Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Leonardo Bueno da Silva

Instruções Iniciais para o Uso das Recorrências no Ensino Básico

Recurso educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Profa. Gilcélia Regiane de Souza - UFSJ (Orientadora)

Prof. Marcelo Oliveira Veloso - UFSJ (Coorientador)

Prof. Maurício Reis e Silva Júnior - UFSJ

Prof. Rogério Casagrande - UFJF

Ouro Branco
Dezembro 2024

Instruções Iniciais para o Uso das Recorrências no Ensino Básico

Aluno: Leonardo Bueno da Silva [1]
Orientadora: Gilcélia Regiane De Souza [2]
Coorientador: Marcelo Oliveira Veloso [3]

Resumo:

Neste Recurso Educacional mostramos como é possível inserir o estudo das recorrências no ensino médio. Destacamos a importância de apresentar as recorrências em parceria com outros temas conhecidos da matemática, por exemplo, podemos utilizar a resolução por recorrência em diversos problemas algébricos e geométricos. O estudo das recorrências está relacionado diretamente com o estudo das sequências numéricas e uma aplicação bem interessante do método recursivo é o seu uso no processo de dedução de fórmulas matemáticas. Para conhecer mais sobre as recorrências e associá-las diretamente com o ensino da matemática básica, elaboramos um guia de como obter materiais didáticos sobre as recorrências e apresentamos algumas atividades propostas, detalhando o método recursivo, que envolveram as Progressões, os Polígonos Geométricos e a Matemática Financeira.

Palavras-chave: recorrências; sequências; ensino básico.

Abstract:

In this Educational Resource, we show how it is possible to include the study of recurrences in high school. We emphasize the importance of presenting recurrences in partnership with other well-known mathematical topics. For example, we can use recurrence resolution in various algebraic and geometric problems. The study of recurrences is directly related to the study of numerical sequences, and a very interesting application of the recursive method is its use in the process of deducing mathematical formulas. To learn more about recurrences and associate them directly with the teaching of basic mathematics, we have prepared a guide on how to obtain teaching materials on recurrences and present some proposed activities, detailing the recursive method, which involved Progressions, Geometric Polygons, and Financial Mathematics.

Keywords: recurrences; sequences; basic education.

[1] Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2022, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP),
leonardo.bueno@educacao.mg.gov.br

[2] Professora Orientadora, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ,
gilcelia@ufsj.edu.br

[3] Professor Coorientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ,
veloso@ufsj.edu.br

Recurso Educacional

A recorrência é uma regra, um modelo matemático, que permite calcular um termo qualquer de uma sequência numérica em função dos seus termos anteriores, o uso do método recursivo pode ser uma alternativa interessante e uma ferramenta complementar para resolver inúmeros problemas da matemática, conhecendo mais sobre as recorrências e de acordo com a criatividade de cada professor, é possível introduzi-las em diversas situações do dia a dia da sala de aula, nesse Recurso Educacional utilizamos as Progressões, a Geometria Plana e a Matemática Financeira.

Para inserir o estudo das recorrências no ensino médio, os professores devem estar atentos para os seguintes detalhes:

- Antes de abordar as recorrências no ensino básico, devemos reforçar alguns pré-requisitos com os alunos, por exemplo, frações, cálculo algébrico, resoluções de equações, sequências numéricas, tipos de retas, tipos de ângulos, figuras geométricas e outros temas de acordo com a necessidade de cada professor.
- Para definir uma sequência numérica utilizando recorrência, precisamos conhecer a sua lei de formação e de um ponto de partida, geralmente o primeiro ou os dois primeiros números da sequência, a lei de formação é a regra que estabelece a formação dos termos dessa sequência.
- Quando a lei de formação de uma sequência pode ser descrita por uma equação, temos uma sequência recursiva, nem sempre a lei de formação é fornecida nos enunciados, portanto precisamos identificar a lei de formação, procurando padrões que permitirão elaborar equações, para serem usadas ao longo das resoluções. Um bom exemplo do que estamos falando se vê na Geometria (DOLCE; POMPEO, 1993), quando obtemos os primeiros valores das sequências de forma intuitiva, através de desenhos geométricos que permitirão identificar a lei de formação, essa estratégia pode ser melhor vista na atividade proposta 2 (Aplicação das Recorrências na Geometria), onde utilizamos a sequência dos primeiros polígonos geométricos como base.
- Quando temos a lei de formação de uma sequência descrita por uma equação e o seu termo inicial, temos a sua representação na forma recursiva, mas apenas com a forma recursiva ainda não é possível obter diretamente um termo qualquer sem conhecer os antecessores, chegando na fórmula fechada, a fórmula fechada é a solução da recorrência.
- As progressões aritméticas e as progressões geométricas são exemplos de recorrências (IEZZI; HAZZAN, 2004), podemos calcular a soma dos termos de uma P.A. utilizando a resolução por recorrência. Na geometria, podemos por exemplo, determinar o número de diagonais ou a soma dos ângulos internos de um polígono de forma recursiva. O método recursivo é uma alternativa prática para deduzir muitas fórmulas que utilizamos com frequência na matemática básica.

