

Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Local (PROFMAT)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA



PRODUTO EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES ENVOLVENDO ENSINO DE POLÍGONOS NO CONTEXTO DA TRRS.

Hevelise Silva Ferreira
Walter dos Santos Motta Júnior

Resumo: O presente material se baseia na necessidade de se analisar como uma figura poligonal, como parte do enunciado de uma situação-problema, no contexto da Geometria plana, pode influenciar nos procedimentos de resolução apresentados pelos discentes. Nele motivamos o uso de construções e reconfigurações de figuras planas como elemento articulador no ensino de Geometria, aonde utilizaremos como aporte teórico a **Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS)** de Raymond Duval. Especificamente, a utilização de construções e reconfigurações de polígonos nos permitirão explorar o conceito de área, num enfoque de manipulação concreta, via **teorema de Pick** ou com uso do programa **GeoGebra**.

Palavras-Chaves: Reconfigurações com Polígonos, Material Manipulativo, Registro de Representações.

1 Objetivos

Estruturar um “produto educacional” voltado para o ensino de Geometria, direcionado ao Ensino Médio, com o uso de suportes de tecnologias da informação. Essa ação não só potencializa a qualidade do ensino, como também prepara os estudantes para utilizar a matemática em contextos do mundo atual, integrando habilidades tecnológicas e raciocínio geométrico de maneira efetiva. Essa ação contribuirá para o desenvolvimento de uma prática pedagógica que não apenas atenda às exigências curriculares, mas também inspire novos modos de ensinar e aprender matemática, com impactos positivos no desempenho e na valorização da disciplina no ensino básico. Especificamente, o material que segue foi elaborado como parte da dissertação de Mestrado do Profmat – UFU, intitulada “*Alguns Exemplos Modelos no Contexto de Representações e Reconfigurações de Polígonos*”. Ele consiste em quatro atividades investigativas voltadas para o estudo de polígonos, destinadas a alunos do Ensino Médio e que cria orientações ao professor de como utilizá-las.

2 Público Alvo

Estas atividades, se balizam na elaboração de ações que possam ser consideradas como exemplos-modelos a serem aplicados por professores em sala de aula, estando eles em conformidade com os respectivos níveis com habilidades e competências destacadas a seguir e presentes nos “Parâmetros Curriculares Nacional”:

- **(EM13MAT307A):** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.).
- **(EM13MAT307B):** Deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

3 Desenvolvimento de Atividades/Ações

ATIVIDADE 1 - Identificação do objeto de estudo - Polígonos

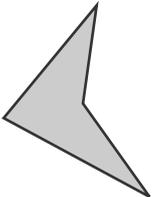
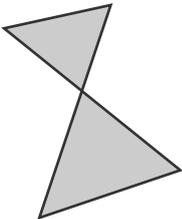
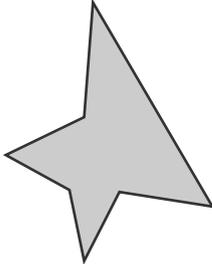
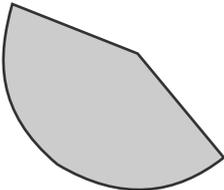
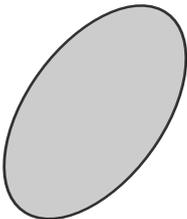
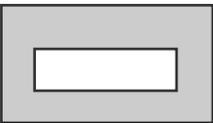
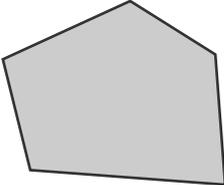
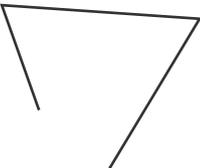
Recomendamos ao Professor(a) o desenvolvimento da atividade que segue como uma ação preliminar investigativa dos conhecimentos e habilidades presentes no início do estudo de polígonos em sala de aula. Sugerimos que a atividade seja desenvolvida em grupos de no máximo 4 estudantes cada um deles.

Ação 1.1: Nesse momento forneça a “definição” de polígonos como segue: “polígonos são figuras geométricas inteiramente formadas por lados”. Os estudantes

deverão recortar as figuras, presentes na tabela, e separá-las em dois grupos: polígonos e não polígonos. O agrupamento deverá ser feito baseando-se no conhecimento prévio dos alunos e nessa definição fornecida. Além disso, cada grupo deverá escrever quais foram as características geométricas consideradas para a classificação em polígono ou não polígono.

