\ cm^2$.

3.6 Molusco sobre a estrela do mar

(UERJ- Adaptada) A figura (3.4) mostra um molusco Triton Tritoris sobre uma estrela do mar.

Figura 3.4: Molusco sobre a estrela do mar.
Fonte: Lima (2018).

Um corte transversal nesse molusco permite visualizar, geometricamente, uma sequência de semicírculos. O esquema abaixo indica quatro desses semicírculos.

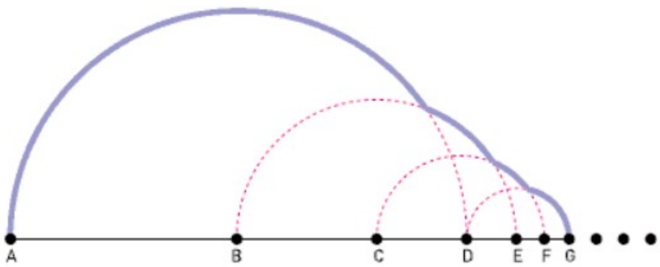

Figura 3.5: Semicírculos.
Fonte: Lima (2018).

Admita que as medidas dos raios

$$(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \ldots)$$

formem uma progressão tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \ldots.$$

Considere $\overline{AB} = 2\ cm$. Nessas condições, determine o valor da soma

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \ldots.$$

Bibliografia

[1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2018.

[2] BRASIL. Ministério da Educação/INEP. *SAEB: Matrizes e escalas.* Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas. Acesso em: 27 set. de 2024.

[3] LIMA G. M., *Álgebra:* 2° *Série.* , Sistema Ari de Sá de Ensino, Fortaleza, 2018.

[4] MATO GROSSO. *PORTARIA* N° *893/2024/GS/SEDUC/MT.* Inclui a matriz de referência da Avaliação Somativa, componente curricular Matemática (Anexo II), da Portaria N° 685/2024/GS/ Seduc-MT, que estabelece as diretrizes para realização da Avaliação Somativa do Sistema de Avaliação Educacional de Mato Grosso (Avalia MT). Disponível em: <https://www3.seduc.mt.gov.br/documents/d/seduc/portaria-n-893gsseducmt_avaliacao-somativa_2024_do-05set24_inclusao-matriz-de-matematica-pdf>. Acesso em: 27 set. 2024.

[5] SANTOS, Juliana Grassmann dos. *Soma dos termos de uma Progressão Geométrica: Compreensão da soma dos termos de uma PG a partir de um fractal.* 2012. Disponível em:< https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/soma-dos-termos-de-uma-progressao-geometrica/>. Acesso em 03 dez. 2024.

[6] SANTOS, R. de J.. *Soma infinita de uma progressão geométrica: uma proposta de ensino a partir do triângulo de Sierpinski.* In:. Disponível em: <https//www.even3.com.br/anais/IIepema2022/490260-soma-infinita-de-uma-progressao-geometrica–uma-proposta-de-ensino-a-partir-do-triangulo-de-Sierpinski>. Acesso em: 26/09/2024.

[7] SANTOS, R. de J.. *A prova de Euler para a resolução do problema da Basileia. 2020.* 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Mato Grosso, Campus Universitário do Araguaia, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Barra do Garças, 2020.