Universidade Federal do Triângulo Mineiro
PROFMAT

Fundamentos do Cálculo

por

Bruno Nunes de Souza

Fábio Antônio Araújo de Campos

Raphael Botta Teixeira

Uberaba - MG

2024

Sumário

Introdução

Este material foi pensado para auxiliar professores e alunos do ensino médio no ensino e aprendizagem de matemática voltado para turmas de alunos que pretendem ingressar em um curso de graduação da área de exatas. Tal distinção se deve ao fato que, ao iniciarem um curso de graduação na área de exatas, muitos alunos são apresentados logo no primeiro período à famosa disciplina de Cálculo 1.

Esse material complementar difere dos livros didáticos do ensino médio justamente por tratar a matemática do ensino médio de uma forma mais objetiva. Ou seja, todos os assuntos tratados aqui foram vistos no ensino médio, mas serão apresentados de uma forma mais objetiva e resumida. Então, além de auxiliar os estudos no final do ensino médio, esse material didático pode ser usado como estudo prévio para uma disciplina de Cálculo 1, ou como material complementar ao longo de uma disciplina de Cálculo 1.

O Capítulo 1 apresenta o conteúdo de trigonometria. É importante deixar claro que esse conteúdo é tratado como apoio ao curso de Cálculo 1 da graduação. Ou seja, a forma que o tema é tratado direciona o estudo para os conceitos e identidades mais importantes a serem tratadas em uma graduação. É claro que não contempla todo o conteúdo de trigonometria, pois supomos que aspectos simples, como cálculo de senos e cossenos de ângulos elementares e o Teorema de Pitágoras, por exemplo, já foram amplamente trabalhados no ensino médio. Aqui nos interessamos mais por identidades que serão amplamente trabalhadas em um curso de graduação.

No Capítulo 2 serão trabalhados os conceitos de exponencial e logaritmo. Como foi dito anteriormente, o propósito deste capítulo não é o ensino destes dois conteúdos, e sim uma revisão um pouco mais aprofundada do tema. É importante que tanto professor quanto aluno já estejam familiarizados com o tema. Este capítulo, assim como o anterior, traz uma série propriedades bem como contra exemplos para o melhor entendimento do assunto.

O Capítulo 3 é todo dedicado ao conceito considerado pelos autores como o mais importante a ser visto antes de um curso de Cálculo, que é o conceito de funções. Nesse capítulo falaremos sobre várias funções que são amplamente utilizadas em um curso de Cálculo. Faremos um paralel com a teoria vista anteriormente, ou seja, trataremos de funções e gráficos de funções trigonométicas, funções logarítimicas e funções exponenciais.

Capítulo 1

Trigonometria

No que segue, os ângulos serão representados em radianos. Dessa forma, como uma circunferência de raio 1 tem comprimento 2π, então 360º (que é uma volta completa) é o mesmo que 2π radianos. Dessa forma, 180º representa π radianos, então

$$1^{\text{o}} = \frac{\pi}{180} \ \text{ radianos e } \ 1 \ \text{ radiano} = \frac{180^{\text{o}}}{\pi}.$$

Se você usar uma calculadora que possibilita o cálculo de seno, cosseno e tangente de um ângulo, é possível que, ao calcular $\cos \pi$, o resultado seja diferente de -1, pois essa calculadora pode estar configurada para calcular o cosseno e o seno de ângulos dado em graus.

Vale lembrar que, em um triângulo retângulo, o seno e o cosseno de um ângulo θ são dados respectivamente por

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{ e } \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.$$

A tangente de um ângulo θ é dada por

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Cosseno, seno e tangente de um ângulo, são representadas no círculo trigonométrico como mostra a figura 1.1, em que os segmentos $\overline{OS}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AR}$ são tais que

$$\overline{OS} = \operatorname{sen}\theta, \quad \overline{OC} = \cos\theta \quad \text{e} \quad \overline{AR} = \tan\theta,$$

desde que $\cos\theta \neq 0$, já que não existe divisão por zero.

Por exemplo, se $\theta = \frac{\pi}{4}$, então o ângulo é de 45º, um ângulo tabelado que nos dá

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

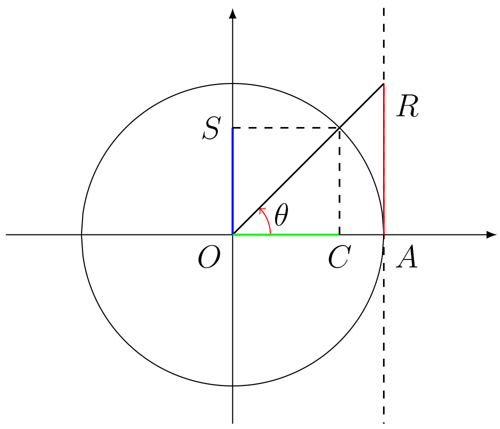


Figura 1.1: Círculo Trigonométrico

Utilize os seus conhecimentos para fazer o seguinte exercício:

Exercício 1.1 *Em cada um dos itens, escreva o ângulo em graus, identifique o ângulo no círculo trigonométrico e calcule o seno, o cosseno e a tangente desse ângulo (caso exista):*

a) $\theta_0 = 0$

b) $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$

c) $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$

d) $\theta_3 = \frac{\pi}{3}$

e) $\theta_4 = \frac{7\pi}{6}$

f) $\theta_5 = \frac{\pi}{4}$

g) $\theta_7 = \frac{2\pi}{3}$

h) $\theta_8 = \frac{3\pi}{4}$

i) $\theta_9 = \frac{11\pi}{6}$

j) $\theta_{10} = \frac{7\pi}{4}$

k) $\theta_{11} = \frac{5\pi}{3}$

l) $\theta_{12} = \frac{4\pi}{3}$

De acordo com o exercício acima, cabe a seguinte pergunta: você acha que

$$\cos(\theta_5 + \theta_8) = \cos(\theta_5) + \cos(\theta_8) \text{ ?}$$

A resposta é **NÃO** pois, por um lado

$$cos(\theta_5 + \theta_8) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\pi = -1$$

e, por outro lado,

$$\cos(\theta_5) + \cos(\theta_8) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

No geral, para quaisquer ângulos $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta+\alpha) \neq \cos(\theta) + \cos(\alpha).$$

O mesmo se aplica para o seno e a tangente. Fica como exercício mostrar por que

$$\text{sen}\,(\theta_5+\theta_8) \neq \text{sen}\,(\theta_5) + \text{sen}\,(\theta_8) \qquad \text{e} \qquad \tan(\theta_5+\theta_8) \neq \tan(\theta_5) + \tan(\theta_8).$$

É possível calcular $\text{sen}\,(\theta+\alpha)$, sabendo os valores de seno e cosseno de θ e α, e fazendo uso de uma identidade trigonométrica. Seguem algumas identidades trigonométricas:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

i) $[\cos(x)]^2 + [\text{sen}\,(x)]^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

ii) $\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,(a)\cos(b) + \text{sen}\,(b)\cos(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$

iii) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}\,(a)\text{sen}\,(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

A primeira identidade acima é uma das mais importantes da matemática. É uma consequência do não menos famoso Teorema de Pitágoras. Se considerarmos um ângulo x tal que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, lembrando que

$$\cos(x) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{e} \qquad \text{sen}\,(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

temos que

$$\begin{aligned} [\text{sen}\,(x)]^2 + [\cos(x)]^2 &= \left[\frac{\text{cateto opostp}}{\text{hipotenusa}}\right]^2 + \left[\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}\right]^2 \\ &= \frac{[\text{cateto oposto}]^2 + [\text{cateto adjacente}]^2}{[\text{hipotenusa}]^2} \\ &= \frac{[\text{hipotenusa}]^2}{[\text{hipotenusa}]^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para provar a mesma identidade no caso geral, ou seja, no caso em que x não pertence ao intervalo $(0, \pi/2)$, proceda de forma análoga utilizando o círculo trigonométrico.

As identidades em ii) e iii) necessitam de uma análise geométrica um pouco mais detalhada e por isso serão omitidas nesse material, mas podem ser encontradas em um livro específico de geometria.

Por exemplo, consideremos o ângulo de 135º, que em radianos é

$$135^{o} = 90^{o} + 45^{o} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Use as informações acima para fazer os próximos exercícios.