Material Didático

- Nos livros atuais de matemática do ensino médio, não encontramos uma parte específica sobre recorrências, mas um livro antigo que aborda e é referência para o estudo das recorrências é o livro (LIMA et al., 1997):

A Matemática do Ensino Médio - Volume 2

Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado.

SBM - Coleção do Professor de Matemática

O capítulo 3 é referente as recorrências.

Apesar do fato das recorrências não estarem presentes na maioria dos livros, por se tratar de ser um tema novo para muitos professores e pouco difundido, o estudo das recorrências é bastante prazeroso e divertido para quem admira a matemática e pode ser mais explorado e divulgado por quem tiver a oportunidade de conhecê-las.

- Podemos encontrar diversas informações sobre as sequências e as recorrências na página Clubes da Matemática da OBMEP, desenvolvida pelo IMPA e pela SBM, nela contém vários ambientes interativos, com uma ampla lista de atividades. Localizando esse site, entre na seção (sala de estudos), selecione os temas (recorrências e sequências), onde terá um material com explicações, exemplos resolvidos, exercícios propostos com resoluções e vídeo-aulas, tudo adaptado e voltado para os alunos e professores do ensino médio e fundamental.

Esses e outros vídeos sobre recorrências, também podem ser encontrados nos canais do youtube (também desenvolvidos pelo IMPA e pela SBM):

→ Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)

→ Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

→ Portal da OBMEP

E mais específicos para os professores, nos canais:

→ PROFMAT (playlist - MA 12 - recorrências)

→ PAPMEM (IMPA)

Aqui vamos apresentar algumas atividades propostas que ilustram como as recorrências podem ser inseridas no ensino básico da matemática, essas atividades foram elaboradas com o propósito de incentivar e guiar os professores que pretendem expor e acrescentar as recorrências no conjunto de conteúdos da matemática nas escolas.

Atividades Propostas: Recorrências para o Ensino Básico

Atividade Proposta 1: Cálculo do Termo Geral de uma Progressão de Forma Recursiva

Um momento ideal para inserir o estudo das recorrências na matemática básica é durante o ensino das progressões (P.A. e P.G.), então a sugestão é utilizar as progressões como exemplos iniciais.

Exemplo 1: Progressão Aritmética

Nesses exemplos iniciais, vamos detalhar as etapas do método recursivo.

Uma progressão aritmética é uma sequência onde cada termo é igual ao antecessor adicionado de um valor fixo (razão da P.A.), então devemos esclarecer para os alunos que a sua lei de formação será:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Vamos utilizar como exemplo a P.A. com termo inicial 5 e razão 7:

$$a_{n+1} = a_n + 7 \quad \text{com} \quad a_1 = 5$$

De posse da equação de lei de formação, que é a forma recursiva da recorrência e com o primeiro termo da sequência, montamos uma sequência de equações da seguinte maneira:

1ª equação: informamos o valor de a_1
2ª equação: escrevemos a_2 em função de a_1
3ª equação: a_3 em função de a_2
$\vdots$
equação de posição $(n-2)$: a_{n-2} em função de a_{n-3}
equação de posição $(n-1)$: a_{n-1} em função de a_{n-2}
enésima equação: a_n em função de a_{n-1}

Após montar a sequência de equações acima, somamos todas as equações (no caso da P.A.) ou multiplicamos todas as equações (no caso da P.G.), onde os termos semelhantes se anulam, gerando uma única equação. Realizando esse processo, a_n estará apenas em função de n e a equação será a fórmula fechada ou a solução da recorrência, que conhecemos como a fórmula do termo geral da progressão.

