MATEMÁTICA FINANCEIRA

Profa. Dra. Adriana de Campos Inforzato
(adriana.inforzato@uftm.edu.br)
Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato
(nelson.inforzato@uftm.edu.br)
Depto. de Matemática Aplicada – ICTE - UFTM

Neste mini-curso trabalharemos com série de pagamentos iguais com termos vencidos. Destacamos que nosso desenvolvimento será com base no conceito de capitalização composta.

Séries De Pagamentos Iguais Com Termos Vencidos (Ou Postecipados)

Cada termo da série de pagamentos ou recebimentos iguais será representado por "R"; as demais variáveis serão representadas pelos símbolos já conhecidos.

i = taxa de juros, coerente com a unidade de tempo (mês, trimestre, ano, etc.).

n = número de prestações quase sempre coincidente com o número de períodos unitários.

P = principal, capital inicial, valor atual ou valor presente.

S = montante ou valor futuro.

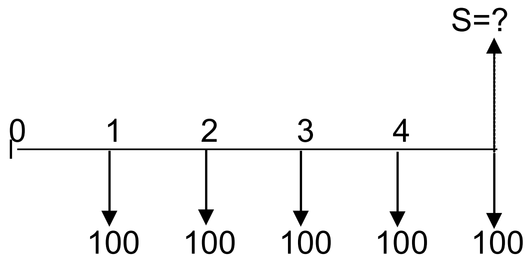
Fator de Acumulação de Capital (FAC)

Determinar o valor do montante, no final do 5º mês, de uma série de 5 aplicações mensais, iguais e consecutivas, no valor de R$ 100,00 cada uma, a uma taxa de 4% ao mês, sabendo-se que a primeira parcela é aplicada no final do primeiro mês, ou seja, a 30 dias da data tomada como base ("momento zero"), e que a última, no final do 5º mês, é coincidente com o momento em que é pedido o montante.

Dados:

R = 100,00; i = 4%; n = 5; S = ?

Em termos de fluxo de caixa, o problema pode ser esquematizado como segue:



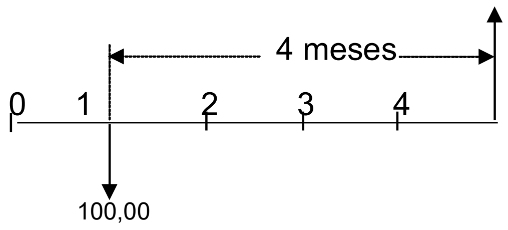
Para calcular o montante pedido, vamos utilizar somente os conhecimentos que já temos. Como apenas sabemos resolver problemas com um único pagamento, vamos calcular o montante de cada prestação no final do 5º mês, individualmente. Assim o montante da primeira, obtido da fórmula já conhecida $S = P(1 + i)^n$, será:

$$S_1 = 100{,}00(1{,}04)^4 = 100{,}00 \times 1{,}16986 = 116{,}99$$

O expoente 4 da expressão $(1.04)^4$ representa o número de meses a decorrer entre a data da primeira aplicação e a data fixada para o cálculo do seu montante.

Esquematicamente, tem-se:

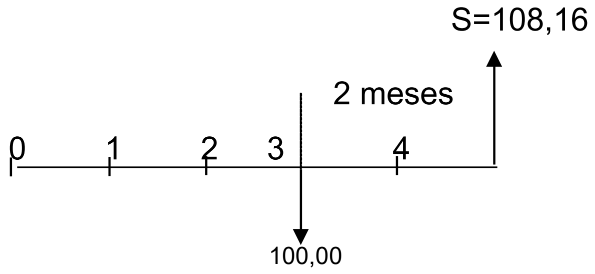
S=116,99



Essa mesma consideração é válida para todas as demais prestações. Assim o montante da terceira parcela é obtido como segue:

$$S_3 = 100,00\ (1,04)^2 = 100,00 \times 1,08160 = 108,16$$

Esquematicamente, temos:



Como a última parcela é aplicada exatamente no dia em que se pede o valor do montante, não terá rendimento algum. O montante dessa prestação pode ser assim especificado:

$$S_5 = 100,00\ (1,04)^0 = 100,00 \times 1 = 100,00$$

Em resumo, os montantes de cada uma das 5 aplicações são calculados como segue:

$$S_1 = 100,00(1,04)^4 = 100,00 \times 1,16986 = 116,98$$

$$S_2 = 100,00(1,04)^3 = 100,00 \times 1,12486 = 112,49$$

$$S_3 = 100,00(1,04)^2 = 100,00 \times 1,08160 = 108,16$$

$$S_4 = 100,00(1,04)^1 = 100,00 \times 1,04000 = l04,00$$

$$S_5 = 100,00(1,04)^0 = 100,00 \times 1,00000 = 100,00$$

S_t = ...= 541,63

Portanto, o montante de 5 aplicações mensais, iguais e consecutivas, de R$ 100,00 cada uma a taxa de 4% ao mês, dentro do conceito de séries pagamentos com termos vencidos é de $ 541,63.