Exercício 1.2 *Em cada um dos itens, escreva o ângulo em radianos, identifique o ângulo no círculo trigonométrico, calcule o seno, o cosseno e a tangente (caso exista):*

a) $\theta_1 = 75^0$ *c)* $\theta_3 = 165^0$ *e)* $\theta_5 = 255^0$

b) $\theta_2 = 105^0$ *d)* $\theta_4 = 195^0$ *f)* $\theta_6 = 285^0$

Exercício 1.3 *Utilize apenas as identidades em ii) e iii) para mostrar que*

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}.$$

Daqui em diante, usaremos a seguinte notação

$$\cos^2 x = [\cos(x)]^2.$$

Ou seja, simplificamos a expressão de potências para o cosseno. O mesmo vale para o seno, tangente e outras funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = [\operatorname{sen}(x)]^2, \quad \tan^2 x = [\tan(x)]^2, \quad \cos^3 x = [\cos(x)]^3, \cdots.$$

Além disso o uso do parênteses pode ser omitido, caso não haja confusão. Por exemplo, você **pode** escrever $\cos(\pi) = \cos\pi$ mas **não** deve escrever $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a + b$.

Talvez você esteja se perguntando onde foram parar as identidades trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente da diferença entre dois ângulos, ou seja, quais são as expressões para calcular

$$\text{sen}\,(a-b), \quad \cos(a-b) \;\; \text{e} \;\; \tan(a-b)?$$

Calma, como foi dito anteriormente, existem basicamente três identidades trigonométricas. E, a menos que esse que vos escreve esteja muito enganado, todas as outras identidades necessárias nos cursos de Cálculo são consequências das identidades em i), ii) e iii) citadas mais acima. Ou seja, basicamente você precisa estar familiarizado com apenas três identidades.

Antes de falarmos sobre as outras identidades, devemos nos concentrar em um fato extremamente importante do seno e do cosseno, que é:

$$\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\,(\theta) \quad \text{e} \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Mais uma vez, as duas igualdades acima são extremamente importantes e podem ser observadas geometricamente no círculo trigonométrico, como mostra a figura 1.

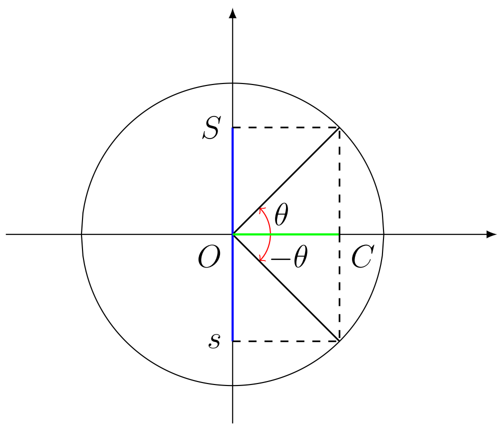


Figura 1.2: $\text{sen}\,(-\theta)$ e $\cos(-\theta)$

Observe que,

$$\overline{Os} = \text{sen}\,(-\theta) = -\overline{OS} = -\text{sen}\,\theta$$
$$\overline{OC} = \cos(-\theta) = \cos\theta.$$

Sabendo disso, podemos deduzir uma "fórmula"para $\text{sen}\,(a-b)$ a partir da identidade trigonométrica em ii) e das relações em (1.1). Basta observar que

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,(a+(-b)) &= \text{sen}\,(a)\underbrace{\cos(-b)}_{=\cos(b)} + \underbrace{\text{sen}\,(-b)}_{=-\text{sen}\,(b)}\cos(a) \\ &= \text{sen}\,(a)\cos(b) - \text{sen}\,(b)\cos(a), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,(a)\cos(b) - \text{sen}\,(b)\cos(a), \quad \forall\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Fica como exercício estabelecer identidades para

$$\cos(a-b),\ \tan(a+b) \ \text{ e } \ \tan(a-b).$$

As informações acima são suficientes para você resolver uma nova leva de exercícios. O exercício **??** é praticamente idêntico ao exercício 1.2. A proposta é que ela seja feita de forma diferente, utilizando seno, cosseno e tangente da diferença.

Exercício 1.4 *Mostre que:*

a) $\tan(-\theta) = -\tan(\theta), \quad \forall\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

b) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$

Exercício 1.5 *Simplifique a expressão*

$$\frac{\text{sen}\,(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \tan(2\pi - x)}{\tan(\pi - x) - \cos(2\pi - x) + \text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$

Exercício 1.6 *Mostre que são verdadeiras as seguintes identidades trigonométricas:*

a) $\text{sen}\,2x = 2\text{sen}\,x\cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}\,^2 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Obviamente existem outras identidades trigonométricas que serão muito úteis no decorrer de um curso de Cálculo. Um dos exemplos clássicos é o de se determinar a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \tag{1.2}$$

que é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Como foi dito anteriormente, as identidades trigonométricas se resumem àquelas mencionadas no itens i), ii) e iii).

Tendo a identidade i) em mãos e contando com o item b) do exercício 1.6, temos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x. \end{aligned}$$

Somando as identidade acima, termo a termo, obtemos:

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Agora fica mais fácil entender e descobrir novas identidades trigonométricas.

Exercício 1.7 *Mostre que são verdadeiras as seguintes identidades:*

a) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

b) $\cos(A)\cos(B) = \dfrac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2} \quad \forall A, B \in \mathbb{R};$

c) $\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \dfrac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} \quad \forall A, B \in \mathbb{R};$

d) $\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \dfrac{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)}{2} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}.$

Uma dica valiosa: provavelmente, olhando os itens do exercício 1.7, fica mais fácil desenvolver o lado direito das igualdades, uma vez que você está vendo as identidade e só quer verificar a igualdade. Não faça assim. O problema é que, na maioria das vezes, a identidade trigonométrica será necessária, ou seja, não será dado o lado direito.

Por exemplo, suponha que você queira uma expressão para

$$\operatorname{sen} A \cos B$$

que não envolva um produto. Lembrando que trabalhamos basicamente com três identidades trigonométricas, devemos olhar para os itens ii) e iii) dados lá no início do texto e lembrar que uma das identidades envolve o produto do *seno* com o *cosseno*, que é

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A.$$

Geralmente, como ocorreu na equação (1.2), uma única equação não é suficiente para determinar outra identidade. É só você pensar que uma equação não pode gerar outra equação, e sim a mesma. Para tal, precisamos de uma outra equação (ou identidade trigonométrica) que envolva mais uma vez o produto do *seno* com o *cosseno*. Você pode fazer um exercício de paciência nesse ponto e tentar descobrir por si só qual será essa equação. Se você lembrou que

$$\text{sen}\,(A - B) = \text{sen}\,A\cos B - \text{sen}\,B\cos A,$$

então você já tem duas identidades (diferentes), que constam o termo $\text{sen}\,A\cos B$. Assim, colocando as duas identidades juntas,

$$\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\,A\cos B + \text{sen}\,B\cos A$$

$$\text{sen}\,(A - B) = \text{sen}\,A\cos B - \text{sen}\,B\cos A$$

e somando o lado direito da primeira com o lado direito da segunda e o lado esquerdo da primeira com o lado esquerdo da segunda, teremos

$$\text{sen}\,(A + B) + \text{sen}\,(A - B) = 2\text{sen}\,A\cos B$$

$$\Longrightarrow \text{sen}\,A\cos B = \frac{\text{sen}\,(A + B) + \text{sen}\,(A - B)}{2}.$$

Dando prosseguimento ao texto e já se encaminhado para o fim, vamos introduzir os conceitos de secante, cossecante e cotangente, que representam o inverso multiplicativo do cosseno, seno e tangente, respectivamente. Em símbolos:

$$\text{cossec}\;x = \frac{1}{\text{sen}\,x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \text{cotan}\;x = \frac{1}{\tan x}.$$

Fica claro que as novas funções citadas acima só fazem sentido se os denominadores são não nulos.

