UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Notas de aula de Pré-Cálculo

Rafael Peixoto

Vanessa de Paula Cintra

O material que aqui se encontra são notas de aula para a disciplina de Pré-Cálculo dos cursos de Matemática, Física e Química da UFTM. Todo seu conteúdo é baseado nos livros e arquivos citados na bibliografia. Estas notas de aula também podem ser utilizadas como material complementar a disciplina de Fundamentos de Cálculo do PROFMAT.

1 Conjuntos

A noção matemática de *conjunto* é uma noção primitiva, podendo ser considerado qualquer coleção de objetos ou entidades. Os objetos que compõem esta coleção são chamados *elementos* do conjunto. Designamos, normalmente, os conjuntos por letras maiúsculas, e seus elementos por letras minúsculas.

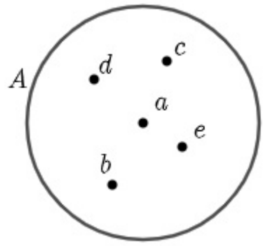
Para indicarmos que um objeto x é elemento de um conjunto A, escrevemos $x \in A$ (lê-se: x pertence a A). Se um objeto x não é elemento de A, escrevemos $x \notin A$ (lê-se: x não pertence a A).

Os conjuntos podem ser representados da seguinte forma:

- Representação analítica: Listagem dos elementos entre chaves, separados por vírgula.

  1. $A = \{a, b, c, d, e\}$
  2. $B = \{1, 2, 3, ..., 100\}$
  3. $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$

- Representação por diagramas: Regiões planas interiores a uma curva fechada e simples.



- Representação sintética: Quando escrevemos entre chaves uma característica comum a todos os elementos formadores do conjunto

    1. $A = \{x \mid x \text{ satisfaz a propriedade P}\}$
    2. $B = \{x \mid x \text{ é vogal}\} = \{a, e, i, o, u\}$
    3. $C = \{x \mid x \text{ é um número inteiro par entre 1 e 10}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Definição 1.1 (Conjunto Vazio)**.** Chama-se *conjunto vazio o conjunto que não possui elemento algum, e denota-se por* $\{\}$ *ou* $\emptyset$*.*

Exemplo 1.2. 1. $A = \{x \mid x \text{ é ímpar e par}\} = \emptyset$

2. $B = \{x \mid x < -1 \text{ e } x > 1\} = \emptyset$

Definição 1.3 (Conjunto Unitário)**.** É o conjunto que possui apenas um elemento.

Exemplo 1.4. 1. $A = \{a\}$

2. $B = \{x \mid X \text{ é par e é está entre 5 e 7}\} = \{6\}$

Definição 1.5 (Conjuntos Iguais)**.** Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Neste caso, denota-se que $A = B$.

Dizemos que A é diferente de B ($A \neq B$), se existe um elemento de algum conjunto que não pertença ao outro.

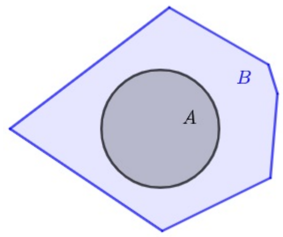
Exemplo 1.6. 1. $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 5, 1, 4, 3\}$

2. $\{2, 4, 6, 8, ...\} = \{x \mid x \text{ é par e maior que } 0\}$.

3. $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$

4. $\{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Definição 1.7 (Subconjunto)**.** Um conjunto A é *subconjunto* de um conjunto B se todo elemento de A também for elemento de B. Em outras palavras, se para todo $x \in A$ tem-se que $x \in B$. Neste caso, denota-se que $A \subset B$ (lê-se: A está contido em B), ou $B \supset A$ (lê-se: B contém A).



Se o conjunto A não for subconjunto de B, escrevemos que A não está contido em B ($A \not\subset B$). Neste caso, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Exemplo 1.8. 1. $\{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. $\{3, 5, 7\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3. $\{x \mid x \text{ é inteiro e múltiplo de } 8\} \subset \{..., -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...\}$

Observação 1.9. 1. $\emptyset$ é um subconjunto de qualquer conjunto A ($\emptyset \subset A$).

2. Todo conjunto é subconjunto dele mesmo ($A \subset A$) (Reflexiva)

3. $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$ (Anti-simétrica)

4. Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$ (Transitiva)

5. Se $A \subset B$ e $A \neq B$, dizemos que A é um subconjunto *próprio* de B.

Definição 1.10 (Conjunto das partes)**.** Dado um conjunto A, chama-se *conjunto das partes* de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo 1.11. 1. Se $A = \{a\}$ então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

2. Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Observação 1.12. 1. Se o conjunto A possui n elementos, então número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é dado por 2^n elementos.

2. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, temos que $\{1, 2\} \subset A$ e $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$.

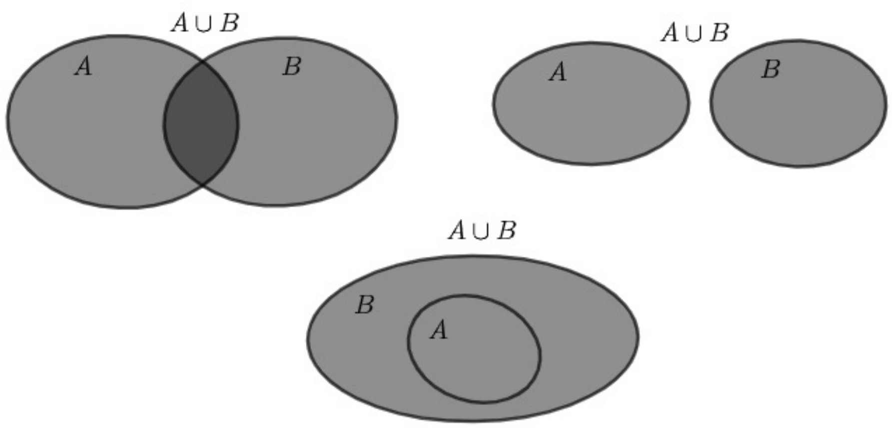
Exemplo 1.13. Seja $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) $A \subset B$	*b)* $B \subset D$	*c)* $B \subset C$
d) $C \supset A$	*e)* $D \supset A$	*f)* $B \not\subset C$
g) $3 \in A$	*h)* $2 \in B$	*i)* $2 \in C$

1.1 Operações com conjuntos

Definição 1.14 (União)**.** Dados dois conjuntos A e B, chama-se *união* (ou *reunião*) de A e B, denotado por $A \cup B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Exemplo 1.15. 1. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ então $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$.

2. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ então $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

3. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ então $A \cup B = \{a, b, c, d\} = B$

Propriedades 1.16. Dados os conjuntos A, B e C, temos

1. $A \cup A = A$ (idempotente)

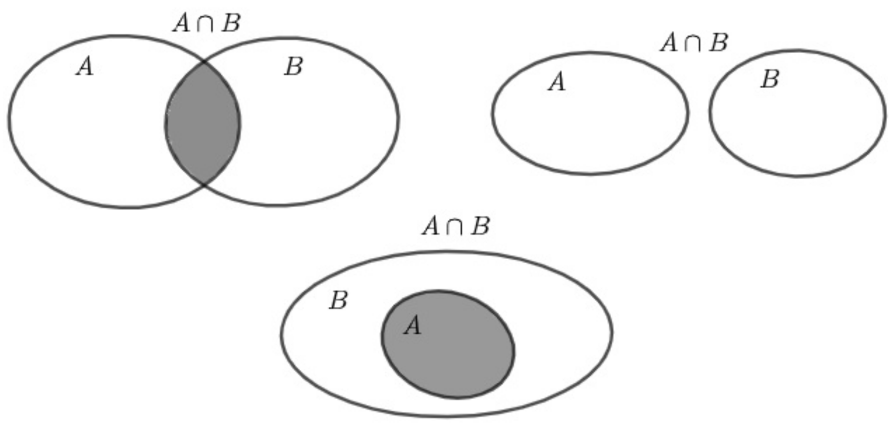
2. $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)

3. $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativa)

Definição 1.17 (Interseção)**.** Dados dois conjuntos A e B, chama-se *interseção* de A e B, denotado por $A \cap B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e pertencem a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Exemplo 1.18. 1. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ então $A \cap B = \emptyset$.

2. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ então $A \cap B = \{1, 3\}$.

3. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ então $A \cap B = \{a, b, c\} = A$

Propriedades 1.19. Dados os conjuntos A, B e C, temos

1. $A \cap A = A$ (idempotente)

2. $A \cap \emptyset = \emptyset$

3. $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

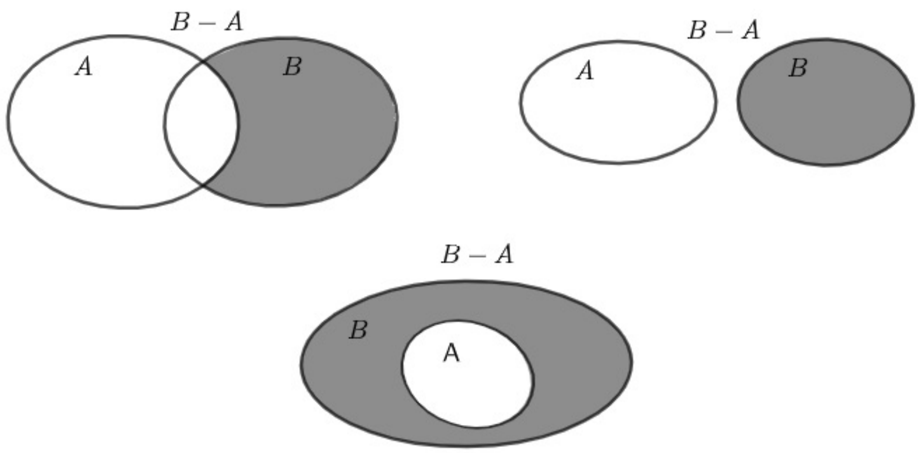
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva)

6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva)

Observação 1.20. Quando $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são *conjuntos disjuntos.*

Definição 1.21 (Diferença)**.** Dados dois conjuntos A e B, chama-se *diferença* entre B e A, denotado por $B - A$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a A.

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$



Exemplo 1.22. 1. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$ então $B - A = \{4, 5, 6\} = B$.

2. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ então $B - A = \{5, 7\}$.

3. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ então $A - B = \{2\}$.

4. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ então $B - A = \{d\}$

Propriedades 1.23. Dados os conjuntos A, B e C, temos

1. $A - A = \emptyset$

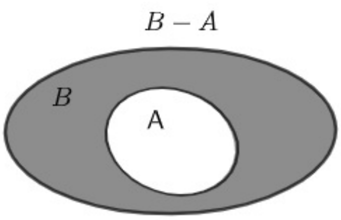
2. $A - \emptyset = A$

3. $A - B \neq B - A$, em geral.

4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Definição 1.24 (Complementar)**.** Dados dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$, chama-se *complementar* de A em B, denotado por A^c ou $\complement_B^A$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a A.

$$A^c = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\} = B - A$$



Exemplo 1.25. 1. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ então $A^c = \{4, 5, 6\}$.

2. Se $A = \{1, 2, 3\} = B$ então $A^c = \emptyset$.

3. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ então $A^c = \{d\}$.

4. Se $A = \emptyset$ e $B = \{1, 2, 3\}$ então $A^c = \{1, 2, 3\} = B$.

Propriedades 1.26. Sejam A e B subconjunto de C, temos

1. $A^c \cap A = \emptyset$

2. $A^c \cup A = C$

3. $(A^c)^c = A$.

4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Exercício 1.27. Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ e $D = \{1, 2, 3, ..., 15\}$, determine:

$a)$ $A \cap B$	$b)$ $A \cup B$	$c)$ $A \cap B \cap C$
$d)$ $A \cap (B \cup C)$	$e)$ $A \cup (B \cap C)$	$f)$ $A - B$
$g)$ $B - A$	$h)$ $A \cup (C - B)$	$i)$ $A \cap (B - C)$
$j)$ $(A \cap B) \cup (B - A)$	$k)$ $\complement_D^B$	$l)$ $\complement_D^C$
$m)$ $\complement_D^{A \cap C}$	$n)$ $\complement_D^{A \cup C}$	$o)$ $\complement_D^A \cap B$

2 Conjuntos Numéricos

2.1 Números Naturais

O conjunto dos números naturais é de grande importância pelo seu uso na contagem. Por exemplo, número de dedos da mão de um ser humano; número de animais em uma fazenda, número de frutas em uma cesta, etc.

O conjunto dos números naturais é representado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\}.$$

Indicamos por $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\} = \mathbb{N} - \{0\}$, o conjunto dos números naturais não-nulos.

No conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ são definidas duas operações fundamentais que são a adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, que apresentam as seguintes propriedades:

[A1] **Associativa da adição**: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$;

[A2] **Comutativa da adição**: $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{N}$;

[A3] **Elemento neutro da adicção**: Existe 0 em $\mathbb{N}$ tal que $a + 0 = a$ e $0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

[M1] **Associativa da multiplicação**: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$;

[M2] **Comutativa da multiplicação**: $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a, b \in \mathbb{N}$;

[M3] **Elemento neutro da multiplicação**: Existe 1 em $\mathbb{N}$ tal que $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

[D] **Distributiva**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$;

2.2 Números Inteiros

O conjunto ds números inteiros são constituídos dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\}$ e dos seus opostos $\{0, -1, -2, -3, -4, -5, ..., -n, ...\}$.

O conjunto dos números inteiros é representado por

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}.$$

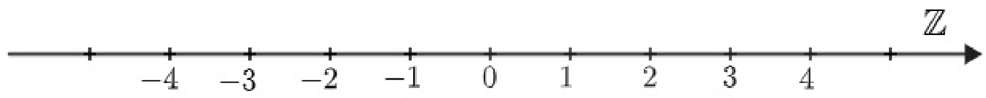
Indicamos por

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, o conjunto dos números inteiros não-nulos;

- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3...\} = \mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros não negativos;

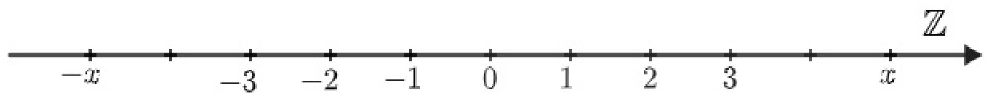
- $\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -2, 0\}$ o conjunto dos números inteiros não positivos;

Uma forma de representar geometricamente o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é construir uma reta numerada orientada, considerando o número 0 como a origem, e posicionando número 1 em algum lugar no sentido positivo, e assim tomar a unidade de medida como a distância entre 0 e 1, e organizar os demais números inteiros da seguinte maneira:



O sucessor de um número inteiro é o número que está imediatamente à sua direita na reta (em $\mathbb{Z}$) e o antecessor de um número inteiro é o número que está imediatamente à sua esquerda na reta (em $\mathbb{Z}$). Por exemplo, 3 é sucessor de 2, e 2 é o antecessor de 3.

