Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE MATRIZES E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES COM O USO DO EXCEL

PRODUTO EDUCACIONAL

PROF. JOÃO DE SOUSA

CUIABÁ – MT

2024

Sumário

ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE MATRIZES E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES COM O USO DO EXCEL

1. Resumo

Este trabalho consiste em apresentar algumas aplicações de matrizes, bem como realizar operações entre as matrizes, usando Excel e apresentando alguns comandos para realizar as operações que envolvam matemática básica e uso do Excel para a resolução de questões que envolvam as matrizes apresentadas no texto., além de apresentar outras matrizes não tão comuns no ensino básico, com a finalidade de estimular a curiosidade dos alunos na busca do estudo da aplicação de matrizes em situações cotidianas. O trabalho consistirá em enunciar alguns conceitos básicos num primeiro momento visando esclarecer conceitos de matemática básica e estimular o aluno a buscar conceitos mais robustos sobre os vários tipos de matrizes, em seguida apresentar algumas aplicações e num terceiro momento aplicar o Excel para resolver os problemas a serem propostos nesse texto.

Palavras chave: matrizes, Excel, aplicações de matrizes, matemática básica e matrizes, resolução de problemas.

2. Introdução

O estudo sobre matrizes envolve uma riqueza imensa e também gera muitas dúvidas em como podemos aplicar matrizes a diversas situações do cotidiano. Não é difícil encontrar alunos que além da dificuldade com matrizes, evitam aprofundar seus conhecimentos sobre assunto por achar que muito complexo, então nesse texto, o que se deseja é mostrar algumas aplicações e além disso, realizar operações básicas entre as matrizes, naturalmente com as condições necessárias e suficiente para a realização dessas operações e num momento posterior usar o Excel para realizar as operações, mostrando que não apenas é possível como é relativamente simples o uso dessa ferramenta.

Apresentaremos alguns conceitos de matrizes, conectando o estudo de atrizes a situações simples enunciando algumas propriedades que devemos usar neste trabalho com o intuito de revisar o conteúdo amplamente conhecido e disseminado no ensino médio, bem como verificar o uso dessas propriedades com o uso do Excel.

3. ESTUDANDO AS MATRIZES

Muitas das vezes em que ouvimos falar sobre matrizes, algumas perguntas são sugeridas, como, por exemplo:

i) O que é uma matriz?
ii) Para que serve uma matriz e onde vou usar?
iii) Como podemos operar matrizes?
iv) É possível representar graficamente a matriz?

Neste texto, vamos tentar esclarecer algumas das perguntas acima e entender a razão e a importância das matrizes. Vamos trabalhar no Corpo dos Reais (conjunto com algumas propriedades algébricas particulares), para melhor entendimento dos conceitos apresentados.

Podemos dizer que uma matriz é uma tabela, onde é possível alocar valores como, por exemplo:

A	b	c
D	e	f
G	h	i

Com relação à segunda pergunta, podemos dizer que é possível realizar operações entre duas ou mais tabelas, sendo importante verificar as condições de operações dessas tabelas com seus respectivos elementos. Podemos ainda especificar (dar nomes) os elementos dessa tabela, por exemplo: suponha que você tem uma pequena roça e que você planta arroz, feijão e mandioca e venda esses produtos numa feira. Suponha, ainda, que você tenha que fazer a colheita desses produtos, da seguinte forma.

1º dia → colhe-se 5 kg de arroz, 2 kg de feijão e 4 kg de mandioca.

2º dia→ colhe-se 4 kg de arroz, 3 kg de feijão e 5 kg de mandioca.

Então, é possível organizar uma tabela com esses dados para um melhor entendimento de como a colheita está se comportando? A resposta a essa pergunta é sim, conforme tabela a seguir:

Tabela 1 – colheita de arroz, feijão e mandioca

Produto Kg / Tempo dias	Arroz	Feijão	Mandioca
1º	5	2	4
2°	4	3	5

Note que temos uma organização dos dados que permite um fácil entendimento; note ainda que algumas observações são necessárias para entendimento dessa tabela.

(i) É importante verificar as relações entre quantidade de produtos e o dia da colheita.

(ii) Cada elemento tem uma posição fixada que dá informações precisas, por exemplo, no 1º dia, foram colhidos 4 kg de mandioca. Observando as posições de cada elemento da tabela, podemos escrever a matriz da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, temos o que chamamos de matriz e, assim, organizamos os dados obtidos.

Nesta matriz, temos as linhas, as colunas e o endereço de cada elemento.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \end{array} \end{array}$$

Onde:

L_i é dito linha i, ou seja, L_1 é a linha 1 ou primeira linha, e L_2 é a linha 2 ou segunda linha.

C_i é dito coluna i, ou seja, C_1 é a coluna 1 ou primeira coluna, C_2 é a coluna 2 ou segunda coluna e assim por diante.

Cada elemento dentro desta matriz tem o que chamamos de "endereço", que o identifica numa posição fixada dentro da matriz, por exemplo: o valor 2, na matriz, está na primeira linha (L_1) e na segunda coluna (C_2) e é representado por uma letra minúscula do alfabeto da seguinte forma.

A letra i indica a linha no qual o elemento se encontra. a_{ij} A letra j indica a coluna no qual o elemento se encontra.

Por exemplo: a_{23} informa que o elemento a está na segunda linha e terceira coluna na matriz.

As matrizes são representas por letras maiúsculas do alfabeto. Assim, podemos dizer que nossa matriz é.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que:

(i) a_{12}= *2*, ou seja, o valor *2* está identificado por um endereço que informa exatamente onde este elemento se encontra e o que ele representa.

(ii) a_{11}= *5* =a_{23}, porém essa igualdade não é o que parece, pois o elemento a_{11}= *5* representa a quantidade de arroz colhida no primeiro dia e a_{23}=*5* representa a quantidade de mandioca colhida no *2º* dia. Eis a razão de saber a localização exata de cada dado.

Considere a tabela 2, a seguir, obtida da tabela 1:

Tabela 2: Total de produtos colhidos no dia

Produto Kg / Tempo dias	Arroz	Feijão	Mandioca	Total de produto colhido no dia
1º	5	2	4	11
2°	4	3	5	12

Suponha que queiramos relacionar os produtos colhidos no dia com o total de produtos colhidos no dia. Como fazemos isso?