Exercício 1.8 *Assinale a alternativa verdadeira.*

a) $\tan^2(x) + \sec^2(x) = 1, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$

c) $\tan(x) = \frac{1}{\text{sen}\,(2x)} - \frac{\cos(2x)}{\text{sen}\,(2x)}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

e) $\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercício 1.9 *Sabendo que* $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ *e* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *calcule*

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x} + \frac{1}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotan} x}.$$

Exercício 1.10 *Mostre que* $(1 + \operatorname{cotan}^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$, *para todo* $x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 1.11 *Mostre que*

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1, \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e

$$1 + cotan^2 x = cossec^2 x, \quad \forall x \neq k\pi \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 1.12 *Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a alternativa for verdadeira, justifique a resposta. Se a alternativa for falsa, dê um contra exemplo.*

a) Todo felino é um gato;

b) $\operatorname{sen}(\pi + x) = \operatorname{sen}\pi + \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $\operatorname{sen}(\pi^2) = [\operatorname{sen}\pi]^2$;

d) $\dfrac{\cos 2x}{2} = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

e) $2\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 6x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

f) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{n} = six = 6$;

g) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{2x+y}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;

h) $\tan(x+y) = \tan(x) + \tan(y), \quad \forall x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;

i) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{2x+y}{2}\right) = \dfrac{\cos(x) - \cos(x+y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;

j) $\operatorname{sen}(ab) = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$;

k) $0 < \cos(2) < 1$;

l) Se $n \in \mathbb{Z}$, *então* $-1 < \cos(n) < 1$;

m) Se $n \in \mathbb{Z}$, *então* $\cos(n\pi) = (-1)^n$;

Capítulo 2

Exponencial e Logaritmo

2.1 Exponencial

Neste capítulo, estudaremos a expressão

$$a^m.$$

Se $m \in \mathbb{N}$, então sabemos que

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{m vezes}}.$$

Como se trata de um material preparatório para um curso de Cálculo 1, suporemos $m \in \mathbb{R}$.

O primeiro passo é definir os possíveis valores para a e para m. Não é interessante trabalharmos com $a \leq 0$ pois nesse caso teríamos, por exemplo, para $a = -2$ e $m = \frac{1}{2}$, a expressão

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$$

que não é um número real. Nesse caso vamos supor sempre que

$$a \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{R}.$$

O número a será chamado de ***base*** e m será chamado de ***expoente***.

Como, a partir de agora, sempre vamos supor $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{R}$, a seguinte consequência que narturalmente ocorre, é que:

$$a^m > 0.$$

A princípio, são dadas três propriedades fundamentais de exponencial. Se $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $m, n \in \mathbb{R}$, então:

i) $a^m a^n = a^{m+n}$;

ii) $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$;

iii) $(a\ b)^m = a^m \cdot b^m$.

Antes de passarmos para as igualdades que são consequências das propriedades acima, faremos uma pequena observação sobre o inverso multiplicativo de um número. Essa observação nos ajudará a explicar a igualdade

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Observação: antes de falar no inverso multiplicativo, vamos voltar um passo atrás para relembrar o inverso aditivo. Dado um número $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ que, somado a x, resulta no elemento neutro da soma 0 (zero). (Zero é o elemento neutro da soma pois $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.). Tal inverso aditivo é *simbolizado* da forma

$$-x.$$

Assim, fica definido que

$$x + (-x) = 0.$$

Caso prefira, se $x + y = 0$, então representamos $y = -x$.

De forma análoga, existe o elemento neutro da multiplicação. Ou seja, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe um único número que, multiplicado por x, ainda resulta em x. Esse número é denotado pelo símbolo 1 (um). Ou seja

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De forma análoga ao inverso aditivo, todo número real $x \in \mathbb{R}$ não nulo admite um inverso multiplicativo. Ou seja, dado $x \in \mathbb{R}^*$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ cuja multiplicação por x resulta no elemento neutro (da multiplicação), ou seja,

$$x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Tal elemento inverso será denotado por

$$x^{-1}.$$

Assim, fica definido que

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Também é usual escrever

$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Portanto, com as propriedades i), ii) e iii) citadas anteriormente, conseguimos deduzir outras propriedades. Por exemplo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot b^{(-1)m} = a^m \cdot (b^m)^{-1} = a^m \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m},$$

o que em síntese, nos dá a igualdade

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Outra igualdade muito utilizada é dada por

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

A igualdade acima não é necessariamente uma propriedade, pode ser vista mesmo como uma forma diferente de se escrever $a^{\frac{m}{n}}$.

Em resumo, vimos as seguintes propriedades e definições:

0) $a^m > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall m \in \mathbb{R};$

1) $a^0 = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*;$

2) $a^1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+;$

3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall m, n \in \mathbb{R};$

4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall m, n \in \mathbb{R};$

5) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall m \in \mathbb{R};$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall m \in \mathbb{R};$

7) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \ \forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{R}^*.$

Exercício 2.1 *Qual o resultado da divisão* $\frac{50^{50}}{25^{25}}$?

a) 25^{25} *b)* 50^{25} *c)* 50^{50} *d)* 100^{25} *e)* 2^{50}

Exercício 2.2 *Qual é o resultado do quociente* $\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{3^{\sqrt{8}}}$?

a) 1 *b)* 3 *c)* 9 *d)* 12

Exercício 2.3 *Simplifique a expressão*

$$\frac{8^{88}-4^{44}}{8^{44}-4^{22}}.$$

Exercício 2.4 *Quanto é* $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\right)^8$?

a) 2 *b)* 4 *c)* 8 *d)* $\sqrt{2}$

Exercício 2.5 *Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a alternativa for verdadeira, justifique a resposta. Se a alternativa for falsa, dê um contra exemplo ou justifique.*

a) $\sqrt{3^2+2^2}=3+2$

b) $\sqrt{x^2-1}=x-1, \quad \forall x\in\mathbb{R}_+$

c) $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}, \quad \forall a,b\in\mathbb{R}_+^*, \quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$

d) $\sqrt{2^9}=2^3$

e) $\sqrt{2^{-2x}}=2^{-x}, \ \forall x\in\mathbb{R}$

f) $\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[mn]{a^{mp}}, \quad \forall a\in\mathbb{R}_+^*, \quad \forall m,n,p\in\mathbb{N}^*$

g) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}, \quad \forall a\in\mathbb{R}_+^*, \quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$

h) $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}), \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$

2.2 Logaritmo

Na seção anterior, vimos algumas propriedades envolvendo a expressão

$$x=a^m.$$

Nesta seção, vamos definir uma forma de isolar o expoente m da expressão a^m. Para tal, vale a seguinte definição

$$a^m = x \Longleftrightarrow \log_a x = m, \tag{2.1}$$

em que se lê: **logaritmo de x na base a.**

Como estamos apenas escrevendo a igualdade $x = a^m$ de uma forma diferente, ainda valem as propriedades e definições da seção anterior. Assim, se escrevemos

$$m = \log_a x$$

então, necessariamente devemos ter

$$a \in \mathbb{R}_+^*, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Fica como exercício explicar a condição $a \neq 1$.

No texto, daremos ênfase às propriedades consequentes da definição acima. Os exercícios com números e cálculo de logaritmos serão abordados de forma rápida e mais exercícios podem ser encontrados em outros livros. No entanto, para exemplificar a validade ou não de algumas propriedades, usaremos alguns exemplos numéricos.

Observe que, a partir da definição de logaritmo dada em 2.1, $a^m = x \Longleftrightarrow \log_a x = m$, temos que

$$10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$
$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

Assim, é fácil ver que

$$\log_{10}(100 + 1000) \neq \log_{10} 100 + \log_{10} 1000 = 2 + 3 = 5 = \log_{10} 10^5$$

já que

$$10^5 \neq 1100.$$

No geral, para qualquer base $a > 0$,

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y.$$

Diferentemente do que acontece com seno e cosseno, **NÃO** existe uma regra específica para

$$\log_a(x + y).$$

O mesmo exemplo acima pode ser usado para mostrar que

$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a(x) \cdot \log_a(y).$$

De fato, mais uma vez

$$10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2,$$

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

mas no entanto

$$\log_{10}(100 \times 1000) \neq 2 \times 3$$

já que

$$10^6 \neq 100000.$$

Para determinarmos nossa primeira propriedade, suponha que

$$\log_a(x) = m \quad \text{e} \quad \log_a(y) = n.$$

Pela própria definição de logaritmo, a afirmação acima implica em

$$a^m = x \quad \text{e} \quad a^n = y.$$

Multiplicando os dois lados da equação acima

$$a^m a^n = x \cdot y \Longrightarrow a^{m+n} = x \cdot y.$$

Ou seja, chegamos em $a^{m+n} = x \cdot y$. Agora, olhando bem para a equação (2.1) e substituindo as letras, também temos

$$B^C = D \Leftrightarrow \log_B D = C.$$

Observe que, se $B = a$, $C = m + n$ e $D = x \cdot y$, então

$$a^{m+n} = x \cdot y \Leftrightarrow \log_a(x \cdot y) = m + n.$$

e, lembrando que $\log_a(x) = m$ e $\log_a(y) = n$

$$\log_a(x \cdot y) = \underbrace{m}_{\log_a(x)} + \underbrace{n}_{\log_a(y)} = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Em síntese