Todo número inteiro x exceto o zero, possui um elemento denominado simétrico ou oposto $-x$, e ele é caracterizado pelo fato geométrico que tanto x como $-x$ estão à mesma distância da origem 0 do conjunto $\mathbb{Z}$. Por exemplo, o oposto de 33 é -33. O oposto de -15 é 15.



No conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ também são definidas as operações de adição $(+)$ e de multiplicação $(\cdot)$, que apresentam, além das propriedades [A1], [A2], [A3], [M1], [M2], [M3] e [D], a propriedade:

[A4] **Elemento oposto para adição**: Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Devido a esta propriedade, podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de subtração, estabelecendo que

$$a - b = a + (-b), \text{ para todo } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Para a multiplicação de números inteiros, devemos observar que dado um número inteiro a, o seu oposto $-a$ pode ser obtido por $-a = (-1) \cdot a$. Note também que $a \cdot 0 = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{Z}$. Desta forma, as propriedades anteriores nos permitem estabelecer as regras de sinais: $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot 1 = -1$, $1 \cdot (-1) = -1$ e $(-1) \cdot (-1) = 1$. Esta última, segue do fato:

$$\begin{aligned}
1 + (-1) = 0 &\overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} (-1) \cdot (1 + (-1)) = (-1) \cdot 0 = 0 \overset{[D]}{\Longrightarrow} (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0 \\
&\Longrightarrow -1 + (-1) \cdot (-1) = 0 \overset{+1}{\Longrightarrow} 1 + (-1 + (-1) \cdot (-1)) = 1 + 0 = 1 \\
&\overset{[A1]}{\Longrightarrow} \underbrace{(1 + (-1))}_{0} + (-1) \cdot (-1) = 1 \overset{[A3]}{\Longrightarrow} (-1) \cdot (-1) = 1
\end{aligned}$$

Desta forma, para $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

Observação 2.1. 1. Divisor: Dizemos que o inteiro a é **divisor** do inteiro b, e denotamos por $a|b$, quando existe um inteiro c tal que $b = a \cdot c$. Isto é,

$$a|b \Longleftrightarrow \text{existe } c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = a \cdot c.$$

Neste caso, dizemos que b é **divisível** por a, e c pode ser denotado por $c = \dfrac{b}{a}$. Por exemplo,

$$\begin{array}{rll}
2|6, & \text{pois} & 6 = 2 \cdot 3 \\
(-1)|5, & \text{pois} & 5 = (-1) \cdot (-5) \\
(-2)|(-8), & \text{pois} & (-8) = (-2) \cdot 4 \\
3|0, & \text{pois} & 0 = 3 \cdot 0 \\
0|0, & \text{pois} & 0 = 0 \cdot 1
\end{array}$$

2. Números primos: Dizemos que um número inteiro p é **primo** quando p é diferente de $0, 1$ e -1, e for divisível apenas por $1, -1, p$ e $-p$.

   Por exemplo, 2, -2, 3, -3, 5 e -5 são números primos.

2.3 Números Racionais

A origem histórica dos números racionais está intimamente ligada com fatos de natureza geométrica. Estes números são construídos a partir da necessidade de medir e de relacionar medidas.

Os números racionais são todos os números que podem ser escritos sob a forma de fração de números inteiros, isto é,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}.$$

Na fração $\frac{a}{b}$, o número a é denominado **numerador** e o número b é denominado **denominador**.

Note que todo número inteiro a é um número racional, pois $a = \frac{a}{1}$. Notem também que $\frac{a}{b} = 0$ se, e somente se, $a = 0$.

Uma fração $\frac{a}{b}$ é dita **irredutível** se $\text{mdc}(a, b) = 1$. Por exemplo, $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-4}{9}$ são frações irredutíveis.

No conjunto dos números racionais, adotam-se as seguintes definições: Para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$:

(i) Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

(ii) Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

(iii) Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Assim, é possível verificar que as operações de adição e multiplicação de racionais satisfazem as propriedades [A1], [A2], [A3], [A4], [M1], [M2], [M3] e [D]. Além disso, temos a seguinte propriedade:

[M4] **Elemento inverso da multiplicação**: Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $\frac{a}{b} \neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Devido a propriedade [M4], podemos definir em $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ a operação de divisão, estabelecendo que $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não-nulos.

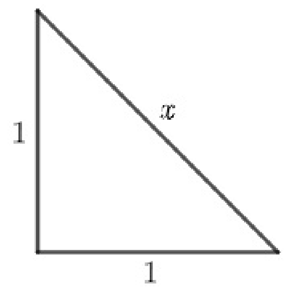
Assim, dados dois inteiros não nulos a e b, a notação a/b representa $\frac{a}{1} / \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Observação 2.2. Todo número racional pode ser representado por um número decimal. Num primeiro caso, o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, por exemplo, $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{100} = 0,01$, $\frac{33}{1000} = 0,033$.

E num segundo caso, o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica, por exemplo: $\frac{1}{3} = 0,33333333...$, $\frac{2}{7} = 0,285714285714285714...$, $1 = 0,9999....$

2.4 Números Reais

Suponha que x seja o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a 1.



Suponha que x esteja associado a um número racional $\frac{p}{q}$. Sem perda de generalidade, podemos supor p e q inteiros primos entre si. Então, do Teorema de Pitágoras, temos que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Temos então que $p^2 = 2q^2$, o que resulta que p^2 é par, e consequentemente, p é par, ou seja, $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo $(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. Portanto, q^2 também é par, e consequentemente, q é par, absurdo!, pois p e q foram tomados primos entre si. Logo, x não está associado a um número racional.

De forma geral, dado um número racional $\frac{a}{b}$ e um número natural $n \geq 2$, nem sempre $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é racional.

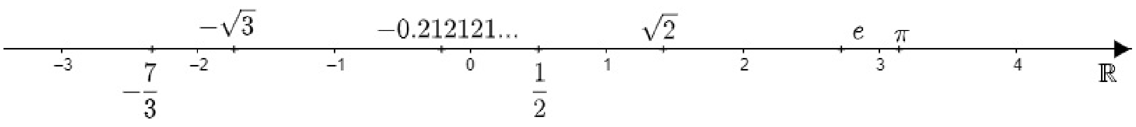
Assim, denominamos como conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ o conjunto formado por todos os números com representação decimal exata ou periódica, que são os números racionais, e os números cuja representação decimal não é exata nem periódica, que são os números irracionais. Por exemplo:

$\sqrt{2} = 1,4142135624...$

$\pi = 3,14159265...$

$e = 2,718281828...$

Os números reais podem ser representados por meio de pontos numa reta. Isto é, cada ponto



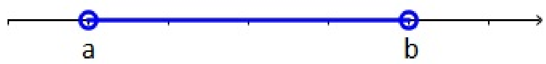
da reta é identificado como um número racional ou irracional. Neste caso, esta reta é chamada de *reta real* ou *reta numérica.*

No conjunto dos números reais as operações de adição e multiplicação satisfazem as propriedades [A1], [A2], [A3], [A4], [M1], [M2], [M3], [M4] e [D]. Em $\mathbb{R}$ também podemos definir as operações subtração e divisão.

