UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

RECURSO EDUCACIONAL

O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS NUMA ABORDAGEM DINÂMICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Fernando Lopes do Nascimento

E

Luis Guillermo Martinez Maza

Instituto de Matemática

Maceió, 2024

PROFMAT

O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS NUMA ABORDAGEM DINÂMICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

FERNANDO LOPES DO NASCIMENTO & LUIS GUILLERMO MARTINEZ MAZA

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma sequência didática a ser implementada em dez aulas do Ensino Fundamental Anos Finais com o objetivo de indicar um caminho para o ensino de cálculo de áreas de polígonos com o auxílio do software *GeoGebra*. Iniciamos com uma breve introdução ao software, trazendo um passo a passo de instalação, bem como os comandos básicos que iremos utilizar durante as aulas. No segundo momento propomos uma estratégia dinâmica para o ensino de localização no plano cartesiano. Em seguida apresentamos uma discussão analítica sobre o cálculo de área de polígonos como função dos seus vértices. Concluímos com uma seção de caráter avaliativo que sugere comparar soluções de exercícios sobre cálculo de áreas obtidas através do método analítico com as fornecidas pelo software *GeoGebra*. Esta sequência didática tem referência da dissertação de mestrado do Profmat do primeiro autor, sob a orientação do segundo autor, que pode ser encontrada no sítio do Profmat na internet.

Palavras-chave: Geometria Plana; Polígonos; Áreas; GeoGebra; BNCC.

SUMÁRIO **PÁGINA**

Etapa 1: Uso dinâmico do GeoGebra

Objetivos: Apresentar e conhecer o software GeoGebra, aprender a como usá-lo para calcular a área de polígonos e questões relacionadas propostas pelo professor.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), as atividades desenvolvidas nesta etapa contribuem para o desenvolvimento das habilidades detalhadas no seguinte quadro:

Quadro 1. Habilidades de áreas de polígonos da BNCC.

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
Grandezas e medidas	Área de figuras planas	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Duração: 4 aulas de 50 minutos.

Local: Laboratório de Informática.

Organização dos estudantes: Dupla.

Recursos e/ou materiais utilizados: Computadores com internet para manipulação do GeoGebra, data show.

Desenvolvimento: Nestes encontros serão mostrados como funciona o GeoGebra, com ênfase nas principais ferramentas que serão utilizadas para construir figuras que são necessárias para a construção dos polígonos e que serão propostas pelo professor, tais como: malha quadriculada, ponto, segmento de reta, comprimento, polígonos, áreas, entre outros.

Conforme Lamas e Mendes (2017), o GeoGebra é um software gratuito que pode ser baixado no link “https://www.geogebra.org/download” e pode ser utilizado nos sistemas Windows, Linux e Mac. É um programa de geometria dinâmica que permite facilitar o entendimento de conceitos relacionados à geometria, à álgebra e ao cálculo.

Por meio da plataforma do GeoGebra podemos conhecer a tela inicial do software e suas respectivas versões, conforme figura 1.

Figura 1. Tela Inicial do site GeoGebra.

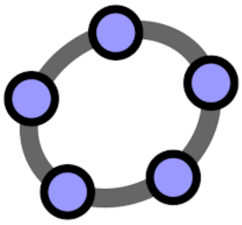
Fonte: GEOGEBRA (2023).

Para que o discente possa entender o GeoGebra, é necessário aprender como foi o desenvolvimento do software, como manipular e como devem serem construídas as figuras na plataforma de forma dinâmica e de fácil visualização.

A palavra GeoGebra vem da união de duas áreas muito importantes da Matemática, que são a Geometria e a Álgebra. Teve seu início em 2001, por Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburgo, e abrange todos os níveis de ensino que vai do básico ao superior. Esse software trabalha com recursos que envolvem geometria e álgebra, assim como tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculo em uma plataforma totalmente ampla e bem desenvolvida (Lamas; Mendes, 2017).

Pode-se trabalhar de forma dinâmica a geometria em diversos conteúdos de matemática com a plataforma. O GeoGebra permite por meio de suas ferramentas, fazer figuras dinâmicas para que o estudante possa manipular usando seus recursos. Esse software permite inserir funções que são traduzidos na tela em forma de figuras geométricas. O estudante pode criar conjecturas, hipóteses, deduções e explorações das figuras e além disso construir, visualizar, ampliar, reduzir e manipular as figuras através dos comandos do GeoGebra. Por isso é fundamental que o estudante aprenda a usar as ferramentas de modo adequado a cada situação proposta em sala de aula, de forma prática e fácil de seu uso. Serão apresentadas a seguir as ferramentas do GeoGebra iniciando pelo ícone de acesso do GeoGebra, conforme figura 2:

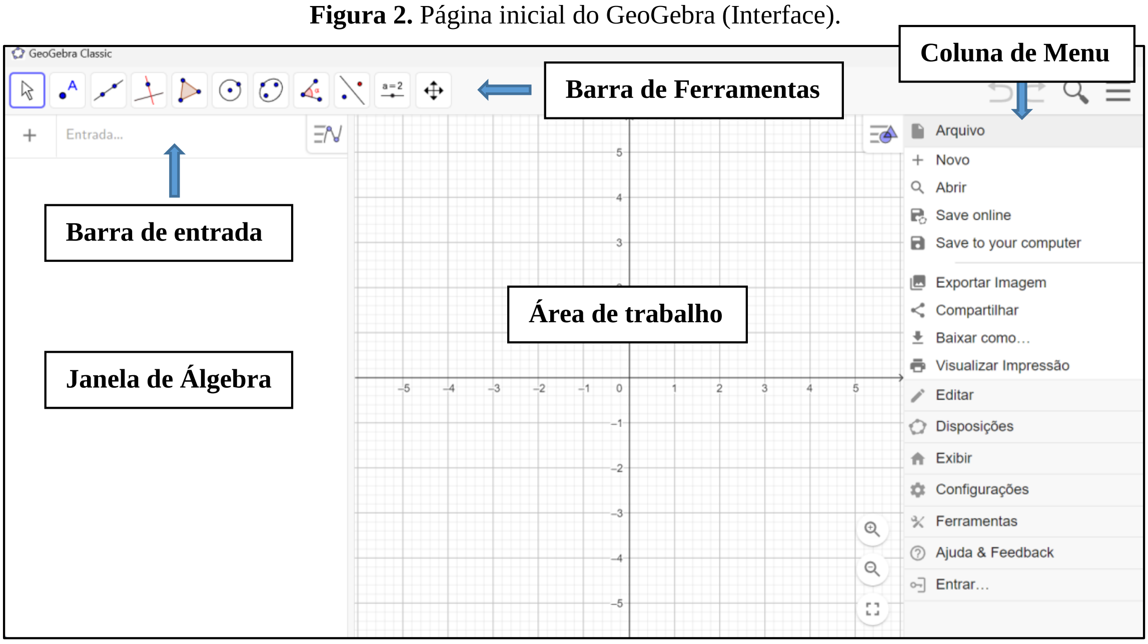
Figura 2. Ícone de Acesso do GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Será utilizado a versão GeoGebra Classic 6.0, principalmente para construção de Polígonos e Polígonos Regulares. A figura 3 mostra a tela inicial do GeoGebra:

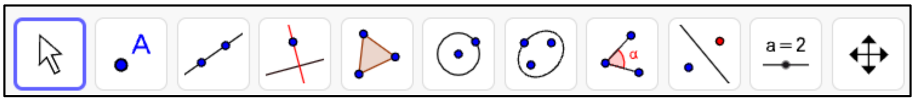
Figura 2. Página inicial do GeoGebra (Interface).



Fonte: GEOGEBRA (2023).

As ferramentas do GeoGebra, conforme mostra a figura 4, permite a construção de diversas figuras.

Figura 3. Barra de Ferramentas do GeoGebra.



Janelas: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao clicar em cada uma das janelas na barra de ferramentas, surgem as opções que seguem, de acordo com o quadro 1:

Quadro 1. Ferramentas do GeoGebra.

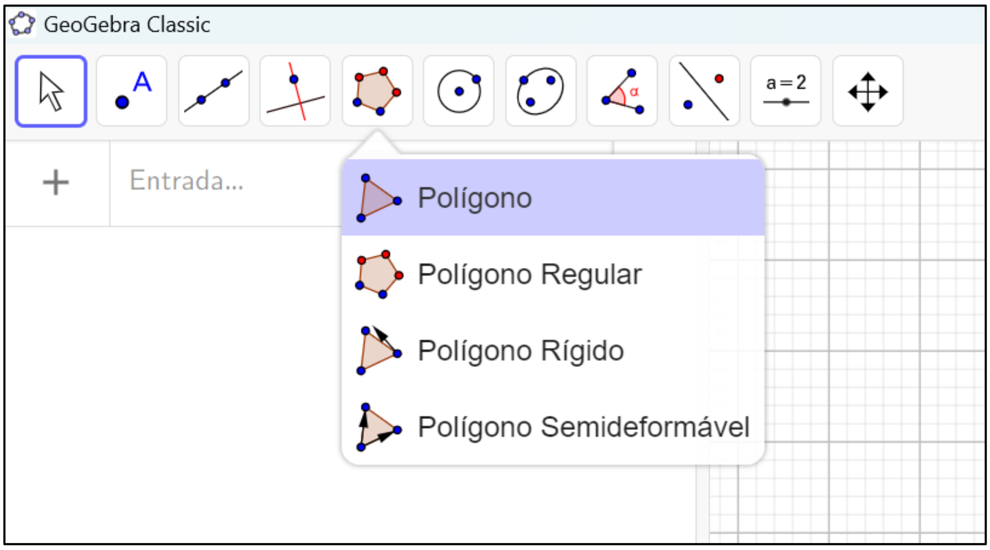
Janelas da Barra de Ferramentas	Ferramentas (Opções)
1. Movimento (manipulação)	Mover Função à mão livre Caneta
2. Pontos	Novo Ponto Ponto em Objeto Vincular / Desvincular Ponto Interseção de Dois Objetos Ponto Médio ou Centro Número Complexo Otimização Raízes
3. Retas, Segmentos, Semirretas e Vetores	Reta definida por Dois Pontos Segmento definido por Dois Pontos Segmento com Comprimento Fixo Semirreta Definida por Dois Pontos Caminho Poligonal Vetor a partir de um Ponto
4. Retas especiais e Lugar Geométrico	Reta Perpendicular Reta Paralela Mediatriz Bissetriz Reta Tangente Reta Polar ou Diametral Reta de Regressão Linear Lugar Geométrico
5. Polígono	Polígono Polígono Regular Polígono Rígido Polígono Semideformável
6. Círculos e Arcos	Círculo dados Centro e um de seus Pontos Círculo dados Centro e Raio Compasso Círculo definido por Três Pontos Semicírculo Arco Circular dados Centro e Dois Pontos Arco Circuncircular Setor Circular Setor Circuncircular

Janelas da Barra de Ferramentas	Ferramentas (Opções)
7. Cônicas	Elipse Hipérbole Parábola Cônica definida por Cinco Pontos
8. Medidas	Ângulo Ângulo com Amplitude Fixa Distância, Comprimento ou Perímetro Área Inclinação Lista Relação Inspetor de Funções
9. Transformações	Reflexão em Relação a uma Reta Reflexão em Relação a um Ponto Inversão Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo Translação por um Vetor Homotetia dados Centro e Razão
10. Interface Gráfica	Controle Deslizante ABC Texto Inserir Imagem Inserir Botão Caixa para Exibir / Esconder Objetos Campo de Entrada
11. Personalizadas	Mover Janela de Visualização Ampliar Reduzir Exibir / Esconder Objeto Exibir / Esconder Rótulo Copiar Estilo Visual Apagar Objeto

Fonte: GEOGEBRA (2023).

O software GeoGebra permite calcular a área de polígonos, seguindo alguns passos. Na interface inicial do GeoGebra, identificado a barra de ferramenta e depois clicado na ferramenta (polígono), conforme figura 5:

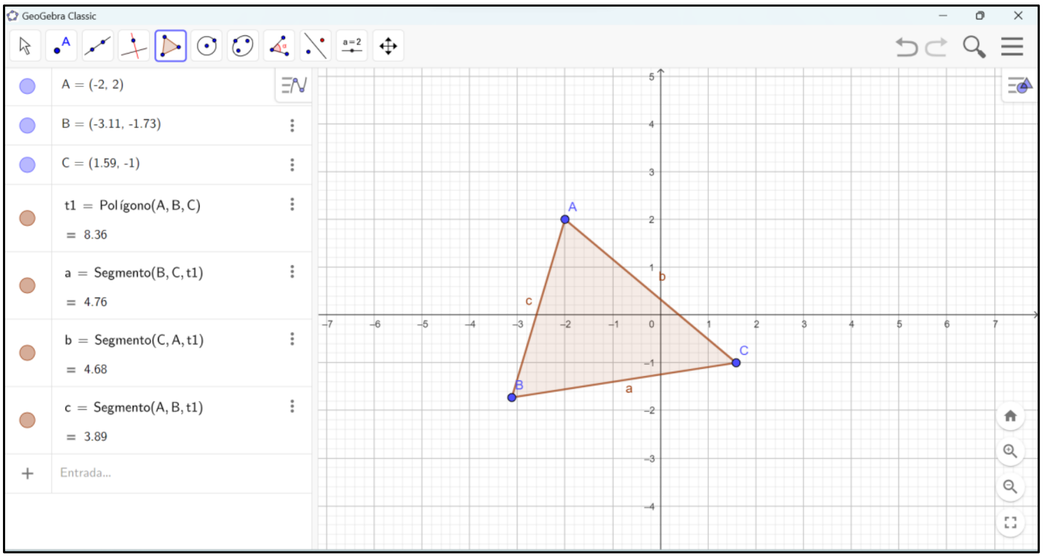
Figura 4. Ferramenta polígono no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Deve se escolher, por exemplo, "polígono", e fazer um triângulo na área de trabalho, como exemplificado na figura 6:

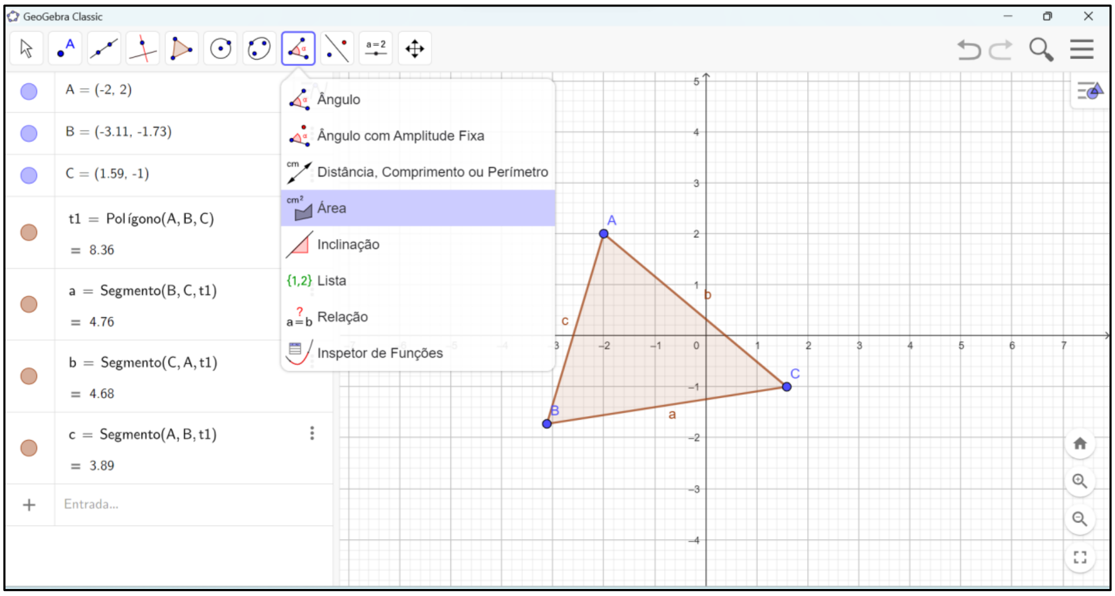
Figura 5. Construção de um polígono.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Em seguida, identifica-se na barra de ferramentas o ícone medidas e seleciona-se a opção área, conforme figura 7:

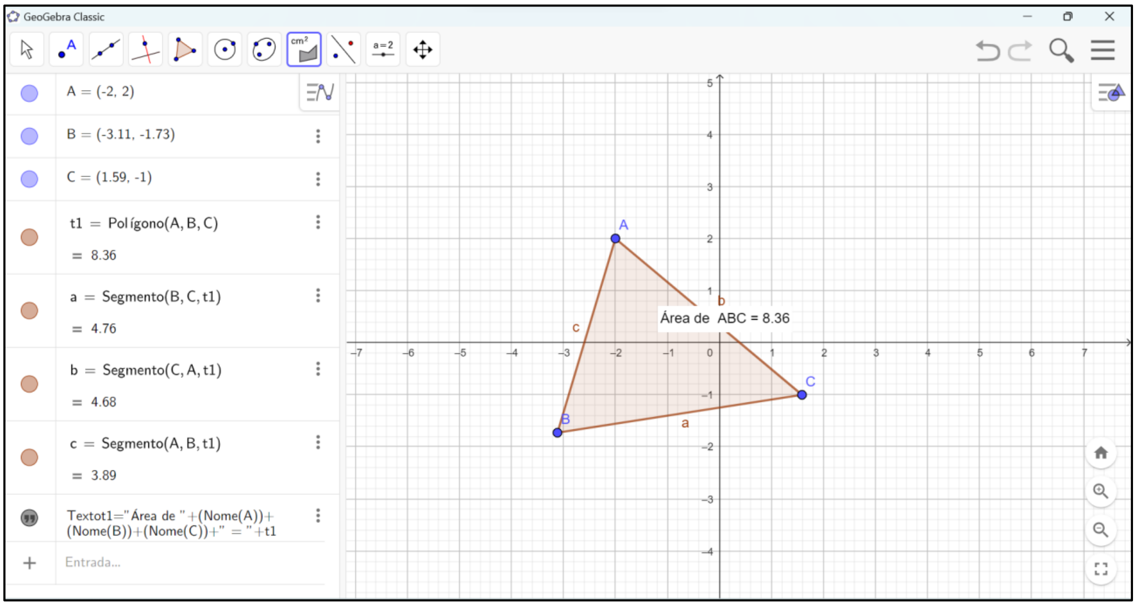
Figura 6. Ferramenta de área.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao clicar na figura aparecerá o valor da área, conforme figura 8:

Figura 7. Calculando área.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Seguindo os passos descritos anteriormente, torna-se fácil calcular a área de qualquer polígono. Por meio da ferramenta de polígono regular é possível calcular áreas de polígonos regulares no GeoGebra. Diz-se que um polígono é regular, se é convexo[1], se tem todos os seus

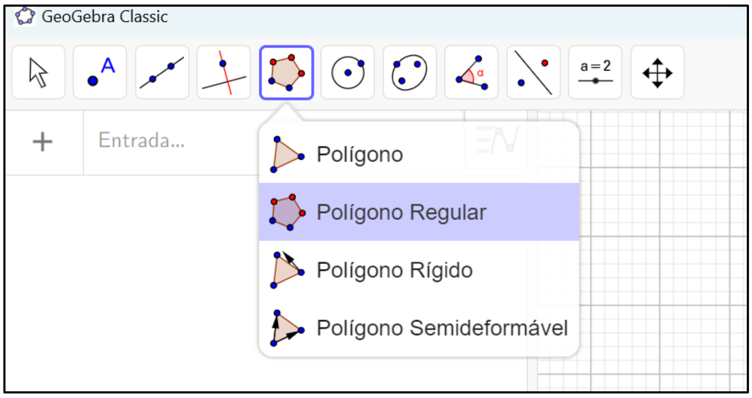
---

[1] Um polígono é dito convexo quando, para todo lado, o polígono deverá estar contido em um dos semiplanos determinado por este lado.

ângulos congruentes e todos os seus lados são congruentes. O GeoGebra possui uma ferramenta que facilita a construção de polígonos regulares. Se observará como é a construção de um polígono no GeoGebra. O embasamento para os comandos utilizados se deu a partir de Gerônimo, Barros e Franco (2010).

No GeoGebra será selecionado a criação de um novo arquivo. Será clicado na ferramenta "Polígono Regular", conforme figura 9:

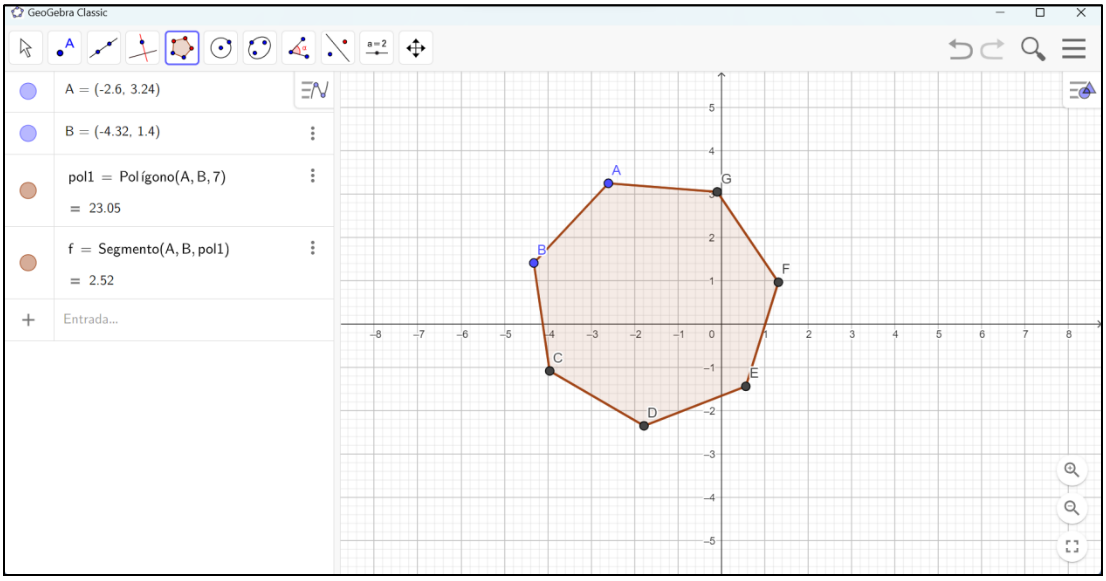
Figura 8. Ferramenta polígono regular no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Será clicado sobre o plano para que seja localizado um ponto, para assim criar um vértice e por padrão o GeoGebra nomeia como A. Dá-se um clique em outro local do plano para que, desse modo seja criado um segundo vértice e por padrão o GeoGebra dará o nome desse vértice como B. O polígono gerará lados iguais a de AB. Aparecerá uma janela de forma que deverá ser escrita a quantidade de lados, no qual se digitará o 7 e será clicado em "OK". O GeoGebra apresentará um polígono regular de sete lados de medida igual a de AB. Veja a figura 10:

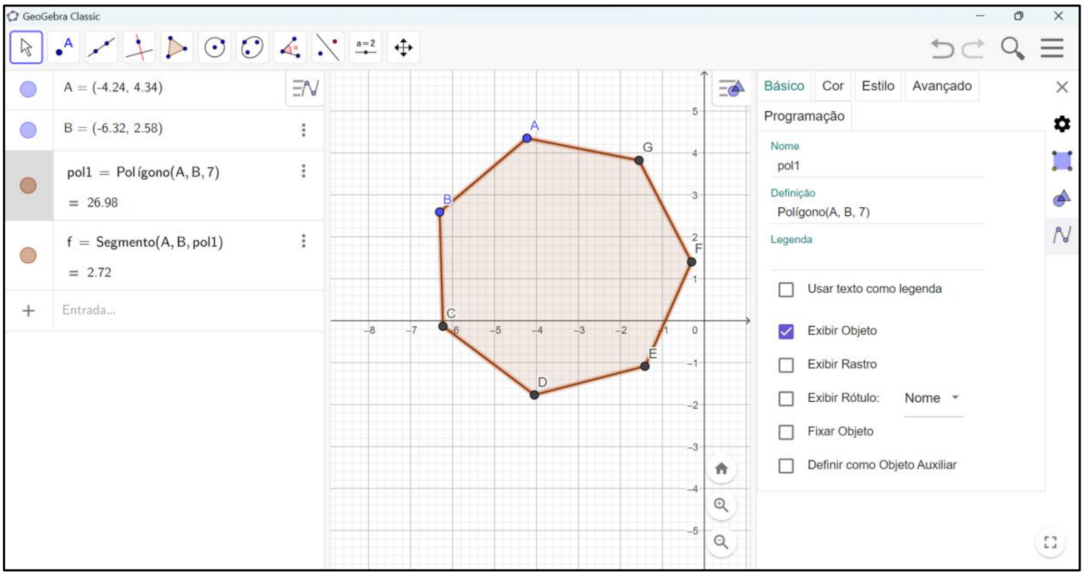
Figura 9. Polígono regular de 7 lados no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

O polígono será arrastado, "segurando-o" por qualquer local de seu setor interno. Movimenta-se o vértice A ou o vértice B. Percebe-se que estará se alterando a medida do lado do polígono regular. Para alterar a o número de lados do polígono ilustrado, clica-se com o botão direito sobre ele ou sobre seu nome na coluna algébrica. Seleciona-se configurações. Busca-se a paleta "Básico", no qual será visto uma janela semelhante à figura 11:

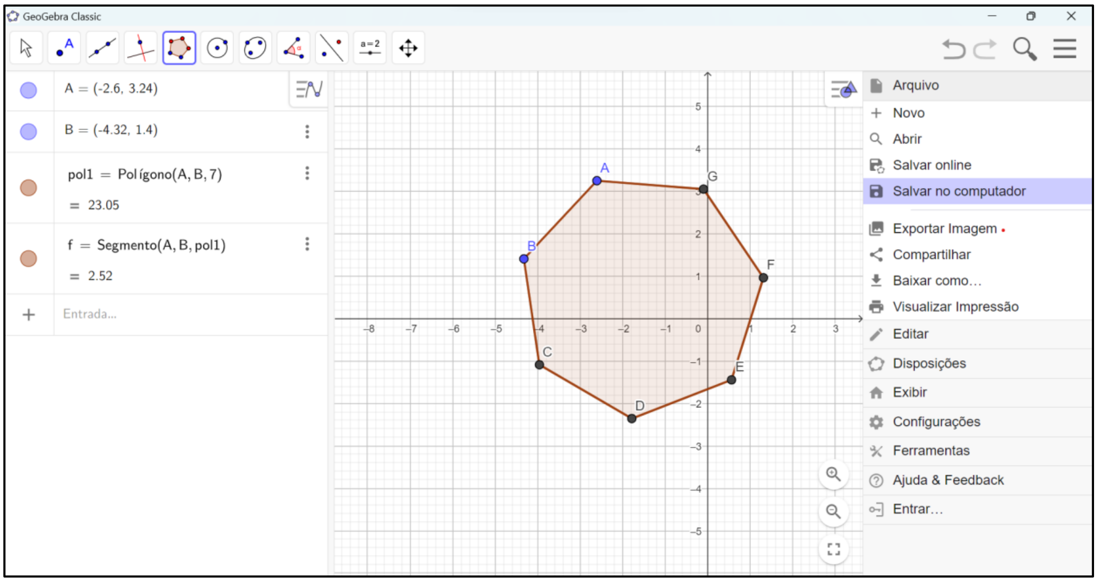
Figura 10. Ferramenta Paleta "básico" no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Observa-se o campo “Definição”. Percebe-se que, para o GeoGebra, essa figura é um polígono com vértices no início, A e B e com sete lados. Altera-se o número 7 por outro e fecha-se a janela. Salva-se o arquivo com o nome “polígonoregular.ggb”, conforme figura 12:

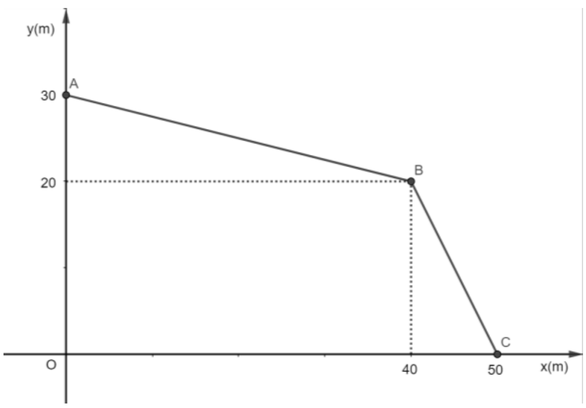
Figura 11. Opção “Salvar no computador” no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Por meio desses comandos pode-se construir qualquer polígono regular. Para entender melhor como calcular as áreas de polígonos, vamos analisar os exemplos que seguem, utilizando o GeoGebra e também fazendo uso das fórmulas clássicas, para determinar as áreas das figuras que são propostas em cada questão.