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y). \tag{2.2}$$

Como consequência, temos que

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot x) &= \log_a(x) + \log_a(x) \Rightarrow \log_a(x^2) = 2\log_a(x); \\ \log_a(x \cdot x \cdot x) &= \log_a(x) + \log_a(x) + \log_a(x) \Rightarrow \log_a(x^3) = 3\log_a(x); \end{aligned}$$

e consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a regra

$$\log_a(\underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\text{n vezes}}) = \log_a(x^n) = n \log_a(x).$$

É óbvio que o mesmo raciocínio não se aplica se, na identidade acima, trocarmos $n \in \mathbb{N}$ por $r \in \mathbb{R}$. Embora o raciocínio não seja o mesmo, a identidade sim é a mesma, ou seja, para todo $r \in \mathbb{R}$ vale a regra

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

De fato, se você definir $m = \log_a(x)$, pela própria definição de logaritmo, teremos

$$m = \log_a(x) \Rightarrow a^m = x.$$

Elevando à potência r dos dois lados da última igualdade acima, obtém-se

$$(a^m)^r = x^r \Rightarrow a^{rm} = x^r \tag{2.3}$$

Agora olhe bem para a equação (2.1) e substituindo as letras, também temos

$$B^C = D \Leftrightarrow \log_B D = C.$$

Observe que, se $B = a$, $C = rm$ e $D = x^r$, trocando as letras da igualdade (2.3), tem-se que

$$a^{rm} = x^r \Rightarrow \log_a(x^r) = r \underbrace{m}_{\log_a(x)} = r \log_a(x)$$

ou seja,

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x), \quad \forall a, r \in \mathbb{R}_+^*, \quad a \neq 1.$$

Essa e demais propriedades podem ser vistas abaixo.

Propriedades do Logaritmo: Se $a, d, x, y > 0$, $a \neq 1$ e $r \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:

i) $\log_a(1) = 0$;

ii) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

iii) $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$;

iv) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(x)$;

v) $\log_a(x) = \dfrac{\log_d(x)}{\log_d(a)}$;

vi) $\log_a(a) = 1$;

vii) $\log_a(a^r) = r$;

viii) $a^{\log_a(x)} = x$.

Não se assuste com a quantidade de propriedades, são todas consequência da própria definição de logaritmo. E todas elas são facilitadoras no estudo da matemática.

Observe que o item i) é uma consequência direta da definição, haja visto que $a^0 = 1$. Os itens ii) e iii) foram explicados minuciosamente acima. O item iv) é consequência imediata dos itens ii) e iii) e fica como exercício melhor entendê-lo. O quinto item é um pouco mais elaborado e também será deixado como exercício. O item vi) é também uma consequência imediata da definição, já que $a^1 = a$.

Exercício 2.6 *Calcule:*

a) $\log_{10} 1000$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

c) $\log_9 \sqrt{3}$

d) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{2}$

e) $3\log_{27} 9 - 7\log_{27} 3$

f) $\log_9 \sqrt{3}$

2.3 A base e

No ensino médio, é comum que a expressão

$$\log x$$

seja entendida como o logaritmo na base 10. Ou seja, quando nada está escrito na base, subentende-se que a base seja $a = 10$. Essa notação provavelmente decorre da simplicidade de se trabalhar com a base 10, uma vez que no nosso sistema numérico convencional todos os números são escritos na base 10. Por exemplo

$$2438 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0.$$

No entanto, a base mais utilizada nos cursos de cálculo é o número

$$e = 2.71828182846\ldots.$$

O número acima é uma dízima não periódica e é um número irracional. Na opinião desse que vos escreve, o número e e o número π são os números mais importantes da história da matemática.

No momento, não serão dadas mais informações sobre o porquê do número e ser tão importante. Um exercício interessante é o seguinte. De posse de uma calculadora científica, calcule os seguintes números:

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$$

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}.$$

Existe uma nomenclatura diferente quando se trata do logaritmo na base e, que é

$$\log_e x = \ln x.$$

Dessa forma, vale a seguinte definição

$$\ln x = m \iff e^m = x.$$

Como o que é feito nessa seção é apenas a troca da letra a pela e (que é um número fixo), as propriedades inerentes da definição de logaritmo são as mesmas, mas nunca é demais repeti-las:

Propriedades do Logaritmo com base e: Se $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:

i) $\ln(1) = 0$;

ii) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$;

iii) $\ln(x^r) = r\ln(x)$;

iv) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;

v) $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$;

vi) $\ln e = 1$;

vii) $\ln(e^r) = r$;

viii) $e^{\ln(x)} = x$.

Exercício 2.7 *Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a alternativa for verdadeira, justifique a resposta. Se a alternativa for falsa, dê um contra exemplo.*

a) $\ln(1+2) = \ln 1 + \ln 2$;

b) $\ln 6 = \ln(2)\ln(3)$;

c) $-\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$;

d) $\ln x - \ln y = \dfrac{\ln x}{\ln y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

e) $\ln 4 = 2\ln 2$;

f) $(\ln 4)^2 = 2\ln 4$;

g) $\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}$;

h) $\frac{\ln 4}{2} = \ln 2$;

i) $e^{2x} = (e^x)^2\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

j) $e^{x^2} = (e^x)^2\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

k) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

l) $2\ln x = \ln(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

m) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

n) $e^{-x} = -e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

o) $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$;

p) $(\ln x)^{-1} = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

q) $e^{\ln x} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

r) $\ln(e^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

s) $e^{-\ln x} = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

t) $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

u) $\dfrac{\ln 6}{2} = \ln 3$;

w) $e^{\ln(\wp)} = \wp, \quad \forall \wp \in \mathbb{R}$;

x) $5^x = e^{x \ln 5}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

y) $\ln\sqrt{(-1)^2} = \frac{1}{2}\ln(-1)$;

z) $1 + 1 = 2$;

Capítulo 3

Funções

3.1 O Conceito de Função e Exemplos

O que é uma função?

Antes de respondermos a esta questão, consideremos o seguinte exemplo: uma sala de aula tem 50 alunos matriculados. O professor pergunta a cidade natal de cada aluno. O professor escreve no quadro o nome e a cidade natal de cada aluno. Observe que existem dois conjuntos envolvidos: o conjunto dos alunos e o conjunto das cidades dadas como resposta. Além disso, existe um outro fato não menos importante que é a correspondência feita, ou seja, cada aluno informa uma cidade (sua cidade natal). Ou seja, temos **três** informações cruciais.

Para entender melhor o conceito de função, tente responder as seguintes perguntas:

a) Algum aluno pode dizer que não tem cidade natal?

b) Dois ou mais alunos podem ter nascido na mesma cidade?

c) Um aluno pode ter nascido em duas cidades diferentes?

Uma função é caracterizada por um conjunto A, um conjunto B e uma lei de formação. No caso do exemplo citado acima, $A = \{\text{conjunto dos alunos}\}$, $B = \{\text{conunto das cidades}\}$ e a lei de formação é a relação que, para cada aluno da sala, faz corresponder uma única cidade natal.

Em termos matemáticos, uma função é um trio composto por:

i) um cojunto A, chamado de domínio;

ii) um conjunto B, chamado de contradomínio;

iii) uma lei de formação que associa a cada elemento de A um único elemento de B.

Uma letra minúscula será usada para designar as três informações acima. Usaremos, na maioria nas vezes, a letra f. Também será comum usarmos as letras g e h. Demais letras podem ser adicionadas dependendo da necessidade.

Outra maneira de escrever o que foi dito acima pode ser sintetizado com a seguinte notação:

$$\begin{aligned} f: \quad A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a), \end{aligned}$$

em que f é o nome da função, A é o domínio, B é o contradomínio, o símbolo $\to$ indica que os dois conjuntos estão sendo relacionados, a representa o elemento de A e $f(a)$ é o elemento do cojunto B que está sendo associado ao elemento a.