2.5 Intervalos

Sejam a e b dois números reais, com $a < b$. Um **intervalo** em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que possui uma das seguintes formas:

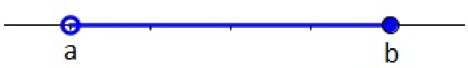
- Intervalo aberto $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



- Intervalo fechado $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

- Intervalos semi-abertos ou semifechados:

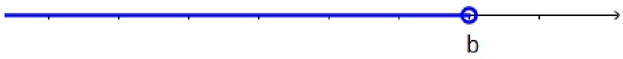
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $\qquad$ $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



- Introduzindo os símbolos $-\infty$ e $+\infty$, podemos considerar os seguintes intervalos:

$$]-\infty,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$$

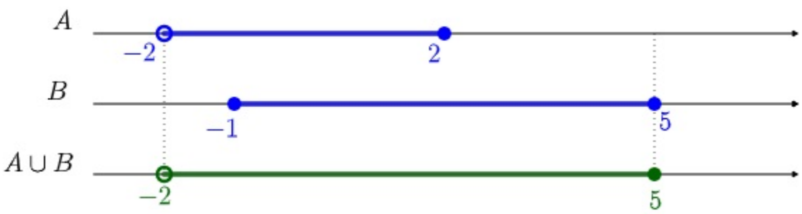
$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}\mid -\infty<x<b\}$$



$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<+\infty\}$$

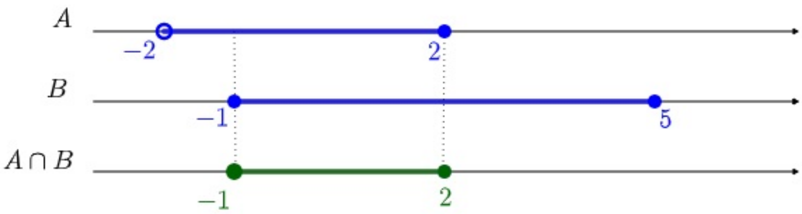
Exemplo 2.3. Dados os intervalos $A=]-2,2]$ e $B=[-1,5]$, determine $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, A^c e B^c.

- Determinando $A\cup B$.



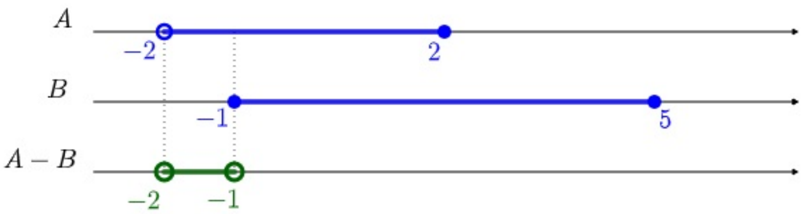
Então $A\cup B=]-2,5]$.

- Determinando $A\cap B$.



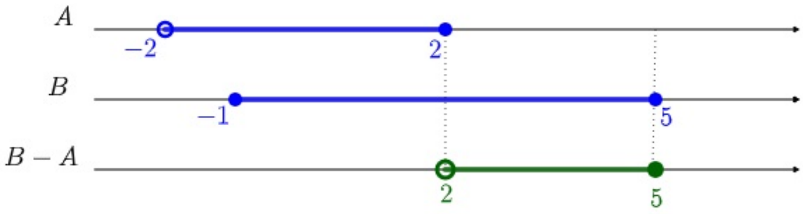
Então $A\cap B=[-1,2]$.

- Determinando $A-B$.



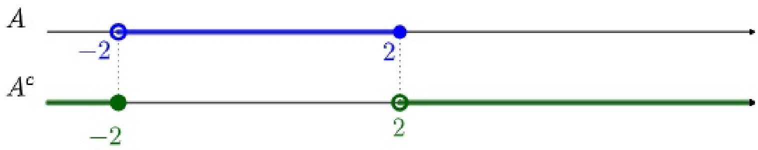
Então $A-B=]-2,-1[$.

- Determinando $B - A$.



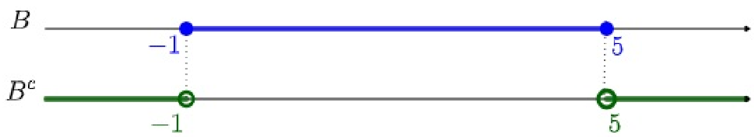
Então $B - A =]2, 5]$.

- Determinando A^c.



Então $A^c =]-\infty, -2] \cup]2, \infty[$.

- Determinando B^c.



Então $B^c =]-\infty, -1[\cup]5, \infty[$.

Exercício 2.4. Dados os conjuntos $A = [-3, 7]$, $B =]-\infty, 0[$ e $C = [1, +\infty[$, determine?

a) $A \cap B$	*b*) $A \cup B$	*c*) $A \cap B \cap C$
d) $A \cap (B \cup C)$	*e*) $B \cap C$	*f*) $C - A$
g) $B - A$	*h*) $A \cup (C - B)$	*i*) $A \cap (B - C)$
j) $(A \cap B) \cup (B - A)$	*k*) $A^c \cap C$	*l*) $B \cap C^c$

2.6 Desigualdades

Sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ podemos definir uma relação de ordem $\leq$, satisfazendo, para qualquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, as propriedades:

- Reflexiva: $x \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Anti-simétrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$.

- Transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Propriedades 2.5. Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Então:

1. $x \leq y \iff x + z \leq y + z$.

2. $x > 0 \iff \dfrac{1}{x} > 0$.

3. $x > 0 \iff -x < 0$.

4. Se $z > 0$ então $x \leq y \iff xz \leq yz$.

5. Se $z < 0$ então $x \leq y \iff xz \geq yz$.

6. $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

7. $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$ (Tricotomia).

8. $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

Exemplo 2.6. Resolva a inequação $5x + 3 < 2x + 7$.

Resolução:

$$5x + 3 < 2x + 7 \iff 5x < 2x + 4 \iff 3x < 4 \iff x < \frac{4}{3}$$

Então o conjunto solução para a inequação é dado por $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{4}{3}\} =]-\infty, \frac{4}{3}[$.

Exemplo 2.7. Estude o sinal da expressão: $\dfrac{x+3}{x-1}$

Resolução: Primeiro observe que $x \neq 1$, pois caso contrário teríamos uma indeterminação. Analisemos quando $\dfrac{x+3}{x-1} > 0$. Neste caso, temos duas possibilidades:

1. $x + 3 > 0$ e $x - 1 > 0 \iff x > -3$ e $x > 1 \implies x > 1$

2. $x + 3 < 0$ e $x - 1 < 0 \iff x < -3$ e $x < 1 \implies x < -3$

Isto resulta que $\dfrac{x+3}{x-1} > 0$ quando $x < -3$ ou $x > 1$.

Observe que $\dfrac{x+3}{x-1} = 0$ quando $x + 3 = 0$, ou seja, $x = -3$.

Agora analisemos quando $\dfrac{x+3}{x-1} < 0$. Novamente aqui temos duas possibilidades:

1. $x+3<0$ e $x-1>0 \iff x<-3$ e $x>1$ (Vazio)

2. $x+3>0$ e $x-1<0 \iff x>-3$ e $x<1 \implies -3<x<1$

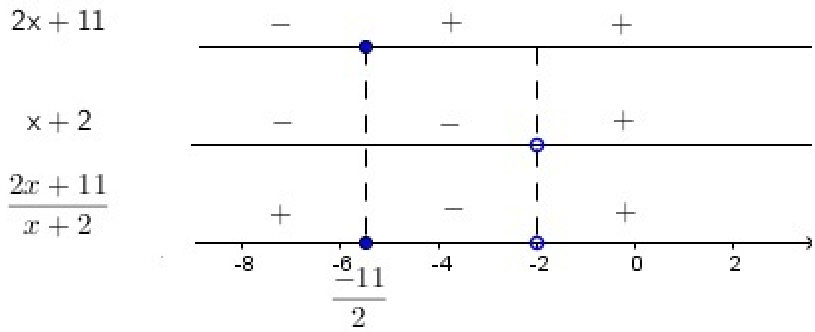
Portanto $\dfrac{x+3}{x-1}<0$ quando $-3<x<1$.

Exemplo 2.8. Resolva a inequação: $\dfrac{3x-1}{x+2}\geq 5$.