Aplicando em $\quad a_{n+1} = a_n + 7 \quad \text{com} \quad a_1 = 5 \quad$ temos:

$a_1 = 5$
$a_2 = a_1 + 7$
$a_3 = a_2 + 7$
$\vdots$
$a_{n-2} = a_{n-3} + 7$
$a_{n-1} = a_{n-2} + 7$
$a_n = a_{n-1} + 7$

Veja que a razão 7 repete em $(n-1)$ equações, somando as equações, obtemos:

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 7$

$a_n = 7n - 2$

Assim, obtemos através do método recursivo, a fórmula do termo geral da P.A. com termo inicial 5 e razão 7.

Como sugestão de atividade para os alunos, podemos aplicar o mesmo processo para outras progressões aritméticas, lembrando de informar o valor do termo inicial e o valor da razão.

A seguir apresentamos um exemplo ilustrativo para a P.A. com termo inicial 20 e razão 15, veja que para resolver essa recorrência usamos o cancelamento de termos semelhantes (nessa ilustração, colocamos os termos semelhantes com a mesma cor, onde é possível visualizar como são feitos os cancelamentos):

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 20\\
&a_2 = a_1 + 15\\
&a_3 = a_2 + 15\\
&a_4 = a_3 + 15\\
&a_5 = a_4 + 15\\
&\vdots\\
&a_{n-2} = a_{n-3} + 15\\
&a_{n-1} = a_{n-2} + 15\\
&a_n \;= a_{n-1} + 15\\
&\text{-------------------------}\\
&a_n \;= 20 + (n - 1)\,.\,15\\
&a_n \;= 15n + 5
\end{aligned}
$$

Figura 1 – Visualização dos termos semelhantes na resolução de uma recorrência

Na sala de aula, podemos utilizar essa mesma estratégia com o esquema das cores no quadro, para que os alunos percebam como são feitos os cortes ou cancelamentos.

Utilizamos esse processo para resolver as recorrências lineares de 1ª ordem não-homogêneas da forma $a_{n+1} = a_n + r$, como as progressões aritméticas, onde o coeficiente de a_n é 1 e a parte não-homogênea é uma constante r qualquer.

Exemplo 2: Progressão Geométrica

Uma progressão geométrica é uma sequência onde cada termo é igual ao anterior multiplicado por um valor fixo (razão q da P.G.), então devemos esclarecer para os alunos que a sua lei de formação será:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Vamos utilizar como exemplo a P.G. com termo inicial 2 e razão 3:

$$a_{n+1} = a_n \cdot 3 \quad \text{com} \quad a_1 = 2$$

De posse da lei de formação da P.G., montamos a sequência de equações:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 2\\
&a_2 = a_1 \cdot 3\\
&a_3 = a_2 \cdot 3\\
&\vdots\\
&a_{n-2} = a_{n-3} \cdot 3\\
&a_{n-1} = a_{n-2} \cdot 3\\
&a_n = a_{n-1} \cdot 3
\end{aligned}$$

Veja que a razão 3 repete em $(n-1)$ equações, efetuando o produto das equações, obtemos:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Assim, obtemos recursivamente, a fórmula do termo geral da P.G. com termo inicial 2 e razão 3.

Utilizamos esse processo para resolver as recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas da forma $a_{n+1} = q \cdot a_n$, como as progressões geométricas, onde o coeficiente de a_n é uma constante q e sem termos independentes.

Como sugestão de atividade para os alunos, podemos aplicar o mesmo processo para outras progressões geométricas, lembrando de informar o valor do termo inicial e o valor da razão.

Exemplo 3: Sequência das Somas dos Termos de uma P.A. de Forma Recursiva

Essa atividade, também envolvendo recorrências, vai gerar uma P.A. de 2ª ordem (MORGADO; CARVALHO, 2015), um tema novo também para o ensino médio, mas que pode ser abordado perfeitamente.