Para fins de facilitar nosso cálculo, vamos considerar que **x** $\Longrightarrow$ **arroz, y** $\Longrightarrow$ **feijão** e **z** $\Longrightarrow$**mandioca**. Assim podemos reescrever os dados da tabela da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 11 \\ 4x + 3y + 5z = 12 \end{cases}$$

Desta forma, tem-se que foram colhidos no primeiro dia um total de 11 kg de produtos, sendo 5 kg de arroz, 2 kg de feijão e 4 kg de mandioca, de forma que logo são observadas as mesmas condições de raciocínio para o segundo dia.

Ao escrevermos a matriz conforme ($\mathcal{S}$), estamos relacionando esta matriz com o que se define como ***sistema linear***, ou seja, estamos associando nossa matriz ao nosso sistema linear $\mathcal{S}$, que será objeto de estudo em momento posterior nesse trabalho. Porém é possível relacionar este sistema linear de forma a obter uma igualdade conforme mostrado a seguir:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 11 \\ 4x + 3y + 5z = 12 \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito da seguinte forma, chamada de *forma matricial*:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Vamos considerar que:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Onde a matriz $\boldsymbol{A}$ tem 2 linhas e 3 colunas, a matriz $\boldsymbol{v}$ tem 3 linhas e uma coluna e a matriz $\boldsymbol{b}$ tem 2 linhas e uma coluna.

O número de linhas e colunas definem a ordem de uma matriz e podemos escrever que.

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{2x3}$, $\boldsymbol{v} = [v_{ij}]_{3x1}$ e $\boldsymbol{b} = [b_{ij}]_{2x1}$

onde a, v e b representam a posição de cada elemento na linha i e coluna$j$ de cada uma das matrizes apresentadas.

Desta forma, temos que a matriz $\boldsymbol{A}$ tem ordem 2x3, a matriz $\boldsymbol{v}$ tem ordem 3 e $\boldsymbol{b}$ tem ordem 2.

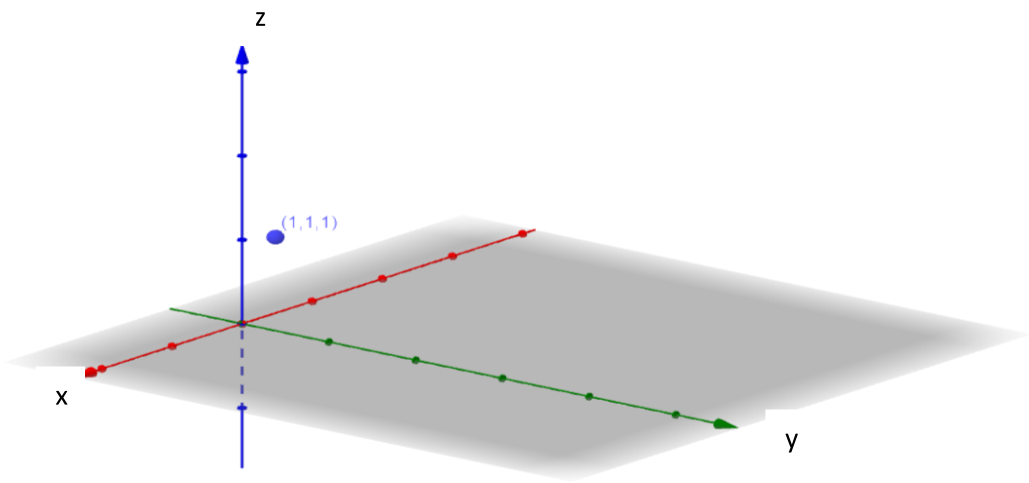
Assim, temos que:

$S = \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 11 \\ 4x + 3y + 5z = 12 \end{cases};$ pode ser escrito na forma matricial como $\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{b}$.

Note ainda que, quando $x = 1, y = 1\ ez = 1$, tem-se que $v = (1,1,1)$ é solução do sistema linear S.

É possível representar esta solução num sistema de eixos e, nesse caso, tem-se:

Figura 1: solução do sistema linear S.



Esse sistema de eixos é o que, comumente, chamamos de $\mathcal{R}^3$, que é a representação dos valores reais assumidos por x, y, z, observando que, à proporção que estes valores mudam, percorre-se o eixo do reais nas direções de x, y, z.

Observação:

$(i)\mathbb{R}^3$ é escrito como $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que representa os valores que cada variável x, y ou z vão assumindo ao longo dos eixos. Poderíamos escrever $\mathbb{R}^3$ como $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ de uma forma mais didática, e isso significa que os eixos x, yez assumem valores reais quaisquer.

(ii) $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$ pode ser escrito como um vetor, porém é necessário ficar atento, pois, quando se fala em vetor, tem-se associado à ideia de módulo, direção e sentido. Temos posteriormente que, sob certas condições e propriedades, o que chamamos de **Espaço Vetorial**, cujos elementos são vetores, mas que nem sempre é possível ter uma representação gráfica, como é o caso das matrizes.

Agora que esclarecemos o que são matrizes, vamos definir e estudar suas propriedades.

Definição: Uma matriz é uma tabela retangular, onde seus elementos (entradas) são dispostos em linhas e colunas.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Assim, escrevemos que $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$, $1 \leq i \leq m$e $1 \leq j \leq n$,onde i representa o nº de linhas, j o nº de colunas e a_{ij} o elemento na posição $i,\ j$ na matriz A, mxné a ordem da matriz A.

<u>Observação</u>: os elementos a_{ij} podem ser números reais, complexos ou qualquer objeto numérico.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ é uma matriz *2 x 2*.Nesse caso, onde o nº de linhas é igual ao número de colunas, diz que a matriz é **quadrada** e de ordem 2.

$B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz *2 x 3*. Nesse caso, o nº de linhas é diferente do nº de colunas, e esta matriz tem ordem 6.

$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz *3 x 1*.Nesse caso, o nº de linhas é diferente do nº de colunas, e esta matriz tem ordem 3.