Entretanto, o cálculo do montante, como foi feito, é muito trabalhoso. Se tivéssemos 50, 100 ou 200 prestações ele seria por demais monótono e estafante. Como objetivo de facilitar o trabalho vamos tentar aplicar uma fórmula que permita chegar ao valor final através de um caminho mais curto e rápido.

Sabemos que $S_t = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

Substituindo S_1, S_2,.., S_5 pelos seus respectivos valores sem se efetuarem os cálculos, temos:

$$S_t + 100{,}00(1{,}04)^4 + 100{,}00(1{,}04)^3 + 100{,}00(1{,}04)^2 + 100{,}00(1{,}04)^1 + 100{,}00(1{,}04)^0$$

Como *o* valor 100,00 é constante em todos os termos, pode ser colocado em evidência:

$$S_t = 100{,}00[(1{,}04)^4 + (1{,}04)^3 + (1{,}04)^2 + (1{,}04)^1 + (1{,}04)^0]$$

ou

$$S_t = 100{,}00[(1{,}04)^0 + (1{,}04)^1 + (1{,}04)^2 + (1{,}04)^3 + (1{,}04)^4]$$

Como a série $(1{,}04)^0 + (1{,}04)^1 + (1{,}04)^2 + (1{,}04)^3 + (1{,}04)^4$ representa a soma de uma progressão geométrica de razão 1,04, podemos aplicar a fórmula:

$$S_{PG} = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}$$

que dá a soma dos termos de uma PG, em que a_1 representa o primeiro termo da série no número de termos e q a razão.

Sabendo-se que a_1 $(1{,}04)^0 = 1$, $= 1{,}04$ e $n = 5$, temos:

$$S_t = 100,00 \times \frac{1 \times (1,04)^5 - 1}{1,04 - 1} = 100,00 \times \frac{(1,04)^5 - 1}{0,04} \qquad (1)$$

$$S_t = 100,00 \times \frac{0,21665}{0,4} = 100,00 \times 5,41625 = 541,63$$

Portanto, chegamos ao valor do montante correspondente à aplicação de 5 parcelas iguais sem calcular os montantes individuais.

Como no problema R = 100,00, n = 5 e i = 0.04, substituindo na expressão (1) os valores numéricos pelos seus símbolos correspondentes temos a fórmula genérica:

$$S_t = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (2)$$

em que $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é o Fator de Acumulação de Capital representado por FAC(i,n).

Fator de Formação de Capital (FFC)

O FFC é obtido facilmente a partir da fórmula do montante deduzida no item anterior: $S_t = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Essa fórmula, como vimos, é utilizada para obter o valor do montante, quando são conhecidos o valor das prestações, a taxa e o número de prestações. Quando a incógnita do problema é o valor das prestações, basta fazer:

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \Rightarrow \boxed{R = S \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}} \qquad (3)$$

em que $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ é chamado Fator de Formação de Capital, representado por FFC(i,n). Portanto, a expressão (3) pode ser assim escrita:

$$\boxed{R = S \times FFC(i,n)}$$

Fator de Valor Atual (FVA)

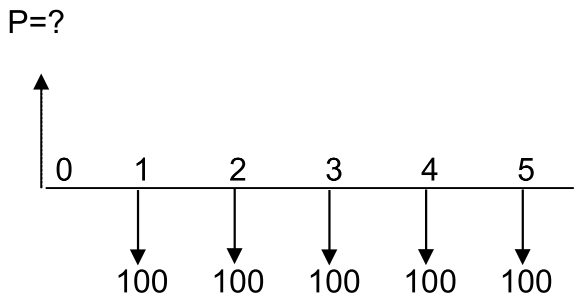
Da mesma forma que deduzimos o Fator de Acumulação de Capital, vamos deduzir o Fator de Valor Atual para a série de pagamentos iguais ou uniformes. Partiremos do seguinte problema prático:

Qual o valor que, financiado à taxa de 4% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 5 prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 100,00 cada uma?