Exemplo 1. (UFG - 2005) Um terreno tem a planta representada num plano cartesiano, como mostra o gráfico a seguir:



Fonte: GEOGEBRA (2023).

A área do terreno, em metros quadrados, será:

a) 1400

b) 1100

c) 1000

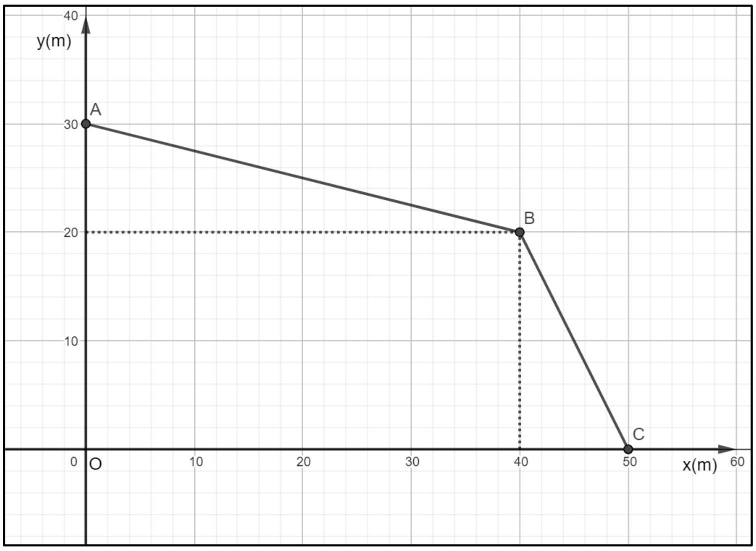
d) 900

e) 800

Vê-se a solução no GeoGebra:

Modelando a figura dada na questão, por meio do GeoGebra, conforme figura 13:

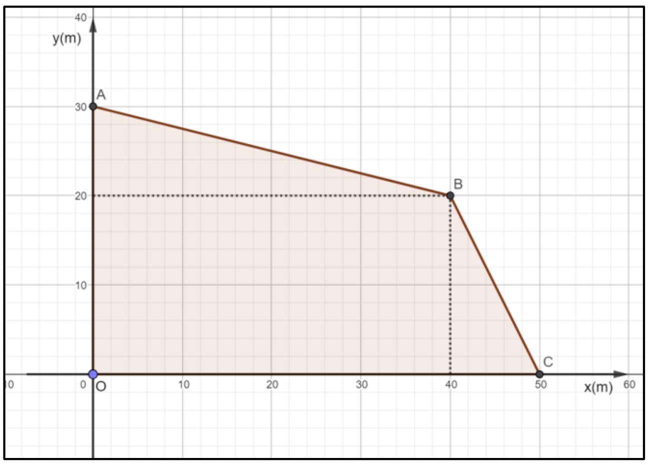
Figura 12. Planta representada num plano cartesiano.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Utilizando a ferramenta polígono, constrói-se o polígono ABCO, na figura 14:

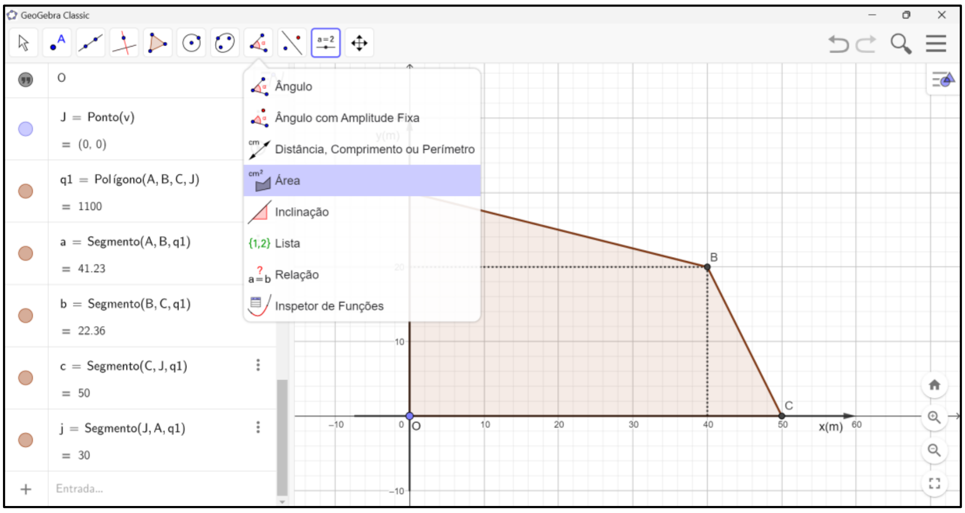
Figura 13. Modelando um polígono na planta de um terreno.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Agora será buscado na barra de ferramentas o ícone medidas e será clicado em área, como na figura 15:

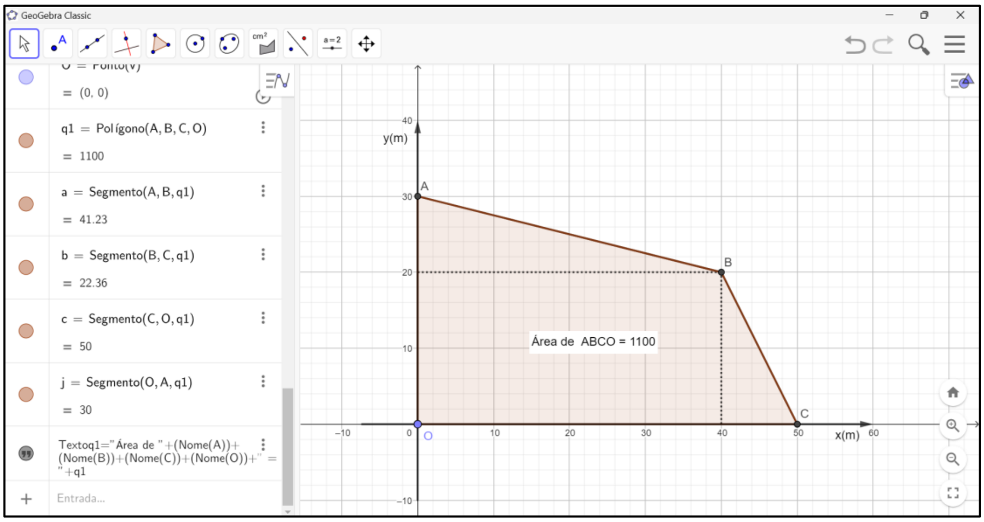
Figura 14. Ferramenta Comprimento (Área).



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao clicar na figura aparecerá o valor da área, como na figura 16:

Figura 15. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).



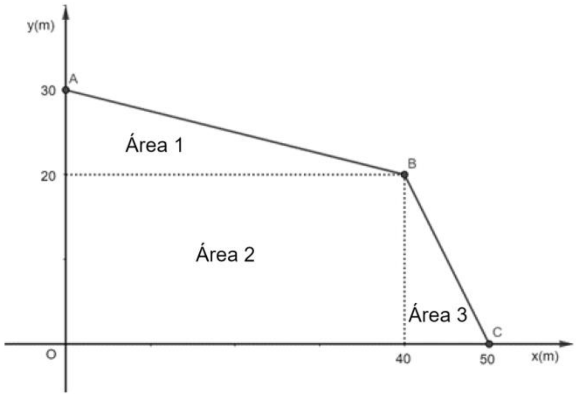
Fonte: GEOGEBRA (2023).

Portanto, $S_Q = 1100$ ■

Vê-se uma outra forma de resolver a questão aplicando as fórmulas clássicas de geometria plana, como segue abaixo:

Decompondo a figura citada no exemplo 1, em figuras conhecidas como na figura 17, temos:

Figura 16. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).



Fonte: AUTOR (2024).

A área 1 corresponde a um triângulo de base 40 e altura (30 - 20 = 10), logo a área é:

$A_1 = \frac{b.h}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{40.10}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{400}{2} \Longrightarrow A_1 = 200m$

A área 2 corresponde a um retângulo de base 40 e altura (20 - 0 = 20), logo a área é:

$A_2 = b.h \Longrightarrow A_2 = 40.20 \Longrightarrow A_2 = 800m$

A área 3 corresponde a um retângulo de base (50 - 40 = 10) e altura (20 - 0 = 20), logo a área é:

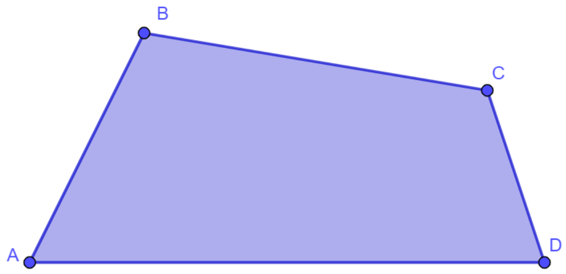
$A_3 = \frac{b.h}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{10.20}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{200}{2} \Longrightarrow A_3 = 100m$

Somando as áreas, temos:

$A_t = A_1 + A_2 + A_3 = 200 + 800 + 100 = 1100$ m.

Logo, a alternativa correta é a letra “B”.

Exemplo 2. (UEMA, 2020) Dentre as funções de um profissional de topografia está o reconhecimento de áreas, a relação dessas áreas com polígonos, a localização de seus vértices e o cálculo de área. A figura a seguir, representa um esboço que um topógrafo fez em um terreno, representado por um quadrilátero, com vértices A(3,2), B(5,6), C(11,5) e D(12,2) em coordenadas cartesianas.



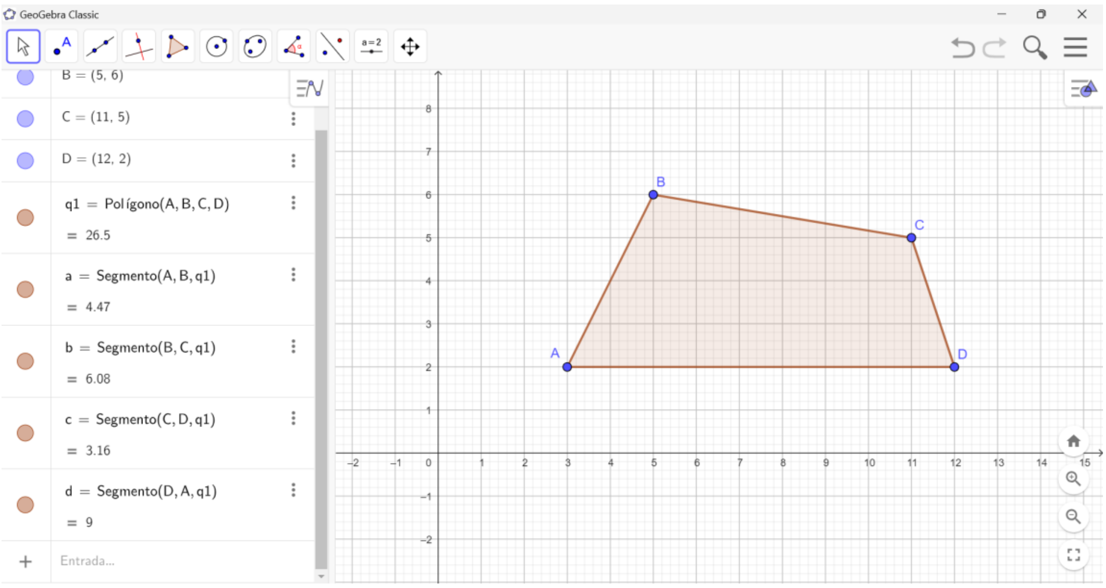
Com base nas informações dadas:

a) Faça o esboço do quadrilátero ABCD que representa o formato do terreno. O esboço deve ser feito em um sistema de coordenadas no plano cartesiano.
b) Calcule a área total do terreno.