Resolução:

$$\frac{3x-1}{x+2}\geq 5 \iff \frac{3x-1}{x+2}-5\geq 0 \iff \frac{3x-1-5(x+2)}{x+2}\geq 0$$

$$\iff \frac{-2x-11}{x+2}\geq 0 \iff \frac{2x+11}{x+2}\leq 0$$



Então

$$\frac{3x-1}{x+2}\geq 5 \iff \frac{2x+11}{x+2}\leq 0 \iff -\frac{11}{2}\leq x<-2.$$

Logo $[-\frac{11}{2},-2[$ é conjunto solução da inequação.

Observação 2.9. No exemplo anterior, deve-se tomar cuidado com esta expressão $\dfrac{3x-1}{x+2}\geq 5$, pois é muito tentador ao resolver esta inequação fazer $3x-1\geq 5(x+2)$, o que só é verdade quando $x+2>0$.

Exercício 2.10. Resolva a inequação $(2x+1)\cdot(x+3)\geq 0$.

2.7 Módulo de um número real

Definição 2.11 (Módulo)**.** Seja $x\in\mathbb{R}$. Definimos o **módulo** (ou **valor absoluto**) de x por:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ se } x\geq 0 \\ -x & , \text{ se } x<0 \end{cases}$$

Observe que $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Note também que $|x|^2 = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, segue que $|x| = \sqrt{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.12.
1. $|-3| = 3$
2. $|8| = 8$
3. $|0| = 0$

Exemplo 2.13. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 3| = 7$.

Sabemos que

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & , \text{ se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & , \text{ se } x-3 < 0 \end{cases} \iff |x-3| = \begin{cases} x-3 & , \text{ se } x \geq 3 \\ -x+3 & , \text{ se } x < 3 \end{cases}$$

Como queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-3| = 7$, então para $x \geq 3$, temos que $|x-3| = 7$ implica que $x - 3 = 7$, o que resulta que $x = 10$. Para $x < 3$, temos que $|x - 3| = 7$ implica que $-x + 3 = 7$, o que resulta que $x = -4$. Logo a solução do problema é $x = -4$ ou $x = 10$.

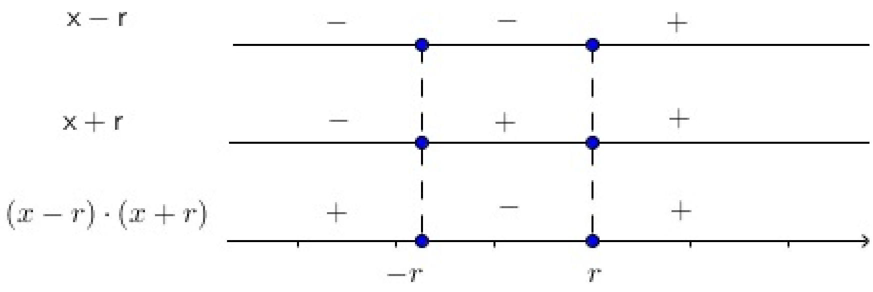
Proposição 2.14. *Sejam $x, y, r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$. Então*

1. $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.
2. $|x| \geq r \iff x \leq -r$ *ou* $x \geq r$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. $|x| \geq x$ *e* $|x| \geq -x$.
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração.
1. Temos que

$$\begin{aligned} |x| \leq r \iff |x|^2 \leq r^2 &\iff x^2 \leq r^2 \\ \iff x^2 - r^2 \leq 0 &\iff (x-r)\cdot(x+r) \leq 0 \end{aligned}$$

Analisando a inequação $(x - r) \cdot (x + r) \leq 0$,



obtemos que $|x| \leq r \iff (x-r)\cdot(x+r) \leq 0 \iff -r \leq x \leq r$.

2. Temos que

$$\begin{aligned} |x| \geq r \quad &\iff \quad |x|^2 \geq r^2 \quad \iff \quad x^2 \geq r^2 \\ &\iff \quad x^2 - r^2 \geq 0 \quad \iff \quad (x-r)\cdot(x+r) \geq 0 \end{aligned}$$

Analisando a inequação $(x-r)\cdot(x+r) \geq 0$ (vide figura anterior), temos

$$|x| \geq r \iff (x-r)\cdot(x+r) \geq 0 \iff x \leq -r \text{ ou } x \geq r.$$

3. Observe que $|x\cdot y|^2 = (x\cdot y)^2 = x^2\cdot y^2 = |x|^2\cdot|y|^2$. Como $|x\cdot y| \geq 0$, $|x| \geq 0$ e $|y| \geq 0$, temos que $|x\cdot y| = \sqrt{|x|^2\cdot|y|^2} = |x|\cdot|y|$.

4. Segue da definição.

5. Se $x+y \geq 0$ então $|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$.

   Se $x+y < 0$ então $|x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$.

$\square$

Exemplo 2.15. 1. $|x| \leq 5$ o que implica que $-5 \leq x \leq 5$.

2. $|x| > 8$, o que implica que $x < -8$ ou $x > 8$

Exemplo 2.16. Elimine o módulo em $|x-1|+|x+2|$.

Resolução: Observe que

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \text{ se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{ se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & , \text{ se } x \geq 1 \\ -x+1 & , \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

e

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & , \text{ se } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{ se } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & , \text{ se } x \geq -2 \\ -x-2 & , \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

Assim, analisando as possibilidades acima, temos

- Se $x < -2 \Longrightarrow |x-1| + |x+2| = (-x+1) + (-x-2) = -2x - 1.$
- Se $-2 \leq x < 1 \Longrightarrow |x-1| + |x+2| = (-x+1) + (x+2) = 3.$
- Se $x \geq 1 \Longrightarrow |x-1| + |x+2| = (x-1) + (x+2) = 2x + 1.$

Portanto,

$$|x-1| + |x+2| = \begin{cases} -2x-1 & , \text{ se } x < -2 \\ 3 & , \text{ se } -2 \leq x < 1 \\ 2x+1 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.17. A equação $|x| = x-6$ não possui solução. De fato, se $x \geq 0$, então $x = x-6$, o que resulta que $0 = -6$ o que é um absurdo. Se $x < 0$, então $-x = x-6$, ou seja, $2x = 6$, ou ainda, $x = 3$, contradição, pois $x < 0$. Assim, conclui-se que a equação não tem solução.

Exemplo 2.18. Resolva a inequação $|x-3| < x+1$

Das propriedades de módulo, segue que $|x-3| < x+1$ implica que $-(x+1) < x-3 < x+1$. Assim, vamos separar esta inequação em duas inequações:

$$\underbrace{-x-1 < x-3}_{I} \text{ e } \underbrace{x-3 < x+1}_{II}$$

Resolvendo I: $-x-1 < x-3$

$$-x-1 < x-3 \Longleftrightarrow -1+3 < x+x \Longleftrightarrow 2 < 2x \Longleftrightarrow 1 < x$$

Resolvendo II: $x-3 < x+1$

$$x-3 < x+1 \Longleftrightarrow x-x < 1+3 \Longleftrightarrow 0 < 4 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a solução da inequação é dada por todo $x \in \mathbb{R}$ tal que x satisfaça I e II, isto é, $x > 1$ e $x \in \mathbb{R}$. Portanto a solução é dada por $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

Exercício 2.19. Resolva a equação $|5x-7| = 13$.

Exercício 2.20. Resolva a equação $|x - 5| = 1 - 2x$.

Exercício 2.21. Resolva a inequação $|3x - 5| \geq 2x$.