Vamos utilizar novamente como exemplo, a P.A. com termo inicial 5 e razão 7, vamos utilizar também a sua fórmula do termo geral $a_n = 7n - 2$, que obtemos anteriormente.

Calculando os primeiros termos dessa P.A., temos:
$(5, 12, 19, 26, 33, ...)$

Vamos obter agora, a sequência das Somas dos termos dessa P.A.:

$$\begin{aligned}
&5\\
&5 + 12 = 17
\end{aligned}$$

$5 + 12 + 19 = 36$
$5 + 12 + 19 + 26 = 62$
$5 + 12 + 19 + 26 + 33 = 95$
$\vdots$

Veja que obtemos uma nova sequência: $(5, 17, 36, 62, 95, ...)$

Essa nova sequência, trata-se de uma P.A. de 2ª ordem (que também é uma função do 2º grau).

Podemos determinar, juntamente com os alunos, qualquer um dos infinitos termos dessa P.A. de 2ª ordem, também de forma recursiva, ou seja, através da solução da recorrência.

Sendo S_n, a sequência das Somas dos termos da P.A. inicial, podemos montar uma sequência de equações, da seguinte maneira:

$S_1 = 5$
$S_2 = 5 + 12$
$S_3 = 5 + 12 + 19$
$S_4 = 5 + 12 + 19 + 26$
$S_5 = 5 + 12 + 19 + 26 + 33$
$\vdots$
$S_n = 5 + 12 + 19 + 26 + 33 + \cdots + (7n - 2)$, note que consideramos a_n como $(7n - 2)$

Note também, que podemos escrever essa sequência de equações, como vemos abaixo e já resolver a recorrência:

$S_1 = 5$
$S_2 = S_1 + 12$
$S_3 = S_2 + 19$
$S_4 = S_3 + 26$
$S_5 = S_4 + 33$
$\vdots$
$S_n = S_{n-1} + (7n - 2)$

Somando as n equações, obtemos:

$S_n = 5 + 12 + 19 + 26 + 33 + \cdots + (7n - 2)$

Veja que temos uma soma simples de P.A. no 2º membro da equação, efetuando essa soma, obtemos:

$S_n = \frac{[5+(7n-2)]\cdot n}{2} = \frac{7n^2+3n}{2}$

E $S_n = \frac{7n^2+3n}{2}$ é a fórmula fechada que permite calcular qualquer um dos infinitos termos da P.A. de 2ª ordem $(5, 17, 36, 62, 95, ...)$.

Por exemplo, o 10º termo da P.A. de 2ª ordem $(5, 17, 36, 62, 95, ...)$, é:

$S_{10} = \frac{7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10}{2} = \frac{730}{2} = 365$

Utilizamos esse processo para resolver as recorrências lineares de 1ª ordem não-homogêneas da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$, como a recorrência acima, onde o coeficiente de x_n é 1 e a parte não-homogênea é uma função de n.

Como sugestão de atividade para os alunos, podemos aplicar o mesmo processo para qualquer progressão aritmética e gerar uma sequência das somas dos termos dessa P.A. inicial, essa nova sequência recursiva será uma P.A. de 2ª ordem.

Podemos encontrar mais informações sobre as Progressões Aritméticas de 2ª ordem, também no livro (LIMA et al., 1997):

A Matemática do Ensino Médio - Volume 2

Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado.

SBM - Coleção do Professor de Matemática

O capítulo 1 é referente as Progressões.

Atividade Proposta 2: Aplicação das Recorrências na Geometria

Exemplo 1: Dedução da fórmula para calcular o número de diagonais de um polígono convexo qualquer de forma recursiva.