Vê-se a solução no GeoGebra.

a) Modelação da figura dada na questão, através do GeoGebra, na figura 18:

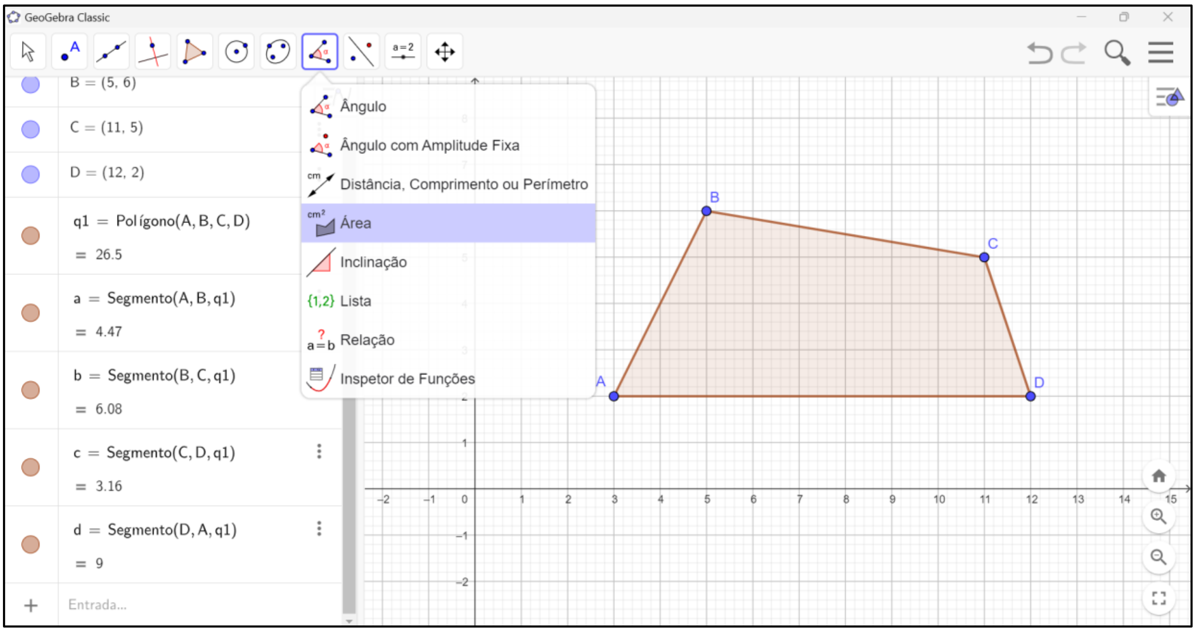
Figura 18. Figura construída com a ferramenta polígono.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

b) Calculando a área através da ferramenta “Medidas – Área”, na figura 19:

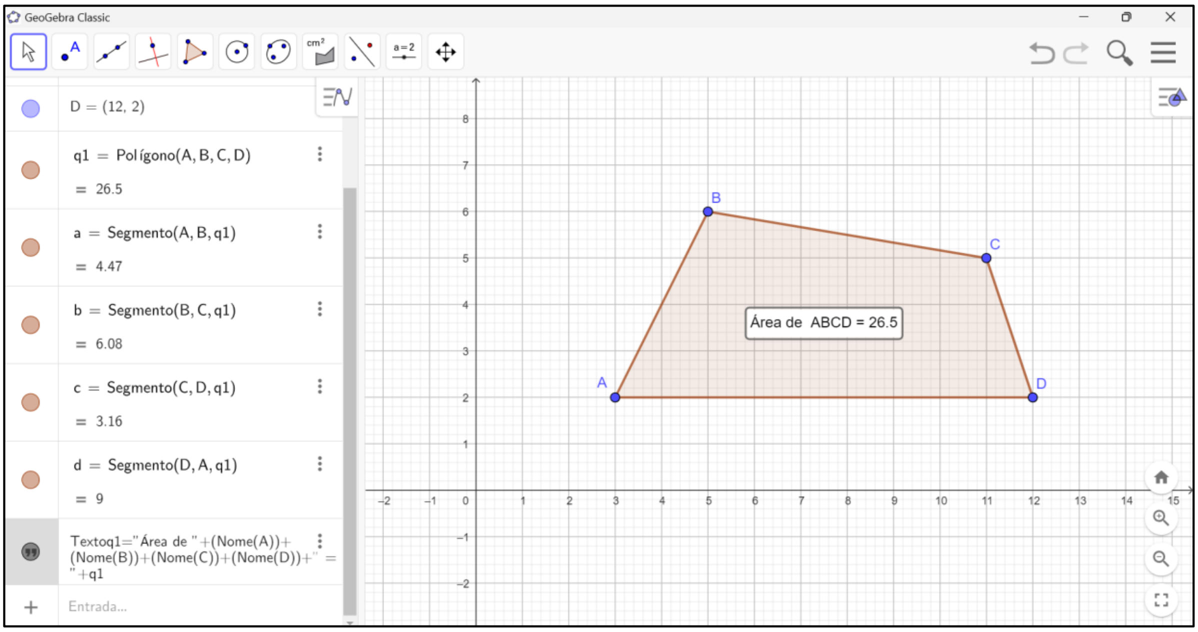
Figura 19. Ferramenta Comprimento (Área).



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Clica-se na figura e aparecerá o valor da área, conforme figura 20:

Figura 20. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).

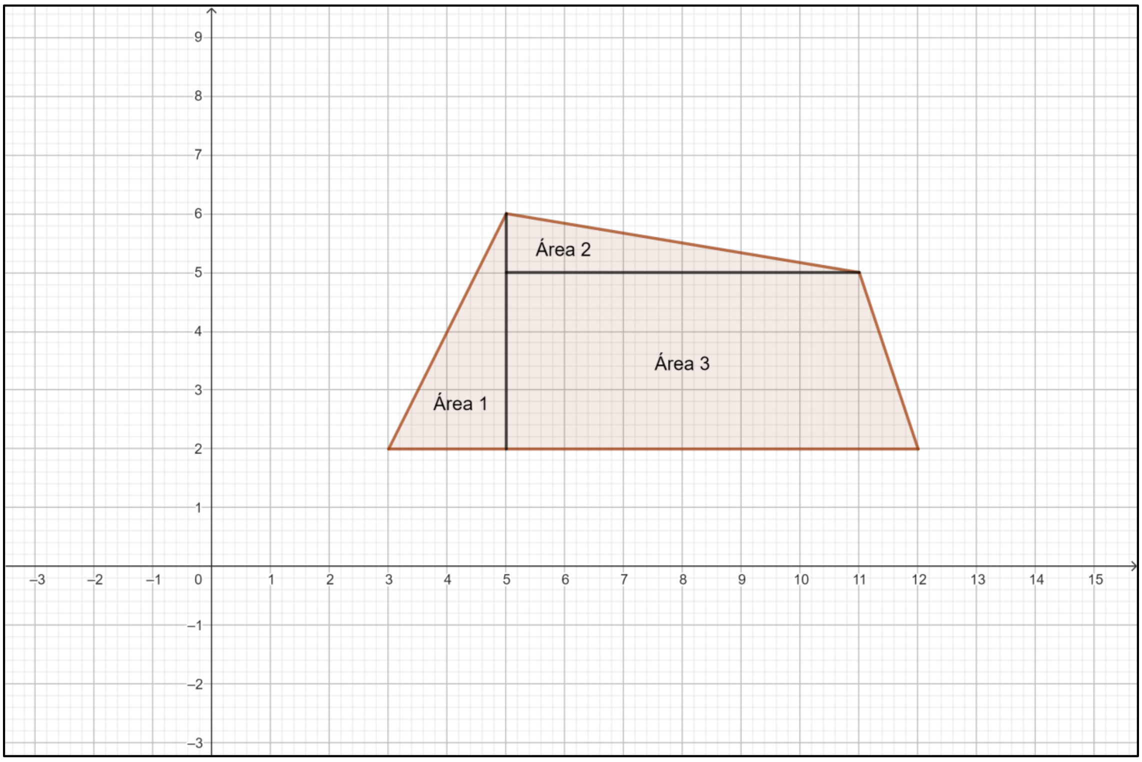


Fonte: GEOGEBRA (2023).

Portanto, $S_Q = 26{,}5$ ■

Utilizando-se das fórmulas clássicas para resolver a questão do item *b* e fazendo a decomposição do polígono como mostra a figura 20, temos:

Figura 21. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).



Fonte: AUTOR (2024).

A área 1 corresponde a um triângulo de base (5 – 3 = 2) e altura (6 - 2 = 4), logo a área é:

$A_1 = \frac{b.h}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{2.4}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{2.4}{2} \Longrightarrow A_1 = 4$ m

A área 2 corresponde a um triângulo de base (11 – 5 = 6) e altura (6 - 5 = 1), logo a área é:

$A_2 = \frac{b.h}{2} \Longrightarrow A_2 = \frac{6.1}{2} \Longrightarrow A_2 = \frac{6.1}{2} \Longrightarrow A_2 = 3$ m

A área 3 corresponde a um trapézio de base maior (12 - 5 = 7), base menor (11 – 5 = 6) e altura (5 - 2 = 3), logo a área é:

$A_3 = \frac{(B+b).h}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{(7+6).3}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{(13).3}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{39}{2} \Longrightarrow A_3 = 19,5$ m

Somando as áreas, temos:

$A_t = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 3 + 19,5 = 26,5$ m.

Logo, a área da figura é 26,5 m.

Com o auxílio do GeoGebra, é possível perceber uma maior clareza na compreensão da questão. Isso se deve à capacidade de decompor a figura em formas geométricas clássicas, utilizando a ferramenta de cálculo de áreas de polígonos. Dessa forma, o estudante consegue assimilar como realizar os cálculos de áreas utilizando as fórmulas tradicionais da geometria plana.

Para compreender o conceito de polígono é necessário ter clareza do conceito de vértice. Por tal motivo dedicamos a próxima etapa a introduzir a noção de localização de pontos num plano cartesiano.

Etapa 2: Localização de pontos no plano cartesiano

Objetivo: Localizar pontos no plano cartesiano.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), as atividades desenvolvidas nesta etapa contribuem para o desenvolvimento das habilidades detalhadas no seguinte quadro:

Quadro 2. Habilidades de localização de pontos da BNCC.

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
Geometria	Distância entre pontos no plano cartesiano	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Local: Sala de aula.

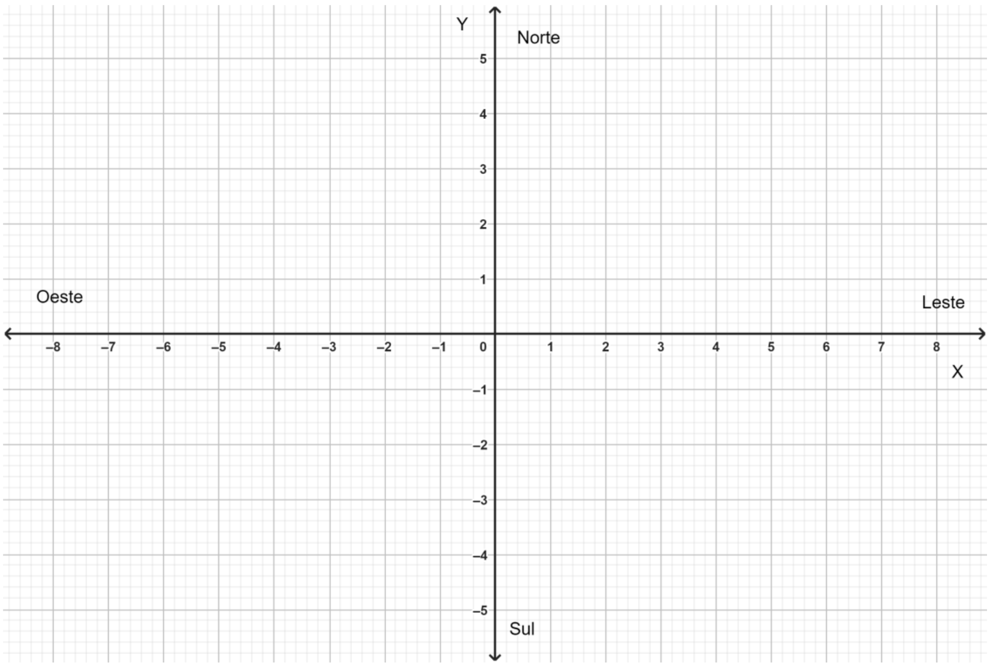
Organização dos estudantes: Dupla.

Recursos e/ou materiais utilizados: Datashow, notebook, lápis, borracha e caneta.

Desenvolvimento: Iniciamos introduzindo a noção localização de pontos no plano cartesiano combinando o uso do o quadro com slides projetados no data show, utilizando o GeoGebra como recurso tecnológico para dinamizar as aulas (2). Finalizamos com uma atividade de discussão de questões que visam avaliar as habilidades desenvolvidas pelos estudantes na compreensão e localização de pontos no plano cartesiano.

Um sistema de eixos ortogonais num plano π é um par de retas OX e OY, com igual unidade de medida de comprimento, que se intersectam perpendicularmente no ponto comum O. Por convenção, costuma-se considerar a reta OX na direção oeste-leste e é denominada eixo horizontal, já a reta OY costuma-se considerar na direção sul-norte, é denominada eixo vertical, conforme a figura 20:

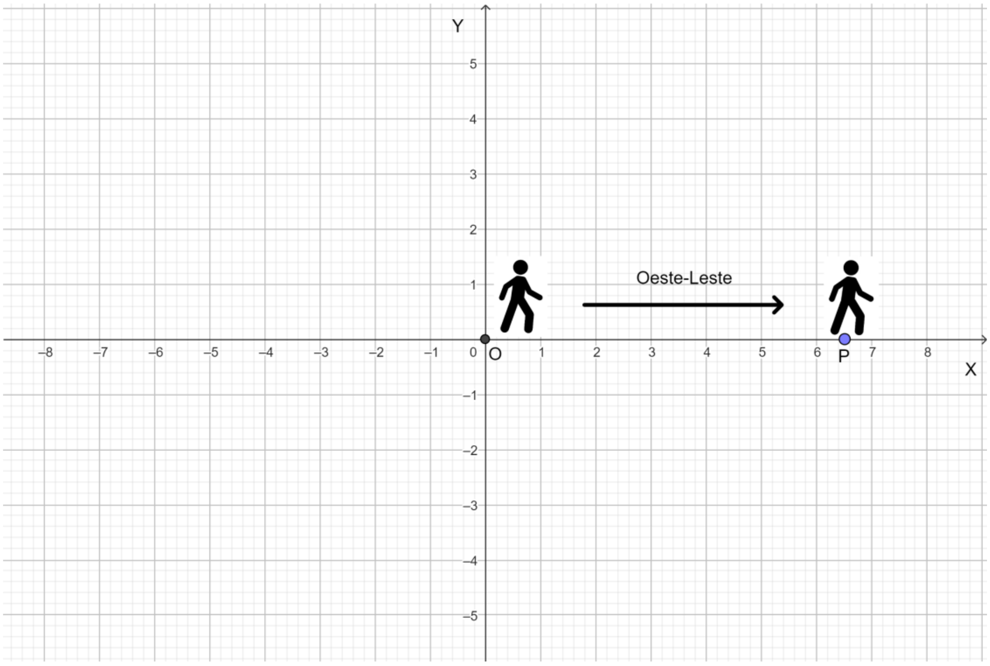
Figura 22. Gráfico Cartesiano – Direções geográficas.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Pode-se fazer referência a essa configuração como sistema de eixos ortogonais XOY ou, simplesmente, sistema XOY. A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite introduzir o conceito de coordenada. Dado um ponto P na reta OX, têm-se três possibilidades: a primeira, P está à leste do eixo OY. Neste caso, a distância x de O até P é pensada como avanço em OX a partir de O e identifica-se P com x. Nos gráficos seguintes, foram incorporados hiperlinks que direcionam para páginas criadas pelo autor no GeoGebra. Essas páginas permitem que os estudantes manipulem as figuras e movam os personagens para verificar a localização de pontos no plano cartesiano, tanto nas direções Leste-Oeste e vice-versa, quanto nas direções Sul-Norte e vice-versa. As representações dos personagens foram realizadas com a utilização da ferramenta translação por um vetor no GeoGebra.