Definição: Seja $a_{ij} \in \mathbb{R}, A_{mxn}$ uma matriz, definida como uma aplicação de $\boldsymbol{IxJ}$em $\mathbb{R}$. Ou seja:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{I}\,X\,\boldsymbol{J} \longrightarrow \mathbb{R}. \\ (i,j) \longmapsto a_{ij}, 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Temos que a cada par (i,j) com a operação corresponde a um elemento $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

ORDEM DE UMA MATRIZ

A ordem de uma matriz é dada pelo produto $\boldsymbol{mxn}$, onde $\boldsymbol{m}$ indica o número de linhas e $\boldsymbol{n}$ o número de colunas.

Denota-se o conjunto de matrizes mxncom elementos $a_{ij} \in \mathbb{R},$ por $\mathbb{R}^{mxn}$, onde:

$$\mathbb{R}^{mxn} = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

Diz-se que uma matriz é quadrada, se o número de linhas é igual ao número de colunas e, nesse caso, temos as diagonais principais e secundárias, definidas a seguir:

Diagonal Principal: Seja a matriz quadrada $A_n = [a_{ij}]$. Diz-se que a diagonal principal é o conjunto.

$$D = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, então $D = (1,4,-3)$ é a diagonal principal da matriz A.

Considere a matriz B, a seguir:

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$, $D = (b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{34})$ é a diagonal principal da matriz B.

A diagonal formada pelos elementos $(0,4,-1)$na matriz A é dita **diagonal secundária,** assim como $(b_{41}, b_{32}, b_{23}, b_{14})$ é a diagonal secundária na matriz B.

MATRIZES ESPECIAIS

Existem matrizes que possuem particularidades específicas e são ditas especiais, sendo, por esta razão, caracterizadas e reconhecidas por denominação própria. Seguem algumas delas:

1. **Matriz quadrada:** Como já adiantamos anteriormente, diz-se que uma matriz é quadrada quando $m = n$ e representa-se por $A = [a_{ij}]_n$ou $A = [a_{ij}]_m$. Neste caso, diz-se que a matriz é quadrada de ordem m ou n.

Exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & \pi & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2. **Matriz identidade:**é uma matriz obrigatoriamente quadrada (notação: I_n), tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0\,, sei \neq j. \\ a_{ij} = 1, sei = j. \end{cases}$$

Exemplos:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ e } \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É utilizada, por exemplo, para a verificação da propriedade de multiplicação de matrizes.

3. **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada A_n tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, sei \neq j \\ \exists a_{ij} \neq 0, tq\ 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Ou seja.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ Pelo menos algum $a_{ii} \neq 0$.

Exemplo:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **Matriz Triangular:** tem-se dois tipos de matrizes triangulares, a saber: *matriz triangular superior* e *matriz triangular inferior*, conforme segue:

(i) Diz-se que uma matriz é triangular superior quando tem-se uma matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

Exemplo:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Diz-se uma matriz quadrada é triangular inferior, quando $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Exemplo:

$$C_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a\_42 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$D_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matrizes triangulares são utilizadas na solução de sistemas lineares, o que facilita o cálculo por substituição retroativa, que veremos mais adiante nesse material.

5. **Matriz Transposta:** Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{nxm}$. Dizemos que B é a transposta de A, se, e somente se, $b_{ij} = a_{ij}, \forall\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ e denotamos por $B = A^t$

Assim, tem-se que:

$$A^t = B \leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}\ , \forall i, \forall j$$

B é dita transposta de A e $b_{ij} = a_{ji}$ e diz que as linhas de B são trocadas pelas colunas de A.

Exemplo: seja a matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 9 & 7 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & \frac{2}{5} & 5\end{bmatrix}_{4x3}$$

A transposta de A é uma matriz de ordem *4x3* que se obtém trocando as linhas por colunas, ou seja;

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 9 & 2 & 3\\ -3 & 7 & 0 & \frac{2}{5}\\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 4\end{bmatrix}$$

As matrizes transpostas apresentam algumas propriedades, a saber:

$(i)(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$. A transposta da inversa(A^{-1})é igual a inversa da transposta.

(ii) A transposta da soma de matrizes é igual a soma de suas transpostas.

$$(A+B)^t=A^t+B^t.$$

(iii) Seja k uma constante, então.

$$(kA)^t=kA^t.$$

(iv) A transposta de um produto comuta ao produto das transpostas, ou seja.

$$(AB)^t=B^t\cdot A^t.$$

(v) A transposta da matriz identidades é a própria matriz identidade, ou seja:

$$\mathrm{I}_n{}^t=\mathrm{I}_n.$$

(vi) A transposta da transposta é igual a própria matriz.

$$(A^t)^t=A.$$

Vamos demonstrar algumas dessas propriedades, a seguir:

$\boldsymbol{(ii)(A+B)^t=A^t+B^t}$.

Sejam $A + B = C = (c_{ij})_{mxn}$ e D a transposta de C, tal que:

$$D = C^t$$
$$(d_{ij})_{nxm} = (c_{ji})_{mxn}$$
$$= (a_{ji} + b_{ji})_{mxn}.$$
$$= (a_{ji})_{mxn} + (b_{ji})_{mxn}.$$
$$= A^t + B^t. \forall i, j.$$

$(\boldsymbol{iii})(\boldsymbol{kA})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{kA^t}$.

Para melhor entendimento dessa propriedade, vamos considerar um caso particular de uma matriz A de ordem 3×2 e, em seguida, mostrar uma forma geral para a propriedade.

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \Longrightarrow kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow (kA)^t = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{21} & ka_{31} \\ ka_{12} & ka_{22} & ka_{32} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} = kA^t$$

De uma forma mais geral, temos:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \Longrightarrow A^t = (a'_{ji})_{n\times m} \Longrightarrow kA^t = k(a'_{ji})_{n\times m} = (ka'_{ji})_{n\times m} = (kA)^t$$

Logo: $kA^t = (kA)^t$.

$(\boldsymbol{iv})(\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{B^t} \cdot \boldsymbol{A^t}$.