O que se quer é o valor presente dessa série de 5 parcelas iguais. Mais uma vez, utilizaremos as ferramentas que conhecemos para solucionar esses problemas. Com relação a valor presente ou atual, somente sabemos resolver os casos com pagamentos simples, ou seja, aqueles que apresentam um único pagamento. Assim, vamos resolver o problema por partes, admitindo-se que cada prestação corresponda a um financiamento isolado.

Esquematicamente:

R = 100,00   i = 4%   n = 5   P = ?



Já vimos que a fórmula para o cálculo do valor atual é obtida a partir da fórmula do montante, como segue:

$$S = P(1+i)^n \Rightarrow P = \frac{S}{(1+i)^n} \Rightarrow P = S \times \frac{1}{(1+i)^n}$$

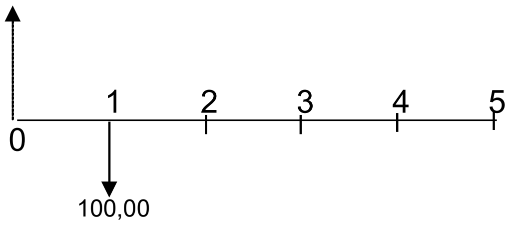
No problema, cada prestação R = \$ 100,00 representa o montante (ou valor futuro) individual de um capital inicia que desconhecemos, aplicado a taxa de 4**%** ao mês, e por prazos que vão de 1 a 5 meses. O que queremos e determinar o capital inicial ou o valor presente dessas prestações no “momento zero”.

Para a primeira prestação, o valor presente é calculado como segue:

$$P_1 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^1} = 100,00 \times 0,96154 = 96,15$$

Esquematicamente:

P_1=96,15



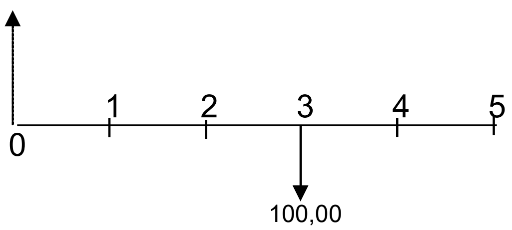
Para a terceira prestação:

$$P_3 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^3} = 100,00 \times 0,88900 = 88,90$$

O expoente 3 da expressão $\frac{1}{(1,04)^3}$ representa o número de meses decorridos entre a data fixada para o cálculo do valor presente e a data do vencimento da terceira prestação:

Esquematicamente:

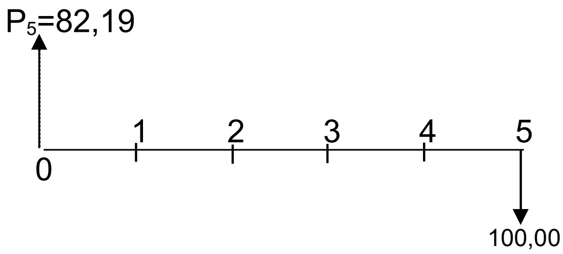
P_3=88,90



O valor presente da quinta prestação é assim obtido:

$$P_5 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^5} = 100,00 \times 0,82193 = 82,19$$

Esquematicamente:



Resumindo, os valores presentes das 5 prestações são calculados como segue:

$$P_1 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^1} = 100,00 \times 0,96154 = 96,15$$

$$P_2 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^2} = 100,00 \times 0,92456 = 92,46$$

$$P_3 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^3} = 100,00 \times 0,88900 = 88,90$$

$$P_4 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^4} = 100,00 \times 0,85480 = 85,48$$

$$P_5 = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^5} = 100,00 \times 0,82193 = 82,19$$

$$P_t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 445,18$$

Assim o valor financiado (ou o valor presente), que pode ser pago ou amortizado em 5 prestações iguais mensais e consecutivas de R$ 100,00 cada uma, dentro do conceito de série de pagamentos com termos vencidos, é de R$ 445,48.

Vamos agora como fizemos para o caso do FAC, chegar a um fator que permita com uma única multiplicação, obter o resultado final utilizando somente conhecimentos de matemática elementar.