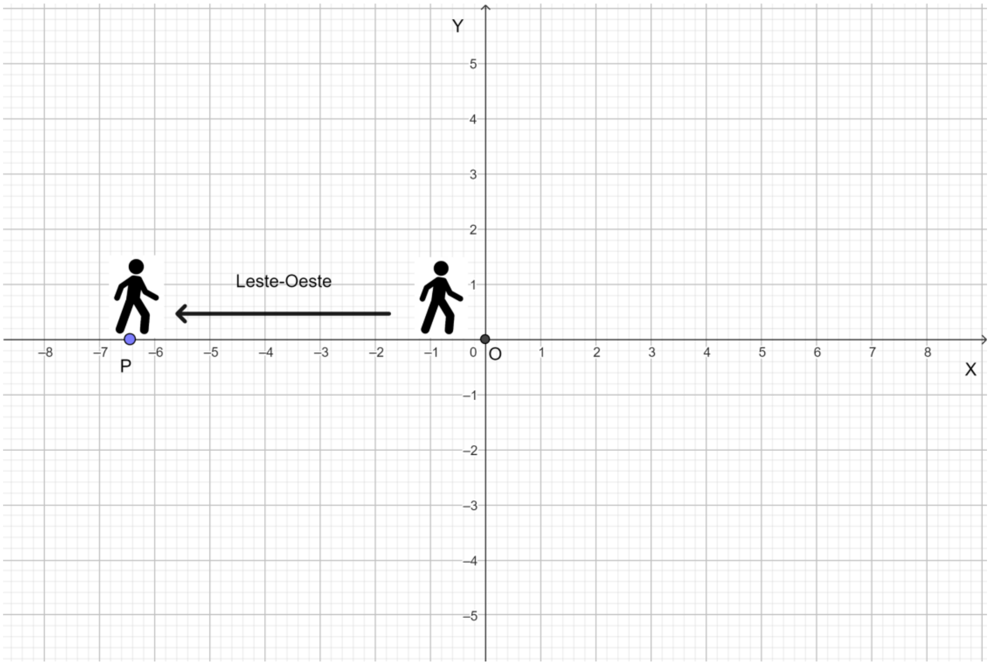
Figura 23. Direção Oeste-Leste.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na segunda possibilidade, P está à oeste do eixo OY. Neste caso, a distância x de O até P é pensada como recuo em OX a partir de O e identifica-se P com -x.

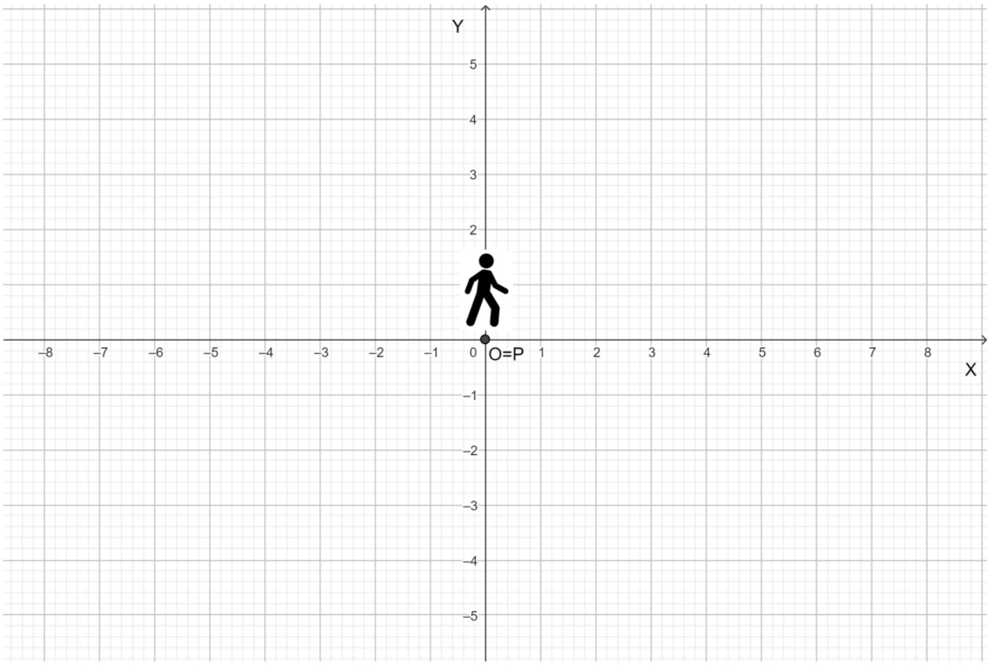
Figura 24. Direção Leste-Oeste.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na terceira possibilidade, P coincide com O. Neste caso, entende-se que não houve nem avanço e nem recuo a partir de O e identifica-se P com o número zero.

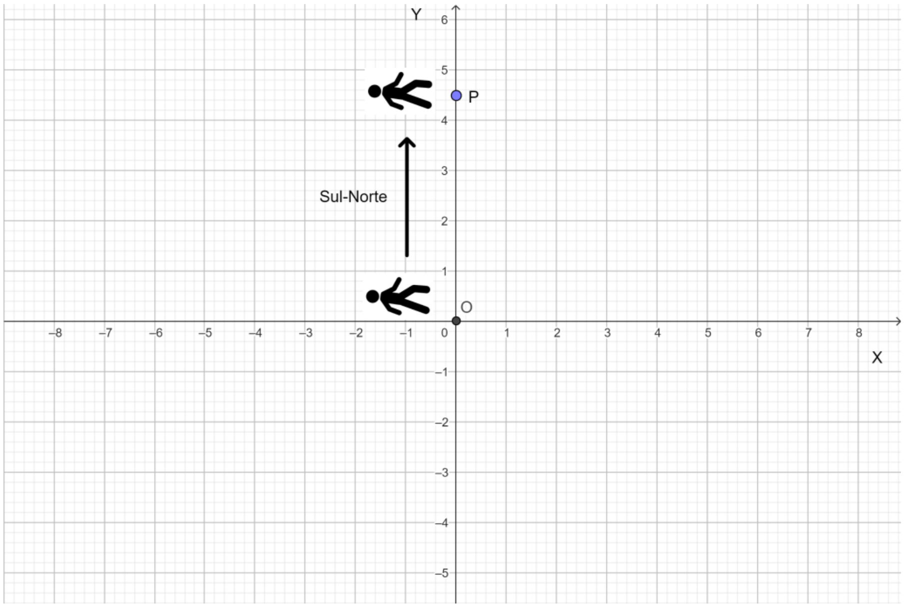
Figura 25. P coincide com O.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

O número real associado a P em qualquer dos casos descritos acima chama-se abscissa correspondente a P. Dado um ponto P na reta OY, temos três possibilidades: na primeira, P está a norte do eixo OX. Neste caso, a distância y de O até P é pensada como avanço em OY a partir de O e identifica-se P com y, conforme figura 24:

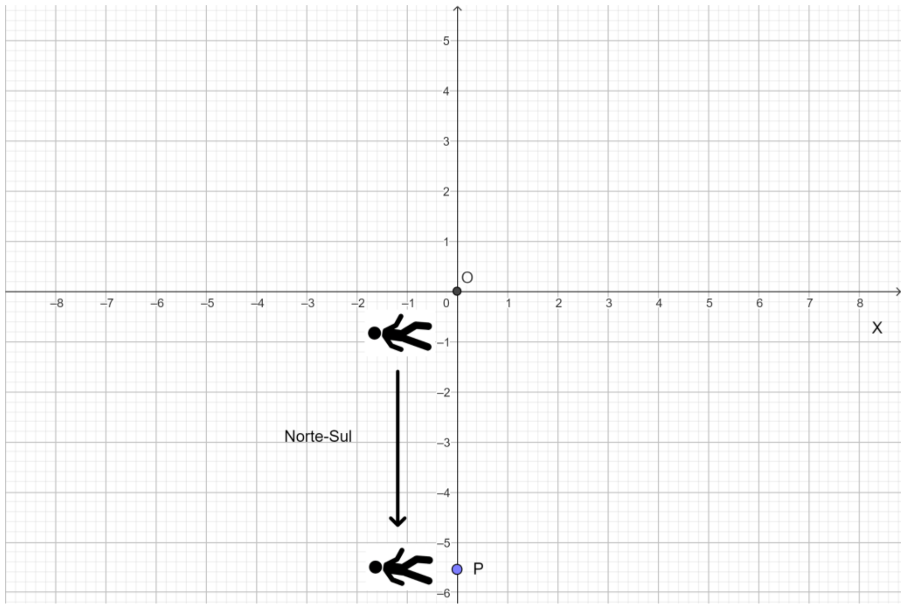
Figura 26. Direção Sul-Norte.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na segunda possibilidade, P está a sul do eixo OX. Neste caso, a distância y de O até P é pensada como recuo em OY a partir de O e identifica-se P com -y.

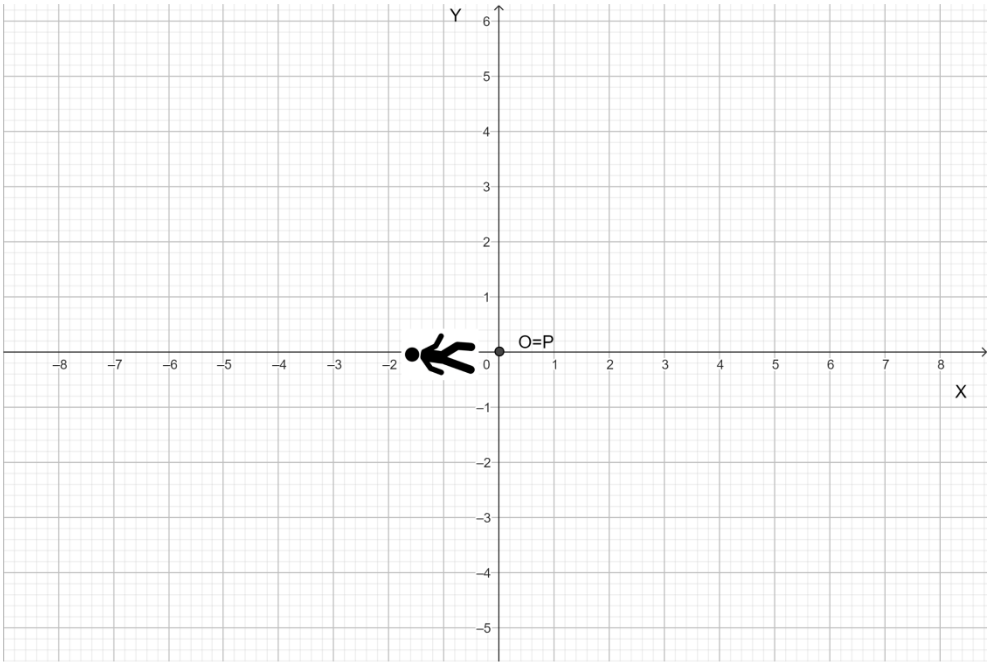
Figura 27. Direção Norte-Sul.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na terceira possibilidade, P coincide com O. Neste caso, entende-se que não houve nem avanço e nem recuo a partir de O e identifica-se P com o número zero.

Figura 28. P coincide com O.

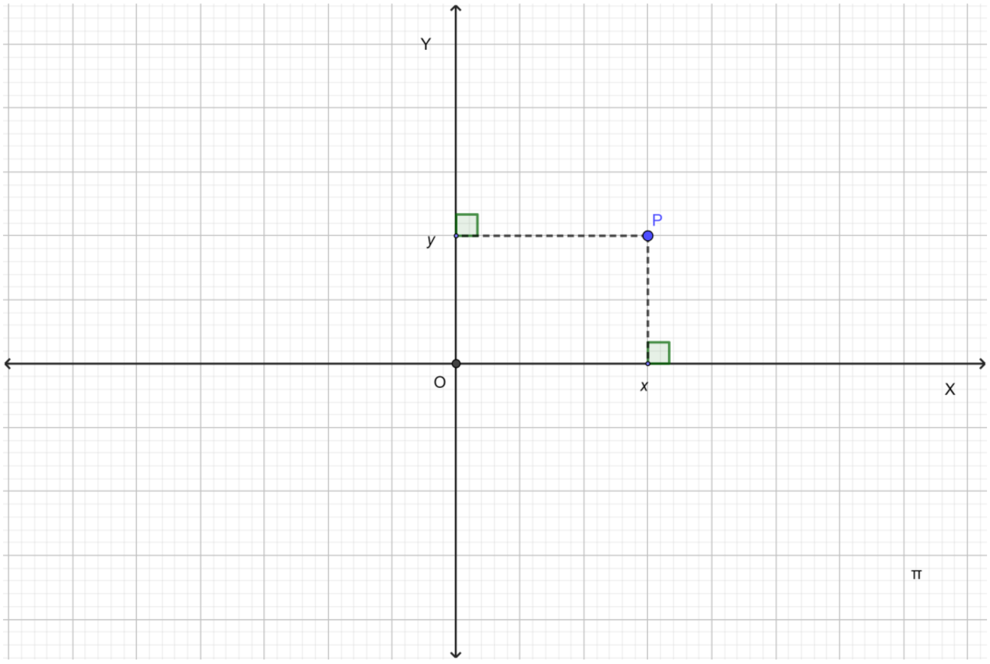


Fonte: NASCIMENTO (2023).