3 Relações

3.1 Par Ordenado

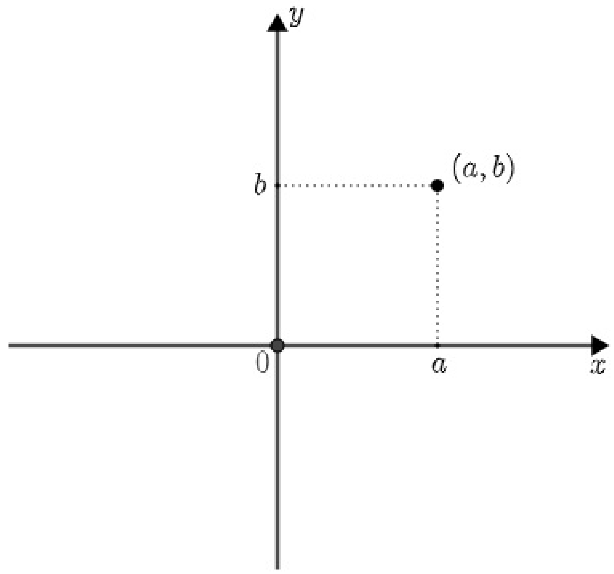
Chama-se *par* todo conjunto formado por dois elementos. Por exemplo, $\{1, 2\}$, $\{-2, 5\}$ e $\{a, b\}$ são pares. É importante lembrar que se invertermos a ordem dos elementos de um par, não produzimos um novo par, sito é, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definição 3.1 (Par ordenado)**.** Um *par ordenado* é um conjunto de dois elementos em que a ordem dos elementos os diferencia, isto é, tem importância. Indicamos por (a, b) o par ordenado formado pelos elementos a e b, onde a é o primeiro elemento e b é o segundo elemento.

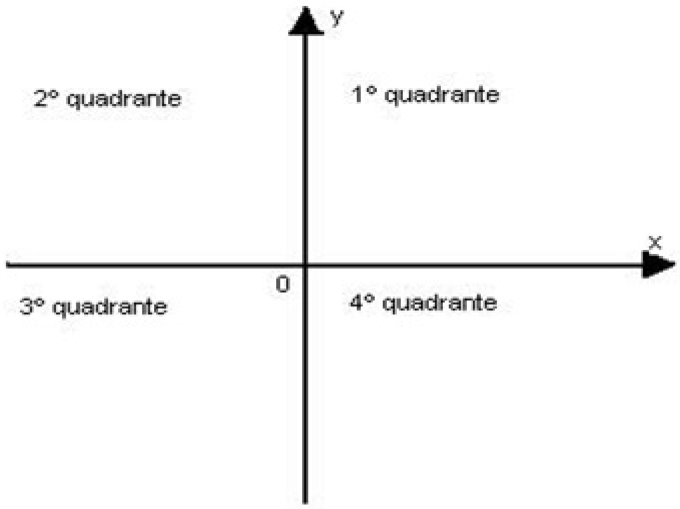
Deste modo $(a, b) \neq (b, a)$, e $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

3.2 Sistema Cartesiano Ortogonal

Um *sistema cartesiano ortogonal* é um sistema formado por dois eixos x e y, perpendiculares entre si, também chamado de *plano cartesiano*.



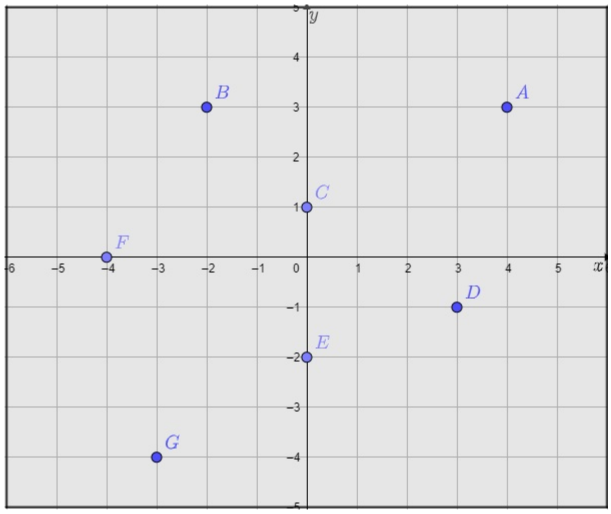
Um ponto no sistema cartesiano é representado por um par ordenado (a, b), onde a é a *abscissa* e b é a *ordenada* de (a, b). O eixo x é chamado *eixo das abscissas* e o eixo y é chamado de *eixo das ordenadas*. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*. A *origem* do sistema é o ponto $0 = (0, 0)$.



Assim:

- Um ponto no $1^{\underline{o}}$ quadrante tem abscissa e ordenada positivas.
- Um ponto no $2^{\underline{o}}$ quadrante tem abscissa negativa e ordenada positiva.
- Um ponto no $3^{\underline{o}}$ quadrante tem abscissa e ordenada negativas.
- Um ponto no $4^{\underline{o}}$ quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa.
- Um ponto sobre o eixo x tem ordenada igual a 0.
- Um ponto sobre o eixo y tem abscissa igual a 0.

Exemplo 3.2. Localizar o pontos $A(4, 3)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 1)$, $D(3, -1)$, $E(0, -2)$, $F(-4, 0)$ e $G(-3, -4)$ no plano cartesiano.



3.3 Produto Cartesiano

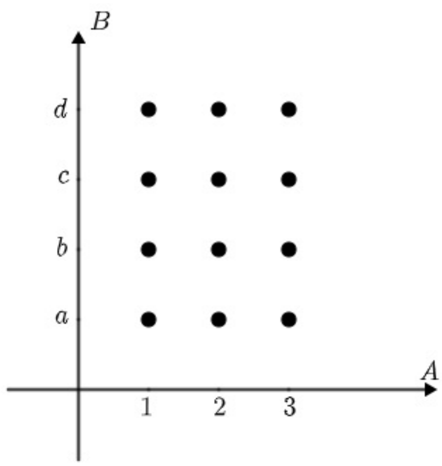
Definição 3.3 (Produto cartesiano)**.** Dados dois conjuntos não vazios A e B, chama-se *produto cartesiano* de A por B, o conjunto, denotado por $A \times B$, cujos os elementos são todos os pares ordenados (x, y) onde x pertence a A e y pertence a B

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então $A \times B = \emptyset$.

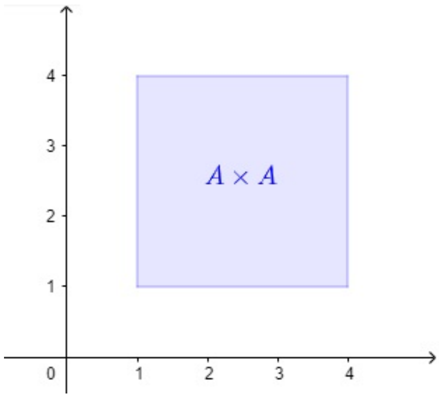
Exemplo 3.4. 1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$$

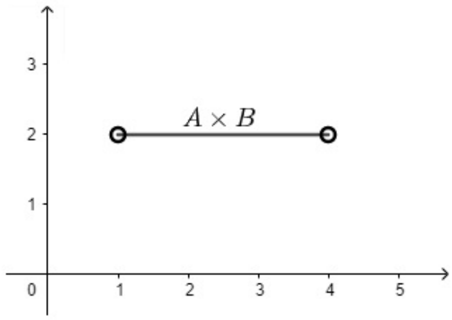


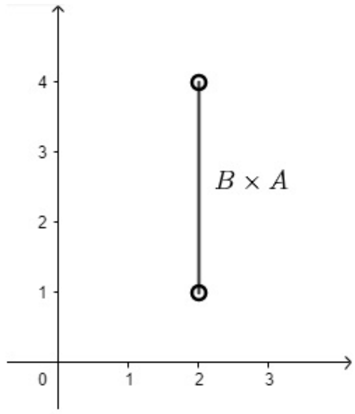
Representação gráfica de $A \times B$

2. Seja $A = [1, 4]$. Então $A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\} = A^2$.



3. Seja $A =]1,4[$ e $B = \{2\}$, então $A \times B = \{(x,2) \mid x \in A\}$ e $B \times A = \{(2,y) \mid y \in A\}$





Observação 3.5. 1. Se $A \neq B$ então $A \times B \neq B \times A$, ou seja, o produto cartesiano não é comutativo.

2. Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.

3. Se A ou B for um conjunto infinito e ambos não vazios, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

4. Dados os conjuntos A, B e C quaisquer, então

   - $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
   - $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Exercício 3.6. Dados $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$ e $c = \{1,4\}$, verifique que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ e $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

3.4 Relações Binárias

Definição 3.7 (Relação Binária)**.** Sejam A e B dois conjuntos e seja $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ o produto cartesiano de A por B. Todo subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times B$ é chamado de uma *relação binária* de A em B, ou seja, toda relação é um conjunto de pares ordenados.

$$\mathcal{R} \text{ é relação de } A \text{ e } B \text{ se, e somente se, } \mathcal{R} \subset A \times B.$$

Se $B = A$ e $\mathcal{R}$ é uma relação de A em A, ou seja, $\mathcal{R}$ é um subconjunto de $A \times A$, então dizemos que $\mathcal{R}$ é uma *relação sobre* A.

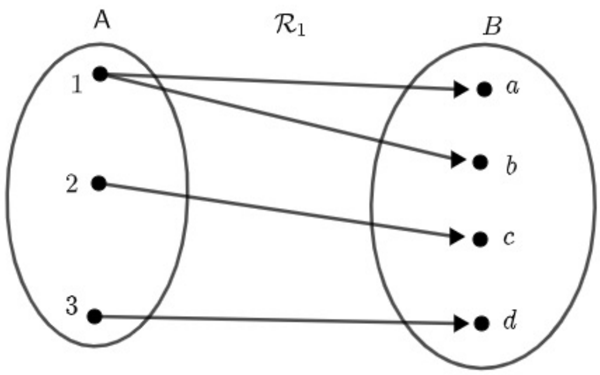
Notação: Se $\mathcal{R}$ é uma relação de A em B, usaremos a notação $a\mathcal{R}b$ para indicar que $(a, b) \in \mathcal{R}$, significando que o elemento a está *relacionado* com o elemento b. Se $(a, b) \notin \mathcal{R}$ então escrevemos $a\not\mathcal{R}b$.

Exemplo 3.8. 1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$$

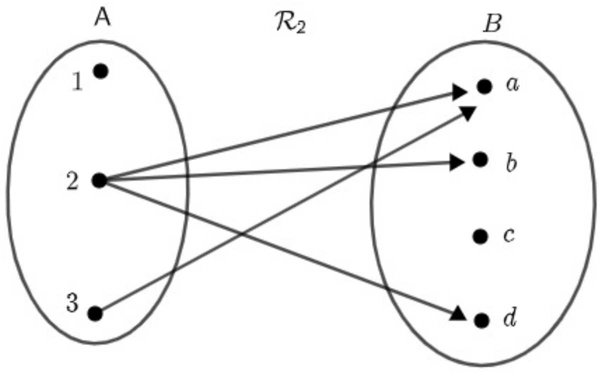
Assim, são relações de A em B:

- $\mathcal{R}_0 = \emptyset$
- $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, d)\}$



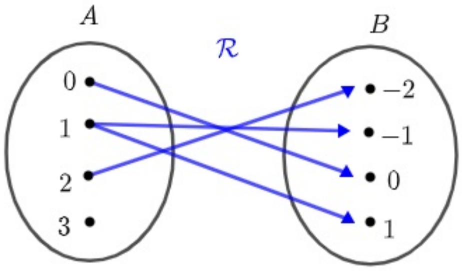
Representação em diagramas de $\mathcal{R}_1$

- $\mathcal{R}_2 = \{(2, a), (2, b), (2, d), (3, a)\}$



2. Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1\}$. Então $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 = y^2\}$ é uma relação de A em B, e seus elementos são:

$$\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (2, -2)\}$$

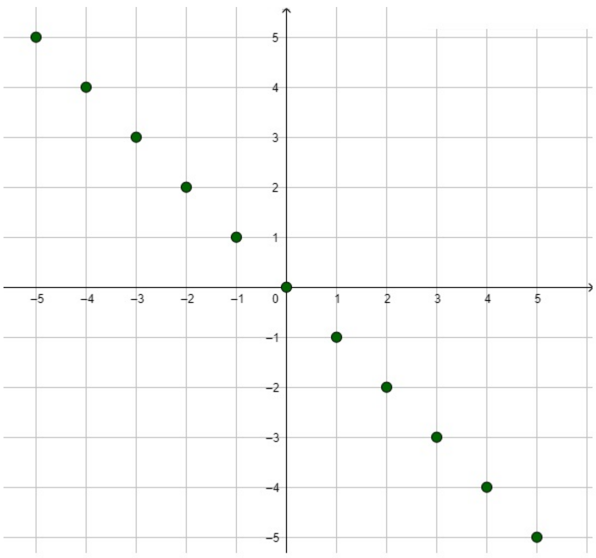


3. Seja $A = B = \mathbb{Z}$. Então $A \times B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Logo

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = -x\}$$

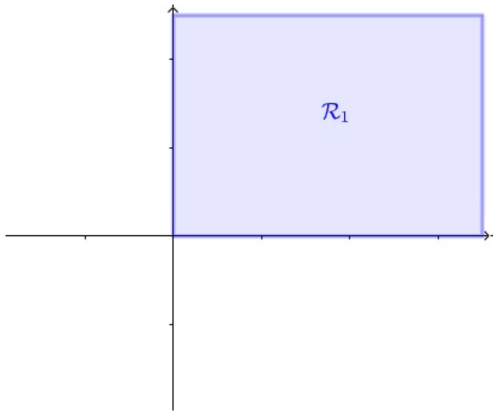
é uma relação sobre $\mathbb{Z}$. Neste caso,

$$\mathcal{R} = \{..., (-n, n), ..., (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2), ..., (n, -n), ...\} = \{(n, -n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

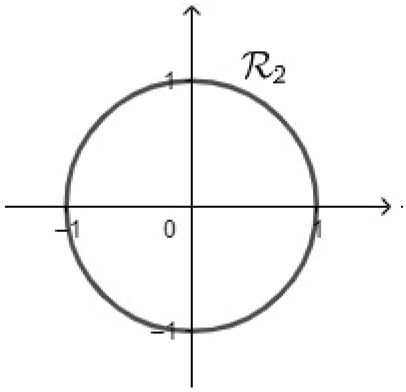


4. Seja $A = B = \mathbb{R}$. Então $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Logo, são relações sobre $\mathbb{R}$:

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$



(b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$



Exercício 3.9. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, determine os elementos da relação $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$ de A em B. Represente em diagrama a relação $\mathcal{R}$.

Exercício 3.10. Seja $A = [1, 4]$ e $B = [1, 3]$. Represente graficamente $A \times B$ e a relação $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$.

Definição 3.11 (Domínio e Imagem)**.** Seja $\mathcal{R}$ uma relação binária de A em B.