Ação 1.2: Estimule um debate coletivo, em que cada grupo deverá expor quais foram as características geométricas consideradas nas figuras analisadas para que fosse considerada polígono ou não polígono.

A partir do debate realizado, o professor(a) deve esclarecer a definição de polígono de forma precisa, suas diferentes diversidades e promover um novo debate acerca das características que uma figura precisa possuir para ser considerada polígono. Destacar os elementos geométricos básicos que estão presentes em um polígono (ângulos internos e externos, lados, vértices e diagonais). Como curiosidade, estimule, sem uma efetiva caracterização formal, uma reflexão sobre variações no comportamento das interseções de segmentos ligando dois vértices distintos com os lados.

			
1	2	3	4
			
5	6	7	8

ATIVIDADE 2 - Polígonos via manipulações iniciais com o Geogebra

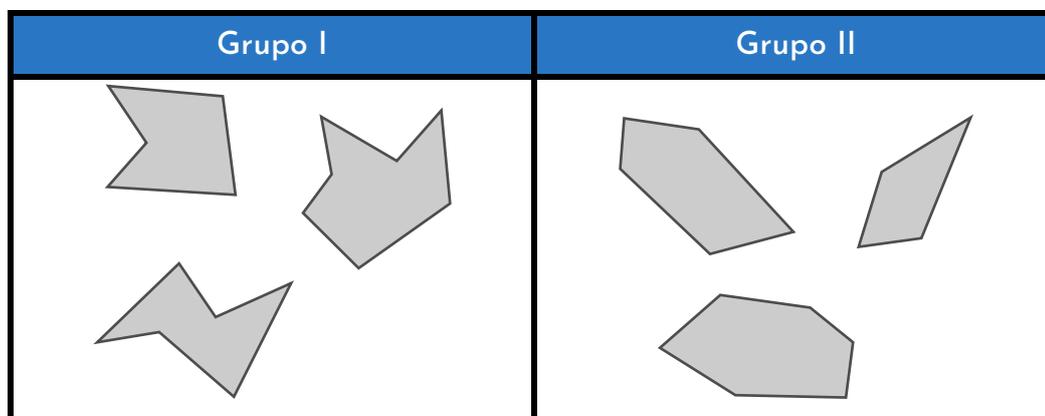
Recomendamos ao Professor(a) o desenvolvimento da atividade que segue como uma ação preliminar investigativa das vivências e habilidades dos estudantes no

manuseio de ferramentas computacionais voltadas ao ensino. Salienta-se que o nível de compreensão e interesse pela busca do conhecimento, por parte dos estudantes, se amplia quando há utilização de programas computacionais manipulativos. Nesse contexto, orientamos o professor(a) a estruturar junto a sala de aula uma atividade manipulativa inicial com o uso do Geogebra.

Ação 2.1 Professor(a) instrua os estudantes a abrir o Geogebra, clicando, posteriormente, no menu “Exibir” e desmarque as opções eixos e malha. Manipule as ferramentas do programa para se familiarizar e utilize a opção “Ajuda”, caso necessário. Assim, construa um polígono com quatro ou mais lados (para fechar o polígono é necessário clicar sobre o primeiro vértice). Por exemplo, para exibir os ângulos internos do polígono, selecione “Ângulo” e clique sobre os vértices (no sentido horário). Recomendamos a utilização do Geogebra mediante o endereço https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT

Ação 2.2 Proponha o desenvolvimento das construções:

- i) Desenhe polígonos que tenham 1, 2 e 3 ângulos retos presentes;
- ii) Desenhe cada um dos dois grupos representados conforme figura abaixo.



Agora desenhe representações conforme indicado:

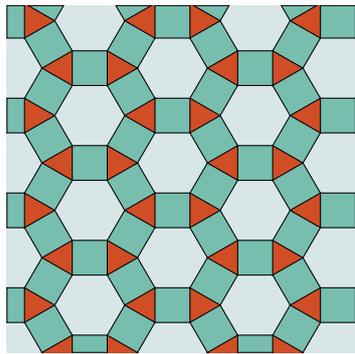
- a) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de ângulos agudos presentes. Quantos grupos existem nesse contexto?
- b) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de ângulos obtusos presentes. Quantos grupos existem nesse contexto?
- c) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de vértices presentes. Quantos grupos existem nesse contexto?

d) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de pares de lados paralelos. Quantos grupos existem nesse contexto?