A partir dos conceitos de abscissa e ordenada, pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x\,, y \ \in \ \mathbb{R}\}$.

Em geral um ponto $P \in \pi$ corresponde ao par ordenado (x, y), onde x é a abscissa do ponto de intersecção entre o eixo OX e a reta perpendicular a ele que passa por P. De forma análoga y é a ordenada de intersecção entre o eixo OY e a reta perpendicular a ele que passa por P, como mostra a figura 27.

Figura 29. Gráfico Cartesiano.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associa-se o ponto P do plano π dado pela interseção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto desse eixo de coordenada x com a perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto desse eixo de coordenada y.

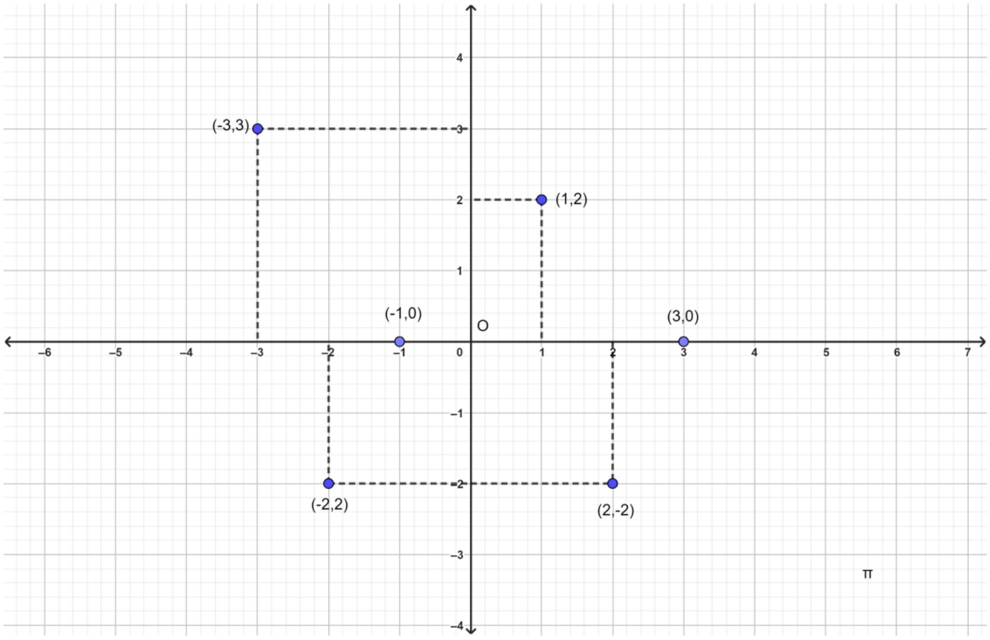
Sabendo-se que $(x, y) = (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$ se e somente se $x = x'$ e $y = y'$, é simples verificar que a correspondência ponto do plano $\pi \leftrightarrow$ par ordenado de $\mathbb{R}^2$ é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca.

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são também chamadas as coordenadas cartesianas do ponto P: x é a abscissa ou primeira coordenada de P e y é a ordenada ou segunda coordenada de P.

Notação: se $P \in \pi$ corresponde a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (x, y)$.

De acordo com a figura 28, ilustrou-se alguns pontos localizados no plano π com suas coordenadas em relação ao sistema XOY.

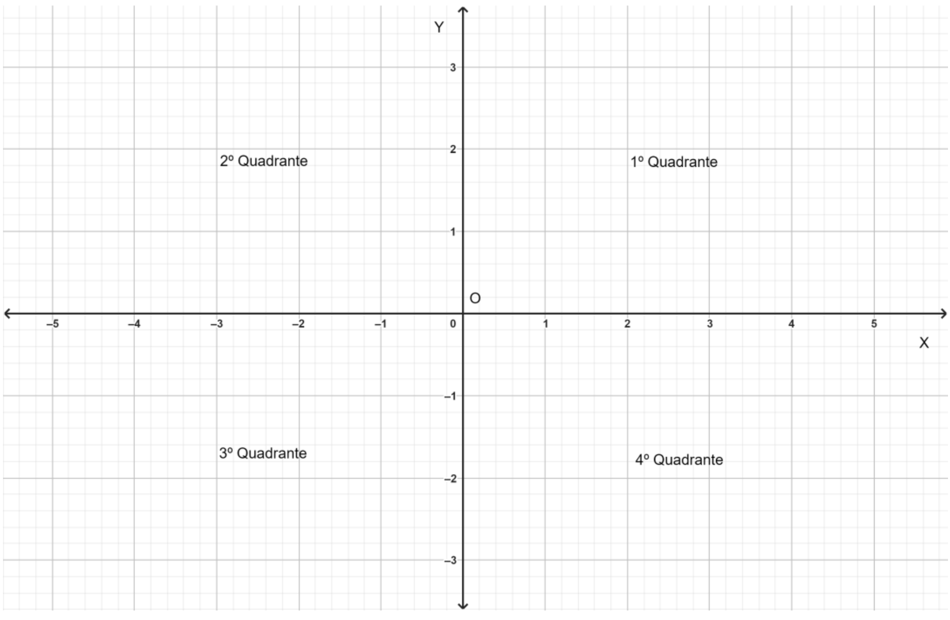
Figura 30. Pontos no plano π.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas quadrantes e enumeradas conforme figura 29. Observa-se que os pontos do eixo *OX* têm coordenadas (*x*, *0*), os pontos do eixo *OY* têm coordenadas (*0*, *y*) e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

Figura 31. Quadrantes do sistema XOY.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

1º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y > 0\}$;

2º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y > 0\}$;

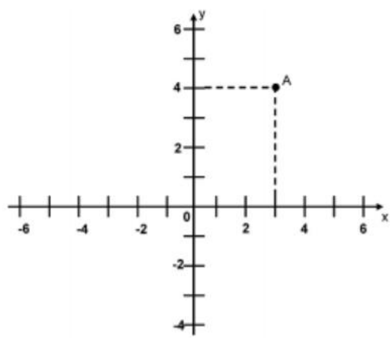
3º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y < 0\}$;

4º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y < 0\}$.

Para mais informações sobre plano cartesiano, ler o texto do Delgado; Frensel e Crissaf (2017). Será analisado alguns exemplos de questões de avaliações de larga escala, que envolvem localização de pontos no Plano Cartesiano, mas para isso, deve-se compreender o que são essas avaliações, pois as mesmas são aplicadas em níveis Nacional e Estadual. As avaliações de larga escala são fundamentais para saber a proficiência dos estudantes, e assim ter resultados que irão desenvolver as ações propostas em sala de aula.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é uma prova na qual os estudantes são avaliados a cada dois anos de modo a ter um diagnóstico nacional de como está o nível de aprendizagem dos estudantes. Essa prova é constituída de questões de Português e Matemática (Brasil, 2021). O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (Saepe), foi criado em 2000, é uma prova a nível estadual, constituída de questões que envolvem Português e Matemática, é anual e busca saber o nível de proficiência de cada estudante nas disciplinas que são cobradas (Saepe, 2023). Abaixo, alguns exemplos de questões de larga escala.

Exemplo 3. SAEB (2009) A figura abaixo mostra um ponto de um plano cartesiano:



As coordenadas do ponto A, são:

a) (6, 6)
b) (-3, 4)

c) (3, 4)

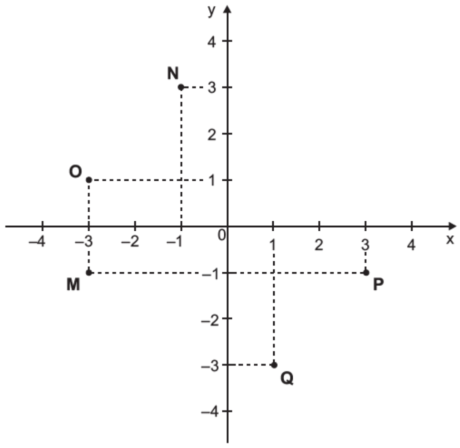
d) (3, 7)

e) (4, 5)

Solução:

Por meio de análise do plano cartesiano, percebe-se que as coordenadas do ponto A são (3, 4). Alternativa c).

Exemplo 4. SAEPE (2015) Observe os pontos no plano cartesiano abaixo:



Qual desses pontos representa o par ordenado (-3, 1)?

a) M

b) N

c) O

d) P

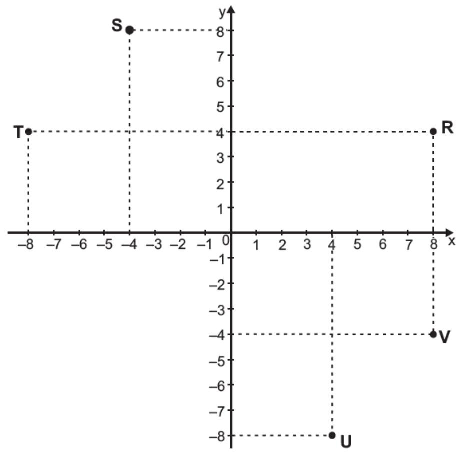
e) Q

Solução:

Por meio da análise do plano cartesiano, percebe-se que o par ordenado (-3, 1) corresponde ao ponto O.

Alternativa c).

Exemplo 5. SAEPE (2022) Considere os pontos R, S, T, U e V, representados no plano cartesiano abaixo:



Qual desses pontos possui abscissa 8 e ordenada -4?

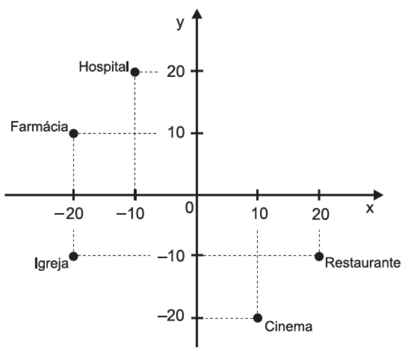
a) R
b) S
c) T
d) U
e) V

Solução:

Por meio da análise do plano cartesiano, percebe-se que o par ordenado (8, -4) corresponde ao ponto V.

Alternativa e).

Exemplo 6. SAEPE (2021) O plano cartesiano abaixo representa parte do mapa de uma cidade em que os estabelecimentos estão associados a pontos desse plano.



Qual estabelecimento dessa cidade está associado ao ponto de coordenadas (-20, -10)?

a) Cinema.
b) Farmácia.
c) Hospital.

d) Igreja.

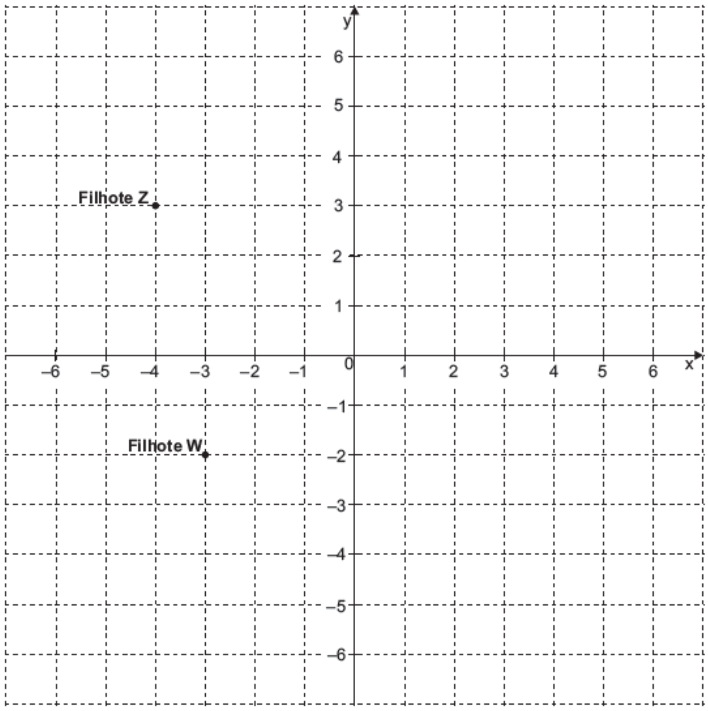
e) Restaurante.

Solução:

Por meio do plano cartesiano, percebem-se que o estabelecimento de coordenadas (-20, -10), é a igreja.

Alternativa d).

Exemplo 7. SAEPE (2017) Uma organização que protege animais silvestres colocou um dispositivo de localização em dois filhotes, permitindo, assim, acompanhá-los. No desenho abaixo está representada a localização desses dois filhotes pelos pontos Z e W.



Os pares ordenados que representam a localização dos filhotes Z e W são, respectivamente:

a) (-4, -3) e (3, -2)

b) (-4, 3) e (-3, -2)

c) (3, -4) e (-3, -2)

d) (3, -4) e (-2, -3)

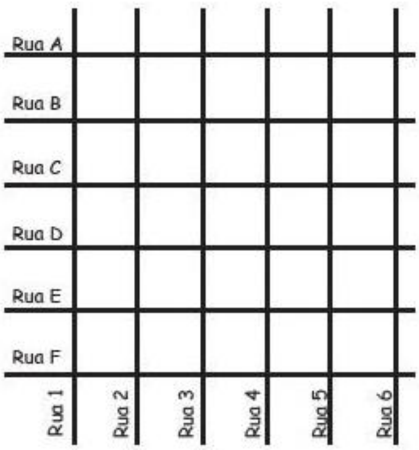
e) (4, 3) e (3, 2)

Solução:

Por meio do plano cartesiano, percebe-se que os pares ordenados que representam a localização dos filhotes Z e W são (-4, 3) e (-3, -2).

Alternativa b).

Exemplo 8. Enem - Questão 142 – 1ª Azul (2016) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.
b) 4 e C.
c) 4 e D.
d) 4 e E.
e) 5 e C.

Solução:

Conforme as localizações dos pontos, pode-se ver que o local que a mãe trabalha e o consultório do pai se localizam na rua E, o que implicará a localização na rua 4, que é a

mediatriz dos pontos indicados e deixam os caminhos equidistantes, logo o ponto será localizado na rua 4 com a rua E, mas para ficarem com a mesma distância é necessário subir para a rua 4 com a rua D, que atendem as pretensões da família.
Alternativa c).

