SÉRIES DE FOURIER COM O USO DO GEOGEBRA

Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato - DMA/UFTM

XIII SEEMAT/UFTM

Uberaba, 30 de outubro de 2024

Lei do resfriamento de Fourier

Considere duas placas, P_1 e P_2, de áreas iguai a A, mantidas constantemente às temperaturas T_1 e T_2 respectivamente; se colocadas paralelamente a uma distância d uma da outra, haverá passagem de calor da placa mais quente para a mais fria, e a quantidade de calor, por unidade de tempo, transferida de uma palca para outra é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d}$$

onde k é a condutibilidade térmica do material entre as placas.

Considerando $u(x,t)$ a temperatura de um ponto de abcissa x no tempo t, temos:

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d} = \frac{kA|u(x+d,t) - u(x,t)|}{d}$$

e, fazendo $d \to 0$, definimos o fluxo de calor na direção positiva do eixo x como uma função

$$q(x,t) = -kAu_x(x,t)$$

Condução do calor numa barra

Fixando um elemento da barra entre x_0 e $x_0 + \delta$, a quantidade de calor (q) que aí entra, no período de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$ é:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t)dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t)dt$$

ou seja

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t)]Adt$$

Condução do calor numa barra

Sabemos que o calor específico (c) de uma substância é a quantidade de calor necessária para elevar em 1^oC a temperatura de um grama dessa substância. Portanto,

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c u_t(x,t) \rho A \, dxdt$$

onde ρ é a densidade da substância.

Usando o TFC, temos:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0+\delta, t) - u_x(x_0, t)]A dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} k u_{xx}(x, t) A dx dt$$

Logo,

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} c u_t(x, t)\rho \, dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} k u_{xx}(x, t) dx dt$$

Condução do calor numa barra

Desta forma, podemos concluir que:

$$c\rho u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t)$$

ou seja,

$$u_t = K u_{xx}$$

onde $K = k/(c\rho)$ é a difusibilidade térmica.

Condução do calor numa barra

Material	$K(\text{cm}^2/\text{s})$
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Ferro fundido	0,12
Granito	0,011
Argila	0,0038
Água	0,00144

Problema de valor de contorno

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx}, \; 0 < x < L, \; t > 0 \\ u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \; t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < L \end{cases}$$

O método da separação de variáveis nos fornece:

$$u(x,t) = c_3 e^{-K\lambda^2 t}(c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x),$$

Usando as condições de contorno, temos:

$$u_n = A_n e^{-K(n^2\pi^2/L^2)t} \sin \frac{n\pi}{L} x, \; (A_n = c_2 c_3)$$

Problema de valor de contorno

Usando o princípio da superposição temos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-K(n^2\pi^2/L^2)t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Dai, a condição inicial nos fornece:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

O conjunto de funções definidas no intervalo $[-p, p]$

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{p}x,\ \cos\frac{2\pi}{p}x, \ldots, \sin\frac{\pi}{p}x,\ \sin\frac{2\pi}{p}x, \ldots\right\} =$$

$$= \left\{1,\ \cos\frac{m\pi}{p}x,\ \sin\frac{n\pi}{p}x\right\},\ m, n \in \mathbb{N}^*$$

é ortogonal em relação ao produto interno

$$< f, g >= \int_{-p}^{p} f(x)g(x)dx$$

Se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right]$, temos que:

$$\int_{-p}^{p} f(x).1 dx = pa_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx$$

$$\int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx = \int_{-p}^{p} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x dx = a_n p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

$$\int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx = \int_{-p}^{p} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x dx = b_n p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx$$

Teorema: Se f e f' são parcialmente contínuas no intervalo $(-p, p)$, então a série de Fourier, neste intervalo, converge para $f(x)$ nos pontos de continuidade e, em um ponto de descontinuidade, a série de Fourier converge para a média

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

Resumindo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x \right],$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$$

Série de Fourier - função par e ímpar

	PAR	ÍMPAR
$f(x) =$	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x$
$a_0 =$	$\frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx$	0
$a_n =$	$\frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} xdx$	0
$b_n =$	0	$\frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} xdx$