Podemos deduzir juntamente com os alunos, a equação que permite calcular o número de diagonais de um polígono convexo qualquer, essa maneira é uma alternativa interessante que pode ser usada nas aulas de matemática no ensino básico, desenhando os quatro primeiros polígonos convexos com suas diagonais, podemos fazer com que os alunos de forma intuitiva, percebam o seguinte padrão de recorrência:

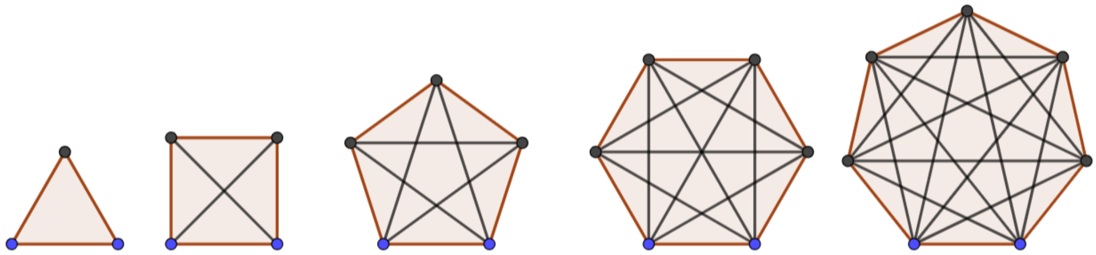

Figura 2 – Número de Diagonais de um Polígono Convexo

- O triângulo não possui diagonais;
- O quadrilátero possui 2 diagonais (2 a mais que o triângulo);
- O pentágono possui 5 diagonais (3 a mais que o quadrilátero);
- O hexágono possui 9 diagonais (4 a mais que o pentágono);

Assim, podemos concluir com os alunos, que o heptágono terá 14 diagonais (5 a mais que o hexágono). O processo irá se manter com a sequência dos polígonos convexos, o que permitirá elaborar recursivamente a sua lei de formação.

A medida que o número de lados vai aumentando, cada polígono convexo terá o número de diagonais do polígono anterior mais $(n-2)$ diagonais, ou seja:

- O quadrado (4 lados) teve um acréscimo de (4 - 2 = 2 diagonais) em relação ao triângulo;
- O pentágono (5 lados) teve um acréscimo de (5 - 2 = 3 diagonais) em relação ao quadrado;
- O hexágono (6 lados) teve um acréscimo de (6 - 2 = 4 diagonais) em relação ao pentágono;
- O heptágono (7 lados) teve um acréscimo de (7 - 2 = 5 diagonais) em relação ao hexágono;

Assim, temos:

$$d_n = d_{n-1} + (n-2), \text{ com } d_3 = 0 \text{ e } n \geq 3, \text{ que equivale a}$$

$$d_{n+1} = d_n + (n-1), \text{ com } d_3 = 0 \text{ e } n \geq 3$$

Resolvendo a recorrência chegamos na fórmula para calcular o número de diagonais de um polígono convexo qualquer:

$d_3 = 0$
$d_4 = d_3 + 2$
$d_5 = d_4 + 3$
$d_6 = d_5 + 4$
$d_7 = d_6 + 5$
$\vdots$
$d_{n-1} = d_{n-2} + (n-3)$
$d_n = d_{n-1} + (n-2)$

Note que temos $(n-3)$ equações de d_4 até d_n,
somando as $(n-3)$ equações, obtemos:

$d_n = 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-4) + (n-3) + (n-2)$

$d_n = \frac{[2+(n-2)](n-3)}{2}$, note que temos uma soma de P.A. com $(n-3)$ termos, de 2 até $(n-2)$,

$d_n = \frac{n(n-3)}{2}$

E $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ é a equação ou a fórmula que permite calcular o número de diagonais de um polígono convexo qualquer de n lados.

Exemplo 2: Dedução da fórmula para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer de forma recursiva.

Podemos deduzir juntamente com os alunos, a equação que permite calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer, essa maneira é uma alternativa interessante que pode ser usada nas aulas de matemática no ensino básico, desenhando os quatro primeiros polígonos convexos e dividindo esses em polígonos em triângulos, podemos fazer com que os alunos de forma intuitiva, percebam o seguinte padrão de recorrência:

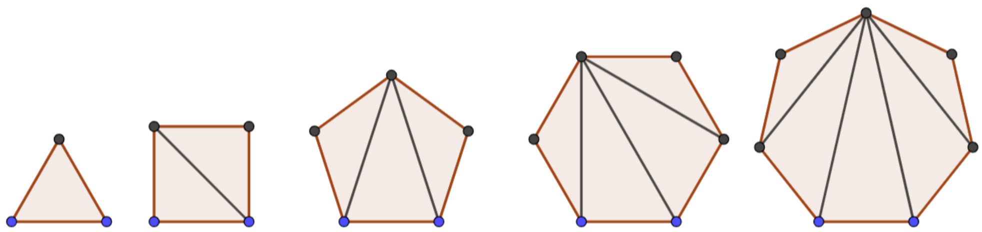

Figura 3 – Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo Através de Triângulos

- Como já sabemos, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a $180°$.
- Podemos dividir um quadrilátero qualquer, traçando uma diagonal e assim obtemos dois triângulos, a soma dos ângulos internos do quadrilátero será $180° + 180°$ ou $2 \cdot 180°$.
- Podemos dividir um pentágono qualquer, traçando duas diagonais, partindo do mesmo vértice e assim obtemos três triângulos, a soma dos ângulos internos do pentágono será $180° + 180° + 180°$ ou $3 \cdot 180°$.
- Podemos dividir um hexágono qualquer, traçando três diagonais, partindo do mesmo vértice e assim obtemos quatro triângulos, a soma dos ângulos internos do hexágono será $180° + 180° + 180° + 180°$ ou $4 \cdot 180°$.
- Assim, de forma intuitiva, concluímos que podemos dividir um heptágono qualquer, traçando quatro diagonais, partindo do mesmo vértice e assim obtemos cinco triângulos e a soma dos ângulos internos do heptágono será $180° + 180° + 180° + 180° + 180°$ ou $5 \cdot 180°$. O processo irá se manter com a sequência dos polígonos convexos, o que permitirá elaborar recursivamente a sua lei de formação. Em cada novo polígono convexo, a soma dos ângulos internos é igual a soma dos ângulos internos do polígono anterior com um aumento de $180°$:

$S_{n+1} = S_n + 180°$, com $S_3 = 180°$ e para $n \geq 3$.

Resolução:
$S_3 = 180°$
$S_4 = S_3 + 180°$
$S_5 = S_4 + 180°$
$S_6 = S_5 + 180°$
$S_7 = S_6 + 180°$
$\vdots$
$S_{n-1} = S_{n-2} + 180°$
$S_n = S_{n-1} + 180°$
note que temos $(n-2)$ equações de S_3 até S_n, somando as $(n-2)$ equações, obtemos:
$S_n = (n-2) \cdot 180°$

E $S_n = (n-2) \cdot 180°$ é a equação ou a fórmula que permite calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer de n lados.

As deduções das fórmulas para calcular o número de diagonais e para calcular a soma dos ângulos internos de forma recursiva, são ideais para o aluno perceber que é capaz de montar uma fórmula e não apenas utilizá-la já montada, com isso a aprendizagem pode atingir um resultado maior, incentivando assim, a montagem de outras fórmulas quando possível, também de forma recursiva.

Atividade Proposta 3: Aplicação das Recorrências na Educação Financeira

Os cálculos de juros sobre juros de investimentos, financiamentos, compras a prazo, empréstimos e outras operações financeiras são progressões geométricas e progressões geométricas são recorrências lineares de primeira ordem homogêneas (MORGADO; CARVALHO, 2015), uma alternativa interessante para os professores é mostrar para os alunos esse tipo de cálculo de forma recursiva.

Antes de resolver qualquer cálculo financeiro na sala de aula com os alunos que envolve juros sobre juros, devemos esclarecer de forma intuitiva a ideia que:

Quando a taxa de juros é 1% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,01
Quando a taxa de juros é 2% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,02
Quando a taxa de juros é 0,5% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,005
Quando a taxa de juros é 1,5% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,015
Quando a taxa de juros é 10% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,10
Quando a taxa de juros é 15% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,15

Podemos mostrar para os alunos, de forma recursiva, como uma quantia inicial se comporta em um investimento que rende 1% ao mês:

Chamamos a quantia inicial ou o capital inicial de c, portanto o 1º termo da sequência ou da recorrência será c, ou seja, $X_1 = c$.

Sabemos que quando uma quantia rende 1% ao mês, multiplicamos essa quantia inicial c por 1,01 sucessivamente (mês a mês) até atingir a quantia final desejada.