É evidente que essas questões ilustram a aplicação e relevância da localização de pontos no gráfico cartesiano, uma habilidade fundamental para professores e estudantes em suas atividades do cotidiano. O uso do GeoGebra pode aprimorar significativamente a compreensão desse tema. Com esses conceitos em mente, podemos avançar para o estudo da fórmula da área de polígonos como função dos vértices, como será abordado na próxima seção.

Etapa 3: Áreas de polígonos como função dos vértices

Objetivos: Apresentar uma fórmula geral para o cálculo da área de um polígono como função dos seus vértices e aplicá-la para demonstrar algumas fórmulas clásicas e para responder a questões relativas ao cálculo de área de polígonos. Utilizar o GeoGebra para modelar polígonos no gráfico cartesiano.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), as atividades desenvolvidas nesta etapa contribuem para o desenvolvimento das habilidades detalhadas no seguinte quadro:

Quadro 3. Habilidades de geometria da BNCC.

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Grandezas e medidas	Área de figuras planas	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Geometria	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Local: Sala de aula.

Organização dos estudantes: Dupla.

Recursos e/ou materiais utilizados: Quadro branco, pincel, caderno, lápis, borracha e caneta.

Desenvolvimento: No primeiro deste três encontros, após um breve discussão sobre a invariância da área de figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), será apresentado a fórmula mencionada em (Lima, 2014). Em seguida, no quadro branco, será esclarecida a maneira como ela utiliza os vértices do polígono. No segundo encontro, aplicamos esta fórmula para demonstrar as fórmulas clássicas para o cálculo de área de alguns polígonos específicos (retângulos, triângulos, trapézios). A aula 3 é dedicada à solução de problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área.

Em Lima (2014), é provado que dado um polígono de n lados, com $n \geq 3$, conforme figura 30 e cujo os vértices são P_1, P_2, P_3, ..., P_n enumerados considerando o percurso da poligonal no sentido anti-horário, portanto a área é dada por:

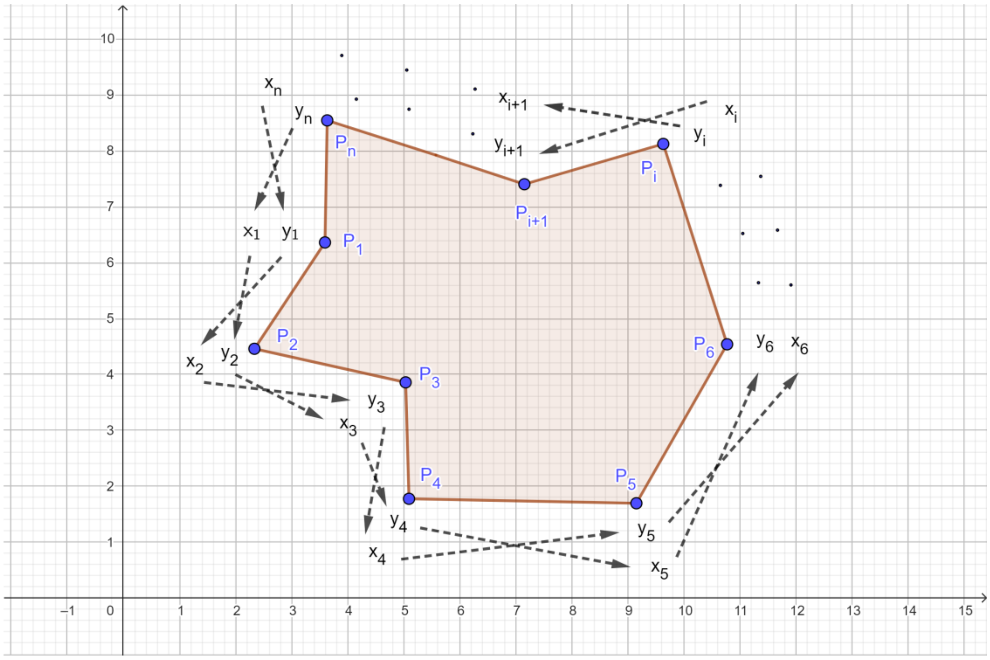
$$\text{(*)} \quad \mathrm{a}(\wp) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n)\right].$$

Neste trabalho, considera-se, $P_{n+1}(x_{n+1,} y_{n+1}) = P_1(x_{1,} y_1)$ e apresenta-se (*) na forma: $a(\wp) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} y_i\right]$, podendo colocar o somatório em evidência, então têm-se:

$$a(\wp) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right].$$

Uma forma de visualizar como as coordenadas dos pontos se comportam na operação é a forma mostrada na figura 30, como segue na sequência:

Figura 32. Polígono de n lados.



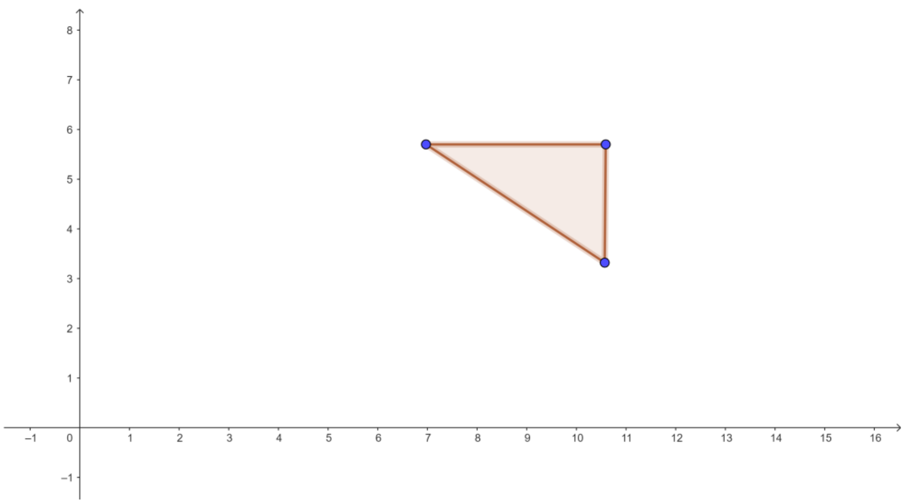
Fonte: NASCIMENTO (2023).

Pode-se aplicar essa fórmula da áreas de polígonos como função dos vértices e fazer deduções das fórmulas clássicas de polígonos, observa-se como se comportam.

Área do Triângulo

Observa-se o triângulo que segue:

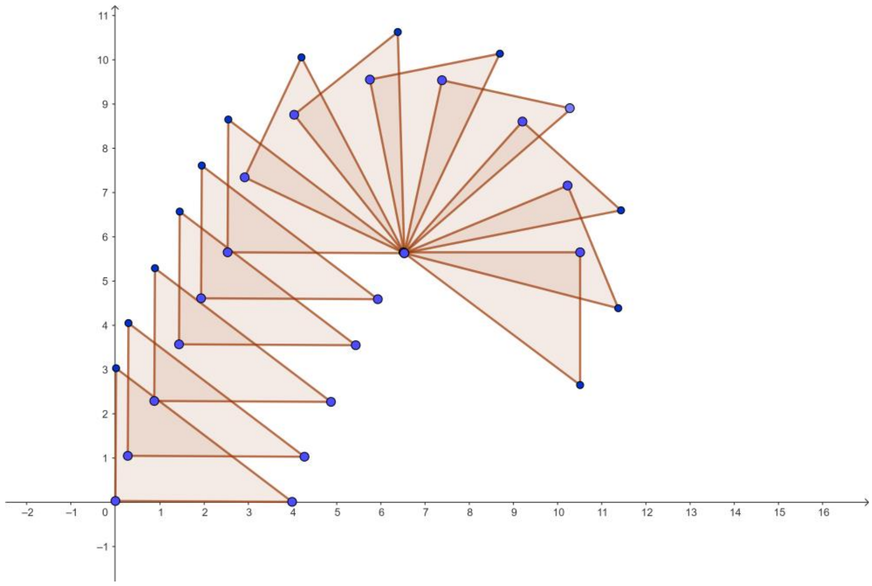
Figura 17. Triângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Agora rotaciona-se e translada-se o triângulo de modo a ficar centralizado com o gráfico cartesiano. Vê-se a figura que segue.

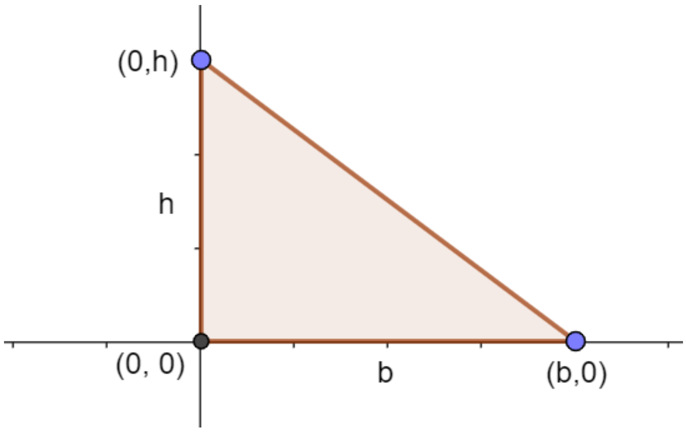
Figura 34. Rotação e Translação de um triângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao localizar o triângulo no gráfico cartesiano, têm-se a figura 33:

Figura 35. Área do triângulo.



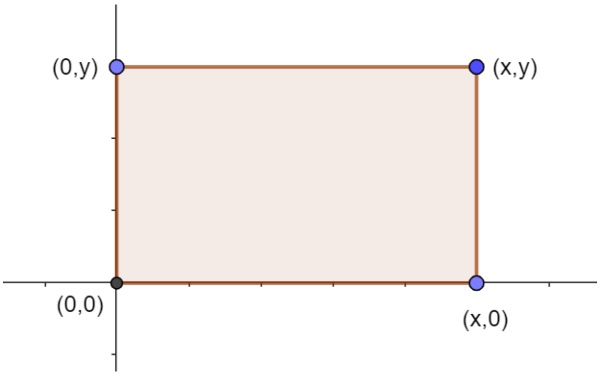
Fonte: GEOGEBRA (2023).

$$S_T = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - b \cdot 0) + (b \cdot h - 0 \cdot 0) + (0 \cdot 0 - 0 \cdot h)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[b \cdot h]$$

Área do retângulo

Figura 36. Área do retângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

$$S_R = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - x \cdot 0) + (x \cdot y - x \cdot 0) + (x \cdot y - 0 \cdot y) + (0 \cdot 0 - 0 \cdot y)]$$

$$S_R = \frac{1}{2}[(x \cdot y) + (x \cdot y)]$$

$$S_R = \frac{1}{2}[2(x \cdot y)]$$

$$S_R = [x \cdot y]$$

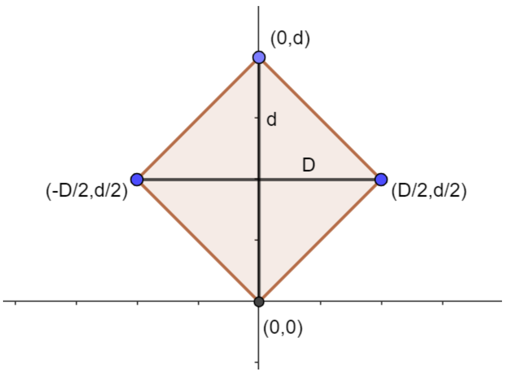
No caso particular do retângulo em que os lados são iguais, correspondendo a um quadrado, pode-se chamá-los de l, portanto, têm-se que $x = y = l$, portanto a área correspondente ao quadrado é:

$$S_Q = [l \cdot l]$$

$$S_Q = l^2$$

Área do Losango

Figura 37. Área do losango.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

$$S_L = \frac{1}{2}[\left(0 \cdot \frac{d}{2} - \frac{D}{2} \cdot 0\right) + \left(\frac{D}{2} \cdot d - 0 \cdot \frac{d}{2}\right) + \left(0 \cdot \frac{d}{2} - \left(-\frac{D}{2} \cdot d\right)\right) + \left(-\frac{D}{2} \cdot 0 - 0 \cdot \frac{d}{2}\right)]$$

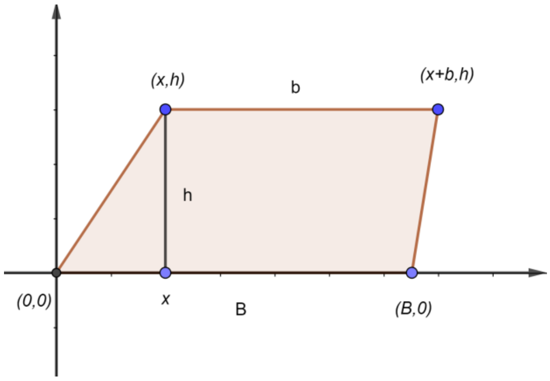
$$S_L = \frac{1}{2}[\left(d \cdot \frac{D}{2}\right) + \left(d \cdot \frac{D}{2}\right)]$$

$$S_L = \frac{1}{2}[\left(2d \cdot \frac{D}{2}\right)]$$

$$S_L = [d \cdot \frac{D}{2}]$$

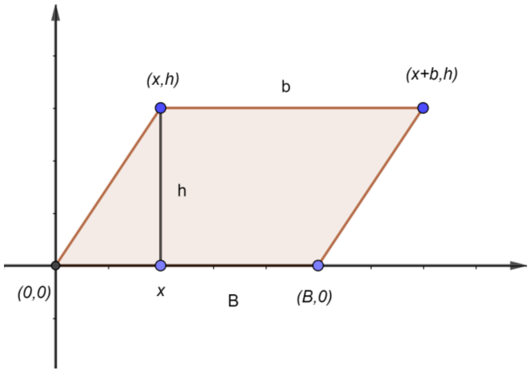
Área do Trapézio de altura *h* e bases *B* e *b*.