Em todo o curso de Cálculo 1 serão consideradas apenas funções em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para facilitar a notação, também definiremos $\mathbb{R}$ como sendo o contradomínio no geral. Além disso, um elemento genérico do domínio será representado pela letra x. Assim, uma função f é dada por

$$\begin{aligned} f: A \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Observação 3.1 *Se f é uma função, para cada $x \in D_f$, existe um único $f(x) \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 3.1 *Suponha que a temperatura de um corpo em graus Celsius seja representada pela letra T. Existe uma relação dada por*

$$F = \frac{9}{5}T + 32$$

que dá a temperatura F na escala Fahrenheit. Ou seja, para cada valor T dado em Celsius, é possível se determinar uma única temperatura F na escala Fahrenheit. Usando uma tabela, podemos atribuir alguns valores:

Celsius (C)	*Fahreineit (F)*
$0^0\ C$	$32^0\ F$
$10^0\ C$	$50^0\ F$
$15^0\ C$	$59^0\ F$
$25^0\ C$	$77^0\ F$
$40^0\ C$	$104^0\ F$
$65^0\ C$	$149^0\ F$
$100^0\ C$	$212^0\ F$

Mais especificamente, F é uma função que, dependendo do valor de T, faz corresponder uma única temperatura F que pode ser dada por

$$F(T) = \frac{9}{5} + 32.$$

Exemplo 3.2 *Considere uma partícula que se desloca em linha reta que, no instante de tempo t, percorre a distância dada pela fórmula*

$$s(t) = 2t^2 + 1.$$

Como estamos nos referindo à variável tempo, devemos considerar $t \geq 0$, ou seja, o domínio da função s é o conjunto $D_s = \{s \in \mathbb{R} | s \geq 0\}$. Vamos atribuir alguns valores para t e saber a distância percorrida pela partícula:

$$\begin{aligned}
t = 0 \quad &\Rightarrow \quad s(0) = 2 \times 0^2 + 1 = 1 \\
t = 1 \quad &\Rightarrow \quad s(1) = 2 \times 1^2 + 1 = 3 \\
t = 2 \quad &\Rightarrow \quad s(2) = 2 \times 2^2 + 1 = 5 \\
t = 3 \quad &\Rightarrow \quad s(3) = 2 \times 3^2 + 1 = 10 \\
t = 5 \quad &\Rightarrow \quad s(5) = 2 \times 5^2 + 1 = 26 \\
t = 10 \quad &\Rightarrow \quad s(10) = 2 \times 10^2 + 1 = 101.
\end{aligned}$$

Ou seja, no tempo $t = 0$, a partícula se moveu uma unidade de medida. Depois de 2 unidades de medida de tempo, a partícula se moveu 5 unidades de medida de espaço e depois de 10 unidades de medida de tempo, a partícula se moveu 101 unidades de medida de espaço.

Exemplo 3.3 *A função $f(x) = \sqrt{x}$. Antes de mais nada devemos ter $x \geq 0$. Assim, $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Podemos calcular alguns exemplos:*

$$\begin{aligned}
f(0) &= \sqrt{0} = 0, \\
f(1) &= \sqrt{1} = 1, \\
f(4) &= \sqrt{4} = 2, \\
f(10) &= \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

Outra observação importante é que, para todo $x \in D_f$, tem-se que $f(x) \geq 0$.

Exemplo 3.4 *Considere a função*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

É claro que devemos ter $x^2 - 1 \neq 0$. Assim $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1 \;\text{ e }\; x \neq -1\}$.

Exemplo 3.5 : ***Função constante:*** *dado $c \in \mathbb{R}$ fixo, a função*

$$f(x) = c$$

é chamada de função constante. Essa função atribui, para cada $x \in \mathbb{R}$, sempre o mesmo valor c. Assim, independentemente do valor que atribuímos para x, teremos sempre o mesmo valor para $f(x)$. Por exemplo, para $c = 1$, a função $f(x) = 1$ é tal que

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 1, \\ f(-1) &= 1, \\ f(x+h) &= 1. \end{aligned}$$

Observação 3.2 *O domínio de uma função $f(x)$ será omitido na maioria das vezes. Nesses casos, D_f é o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faça sentido a expressão $f(x)$. Ou seja,*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo:

$$f(x) = x^2 + 1 \implies D_f = \mathbb{R},$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\},$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} \implies D_f = \{x \in \mathbb{R} | x - 1 \geq 0\},$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \implies D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2 \quad e \quad x \neq -2\}.$$

Exercício 3.1 *Calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(x+h)$ sabendo que:*

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

d) $f(x) = 1$

e) $f(x) = a^x$, *em que* $a > 0$

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

Exercício 3.2 *Determine o domínio das seguintes funções:*

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

e) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \sqrt{x-\sqrt{x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x(2-3x)}$

h) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x}$

i) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-1}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2-9} - \sqrt{x^2-16}$

l) $f(x) = \sqrt{2-x-x^2} + \sqrt{3+2x-x^2}$

m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{1-3x}}$

Exercício 3.3 *Simplifique a expressão*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

com $h \neq 0$, *sabendo que:*

a) $f(x) = 2x+1$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = 3x-8$

e) $f(x) = 5$

f) $f(x) = x^2-2x+3$

g) $f(x) = x^3+2x$

h) $f(x) = x^2-2x$

Exercício 3.4 *Simplifique a expressão*

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

sabendo que:

a) $f(x) = x^2$ *e* $p = 1$;

b) $f(x) = 2x + 1$ *e* $p = -1$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ *e* $p = 2$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *e* $p = 3$;

e) $f(x) = x^2 - 2x$ *e* $p = 1$;

f) $f(x) = x^3$ *e* $p = -3$;

Exercício 3.5 *Seja* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, em que* a, b *e* c *são reais quaisquer com* $a \neq 0$.

a) Verifique que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

b) Explique a seguinte afirmação: "se $a > 0$*, então o menor valor de* $f(x)$ *acontece quando* $x = -\frac{b}{2a}$*." Nesse caso, qual o menor valor de* $f(x)$*?*

c) Mostre que se $a < 0$*, então*

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

é o maior valor assumido por f.

3.2 Gráfico

O gráfico de uma função

$$\begin{array}{rcl} f : A \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

é um conjunto no plano cartesiano composto pelo traço de todos os pontos da forma $(x, f(x))$. Em símbolos, o gráfico de f é o conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Em um plano cartesiano, para cada $x \in A \subset \mathbb{R}$ no eixo das abscissas (eixo x), existe um **único** $y = f(x) \in \mathbb{R}$ localizado no eixo das ordenadas (eixo y).

Na figura acima, dado o ponto $a \in D_f$ e $b = f(a)$, o ponto $P = (a, f(a))$ pertence ao gráfico da função. O traço desenhado acima representa todos os pontos da forma $(x, f(x))$, desde que $x \in D_f$.

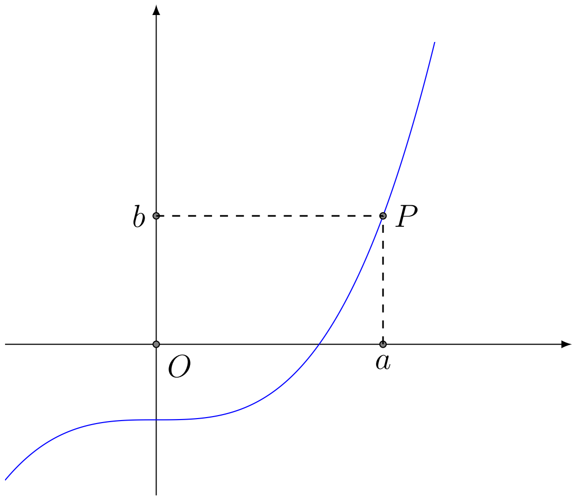


Figura 3.1: Gráfico de f

Exemplo 3.6 ***gráfico de uma reta:*** *a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem como gráfico uma reta. Como dois pontos determinam uma reta, basta considerer os pontos $A = (0, f(0)) = (0, b)$ e $B = (-b/a, 0)$, por exemplo, para se ter dois pontos por onde a reta passa.*

No exemplo acima, foi considerada a função $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ e os pontos $A = (0, 1)$ e $B = (2, 0)$.