Assim como no item anterior e buscando um melhor entendimento dessa propriedade, vamos considerar um caso particular de uma matriz A de ordem 2×2 e uma matriz B de ordem 2×3 e, em seguida, mostrar o funcionamento da propriedade.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} \\ a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \\ a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= B^t . A^t$$

Geralmente:

Tomando-se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$

Temos que:

$A = (a_{ij})_{m \times n} \Longrightarrow A^t = (a_{ji})_{n \times m}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p} \Longrightarrow B^t = (b_{ji})_{p \times n}$

Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{m \times p}$

Temos que:

$$(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{p \times m}$$

Mas

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} . a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} . a'_{ji} = c'_{ki}$$

$\boldsymbol{(vi) (A^t)^t = A.}$

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\,x\,m}$, tal que $B = A^t$, ou equivalente $B^t = A$. Por definição, se B é a transposta de A e A é a transposta de B, então.

$b_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, j.$

Considere.

$$B = A^t = (a_{ji})_{n\,x\,m};$$

Então,

$$(A^t)^t = (a_{ij})_{m\,x\,n} = A,$$

Logo,

$$(A^t)^t = (B)^t = B^t = A\,.$$

6. **Matriz simétrica:** Seja A uma matriz quadrada tal que $A = [a_{ij}]_n$. Dizemos que A é simétrica, se, e somente se, $A = A^t$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Note que $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, ou seja, $A = A^t$.

A título de conhecimento, temos que uma aplicação de matriz simétrica é vista no Teorema Espectral em álgebra linear, que diz que toda matriz simétrica é diagonalizável por uma base de autovetores que é ortonormal. Segue o teorema:

Teorema Espectral: Suponha $\boldsymbol{A}$ uma matriz simétrica com coeficientes reais, nessas condições.

(i) Todos os autovalores de A são reais.

(ii) Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

(iii) A dimensão do auto-espaço associado a um autovalor é igual a multiplicidade deste autovalor de uma raiz do polinômio característico.

(iv) Existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovalores de A;

(v) A é diagonalizável por uma matriz mudança de coordenadas ortonormal P. A matriz P cujas colunas são autovetores (ortonormais) de A é tal que:

$$P^t AP = P^{-1}AP = D.$$

Onde D é uma matriz diagonal.

7. **Matriz anti-simétrica:** Dizemos que A, matriz quadrada, é anti-simétrica, se, e somente se, $A^t = -A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Teorema: Se A é uma matriz de ordem n, então A pode ser escrita como forma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

Demonstração:

Afirmação: $1/_2\,(A + A^t)$ é simétrica, pois.

$$\left[\frac{1}{2}(A + A^t)\right]^t = \frac{1}{2}[A^t + (A^t)^t] = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

Tem-se que $1/_2\,(A - A^t)$é anti-simétrica, pois.

$$\left[\frac{1}{2}(A - A^t)\right] = \frac{1}{2}[A^t - (A^t)^t] = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t).$$

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Daí.

$1/_2\,(A + A^t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, que é simétrica.

e

$$^1/_2\,(A - A^t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$ que é anti-simétrica, logo conclui-se que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. **Matriz ortogonal:** Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é ortogonal se, e somente se, $A.A^t = A^t.A = \mathrm{I}$. Note que, além de quadrada, Aé inversível tal que,em sua inversão,(A^{-1}) tem-se que $A^{-1} = A^t$.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{bmatrix} ^1/_9 & ^8/_9 & -^4/_9 \\ ^4/_9 & -^4/_9 & -^7/_9 \\ ^8/_9 & ^1/_9 & ^4/_9 \end{bmatrix}.$$ Então:

$$A.A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16 \\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28 \\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_3.$$

Logo A é ortogonal, ou seja, satisfaz a condição $A^t.A = \mathrm{I}$ e $A^t = A^{-1}$.

Exemplo: Considere agora $u_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $u_2 = (b_1, b_2, b_3)$ e $u_3 = (c_1, c_2, c_3)$ tal que:

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, se A é ortogonal, então: $A.A^t = \text{I}$.

Note que:

$$A.A^t = \begin{bmatrix} {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & {c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_1}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{I}$$

Ou seja: $U_i.U_j = \begin{cases} 1, se\ i = j, & i, j = 1,2,3. \\ 0, se\ i \neq 0, & i, j = 1,2,3. \end{cases}$

Desta forma, tem-se que u_1, u_2, u_3são mutuamente ortogonais e tem comprimento unitário. /Assim, tem-se um conjunto ortogonal de vetores. Note, ainda, que cada passo é reversível, o que torna a reciprocidade verdadeira.

De forma geral, pode-se verificar o resultado para qualquer matriz quadrada, ou seja:

(i) A é ortogonal;

(ii) as linhas de A formam um conjunto ortonormal;

(iii) as colunas de A formam um conjunto ortonormal;

Em particular, para $n = 2$, vale o resultado apresentado no teorema a seguir:

Teorema: Toda matriz ortogonal $2x2$ tem a forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\ \theta \\ -sen\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\ \theta \\ sen\ \theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \text{ para algum } \theta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Sejam $u_1 = (a_1, a_2)$ e $u_2 = (b_1, b_2)$.

$$A.A^t = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {a_1}^2 + {a_2}^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 & {b_1}^2 + {b_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