Figura 38. Área do trapézio.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Figura 39. Área do Paralelogramo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

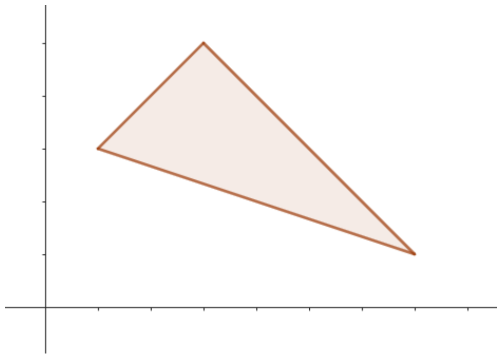
$$S_T = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - B \cdot 0) + (B \cdot h - (x+b) \cdot 0) + ((x+b) \cdot h - x \cdot h) + (x \cdot 0 - 0 \cdot h)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[(B \cdot h + b \cdot h)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[B + b] \cdot h$$

No caso particular em que $B = b$, o trapézio é um paralelogramo (figura 37) e sua área é igual a $B.b$. Dessa forma pode-se aplicar a fórmula das áreas de polígonos como função dos vértices em exemplos de questões que envolvem cálculo de áreas de polígonos clássicos.

Exemplo 9. Autor (2023). Observando o triângulo que segue, calcule a área em metros quadrados, dados os vértices A (3,5), B (1,3), C (7,1).



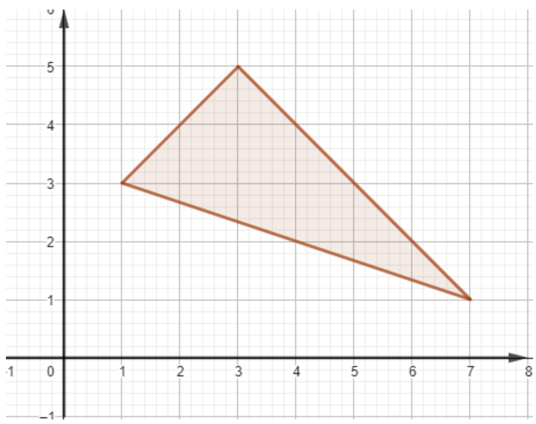
Fonte: GEOGEBRA (2023).

a) 2
b) 5,66
c) 2,83
d) 8
e) 9

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, vide figura 38:

Figura 40. Triângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_T = \frac{1}{2}[(3 \cdot 3 - 1 \cdot 5) + (1 \cdot 1 - 7 \cdot 3) + (7 \cdot 5 - 3 \cdot 1)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[4 + (-20) + (32)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[16]$$

$$S_T = 8$$

Portanto, $S_T = 8\, m^2$ ■

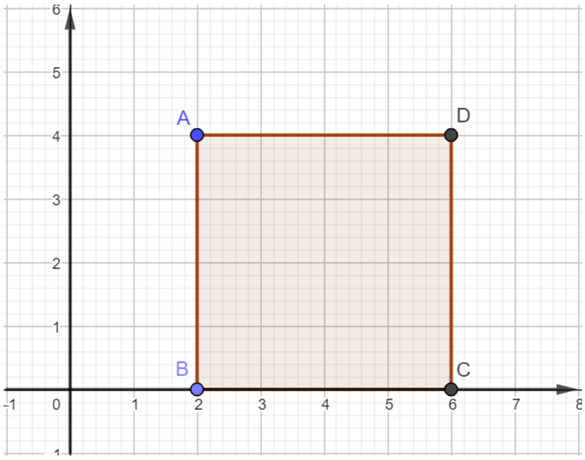
Exemplo 10. Autor (2023). Uma loja será construída em um terreno quadrado, na escala de 1:100, ou seja, cada um centímetro no papel corresponde a 1 metro no real. Calcule a área dessa loja de vértices A (2,4), B (2,0), C (6,0), D (6,4), em metros quadrados.

a) 10
b) 16
c) 20
d) 24
e) 30

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, vide figura 39.

Figura 41. Quadrado.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_Q = \frac{1}{2}[(2 \cdot 0 - 2 \cdot 4) + (2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) + (6 \cdot 4 - 6 \cdot 0) + (6 \cdot 4 - 4 \cdot 2)]$$

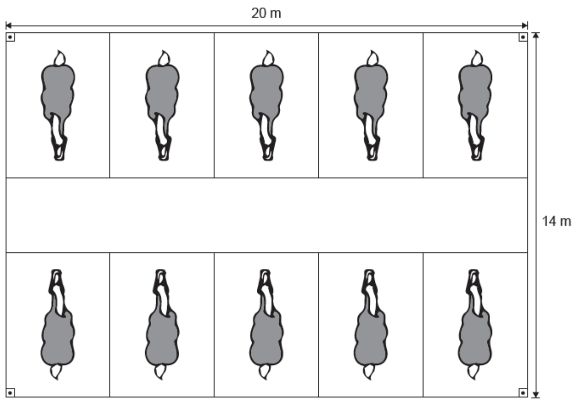
$$S_Q = \frac{1}{2}[(-8) + (24) + (16)]$$

$$S_Q = \frac{1}{2}[32]$$

$$S_Q = 16$$

Portanto, $S_Q = 16 \text{ m}^2$ ■

Exemplo 11. SAEPE (2018). Observe, no desenho abaixo, o esquema de um estábulo que foi construído para acomodar dez cavalos.



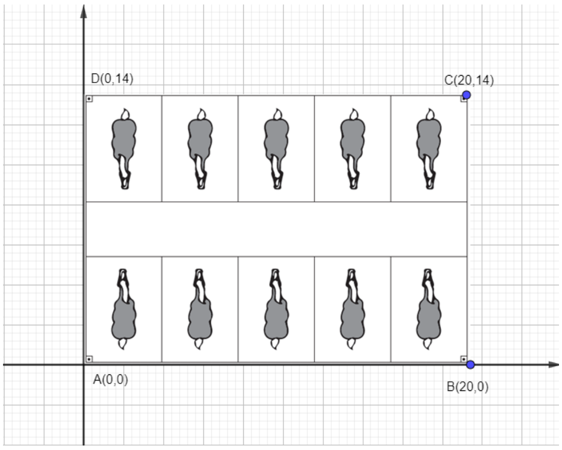
Qual a medida da área ocupada por esse estábulo?

a) 960 m^2
b) 280 m^2
c) 140 m^2
d) 68 m^2
e) 34 m^2

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, como na figura 40:

Figura 42. Retângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_R = \frac{1}{2}[(20 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + (20 \cdot 14 - 20 \cdot 0) + (20 \cdot 14 - 0 \cdot 14) + (0 \cdot 0 - 14 \cdot 0)]$$

$$S_R = \frac{1}{2}[280 + 280]$$

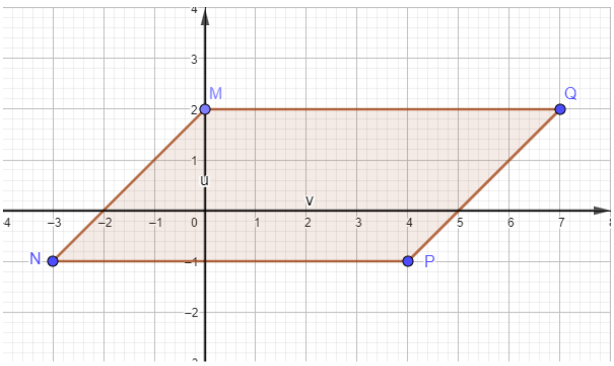
$$S_R = \frac{1}{2}[560]$$

$$S_R = 280$$

Portanto, $S_R = 280 \text{ m}^2$ ■

Exemplo 12. Autor (2023). Observe o paralelogramo MNPQ desenhado no plano cartesiano, determine a área dessa figura de acordo com as coordenadas dos vértices, como na figura 41 abaixo:

Figura 43. Paralelogramo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Solução:

Aplicando a Fórmula, têm-se:

$$S_P = \frac{1}{2}[(0 \cdot (-1) - (-3) \cdot 2) + (-3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1)) + (4 \cdot 2 - 7 \cdot (-1)) + (7 \cdot 2 - 2 \cdot 0)]$$

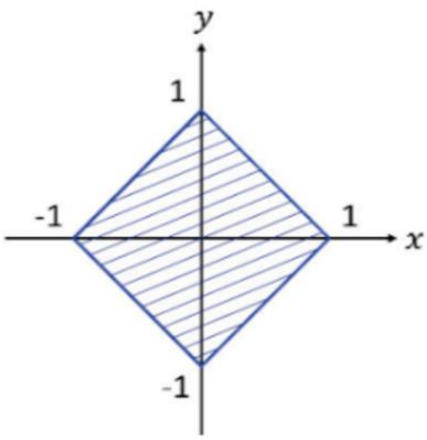
$$S_P = \frac{1}{2}[6 + 7 + 15 + 14]$$

$$S_P = \frac{1}{2}[42]$$

$$S_P = 21$$

Portanto, $S_P = 21$ ■

Exemplo 13. Fuvest (2023) – Adaptada. Considere a região do plano cartesiano A = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: $|x| + |y| \leq 1$} esboçada na figura.



A área delimitada pela inequação modular é:

a) 1 u.a.
b) 2 u.a.
c) 3 u.a.
d) 4 u.a.
e) 5 u.a.

Solução:

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_L = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1) + (-1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0) + (0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)]$$

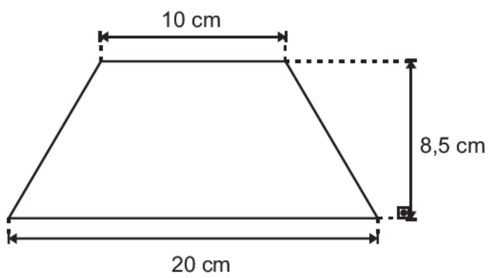
$$S_L = \frac{1}{2}[1 + 1 + 1 + 1]$$

$$S_L = \frac{1}{2}[4]$$

$$S_L = 2$$

Portanto, $S_L = 2 \text{ u.a.}$ ∎

Exemplo 14. SAEPE (2022). Juliana comprou ladrilhos, que possuem o formato de um trapézio, para revestir parte de parede do seu banheiro. Na figura abaixo está representado um desses ladrilhos com algumas medidas indicadas.



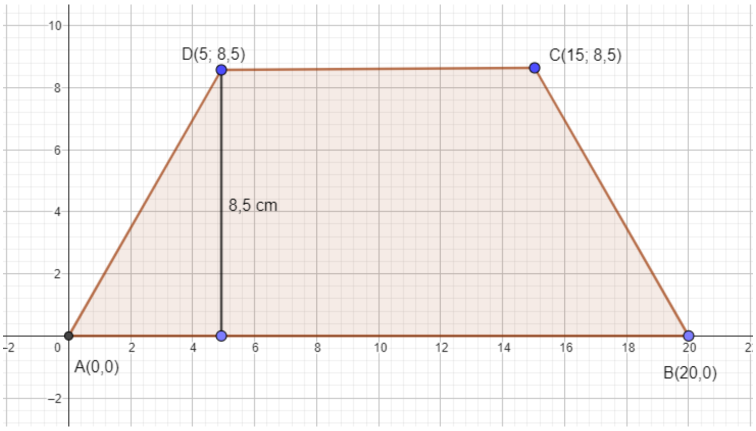
Qual é a medida da área, em centímetros quadrados, ocupada por um desses ladrilhos na parede do banheiro de Juliana?

a) 38,5
b) 127,5
c) 170,0
d) 255,0
e) 1700,0

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, como na figura 42:

Figura 18. Trapézio.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se

$$S_T = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - 20 \cdot 0) + (20 \cdot 8{,}5 - 15 \cdot 0) + (15 \cdot 8{,}5 - 5 \cdot 8{,}5) + (0 \cdot 8{,}5 - 0 \cdot 8{,}5)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[170 + 85]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[225]$$

$$S_T = 127{,}5$$

Portanto, $S_T = 127{,}5$ cm^2 ■

Pode-se perceber, por meio desses exemplos, que a fórmula da área de polígonos como função dos vértices é aplicável e serve como estímulo para os estudantes abordarem questões de larga escala. O uso do GeoGebra possibilita a visualização das figuras, enquanto a fórmula em si permite o cálculo de uma variedade de polígonos. Uma abordagem organizada e sistematizada para aplicar o cálculo de áreas de polígonos é por meio de uma sequência didática que será detalhada na próxima seção.

Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio das atividades propostas, registros dos estudantes e participação nas aulas, verificando se os estudantes estão aptos a:

- Manipular o Software GeoGebra para construção e cálculo de áreas de polígonos e polígonos regulares;
- Reconhecer a localização de pontos no plano cartesiano;
- Conhecer a fórmula de Áreas de polígonos como função dos vértices;
- Aplicar a fórmula de áreas de polígonos como função dos vértices em questões diversas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)**. Resumo Técnico: Censo Escolar da Educação Básica 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

DELGADO, Jorge. FRENSEL, Katia. CRISSAF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** – Rio de Janeiro: SBM, 2017.

GEOGEBRA. Disponível em: **https://pt.apkshki.com/app/geogebra-classic**. Acesso em: 20 set. 2023.

GEOGEBRA. Disponível em: **https://www.geogebra.org**. Acesso em: 10 set. 2023.

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Euclidiana plana. Um estudo com o software GeoGebra.** Maringá: Eduem, 2010.

LAMAS, Rita de Cássia Pavan. MENDES, Ijosiel. **GeoGebra: animações geométricas**/– 1. ed. – Curitiba: Appris, 2017.

LIMA, Elielson Magalhães. **Uma fórmula para a área de um polígono como função dos vértices**: Maceió, p. 51. 2014.

NASCIMENTO, Fernando Lopes do. Disponível em: **https://www.geogebra.org/u/fernanloppes1**. Acesso em: 19 fev. 2024.

SAEPE. Disponível em: **https://institucional.caeddigital.net/projetos/saepe-pe.html.** Acesso em: 20 set. 2023.

UEMA. Disponível em: **https://www.paes.uema.br/wp-content/uploads/2019/11/9-MATEMÁTICA-P2020.pdf.** Acesso em: 30 dez. 2023.

UFG. Disponível em: **https://centrodeselecao.ufg.br/ps2005/pa051fase.html.** Acesso em 30 dez. 2023.