Classificação de Cônicas em $\mathbb{R}^2$ através de Matrizes

Weslley Marinho Lozório (UNILAB) e Paulo Cesar Ferreira Viana (SEDUC CE) e Daniel Angelo dos Santos Ribeiro (SEDUC CE)

1 Introdução

Este recurso educacional é um resultado da dissertação de mestrado de Paulo Cesar Ferreira Viana, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira (PROFMAT-UNILAB). A dissertação, intitulada "Sistema Massa-Mola e suas Propriedades: um Estudo Analítico via Álgebra Linear", foi orientada pelo Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório e aprovada em 10 de agosto de 2023.

A Dissertação supracitada buscou apresentar uma justificativa matricial para a modelagem e classificação do problema do oscilador harmônico simples no caso em que o sistema possui apenas uma mola.

Além de oportunizar boa compreensão aos discentes, a partir do 2º ano do Ensino Médio, deste problema físico, aquele trabalho também visou motivar o Estudo de Matrizes nos Níveis Básicos, ao apresentar justificativa de algo cuja beleza e relevância são evidentes, através de ferramentas matemáticas normalmente estudadas no Ensino Médio, porém sistematicamente preteridas.

No presente recurso educacional com a colaboração de Daniel Angelo dos Santos Ribeiro, discente do PROFMAT-UNILAB, utilizaremos a principal ferramenta da Dissertação: a diagonalização de Matrizes, especialmente o caso de matrizes simétricas, na contrução de um Algoritmo que classifique Cônicas do Plano $\mathbb{R}^2$, através da determinação de um sistema de coordenadas conveniente.

2 Procedimento geral para a classificação de cônicas, via matrizes

Nesse trabalho estamos interessados em apresentar um método matricial para classificar Cônicas de $\mathbb{R}^2$ cuja equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

apresenta produto misto, ou seja, $B \neq 0$.

2.1 Passo 1: Transferência da Equação para o contexto matricial

A Equação (1) deve ser identificada matricialmente por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 \tag{2}$$

OBS. : Tal passagem deve receber atenção especial, visto que é natural ser o primeiro contato dos discentes com esse procedimento. É aconselhavel, inclusive, que o docente solicite realizarem a multiplicação de matrizes para verificar que a forma matricial é equivalente a forma inicial.

2.2 Passo 2: Diagonalização da Matriz quadrada associada

Observamos que a Matriz $M = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$ é simétrica e, por conseguinte, o Conceito de diagonalização de Operadores garante a existência de matrizes quadradas (e de mesma ordem) P ortogonal e Q diagonal tais que

$$M = PDP^t. \tag{3}$$

A matriz Q admite a expressão

$$Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \tag{4}$$

sendo λ_1 e λ_2 as raizes (reais) do polinômio $p(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}M)\lambda + \det M$.

De outro lado, a matriz P pode ser escrita como

$$P = [v_1\ v_2]\,, \tag{5}$$

sendo v_i uma solução do sistema linear

$$MX = \lambda_i X, \tag{6}$$

tal que $|v_i| = 1,\ i = 1{,}2$.

OBS. :
(a) O Polinômio $p(\lambda)$ é comumente chamado de Polinômio Característico de M;
(b) Vale à pena ressaltar que v_1 e v_2 na identidade (5) estão dispostos como colunas de P;
(c) Diz-se que v_i é $autovetor$ associado ao $autovalor$ λ_i , $i = 1{,}2$;
(d) A sequência $\beta = \{v_1,v_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ chamada de base ortonormal de autovetores de M;
(e) Na verdade, P é a matriz de mudança da base canônica de $\mathbb{R}^2$ para a base β e, geralmente, denotada por $P = [I]^{\beta}_{can}$.

2.3 Passo 3: Retorno à Equação da Cônica, sem o produto misto

Substituindo a expressão de M apresentada em (3) na equação (2) obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0, \tag{7}$$

sendo $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Por fim, ao substituir as expressões (4) e (5) na equação (7) e realizar os produtos de matrizes indicados, obtemos a Equação

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + Gx_1 + Hy_1 + F = 0. \tag{8}$$

OBS. : Após completamento de quadrados em (8), se necessário, já é possível identificar a Cônica inicial através de uma equação padrão, noutro sistema de coordenadas, determinado pela base de autovetores β.

3 Exemplo Prático do Método

O objetivo dessa sessão é materializar o método apresentado acima, através da classificação da Cônica

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 32 = 0. \tag{9}$$

Com efeito, a Equação (9) identifica-se com

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 32 = 0$$

Daí, $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, e portanto, $\mathrm{tr}M = 6$ e $\det M = 8$, de modo que

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Dessa forma, os autovalores de M são: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

Agora, resolvendo os sistemas indicados em (6), segue que os autovetores unitários associados, respectivamente, a λ_1 e λ_2 podem ser

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Consequentemente,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

e, à luz da Equação (8), a Cônica em (9) admite a seguinte expressão, nas Coordenadas advindas da Base de Autovetores:

$$4x_1^2 + 2y_1^2 - 32 = 0$$

Sem muita dificuldade, tem-se que essa equação é equivalente a

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{16} = 1,$$

evidenciando que a Cônica em questão é uma Elípse.