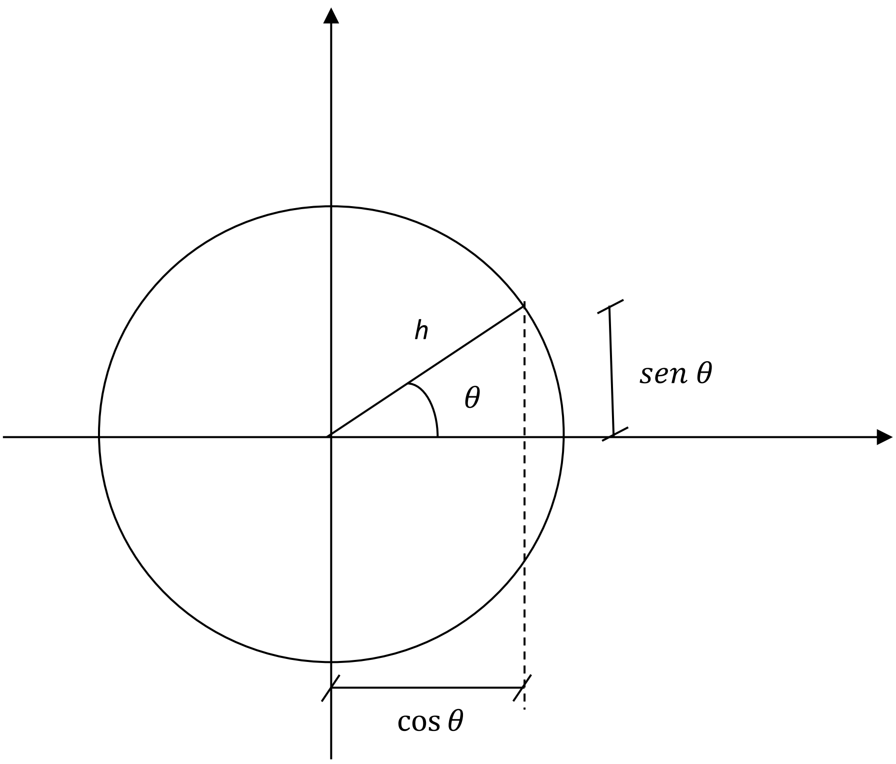
Logo os vetores são ortonormais, e podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Note que, no círculo Trigonométrico, é possível visualizar de forma mais clara fora dos eixos, para algum θ.

Figura 2: O ânguloθ no ciclo trigonométrico

$$h^2 = sen^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$



9. **Matriz Diagonal:** Uma matriz $A_n = [a_{ij}]$, quadrada, é dita matriz diagonal, se, e somente se, $a_{ij} = 0, \forall\, i \neq 0$ e $\exists\, i, a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq n$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. **Matriz idempotente:** Diz-se que uma matriz quadrada $A = \left[a_{ij}\right]_n$ é idempotente se, e somente se,:

$$A^2 = A.$$

Exemplo: seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

As matrizes idempotentes são *positivas semi-definidas*,ou seja, satisfazem a condição:

$$x^t A x > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n (ou\ \mathbb{C}^n).$$

Diz-se que uma matriz $A\ (n, n)$, é diagonalizável, se existir uma matriz D tal que A seja semelhante a D, ou seja, se existir $P\ (n, n)$ inversível que satisfaça a condição: $P^{-1}. A. P = D$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, note que, se tomarmos $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, é possível verificar que A é diagonalizável, pois:

$$P^{-1}. A. P = D \Rightarrow P. P^{-1}. A. P = P. D \Rightarrow A. P = P. D$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

A menos, da matriz identidade, tem-se que toda matriz idempotente é singular, ou seja, não admite inversa $\mathrm{I} = A.A^{-1} = A^2.A^{-1} = A(A.A^{-1}) = A$.

Se uma matriz A é idempotente, então a matriz $(\mathrm{I}_n - A)$ também o é. Note que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não admite inversa, ou seja, não existe $A^{-1}\ tal\ que\ A.A^{-1} = \mathrm{I}$.

11. Matriz Nilpotente: diz-se que uma matriz quadrada A é nilpotente, se:

$A^k = 0$, para alguém $k \geq z$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $k = 3$.

Diz-se que uma matriz quadrada é involutiva, se:

$$A_n{}^2 = \mathrm{I_n}.$$

12. Matriz Hermitiana: Seja $A \in \mathbb{C}^{nxn}$. Diz-se que A é uma matriz Hermitiana se, e somente se,

$$A = (\bar{A})^t$$

Onde $\bar{A}$ é a transposta da conjugada de A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ 3-5i & 4 \end{pmatrix} \ ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 4+2i \\ 1+i & 5 & -1-i \\ 4-2i & -1+i & -3 \end{bmatrix}$$

Note que A não é hermitiana, pois:

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ 3-5i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ 3+5i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 1-i & 3-5i \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$$

Logo $A \neq (\bar{A})^t$.

B é hermitiana, pois.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 4+2i \\ 1+i & 5 & -1-i \\ 4-2i & -1+i & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 4-2i \\ 1-i & 5 & -1+i \\ 4+2i & -1-i & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(\bar{B}\,)^t = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 4+2i \\ 1+i & 5 & -1-i \\ 4-2i & -1+i & -3 \end{bmatrix}$$

Logo $B = (\bar{B}\,)^t$ é hermitiana.

13. Matriz Positiva: Seja $A \in \mathbb{R}^{nxn}, então$ diz-se que A.

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [a \quad b] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a-b)^2 > 0.$$

É positiva se, e somente se:

$$x^t A, \qquad x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n; x \neq 0.$$

Exemplo:

$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ é definida positiva, pois:

Dado $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$; $x^t = [a \quad b \quad c]$

Então:

$$x^t.Q.x = [a \quad b \quad c]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$[2a - b \quad -a + 2b - c \quad -b + c]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(2a - b)a + (-a + 2b - c)b + (-b + 2c)c$$

$$\downarrow$$

$$2a^2 - ab - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2$$

$$\downarrow$$

$$2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2bc + 2c^2$$

$$\downarrow$$

$$a^2 + (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + c^2$$

$$\downarrow$$

$$a^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + c^2 \geq 0.$$

Existem vários tipos de matrizes, sendo que as aplicações, muitas vezes, exigem um tipo específico de matriz ou, em algumas situações, é importante algum tipo de informação que se deseja obter da matriz. Neste texto, vamos apresentar outras matrizes à proporção que a necessidade for aparecendo.

14. Matriz escalar: É uma matriz diagonal que tem os elementos dessa diagonal iguais entre si para *i* = *j*.

Exemplo:

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

15. Traço de uma matriz: Seja a matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$. Diz-se que o traço de A, ao número $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$, ou seja, o traço de A é dado pela soma dos elementos da diagonal principal, (Notação: $Tr(A)$).

Exemplo: Na matriz A e B apresentadas a seguir, tem-se que os traços são respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

$Tr(A) = 0 + 4 + (-1) = 3$

$Tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}$.

Propriedades dos traços.

$(i) Tr(\theta) = 0$, onde 0 é matriz nula.