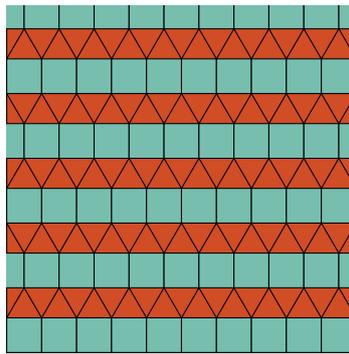
Ação 2.3 Pavimentações no Geogebra Professor(a) relate aos estudantes que a primeira pessoa a exibir as “pavimentações com polígonos regulares” foi Joahannes Kepler, em 1619, apresentando o seguinte resultado

- existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares nas boas condições estabelecidas como segue:
 - a) os ladrilhos são polígonos regulares: um ou mais tipos, com todos lados de mesma medida;
 - b) a intersecção dos ladrilhos, se existir, é sempre um lado ou um vértice;
 - c) a distribuição de ladrilhos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

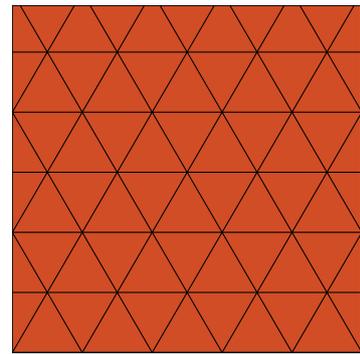
Vejamos essas maneiras descritas por Kepler nas configurações abaixo:



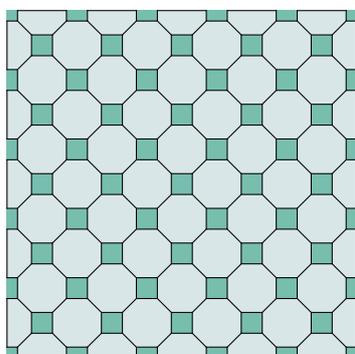
3.4.6.4



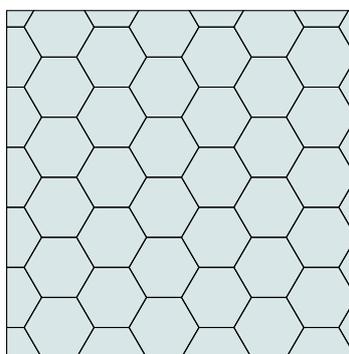
3.3.3.4.4



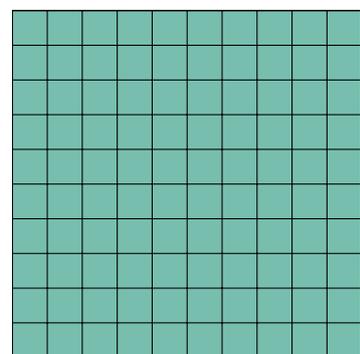
3.3.3.3.3.3



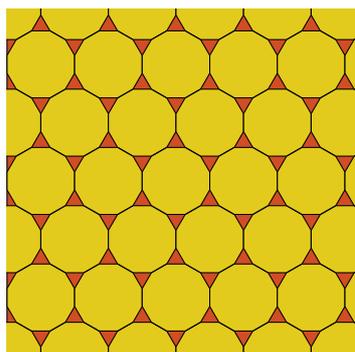
4.8.8



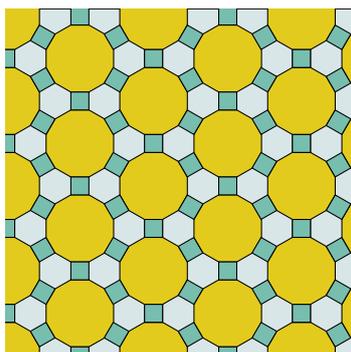
6.6.6



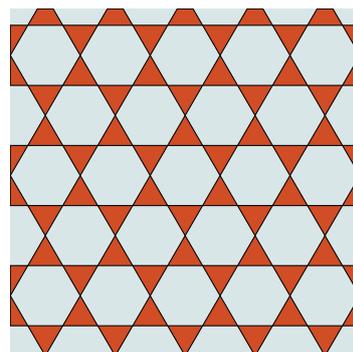
4.4.4.4



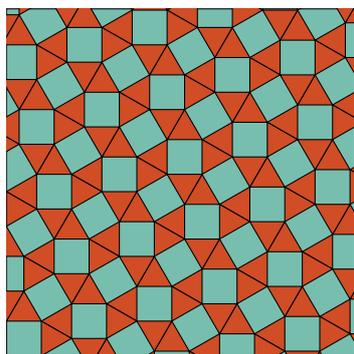
3.12.12



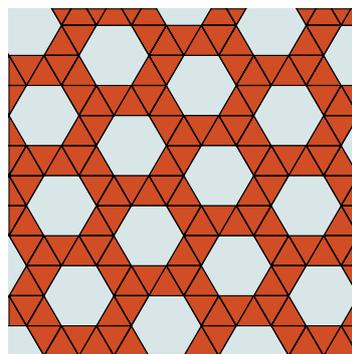
4.6.12



3.6.3.6

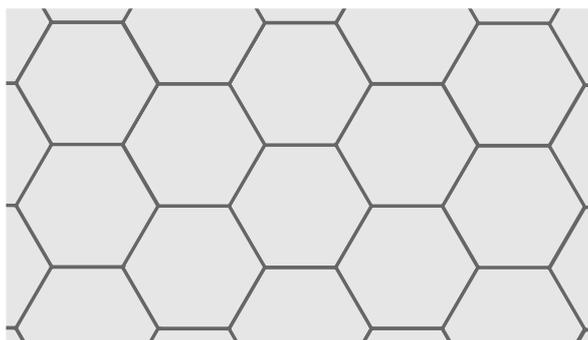


3.4.3.3.4



3.3.3.3.6

De acordo com esse resultado, Professor(a) proponha o que segue: Solicite a exploração dos recursos do Geogebra, solicitando aos estudantes a construção do ladrilhamento regular (6.6.6), de acordo com a Figura



Dado que o hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros, oriente os estudantes para a construção no Geogebra do ladrilhamento (3,3,3,3,3,3), conforme Figura



ATIVIDADE 3 - Construções geométricas utilizando comandos do GeoGebra

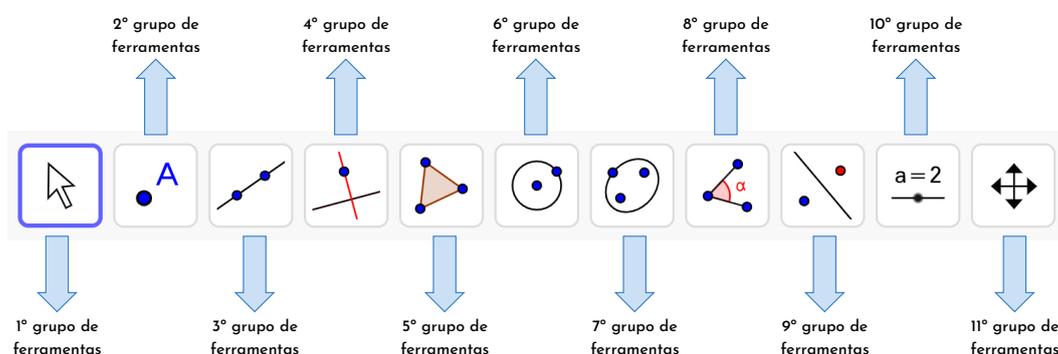
Recomendamos ao Professor(a) o desenvolvimento da atividade que segue como uma ação que auxilie o estudante a compreender mais detalhadamente as possibilidades presentes no programa Geogebra.

Ação 3.1: Proponha a resolução, em grupo de no máximo 3 alunos (as), do exercício a seguir, utilizando o Geogebra e seguindo os passos para a construção do polígono desejado e respondendo as perguntas abaixo apresentadas:

Abra o aplicativo www.geogebra.org/classic no computador. Importante acessar o endereço indicado, para garantir o acesso ao modo *classic*.

Clique no ícone  no canto superior direito e em seguida clique no ícone  para ocultar os eixos cartesianos.