Sabemos que:

$$P_t = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

Substituindo P_1, P_2, ..., P_5 pelos seus respectivos valores, sem efetuar os cálculos, temos:

$$P_t = 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^1} + 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^2} + 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^3} + 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^4} + 100,00 \times \frac{1}{(1,04)^5}$$

Colocando o valor 100 em evidência, temos:

$$P_t = 100,00\left[\frac{1}{(1,04)^1} + \frac{1}{(1,04)^2} + \frac{1}{(1,04)^3} + \frac{1}{(1,04)^4} + \frac{1}{(1,04)^5}\right]$$

Os termos que aparecem dentro dos colchetes constituem uma soma de PG

de razão $\frac{1}{(1,04)}$ Como o trato com expressões fracionárias é um pouco mais complexo, vamos, com uma simples operação, transformar esta série numa soma da mais fácil visualização e cálculo. Para tanto, aplicaremos o conceito de Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

MMC = $(1,04)^5$ que é o número divisível por qualquer um dos denominadores da série

Efetuando os cálculos temos:

$$P_t = 100,00\left[\frac{(1,04)^4 + (1,04)^3 + (1,04)^2 + (1,04)^1 + 1}{(1,04)^5}\right]$$

O numerador da expressão entre colchetes constitui-se numa soma de PG, de razão 1,04, com número de termos igual a 5; esta série, sendo escrita em ordem inversa, tem como primeiro termo o número 1, que embora tenha um “jeitão” diferente, faz parte da “família” pois é um “legítimo” $(1,04)^0$.

Aplicando a fórmula conhecida $S_{PG} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$,temos

$$P_t = 100{,}00 \times \frac{\frac{1 \times (1{,}04)^5 - 1}{1{,}04 - 1}}{(1{,}04)^5} = 100{,}00 \times \frac{(1{,}04)^5}{(1{,}04)^5} \times 0{,}04 \qquad (4)$$

$$P_t = 100{,}00 \times \frac{1{,}21665 - 1}{1{,}21665 \times 0{,}04} = 100{,}00 \times 4{,}45182 = 445{,}18$$

O valor R$ 445,18 coincide com o anteriormente obtido, o que nos assegura ser correto o novo processo de cálculo.

Substituindo na expressão (4) os valores numéricos neles respectivos símbolos, temos a fórmula genérica:

$$S_t = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \qquad (5)$$

em que $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$ é o FATOR DE VALOR ATUAL, representado por FVA(i,n)

Fator de Recuperação de Capital (FRC)

É deduzido da fórmula anterior corno segue:

$$P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$R = \frac{P}{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}} \Rightarrow$$

$$R = P \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \qquad (6)$$

em que $\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$ é chamado Fator da Recuperação de Capital, que representaremos por FRC(i,n). Portanto, a expressão (6) pode ser assim escrita

$$\boxed{R = P \times FRC(i,n)}$$

Obs.: FFC é o inverso do FAC

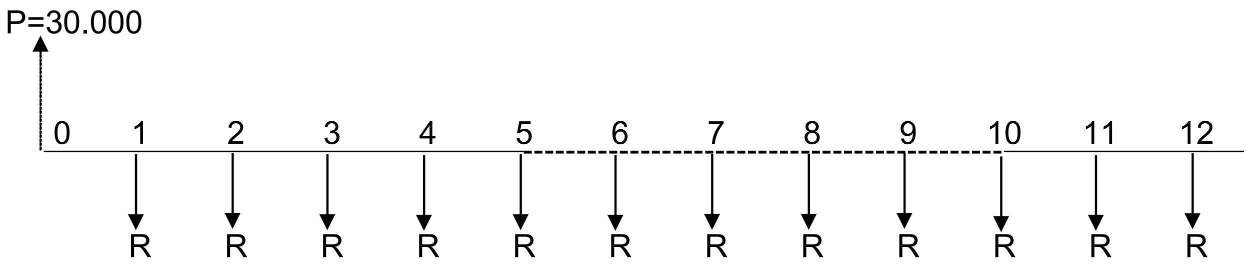
FRC é o inverso do FVA, ou seja:

$$FFC = \frac{1}{FAC} \text{ e } FRC = \frac{1}{FVA}$$

Sem dúvida alguma, o FRC é o fator mais utilizado na prática. Vejamos um exemplo:

Um empréstimo de R$ 30.000,00 é concedido por uma instituição financeira para ser liquidado em 12 prestações iguais, mensais e consecutivas. Sabendo-se que a taxa de lucros é 3,5% ao mês, calcular o valor da prestação.

Esquematicamente:



Dados:

P = 30.000,00

N = 12 prestações mensais

I = 3,5% ao mês

R = ?