$(ii) Tr(\mathrm{I}_n) = n$, onde I_n é a matriz identidade.

$(iii) Tr(A^t) = Tr(A)$

$(iv) Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.

$(v) Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$

$(vi) Tr(AB) = Tr(BA)$

OPERAÇÕES COM MATRIZES

1. Soma de Matrizes.

Seja $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$. Define- se soma de matrizes como

$$+ : \mathbb{R}^{mxn} \times \mathbb{R}^{mxn} \longrightarrow \mathbb{R}^{mxn}$$

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \longrightarrow [a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}].$$

Sendo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Onde $C = [c_{ij}]$ é a soma de $A + B$.

Propriedades:

Associativa

Sejam $A = [a_{ij}]; B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, então:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Demonstração:

$$(A + B) + C = ([a_{ij} + b_{ij}]) + [c_{ij}]$$

$$= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$$

$$= [a_{ij}] + [b_{ij}] + [c_{ij}]$$

$$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$$

$$= [a_{ij}] + ([b_{ij} + c_{ij}]) = A + (B + C).$$

Comutativa

$$A + B = B + A$$

Demonstração:

$$A + B = ([a_{ij} + b_{ij}]) = ([b_{ij} + a_{ij}]) = ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$$

Elemento Neutro

Dado $A = [a_{ij}], \exists\ \theta = [0_{ij}]$, tal que:

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Demonstração:

$$A + 0 = ([a_{ij} + 0_{ij}]) = [0_{ij} + a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

Elemento oposto

Dado $A = [a_{ij}]$, $\exists\ (-A) = [-a_{ij}]$, tal que:

$$A + (-A) = 0 = (-A) + A$$

Demonstração:

$$A + (-A) = ([a_{ij} - a_{ij}]) = ([-a_{ij} + a_{ij}]) = [0_{ij}] = 0$$

Exemplos:

a) É possível realizar a soma de matrizes via Excel. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Para realizar a soma dessas matrizes no Excel, precisamos seguir os passos:

1 – insira os números da matriz A e da matriz B conforme mostrado na Figura 3;

2 – realize a soma das matrizes de forma individual, ou seja:

Tabela 3: comando de soma no Excel

Soma A+B	
=A2+A6	=B2+B6
=A3+A7	=B3+B7

O resultado obtido é mostrado na Figura 3 a seguir:

Figura 3: Soma de matrizes no Excel

	A	B	C
1	matriz A		
2	1	2	
3	3	-1	
4			
5	matriz B		
6	2	-1	
7	3	4	
8			
9	soma A+B		
10	3	1	
11	6	3	
12			

b) Encontre $X \in \mathbb{R}^{2x3}$, tal que.

$$\alpha A - \beta X = 5A - \alpha B + X, \text{ com } \alpha = 2 \text{ e } \beta = -3.$$

Sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\alpha A - \beta X = 5A - \alpha B + X$$

$$\downarrow$$

$$2A + 3X = 5A - 2B + X$$

$$\downarrow$$

$$2X = 3A - 2B$$

$$\downarrow$$

$$X = \frac{1}{2}(3A - 2B)$$

$$\downarrow$$

$$X = \frac{1}{2}\left(3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -12 \\ 6 & -9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -2 & -16 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -1 & -8 \\ -2 & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2. Produto de um escalar por uma matriz.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{mxn}$. Então,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mxn} \longrightarrow \mathbb{R}^{mxn}$$

$$(\alpha, [a_{ij}]) \longrightarrow \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}], 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Assim como na soma, é possível realizar o produto de um número por uma matriz, utilizando o Excel, por exemplo:

Exemplo de Multiplicação de matriz por escalar no Excel

Sigamos os seguintes passos:

1 – escreva a matriz no Excel conforme figura abaixo:

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ e $k = 3$. Fazendo no Excel, temos a Figura 4 a seguir:

Figura 4: Multiplicação de matriz por escalar no Excel

	A	B	C
1			
2	A		
3	2	-4	5
4	-1	2	8
5	3	1	0
6			
7	K=3		
8			
9	kA=3A		
10	6	-12	15
11	-3	6	24
12	9	3	0
13			

2 – em seguida, escreva o número pelo qual todos os elementos da matriz serão multiplicados;

3 – escolha uma célula qualquer e, em seguida, escreva uma fórmula que vai multiplicar o primeiro elemento da matriz, com o valor a ser multiplicado. A fórmula para esse passo é:

= 3*A3

4 – Aperte "enter" e obtenha o valor do primeiro elemento da nova matriz desejada.

5 – copie esta célula para um mesmo número de células da matriz original, obtendo o resultado.

Propriedade do produto de um escalar por uma matriz.

Sejam α e β escalares e $A, B \in \mathbb{R}^{mxn}$. Então, vale as seguintes propriedades.

$(i)\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$

$(ii)(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A).$

$(iii)(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$

Exemplo

i) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha = {}^{1}/_{2}$.

Então:

$$\alpha(A+B) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

3. Multiplicação de Matrizes.

Sejam $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{nxp}$, o produto $A\ X\ B$ é definido da seguinte forma:

$A_{mxn} \cdot B_{nxp} = C_{mxp} = [C_{ij}]$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\,, 1 \leq i \leq m\ e\ 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot (-5) + (-1) \cdot \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 4 & (-1) \cdot (-5) + 0 \cdot 0 \\ (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 3 & (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 4 & (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -1 & 2 & 5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

Exemplo de multiplicação de matrizes no Excel

Sigamos os seguintes passos:

1 – escreva as matrizes *A* e *B* no Excel conforme figura abaixo:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Fazendo no Excel, temos:

Figura 5: Multiplicação de matrizes no Excel

	A	B	C
1	A		
2	2	-1	
3	-1	0	
4	-3	4	
5			
6	B		
7	1	-2	-5
8	3	4	0
9			
10	A.B=		
11	-1	-8	-10
12	-1	2	5
13	9	22	15
14			

2 – depois de inserir as matrizes A e B, deve-se verificar a ordem da matriz que será obtida do produto, ou seja, a matriz $A.B$. Nesse caso particular, temos que a matriz resultante do produto será quadrada e de ordem 3.