Observe a nomenclatura que denominaremos os ícones de construção do Geogebra:



1º Passo

1) No 5º grupo de ferramenta clique em "POLÍGONO"

- 2) Crie um retângulo ABCD: clique inicialmente em um vértice da malha quadriculada para obter o ponto A, em seguida na vertical clique em outro vértice da malha para criar o vértice B. Na horizontal, escolha outro vértice da malha e clique para criar o vértice C. Na vertical escolha o vértice da malha alinhado com o ponto A e clique para criar o vértice D. Em seguida clique novamente sobre o ponto A.
- 3) Elimine os rótulos a, b, c, d: do lado esquerdo da tela: clique em  no comando "a = Segmento (A, B, q1)" em seguida clique em "Configurações". Abrirá um painel do lado direito da tela, e deverá desmarcar a opção "Exibir Rótulo". Observe que o rótulo "a" do segmento AB se apagará. Repita os mesmos processos nos comandos b, c, d. Ao final desta etapa os rótulos dos lados do retângulo ficarão ocultos.
- 4) No 2º grupo de ferramentas clique em "PONTO MÉDIO OU CENTRO". Com o mouse clique no vértice A e no vértice D, automaticamente será criado o ponto E.
- 5) No 2º grupo de ferramentas clique em "PONTO MÉDIO OU CENTRO". Com o mouse clique no vértice B e no vértice C, automaticamente será criado o ponto F.
- 6) No 3º grupo de ferramentas clique em "SEGMENTO", em seguida clique nos pontos E e F. Retire o rótulo "f" conforme o passo 3.

Responda:

a1) O que você entende por ponto médio?

a2) O segmento EF divide o retângulo ABCD em dois retângulos, qual a relação entre as áreas desses dois retângulos?

a3) Qual a relação entre as áreas dos retângulos ABCD e ABFE?

2º Passo

- 6) No 3º grupo de ferramentas clique em "SEGMENTO". Em seguida clique nos vértices A e C para traçar o segmento AC. Retire o rótulo "g" conforme o passo 3.

Responda:

- b1) Como é chamado o segmento AC em relação ao retângulo ABCD?

- b2) Ao traçar o segmento AC divide-se o retângulo ABCD em dois triângulos ABC e ADC. Qual a relação entre as áreas desses dois triângulos?

- b3) Qual a relação entre a área do triângulo ADC e o retângulo ABCD? Justifique.

3º Passo

- 8) No 3º grupo de ferramentas clique em "SEGMENTO". Em seguida clique nos vértices B e D para traçar o segmento BD. Retire o rótulo "h" conforme o passo 3.

- 9) No 2º grupo de ferramentas clique em "INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS". Clique sobre o segmento AC e em seguida sobre o segmento BD para criar o ponto G de interseção entre eles.

Responda:

- c1) Qual é o ângulo entre os segmentos GE e EA?

- c2) Qual é o ângulo entre os segmentos GE e ED?

c3) Qual a relação entre as medidas dos segmentos AE e ED?

c4) Os triângulos GAE e GDE têm algum lado em comum? Qual?

c5) Qual a relação entre as áreas dos triângulos GAE e GDE?

4º Passo

10) No 3º grupo de ferramentas clique em "SEGMENTO". Em seguida clique nos vértices A e F para traçar o segmento AF. Retire o rótulo "i" conforme o passo 3.

11) No 3º grupo de ferramentas clique em "SEGMENTO". Em seguida clique nos vértices F e D para traçar o segmento FD. Retire o rótulo "j" conforme o passo 3.

12) No 2º grupo de ferramentas, clique em "INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS". Clique sobre os segmentos AF e BD para criar o ponto H. Em seguida clique sobre os segmentos AC e DF criando o ponto I.

Responda:

d1) Observe os triângulos GDF e GCF. Qual o lado comum entre esses dois triângulos?

d2) No triângulo GDF qual é o segmento que representa a altura em relação a base GF?

d3) No triângulo GCF qual é o segmento que representa a altura em relação a base GF?

d4) O que podemos concluir sobre as medidas dos segmentos que representam as alturas indicadas nos itens d2 e d3?

d5) Qual a relação entre as medidas das áreas dos triângulos GDF e GCF?

d6) Qual triângulo representa a área comum dos triângulos GDF e GCF?

d7) Com base nos itens d5 e d6, qual a relação entre as áreas dos triângulos GID e FIC?

5º Passo

13) No 5º grupo de ferramentas clique em "POLÍGONO", em seguida clique nos pontos A, H, G e A. Retire os rótulos a1, g1, h1, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando "**t1** = Polígono(A, H, G)", clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em "COR" e na barra de "TRANSPARÊNCIA" arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.