Exemplo 3.7 *Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$. É claro que $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$. Observe que*

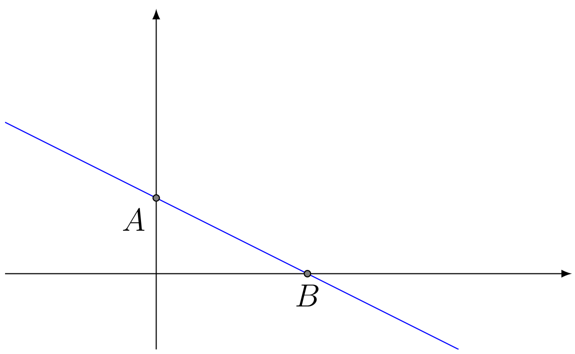
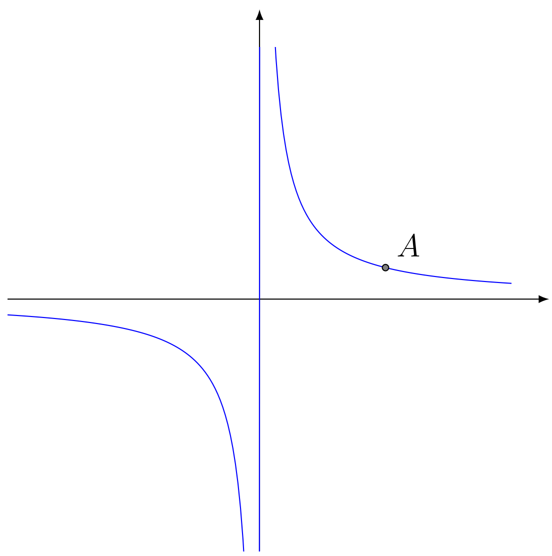


Figura 3.2: Gráfico de uma reta

x	$f(x)$
$0,1$	10
1	1
2	$1/2$
10	10^{-1}
100	10^{-2}
$-0,1$	-10
-1	-11
-2	$-1/2$
-10	-10^{-1}
-100	-10^{-2}

Se $x > 0$, então $f(x) > 0$ e se $x < 0$ então $f(x) < 0$. O gráfico fica da seguinte forma



Observação 3.3 ***(importante):*** *como foi dito que, para cada $x \in D_f$ existe um único $f(x)$, ou seja, como não pode ocorrer $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$, com $y_1 \neq y_2$, nenhum gráfico de função pode conter dois pontos distintos do tipo (x, y_1) e (x, y_2). Ou seja, se uma reta vertical corta um traço formado por um conjunto de pontos, esse traço não é gráfico de função.*

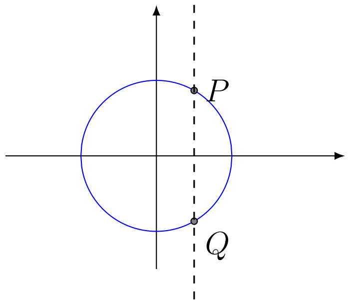
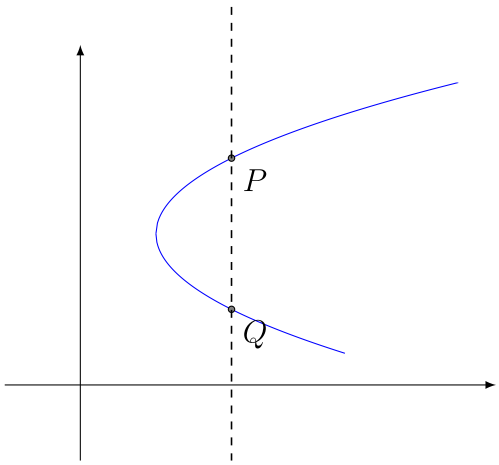


Figura 3.3: Gráfico



Assim, o conjunto de pontos $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$, que nada mais é do que uma circunferência de raio um com centro na origem, não é considerado gráfico de função já que qualquer reta vertical que corta o eixo x no intervalo $]-1, 1[$ intersecta a circurferência em dois pontos distintos.

Exercício 3.6 *Esboce o gráfico das seguintes funções:*

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x + 1$

c) $f(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = (x - 1)^2$

f) $f(x) = 1 + x^2$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$

h) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

i) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

j) $f(x) = \sqrt{x}$

k) $f(x) = \sqrt{x+1}$

l) $f(x) = 3 + \sqrt{x}$

m) $f(x) = x^3$

n) $f(x) = 2 + x^3$

o) $f(x) = (x+1)^3$

p) $f(x) = (x-1)(x-2)$

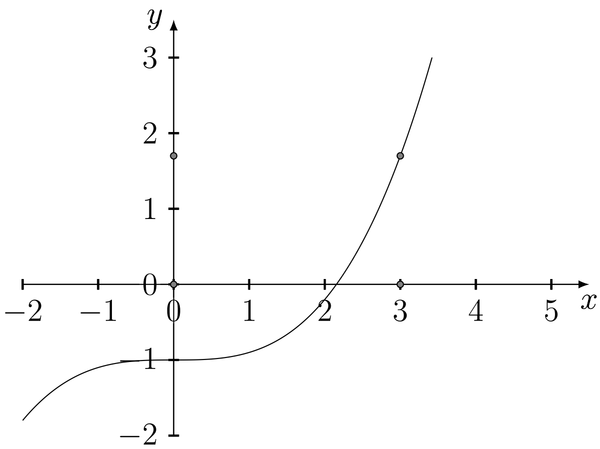
q) $f(x) = (x-3)(x-4)$

r) $f(x) = (x-2)(x+1)$

s) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

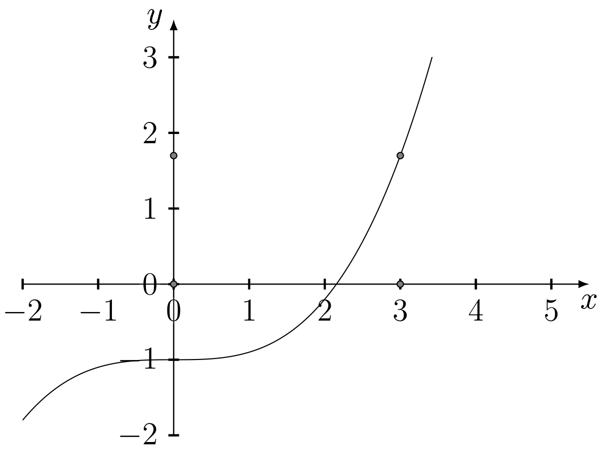
t) $f(x) = 1 - (x-1)^2$

Exercício 3.7 *Se o gráfico de uma função $f : D_f \to \mathbb{R}$ é da seguinte forma*



como seria o gráfico da função $g_1(x) = 1 + f(x)$? E como seria o gráfico da função $g_2(x) = f(x+1)$? E da função $g_2(x) = f(x-1)$?

Exercício 3.8 *De um modo geral, se o gráfico de uma função é da forma*



dado $a \in \mathbb{R}$, qual o gráfico das funções

$$g(x) = a + f(x) \quad \text{e} \quad h(x) = f(x+a)?$$

3.3 Funções Trigonométricas

Como para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ (em radianos) é possível calcular $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$, podemos definir as funções