3 – selecione as células para receber os elementos da matriz resultante, nesse caso será uma matriz 3×3. Em seguida, selecione a tecla F2. Isso deve ser feito a fim de que a operação se realize na primeira célula da matriz $A.B$

4 –selecione o comando = MATRIZ.MULT(A2:B4;A7:C8), segure as teclas Ctrl e shift e, em seguida, aperte a tecla Enter. Isso fará com que os demais valores sejam alocados nos espaços da matriz selecionada $A.B$, obtendo o resultado desejado, conforme Figura 5.

Observação: Em geral, o produto de matrizes não é comutativo, ou seja:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Note que

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-5) \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + (-5) \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -21 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \neq A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -1 & 2 & 5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

A multiplicação no Excel é apresentada a seguir. Note que é importante informar a dimensão da matriz que se deseja obter para que o cálculo seja corretamente executado.

Figura 6: comutatividade do produto de matrizes

	A	B	C
1	A		
2	2	-1	
3	-1	0	
4	-3	4	
5			
6	B		
7	1	-2	-5
8	3	4	0
9			
10	A.B=		
11	-1	-8	-10
12	-1	2	5
13	9	22	15
14			
15	B.A=		
16	19	-21	
17	2	3	

Propriedades da Multiplicação de Matrizes.

Sejam $A = [a_{ij}]_{mxn}, B = [b_{ij}]_{nxp}$ e $C = [c_{ij}]_{pxq}$, então valem as seguintes propriedades:

$$(i) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Note que

$$A \cdot (B \cdot C) = [a_{ij}]_{mxn} \cdot \left([b_{ij}]_{nxp} \cdot [c_{ij}]_{pxq}\right) =$$

$$= \left([a_{ij}]_{mxn} \cdot [b_{ij}]_{nxp}\right) \cdot [c_{ij}]_{pxq} = (A \cdot B) \cdot C$$

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) & 5 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) \\ 0 \cdot 7 + 3 \cdot (-4) & 0 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 21 \\ -12 & -12 \end{bmatrix}$$

e

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 31 & 21 \\ -12 & -12 \end{bmatrix}$$

$(ii) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Exemplo

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Então

$$A \cdot (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 15 & 9 \\ 24 & 13 \end{bmatrix}$$

e

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 12 \\ 13 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 15 & 9 \\ 24 & 13 \end{bmatrix}$$

$(iii)(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$(B+C)\cdot A = (\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 & -11 \\ 21 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

e

$$B\cdot A + C\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 10 & 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 8 & -10 \\ 11 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 & -11 \\ 21 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

$(iv)\mathrm{I}_n \cdot A_{nxm} = A_{nxm}$ e $A_{nxm}\cdot \mathrm{I}_m = A_{nxm}$

Exemplo

$\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, então

$$\mathrm{I}_3\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Seja $\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $A\cdot \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(v) Seja 0_{pxm} (Matriz nula), então $0_{pxm}\cdot A_{mxn} = 0_{pxn}$

Exemplo

Sejam as matrizes

$0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$, então:

$$0 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(vi) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{nxp}$, então:

$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B).$$

Exemplo

Sejam $k = \frac{2}{3}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Então

$$k \cdot (A \cdot B) = 2/3\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 16 & 23 & 40 \\ 10 & 15 & 30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{14}{3} \\ \frac{32}{3} & \frac{46}{3} & \frac{80}{3} \\ \frac{20}{3} & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$$

MATRIZES EM BLOCO

Seja a matriz:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

Diz-se que A é uma matriz particionada ou em blocos, quando, a partir desta, obtemos submatrizes que são partes de A.Utilizam-se as linhas tracejadas para identificar cada submatriz desejada.

Exemplo

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Reescrevemos $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$.

Onde $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_{22} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

A decomposição de uma matriz A em blocos, em geral, é feita para facilitar operações, principalmente em matrizes de ordem elevadas e/ou com grande quantidade de termos nulos.

A partição deve acontecer para facilitar o resultado desejado, por exemplo;

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]$$

Onde $A_{11} = [a_{11}]$; $A_{12} = [a_{12} \quad a_{13}]$; $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ e $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

$$B = \left[\begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hdashline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hdashline b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right],$$

Onde $B_{11} = [b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13}]$; $B_{21} = [b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23}]eB_{31} = [b_{31} \quad b_{32} \quad b_{33}]$.

$$C = \left[\begin{array}{c:c:c} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right]$$

Onde $C_{11} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$; $C_{12} = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$ e $C_{13} = \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix}$

Operações com as matrizes em blocos

Adição:A adição das matrizes em bloco faz-se de maneira análoga à soma de matrizes quaisquer, atentando-se, porém, à realização da soma entre elementos de mesma posição nas matrizes em bloco e na matriz que contém cada bloco. Considere.

$$A = \left[\begin{array}{cc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right];\ B = \left[\begin{array}{cc:ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \hdashline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{array}\right]$$

Onde: $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$; $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{bmatrix}$

$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$ e $B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$; $B_{12} = \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$;

$B_{21} = \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix}$ e $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$

A soma da seguinte maneira:

$A_{11} + B_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$. De forma análoga, faz-se.

$$A_{12} + B_{12}\,; A_{21} + B_{21}\,; A_{22} + B_{22}.$$

A soma realizada em cada bloco compõe a soma $A + B$ dentro da matriz soma.

Multiplicação: Para o cálculo da multiplicação das matrizes em bloco, devemos verificar:

(i) O número de colunas da matriz que multiplica à esquerda deve ser igual ao número de linhas da matriz que multiplica à direita.

(ii) O número de colunas do bloco de uma matriz A_{mxn} deve ser igual ao número de linhas do bloco de B_{kxn}.

(iii) O número de linhas de cada bloco deve ser igual ao número de colunas dos blocos a multiplicar, de tal forma que devemos obter $A_{ij} \cdot B_{ji}$.

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcule $A \cdot B$, utilizando a multiplicação em bloco.

Solução: Façamos.