14) No 5º grupo de ferramentas clique em "POLÍGONO", em seguida clique nos pontos B, H, F e B. Retire os rótulos b1, f1, h2, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando "**t2** = Polígono(B, H, F)", clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita

da tela abrirá um painel, entre em "COR" e na barra de "TRANSPARÊNCIA" arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.

- 15) No 5º grupo de ferramentas clique em "POLÍGONO" , em seguida clique nos pontos F, G, I e F. Retire os rótulos f2, g2, i1, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando "**t3 = textPolgono(F, G, I)**", clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em "COR" e na barra de "TRANSPARÊNCIA" arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.
- 16) No 5º grupo de ferramentas clique em "POLÍGONO" , em seguida clique nos pontos G, E, D e G. Retire os rótulos d1, e, g3, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando "**t4 = Polígono(G, E, D)**", clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em "COR" e na barra de "TRANSPARÊNCIA" arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.
- 17) No 5º grupo de ferramentas clique em "POLÍGONO" , em seguida clique nos pontos C, D, I e C. Retire os rótulos c1, d2, i2, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando "**t5 = Polígono(C, D, I)**", clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em "COR" e na barra de "TRANSPARÊNCIA" arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.

Responda:

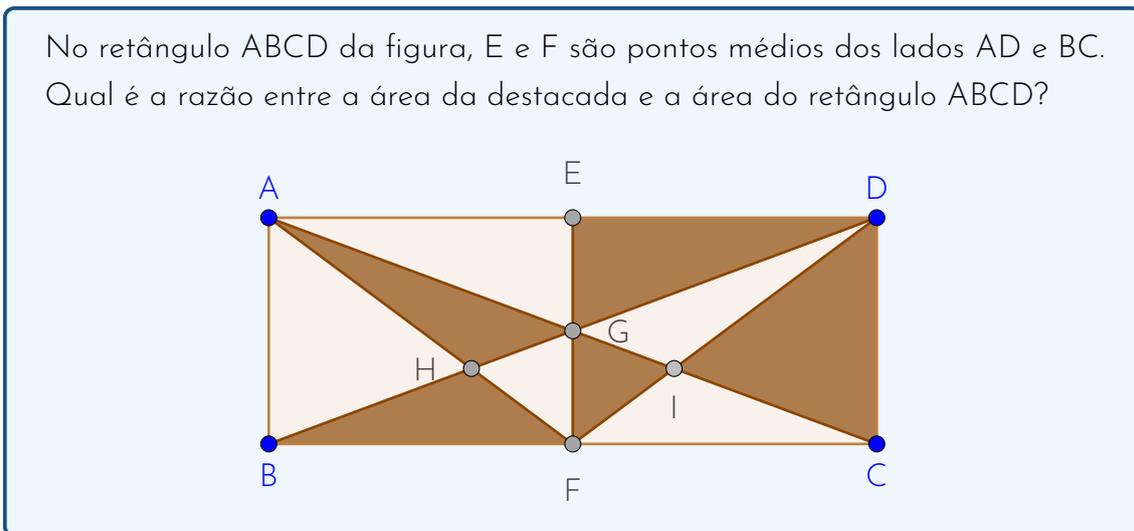
e1) Considerando que o segmento DF é diagonal do retângulo CDEF, qual a relação entre as medidas das áreas dos triângulos CDF e DEF?

e2) No desenho é possível observar que o triângulo DEF é composto por três triângulos. Quais são eles?

e3) Da mesma forma, quais os triângulos compõem o triângulo CDF?

e4) Considerando suas respostas nos itens d7), e2), e3) estabeleça uma relação entre a medida da área do triângulo ICD com a soma das medidas das áreas dos triângulos GFI e DEG.

Observando todas as construções e conclusões para as perguntas realizadas, resolva o exercício abaixo:



Ação 3.2: Construa a figura do exercício proposto utilizando o aplicativo GeoGebra. Em seguida, analisando suas construções, responda as questões. Abra o aplicativo www.geogebra.org/classic no computador. Importante acessar o endereço indicado, para garantir o acesso ao modo *classic*.

Clique no ícone  no canto superior direito e em seguida clique no ícone  para ocultar os eixos cartesianos.