Solução:

$$R = P \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = 30.000,00 \times \frac{(1,035)^{12} \times 0,035}{(1,035)^{12} - 1}$$

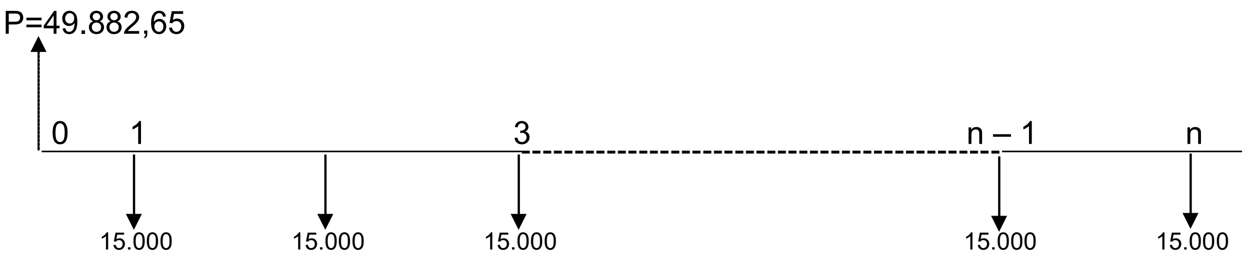
R = 30.000,00 $\times$ 0,10348 = 3.104,40

Vejamos agora dois exemplos em que n e i são as incógnitas.

Problema em que "n" não é conhecido:

Calcule o número de prestações semestrais de R$ 15.000,00 cada uma, capaz de liquidar um financiamento de R$ 49.882,65, à taxa de 20% ao semestre.

Esquematicamente:



Dados:

R = 15.000,00

P = 49.882,65

I = 20% ao semestre

N = ?

Solução: Podemos usar a fórmula que nos dá o valor presente ou a que nos dá o valor das prestações; vamos utilizar a primeira.

$$P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times 1}$$

$$49.882,65 = 15.000,00 \times \frac{(1,20)^n - 1}{(1,20)^n \times 0,20}$$

$$\frac{(1,20)^n - 1}{(1,20)^n \times 0,20} = 3,32551 \Rightarrow \frac{(1,20)^n - 1}{(1,20)^n} = 0,66510$$

$(1,20)^n - 1 = 0,66510 \times (1,20)^n$

$(1,20)^n - 66510 \times (1,20)^n = 1$

$(1,20)^n \times (1 - 0,66510) = 1 \Rightarrow (1,20)^n = 2,98597$

Utilizando logaritmo neperiano, temos:

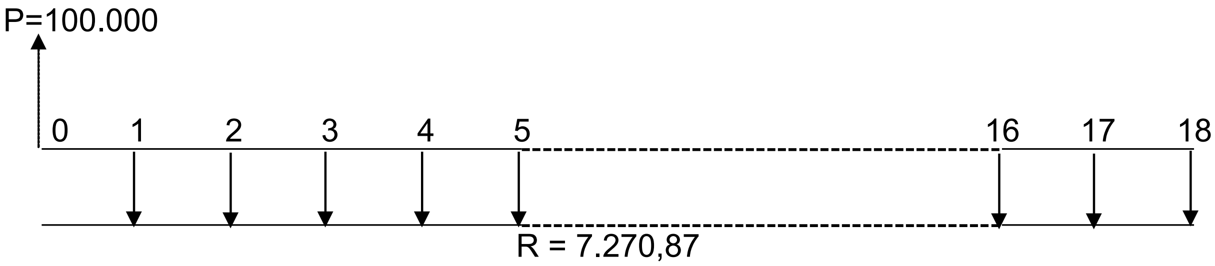
$$n = \log 1{,}20 = \log 2{,}98597$$

$$n = \frac{\log 2{,}98597}{\log 1{,}20} = \frac{1{,}09392}{0{,}18232} = 6 \text{ prestações semestrais}$$

Problema em que a taxa "i" não é conhecida:

Determinar a que taxa anual foi firmada uma operação de empréstimo de R$ 100.000,00, para ser liquidada em 18 prestações mensais, iguais e consecutivas de R$ 7.270,87 cada uma?

Esquematicamente:



Dados:

R = 7.270,87

P = 100.000,00

n = 18 prestações = 18 meses

i = ?

Solução:

$$P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$100.000{,}00 = 7.270{,}87 \times \frac{(1+i)^{18} - 1}{(1+i)^{18} \times i}$$

$$13{,}75351 = \frac{(1+i)^{18} - 1}{(1+i)^{18} \times i}$$

O valor de i somente pode ser obtido por "tentativa e erro”. Atribuindo-se valores sucessivos a essa variável vamos encontrar i = 3%. Portanto, a taxa de juro é de 3% ao mês.