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad B = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Note que reescrevemos as matrizes A e B em bloco de matrizes e obtemos novas submatrizes, que deverão ser multiplicadas da seguinte forma.

$$A = \left(\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline 0_A & A_3 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad B = \left(\begin{array}{c:c} B_1 & B_2 \\ \hdashline 0_B & B_3 \end{array}\right)$$

A multiplicação de $A \cdot B$ acontece como se cada bloco fosse um elemento das matrizes, ou seja.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_A & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_B & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot 0_B & A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_3 \\ 0_A \cdot B_1 + A_3 \cdot 0_B & 0_A \cdot B_2 + A_3 \cdot B_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \cdot B_1 & A_2 \cdot B_2 + A_3 \cdot B_3 \\ 0_{1x3} & A_2 \cdot B_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline [0 \quad 0 \quad 0] & [2] \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule $A \cdot B$, utilizando a multiplicação em bloco.

Solução: Vamos organizar os blocos dentro das matrizes A e B, de tal forma que a multiplicação entre as submatrizes seja possível. Assim, obtemos.

$$A = \left[\begin{array}{c|c|cccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ \hline -5 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Onde:

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hdashline A_4 & 0_A & A_5 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{c:c} B_1 & B_2 \\ \hdashline 0_B & B_3 \\ \hdashline B_4 & B_5 \end{array}\right]$$

Cada matriz $A_i, B_i, i = 1, \dots, 5$ corresponde a cada submatriz representada pelas linhas tracejadas. Note, ainda, que a multiplicação $A \cdot B$ é possível, considerando que A é de ordem $2x3$,e B é de ordem $3x2$. Assim.

$$A \cdot B = A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & 0_A & A_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_B & B_3 \\ B_4 & B_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot 0_B + A_3 \cdot B_4 & A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_3 + A_3 \cdot B_5 \\ A_4 \cdot B_1 + 0_A \cdot 0_B + A_5 \cdot B_4 & A_4 \cdot B_2 + 0_A \cdot B_3 + A_5 \cdot B_5 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot 0_B + A_3 \cdot B_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -12 & -3 & 2 \\ 16 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_3 + A_3 \cdot B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ -7 & -11 \\ 29 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_4 \cdot B_1 + 0_A \cdot 0_B + A_5 \cdot B_5 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 25 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_4 \cdot B_2 + 0_A \cdot B_3 + A_5 \cdot B_5 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 \end{bmatrix}$$

Daí

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 & 18 & 2 \\ -12 & -3 & 2 & -7 & -11 \\ 16 & 9 & -5 & 29 & 9 \\ 14 & 25 & 2 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

Observação:

1) Na realização da multiplicação das matrizes, é importante que as submatrizes sejam obtidas de tal forma que a multiplicação entre os blocos seja possível, ou seja, obedeça às condições de tal multiplicação tal que o número da coluna da matriz $\underline{A}$seja igual ao número de colunas da matriz B.

2) O produto de matrizes em bloco é muito eficiente para matrizes com grande número de elementos nulos e matrizes de grande porte.

FORMA QUADRÁTICA DE UMA MATRIZ

Funções quadráticas: Uma forma quadrática Q com variáveis: $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um polinômio de forma:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} \cdot {x_1}^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_1 \cdot x_n + a_{22} \cdot {x_2}^2 +$$
$$+ a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + \cdots + a_n \cdot {x_n}^2$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \le j}}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \; (*)$$

Exemplo:

$$Q(x_1, x_2) = 3{x_1}^2 - 5x_1x_2 + 8{x_2}^2.$$

Em termos matriciais, a forma quadrática pode ser representada por:

$Q(x_1, x_2 \dots, x_n) = X^T \cdot A \cdot X$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ e $A = \left(a_{ij}\right)$ é uma matriz simétrica e os elementos de A podem ser obtidos de $(*)$ fazendo:

$$a_{ii} = a_{ii} \text{ e } a_{ij} = \frac{a_{ji}}{2}$$

Ou

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dfrac{a_{12}}{2} \\ \dfrac{a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + \dfrac{a_{12}}{2} \cdot x_2 & \dfrac{a_{12}}{2} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot {x_1}^2 + \frac{a_{12}}{2} \cdot x_2 \cdot x_1 + \frac{a_{12}}{2} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot {x_2}^2$$

$$= a_{11} \cdot {x_1}^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot {x_2}^2$$

Exemplo: A forma quadrática

$Q(x,y,z) = x^2 - 6xy + 8y^2 - 4xz + 5yz + 7z^2$ pode ser expressa na forma matricial.

$$Q(x,y,z) = [x \quad y \quad z] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 8 & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Em que $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 8 & 5/2 \\ -2 & 5/2 & 7 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Uma outra maneira de expressar a forma quadrática é:

$$Q(x,y,z) = [x \quad y \quad z] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exemplo: A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, que é simétrica, pode ser escrita na forma:

$$Q(x,y) = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 6xy + 5x^2.$$

Assim, apresentamos um breve resumo sobre as matrizes, enfatizando algumas propriedades comuns e corriqueiras e lembrando algumas que são tão comuns, mas que não menos importantes para a aplicação no cotidiano e que demandam maior estudo para melhor entendimento, bem como as diversas aplicações em várias áreas do conhecimento.

CONCLUSÃO:

Buscou-se nesse trabalho apresentar um resumo sobre as matrizes, compilando informações básicas e mostrando que é possível utilizar o Excel como ferramenta para desenvolver as propriedades e criar condições de aplicações das matrizes em diversos setores.

Este texto teve o objetivo de despertar naquele que busca conhecimento sobre matrizes, a importância do estudo nessa área e a fusão das matrizes com o Excel, considerando que na grande maioria das vezes, o que se vai trabalhar em situações reais, será o estudo com banco de dados considerados e que sem uma ferramenta digital fica impossível de tratar os dados de alguma demanda.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. Matemática. V. 2, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

HOFFMAN, K. e KUNZE, R. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1979.

IEZZI, G.,DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. Matemática. Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002

LEON, S. J. Álgebra Linear com Aplicações. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1999.

LIMA, E. L. Álgebra Linear. 7. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

SEARLE, S. R. Matrix Algebra Useful for Statistics. New York: John Wiley, 2006.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. Matemática: Novo Ensino Médio – Volume Único Curso Completo. Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. _Algebra Linear. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1987.

.