$$f(x) = \cos x \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

que são tais que $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

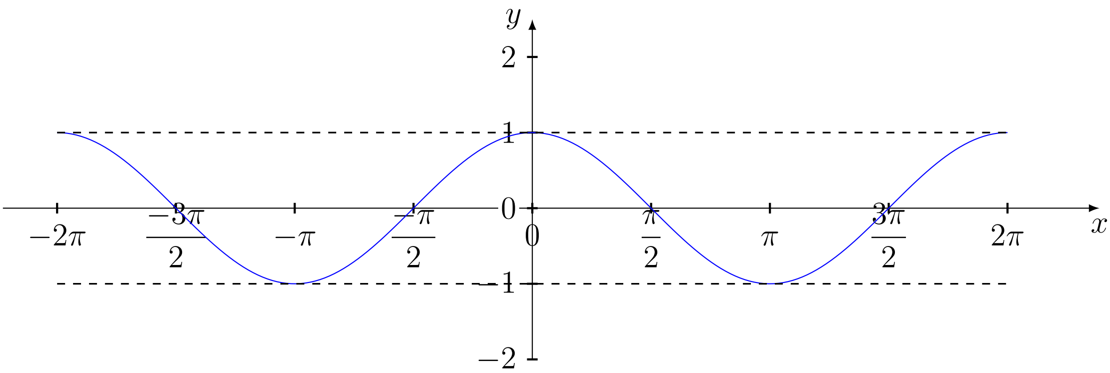
Além disso, pelo fato de que

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

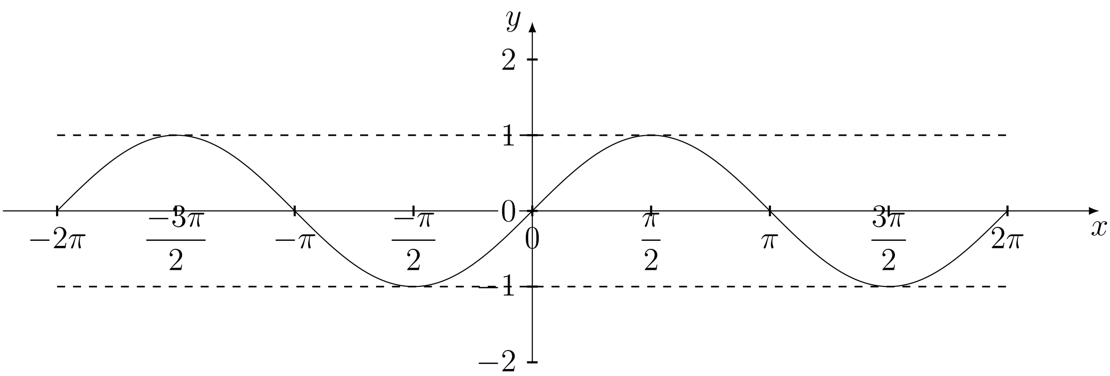
e também

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{Z},$$

o gráfico da função $f(x) = \cos x$ é dado por



e o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen} x$ é da forma



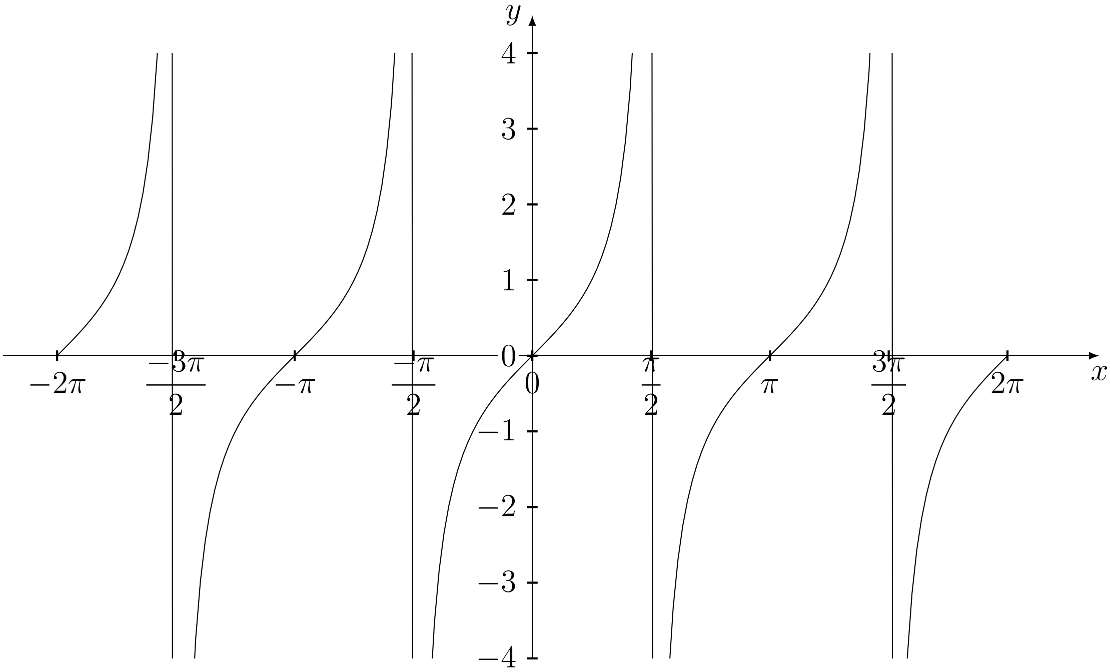
Faz sentido também falarmos da função

$$h(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Como em $h(x)$ devemos ter $\cos x \neq 0$, então

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} | \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

O gráfico da tangente é da seguinte forma:



A função tangente não está definida nas retas verticas.

Também podemos definir as funções secante e cossecante

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Fica como exercício definir o domínio e o gráfico, tanto da função secante, quanto da função cossecante.

Exercício 3.9 *Determine o domínio das seguintes funções:*

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan x}$

b) $f(x) = \sec x + \tan x$

c) $f(x) = \sec^x$

d) $f(x) = \tan^2 x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

g) $f(x) = \sec(\pi x)$

h) $f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

i) $f(x) = \sec(2x)$

j) $f(x) = \operatorname{cosec}\ (3x)$

Exercício 3.10 *Esboce o gráfico das seguintes funções:*

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

b) $f(x) = 2\cos 3x$

c) $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

e) $f(x) = |\cos x|$

f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

g) $f(x) = \cos(x+1)$

h) $f(x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$

i) $f(x) = x + \cos x$

j) $f(x) = x\cos x$

Exercício 3.11 *Relacione as funções da primeira coluna que são iguais às funções da segunda coluna:*

A) $f_1(x) = \cos x \operatorname{sen} x$

B) $f_2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

C) $f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

D) $f_4(x) = \operatorname{sen} x$

E) $f_5(x) = \cos x$

F) $f_6(x) = 1 + \sec^2 x$

1) $g_1(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

2) $g_2(x) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

3) $g_3(x) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

4) $g_4(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

5) $g_5(x) = \tan^2(x)$

6) $g_6(x) = \cos^2 x$

Exercício 3.12 *Qual o domínio da função* $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$*? Com o auxílio de uma calculadora, calcule* $f(x)$ *para os seguintes valores de* x*:*

a) $x = 1$ *b)* $x = 10^{-1}$ *c)* $x = -10^{-2}$ *d)* $x = 10^{-8}$ *e)* $x = 10^{-20}$

Exercício 3.13 *Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a alternativa for verdadeira, justifique a resposta. Se a alternativa for falsa, dê um contra exemplo.*

a) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$

b) $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$

c) $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$

d) $\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$

e) $\tan(-x) = -\tan(x), \quad \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z};$

f) $\cos(-x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$

g) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \operatorname{sen} 2$

h) $\operatorname{sen}(x + 1) - \operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)\cos\left(\dfrac{2x + 1}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

3.4 Funções Exponenciais

Dado $a > 0$ tal que $a \neq 1$, é possível definir a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x, \end{aligned}$$

ou simplesmente $f(x) = a^x$. Embora seja possível definir a^x para $a = 1$, impomos a condição $a \neq 1$ já que $1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ou seja, excluímos a função constante.

Para estudarmos o gráfico da função $f(x) = a^x$, devemos fazer algumas considerações prévias. Responda a seguinte pergunta: qual dos números é maior,

$$a^2 \quad \text{ou} \quad a^4?$$

Cuidado, a resposta não é trivial. Por exemplo, se $a = 3$, é claro que $a^2 < a^4$. Agora, se $a = \frac{1}{2}$, então $a^4 < a^2$. Nesse sentido, vale o seguinte:

Propriedade 3.1 *:*

i) se $a > 1$ *e* $m < n$*, então* $a^m < a^n$*;*

ii) se $0 < a < 1$ *e* $m < n$*, então* $a^m > a^n$*.*

Para fazermos um esboço do gráfico da função $f(x) = a^x$, consideremos um exemplo específico para melhor entendimento do raciocínio, com $a = 2$. Observem primeiramente que, usando a fórmula do binômio de Newton, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= 1 + \binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}1^2 + \binom{n}{3}1^3 + \cdots + \binom{n}{n}1^n \\ &= 1 + n + \underbrace{\binom{n}{2}1^2 + \binom{n}{3}1^3 + \cdots + \binom{n}{n}1^n}_{\text{números positivos}} \\ &> 1 + n > n. \end{aligned}$$

Resumindo

$$2^n > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, se você escolher $M = 10^6$ por exemplo, basta tomar $n = 10^6$ para garantir que

$$2^n > 10^6.$$

De um modo geral, qualquer que seja o número $M > 0$ que você escolha, basta escolher $n > M$ para que se tenha

$$2^n > M.$$

Ou seja, 2^n pode ser tão grande quanto se queira. Para tal, basta escolher valores de n cada vez maiores.