Assim a lei de formação da recorrência será:

$$X_{n+1} = X_n \cdot 1,01$$

Cada novo valor é igual ao anterior acrescido de 1%.

Resolvendo a recorrência:
$X_1 = c$
$X_2 = X_1 \cdot 1,01$
$X_3 = X_2 \cdot 1,01$
$\vdots$
$X_{n-1} = X_{n-2} \cdot 1,01$
$X_n = X_{n-1} \cdot 1,01$
Multiplicando as equações, obtemos:
$X_n = c \cdot 1,01^{n-1}$
Portanto, a fórmula fechada para um investimento que rende 1% ao mês com um capital inicial c é igual a:

$$X_n = c \cdot 1,01^{n-1}$$

Assim, uma quantia de 100 reais aplicada 12 meses (1 ano) em um investimento que rende 1% ao mês, será igual a:
$X_{12} = 100 \cdot 1,01^{12-1} = 100 \cdot 1,01^{11} = 100 \cdot 1,1156683467 = 111,56683467$
$X_{12} \approx 111,57$ reais.

Como sugestão de atividade para os alunos, podemos aplicar o mesmo processo para outras taxas de juros.

A disciplina Educação Financeira foi incluída no currículo do Novo Ensino Médio e deve ser ministrada por professores de matemática, como o objetivo principal da utilização das recorrências é descobrir qualquer termo de uma sequência apenas informando a sua posição, podemos calcular o valor de qualquer rendimento ou qualquer prestação de uma operação financeira de forma direta com o uso das recorrências.

Recorrências no ENEM

Como já citamos anteriormente, a resolução por recorrência é uma alternativa prática para resolver diversos problemas da matemática, o método recursivo também pode ser trabalhado pelos professores no processo de preparação dos alunos para a prova do ENEM.

Já é possível encontrar questões relacionadas com as recorrências em algumas provas do ENEM, como a:

Questão 176 da prova azul do segundo dia do Enem 2023

Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C.

As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.

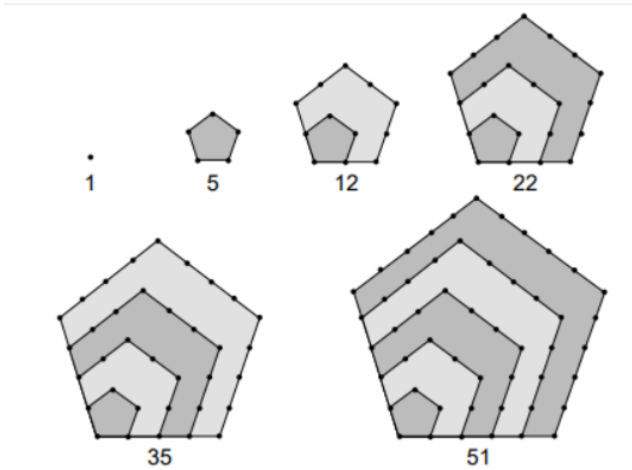

Figura 4 – Questão 176 da prova azul do segundo dia do Enem 2023

O oitavo número pentagonal é:
A) 59
B) 83
C) 86
D) 89
E) 92

Orientações Finais

No ensino básico da matemática, além dos temas que citamos, podemos abordar e relacionar as recorrências com outros temas também, como por exemplo:

- Com os números figurados (triangulares, quadrados perfeitos, pentagonais, hexagonais, tetraédricos e outros);
- Com as sequências recursivas presentes no Triângulo de Pascal (HAZZAN; HAZZAN, 1993);
- Com os Números de Mersenne (HEFEZ, 2016);
- Com o estudo das funções;
- Nas resoluções de problemas de contagem (HAZZAN; HAZZAN, 1993);

- A Torre de Hanói;
- O Problema da Pizza de Steiner;
- A Sequência de Fibonacci (MORGADO; CARVALHO, 2015);
- E de acordo com a criatividade de cada Professor.

Referências

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana.* [S.l.]: Atual, 1993.

HAZZAN, S.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade.* [S.l.]: Atual, 1993.

HEFEZ, A. *Aritmética.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas.* [S.l.]: Atual, 2004.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio.* [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 2.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015.