CONSTRUÇÃO:

- 1) No 5º grupo de ferramenta clique em "POLÍGONO REGULAR"
- 2) **Crie um quadrado ABCD:** clique inicialmente em um vértice da malha quadriculada para obter o ponto A, em seguida na vertical, clique 3 unidades para baixo, em outro vértice da malha para criar o vértice B. Abrirá um painel na tela ao qual você deverá digitar 4 e clicar em OK.
- 3) **Crie um quadrado EFGH:** clique da malha quadriculada para obter o ponto E e F, tal que o ponto E esteja no segmento AD a 1 unidade de distância do vértice A,

e o ponto F esteja no segmento AB a 2 unidades de distância do vértice A. Abra um painel na tela ao qual você deverá digitar 4 e clicar em OK.

4) No 2º grupo de ferramenta clique em "PONTO":

- **Criação dos pontos I e J:**

Imagine uma linha vertical passando por E. Conte uma unidade para baixo nessa linha e clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto I.

A partir de I, desça mais uma unidade na mesma linha vertical, clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto J. Agora você tem dois pontos I e J, que estão 1 e 2 unidades de distância verticalmente abaixo do ponto E.

- **Criação dos pontos K e L:**

Imagine uma linha vertical passando por G. Conte uma unidade para cima nessa linha e clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto K.

A partir de K, suba mais uma unidade na mesma linha vertical, clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto L. Agora você tem dois pontos K e L, que estão 1 e 2 unidades de distância verticalmente acima do ponto G.

5) No 5º grupo de ferramenta clique em "POLÍGONO":

- **Criação do Polígono EIL preto:**

Clique nos pontos E, I, L e E. Retire os rótulos e, i1, l1.

A) Elimine o rótulo e: do lado esquerdo da tela clique em  no comando "e = Segmento(I, L, t1)" em seguida clique em "Configurações". Abrirá um painel do lado direito da tela, e deverá desmarcar a opção "Exibir Rótulo". Observe que o rótulo "e" do segmento LI se apagará. Repita os mesmos processos nos comandos i1, l1. Ao final desta etapa os rótulos dos lados do triângulo ficarão ocultos.

B) Mudar a cor do triângulo EIL para preto: do lado esquerdo da tela clique em no comando "t1 = Polígono(EIL)" em seguida clique em "Configurações". Há direita da tela abrirá um painel, nele clique na aba "COR", clique na cor preta e na barra de "TRANSPARÊNCIA" arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.

- **Criação do Polígono LKH preto:**

Clique nos pontos L, K, H e L. Retire os rótulos h1, k1, l2, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: t2 = Polígono(L, K, H), conforme

passo B.

- **Criação do Polígono KJG preto:**

Clique nos pontos K, J, G e K. Retire os rótulos g1, j1, k2, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: $t3 = \text{Polígono}(K, J, G)$, conforme passo B.

- **Criação do Polígono IJF preto:**

Clique nos pontos I, J, F e I. Retire os rótulos f1, i2, j2, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: $t4 = \text{Polígono}(I, J, F)$, conforme passo B.

6) No 5º grupo de ferramenta clique em "POLÍGONO":

- **Criação do Polígono EIF laranja:**

Clique nos pontos E, I, F e E. Retire os rótulos e1, f2, i3. conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: ($t5 = \text{Polígono}(E, I, F)$), conforme passo B, utilizando a cor laranja.

- **Criação do Polígono EHL laranja:**

Clique nos pontos E, H, L e E. Retire os rótulos e2, h2, l3, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: ($t6 = \text{Polígono}(E, H, L)$), conforme passo B, utilizando a cor laranja.

- **Criação do Polígono HKG laranja:**

Clique nos pontos H, K, G e H. Retire os rótulos g2, h3, k3, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: ($t7 = \text{Polígono}(H, K, G)$), conforme passo B, utilizando a cor laranja.

- **Criação do Polígono GJF laranja:**

Clique nos pontos G, J, F e G. Retire os rótulos f3, g3, j3, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: ($t8 = \text{Polígono}(G, J, F)$), conforme passo B, utilizando a cor laranja. Observando as construções realizadas e responda às questões abaixo:

QUESTÕES:

1) O quadrado ABCD é composto por quantos quadradinhos?

2) Quanto mede cada lado do quadrado ABCD? Explique seu raciocínio.

3) Qual a relação entre a diagonal do retângulo AEJF com os lados do quadrado EFGH?

4) Observe que o triângulo EAF é retângulo em A. Utilizando o teorema de Pitágoras determine a medida do segmento EF.

5) Qual é a área do quadrado EFGH?