No caso geral, se a base $a > 1$, o raciocínio tem uma pequena mudança. Existe $h > 0$ tal que

$$a = 1 + h.$$

Assim, novamente pelo binônimo de Newton,

$$\begin{aligned} a^n = (1+h)^n &= 1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \binom{n}{3}h^3 + \cdots + \binom{n}{n}h^n \\ &= 1 + nh + \underbrace{\binom{n}{2}h^2 + \binom{n}{3}h^3 + \cdots + \binom{n}{n}h^n}_{\text{números positivos}} \\ &> 1 + nh, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a^n > 1 + nh, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, se você escolher qualquer $M > 0$, por maior que seja esse número, basta escolher um número natural $n > \frac{M-1}{h}$ que dessa forma

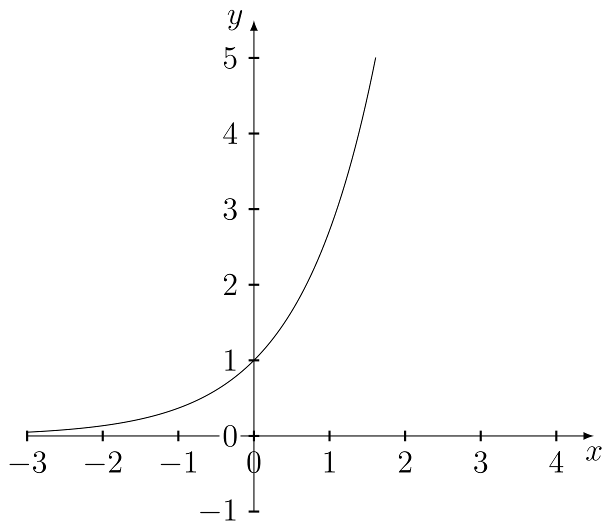
$$a^n > 1 + nh > M.$$

Assim, se $x > n$, então

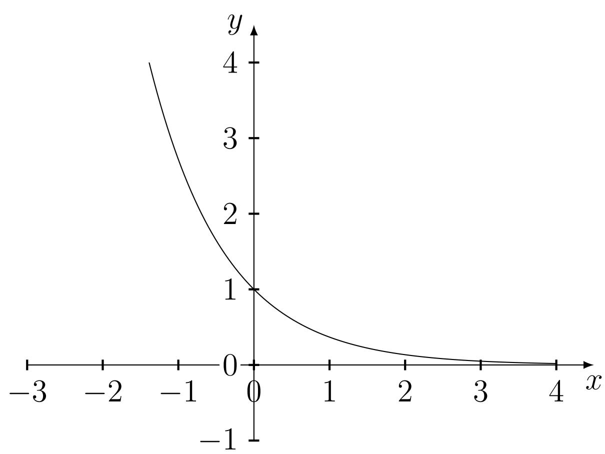
$$a^x > a^n > M >,$$

qualquer que seja $M > 0$. Logo a função a^x fica maior que qualquer número que ser queira.

Logo, se $a > 1$, o gráfico da função $f(x) = a^x$ é dado por



E, se $0 < a < 1$, o gráfico da função $f(x) = a^x$ é dado por:



Exercício 3.14 *Esboce o gráfico das seguintes funções:*

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = 2^{-x}$

c) $f(x) = e^x - 1$

d) $f(x) = e^{x-1}$

e) $f(x) = x + e^x$

f) $f(x) = -e^{-x}$

g) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

h) $f(x) = e^{1/x}$

3.5 Funções Logarítmicas

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então faz sentido definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \log_a : (0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

No que segue, fica implícito que, sempre que estivermos nos referindo à base a, então necessariamente $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso, na maioria das vezes, será omitido o parênteses quando conveniente. Assim, você pode escrever $\log_a x$ mas **não** deve escrever $\log_a x + 1$

Antes de falarmos do gráfico da função $\log_a$, considere a seguinte pergunta: qual número é maior,

$$\log_a 4 \quad \text{ou} \quad \log_a 16?$$

A resposta é: depende. Sim, a resposta depende da base. Por um lado, se $a = 2$, então

$$\log_2 4 < \log_2 16. \quad \text{(faça as contas).}$$

Por outro lado, se $a = \frac{1}{2}$, então

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Defina

$$\log_a x = m \quad \text{e} \quad \log_a y = n \Longleftrightarrow a^m = x \quad \text{e} \quad a^n = y.$$

Vale lembrar, da seção anterior, que se $a > 1$, então

$$x < y \Rightarrow a^m < a^n \Rightarrow m < n \Rightarrow \log_a x < \log_a y.$$

Resumidamente, se $a > 1$, então

$$x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y.$$

Fica como exercício mostrar que, se $0 < a < 1$, então

$$x < y \Rightarrow \log_a y < \log_a x.$$

Em síntese, temos o seguinte resultado:

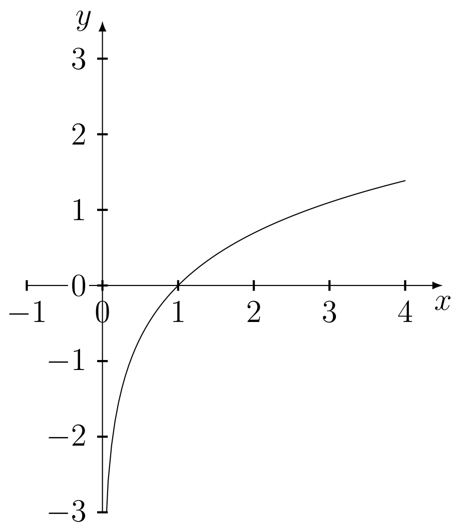
Propriedade 3.2 *Suponha* $0 < x < y$.

i) se $0 < a < 1$, *então* $\log_a x > \log_a y$;

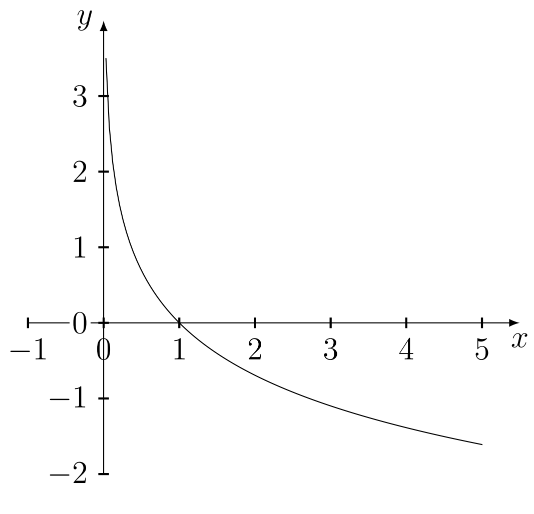
ii) se $a > 1$*, então* $\log_a x < \log_a y$;

iii) $\ln x < \ln y$.

Assim, se $a > 1$, o gráfico da função $f(x) = \log_a(x)$ é dado por:



E se $0 < a < 1$, o gráfico da função $f(x) = \log_a(x)$ é da forma:



Exercício 3.15 *Determine o domínio das seguintes funções:*

a) $f(x) = \log_2(x + 1)$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

c) $f(x) = \ln |x|$

d) $f(x) = \ln(x+1)$

e) $f(x) = \ln(x-3)$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

Exercício 3.16 *Esboce o gráfico das seguintes funções:*

a) $f(x) = \log_2(x)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \ln|x|$

d) $f(x) = \ln(x+1)$

e) $f(x) = \ln(x-3)$

f) $f(x) = 1 + \ln(x)$

g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

Exercício 3.17 *Qual o domínio da função*

$$f(x) = e^{\ln x}?$$

Exercício 3.18 *Determine* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\log_2 x > 1000$.

Exercício 3.19 *Determine* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\log_{\frac{1}{2}} x > 1000$.

Exercício 3.20 *Determine* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\log_2 x < 10^{-5}$.

Exercício 3.21 *Dado* $M > 0$ *qualquer, determine um valor de* x *(que depende de* M*) tal que* $\ln x > M$.

Dica: $x = e^{M+1}$.

Exercício 3.22 *Dado* $M > 0$ *qualquer, determine um valor de* x *(que depende de* ε*) tal que* $\ln x < -M$.

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, G., MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar 1. **Editora Atual,** São Paulo, 1998.

[2] IEZZI, G., DOLCE, O., MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar 2. **Editora Atual,** São Paulo, 1998.

[3] IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar 6. **Editora Atual,** São Paulo, 1998.

[4] IEZZI, G. MURAKAMI, C., MACHADO, N.J. Fundamentos de Matemática Elementar 6. **Editora Atual,** São Paulo, 1998.