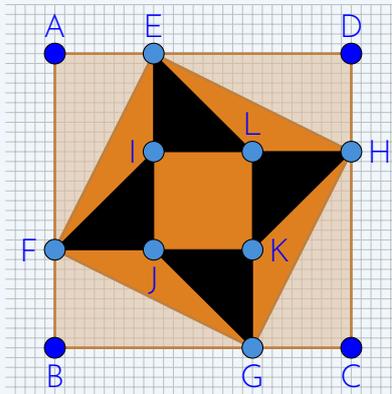
6) Considerando a fórmula $(\text{base} \times \text{altura})/2$ para calcular a área de triângulo, determine a área do triângulo EIL.

7) Qual é a soma das áreas dos triângulos EIL, FJI, GKJ e HLK?

8) Qual é a área do quadrado IJKL?

9) Observando todas as construções e as respostas obtidas no item 05, 07 e 08, resolva o exercício abaixo:

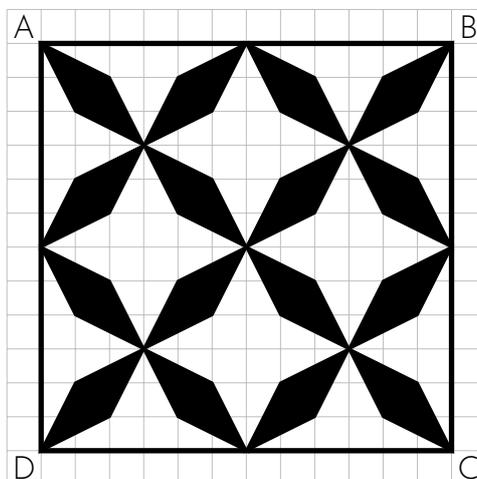
No retângulo ABCD da figura, E e F são pontos médios dos lados AD e BC. Qual é a razão entre a área da destacada e a área do retângulo ABCD?



ATIVIDADE 4 - Construções geométricas utilizando o teorema de Pick

Recomendamos ao Professor(a) que destaque que regiões planas poligonais que possam ser sobrepostas num reticulado, de tal modo que seus vértices coincidam com pontos deste reticulado, poderão ter as suas áreas calculadas por uma única fórmula que basicamente faz contagem de finitos pontos. Essa ação quando combinada com reconfigurações presentes na TRRS faz surgir uma estratégia interessante no cálculo de áreas. Vejamos a seguir alguns exemplos-modelos dessa estratégia. Professor exemplifique e estimule os seus alunos a manipularem o teorema de Pick na versão Geogebra Online disponível em <https://www.geogebra.org/m/QC4s3HB7>.

Ação 4.1 (IBMEC, 2013): Através do uso de uma reconfiguração homogênea calcule a área da figura em negrito.



Ação 4.2: Considere o problema apresentado no “registro algébrico” segundo a TRRS:

Calcule a área do polígono determinado pelas seguintes retas:

$$y = x$$

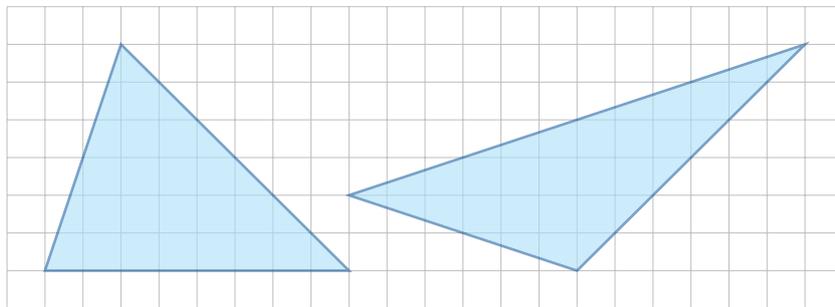
$$y = 7$$

$$y = 15 - x$$

$$y = \frac{1}{2}(15 - x)$$

Efetue uma conversão, alterando para um “registro gráfico” numa malha reticulada, e utilize o teorema de Pick para resolvê-lo.

Ação 4.3: Através de uma “reconfiguração heterogênea” mostre que os dois triângulos abaixo apresentam as mesmas áreas.



Ação 4.4 (Obmep 2017): Utilizando uma “reconfiguração heterogênea” determine a área, relativamente a soma das áreas dos quadradinhos da malha quadriculada, da figura abaixo representada.