Chama-se *domínio* de $\mathcal{R}$ o subconjunto $D(\mathcal{R})$ de A constituído de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a $\mathcal{R}$, isto é,

$$D(\mathcal{R}) = \{x \in A \mid (x, y) \in R\}$$

Chama-se *imagem* de $\mathcal{R}$ o subconjunto $Im(\mathcal{R})$ de B constituído de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a $\mathcal{R}$, isto é,

$$Im(\mathcal{R}) = \{y \in B \mid (x, y) \in R\}$$

O conjunto B é chamado de *contradomínio* de $\mathcal{R}$.

Exemplo 3.12. 1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, e as relações $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, d)\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{(2, a), (2, b), (2, d), (3, a)\}$, vistas no exemplo 3.4 (1), temos que

- $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, d)\} \Rightarrow D(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\}$ e $Im(\mathcal{R}) = \{a, b, c, d\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(2, a), (2, b), (2, d), (3, a)\} \Rightarrow D(\mathcal{R}) = \{2, 3\}$ e $Im(\mathcal{R}) = \{a, b, d\}$

2. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ e a relação $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 = y^2\}$ vistas no exemplo 3.4 (2), temos que

$$\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (2, -2)\} \Rightarrow D(\mathcal{R}) = \{0, 1, 2\} \text{ e } Im(\mathcal{R}) = \{-2, -1, 0, 1\}$$

Exercício 3.13. Determine o domínio e imagem das relações dadas nos exercícios 3.9 e 3.10.

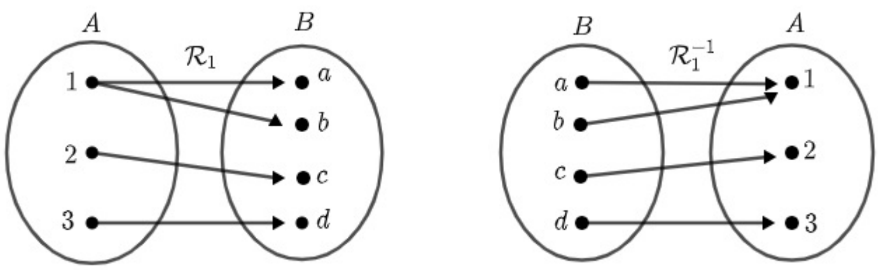
Definição 3.14 (Relação Inversa)**.** Seja $\mathcal{R}$ uma relação de A em B. Defini-se a *relação inversa* $\mathcal{R}^{-1}$ da relação $\mathcal{R}$ como sendo a relação de B em A dada por

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Note que $\mathcal{R}^{-1} \subset B \times A$.

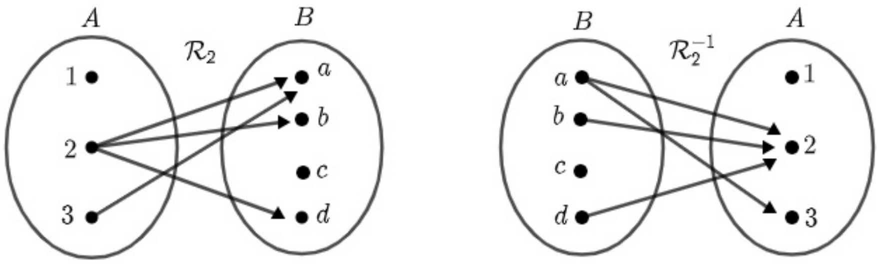
Exemplo 3.15. 1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Então dada a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, d)\}$, temos que a relação inversa de $\mathcal{R}_1$ é dada por

$$\mathcal{R}_1^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$$

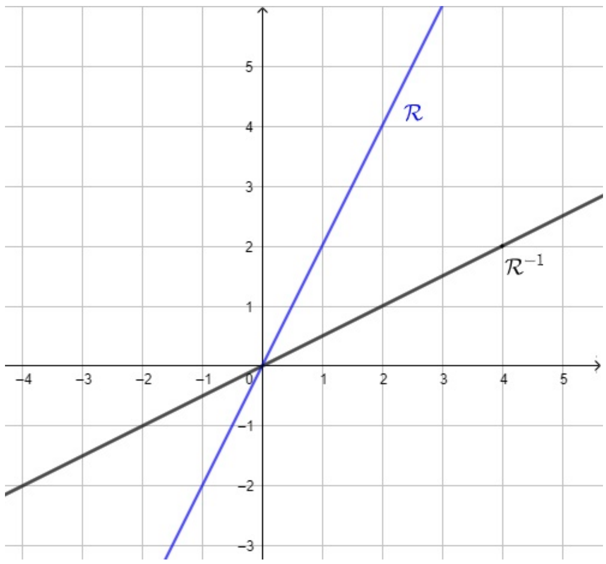


Para a relação $\mathcal{R}_2 = \{(2, a), (2, b), (2, d), (3, a)\}$, temos que a relação inversa de $\mathcal{R}_2$ é dada por

$$\mathcal{R}_2^{-1} = \{(a, 2), (b, 2), (d, 2), (a, 3)\}$$



2. Considere a relação $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$ sobre $\mathbb{R}$. Então a relação inversa de $\mathcal{R}$ é dada por $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{2}x\}$



Exercício 3.16. Determine a relação inversa das relações dadas nos exercícios 3.9 e 3.10.

Propriedades 3.17. Dados $\mathcal{R}$ uma relação de A em B, com relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$. Então

1. $D(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R})$
2. $Im(\mathcal{R}^{-1}) = D(\mathcal{R})$
3. $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$

Demonstração. 1. Mostremos que $D(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R})$. De fato,

$$\begin{aligned} y \in Im(\mathcal{R}) &\Leftrightarrow \text{existe } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow \text{existe } x \in A \text{ tal que } (y, x) \in \mathcal{R}^{-1} \quad \Leftrightarrow y \in D(\mathcal{R}^{-1}). \end{aligned}$$

2. Mostremos que $Im(\mathcal{R}^{-1}) = D(\mathcal{R})$. De fato,

$$\begin{aligned} x \in D(\mathcal{R}) &\Leftrightarrow \text{existe } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow \text{existe } y \in B \text{ tal que } (y, x) \in \mathcal{R}^{-1} \quad \Leftrightarrow x \in Im(\mathcal{R}^{-1}). \end{aligned}$$

3. Mostremos que $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$. De fato,

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (\mathcal{R}^{-1})^{-1}.$$

□

3.4.1 Propriedades sobre Relações

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre A. Dados $x, y \in A$, usaremos a expressão $x\mathcal{R}y$ para indicar que $(x, y) \in \mathcal{R}$. Se $(a, b) \notin \mathcal{R}$ então escrevemos $a\not\mathcal{R}b$.

Definição 3.18 (Reflexiva)**.** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre A é chamada *reflexiva* se para todo $x \in A$ tem-se que $x\mathcal{R}x$, isto é, $(x, x) \in \mathcal{R}$

Exemplo 3.19.

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ uma relação sobre A. Temos que $\mathcal{R}$ é reflexiva, pois $1\mathcal{R}1$, $2\mathcal{R}2$ e $3\mathcal{R}3$

2. Seja $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ uma relação sobre A. Então, $\mathcal{R}$ não é reflexiva, pois $b\not\mathcal{R}b$ e $c\not\mathcal{R}c$.

Definição 3.20 (Simétrica)**.** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre A é chamada *simétrica* se para todo $x, y \in A$ tal que $x\mathcal{R}y$ tem-se que $y\mathcal{R}x$, ou seja, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ então $(y, x) \in \mathcal{R}$.

Exemplo 3.21.

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ uma relação sobre A. Temos que $\mathcal{R}$ é simétrica, pois $1\mathcal{R}2$ e $2\mathcal{R}1$.

2. Seja $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ uma relação sobre A. Então, $\mathcal{R}$ não é simétrica, pois $a\mathcal{R}b$ mas $b\not\mathcal{R}a$.

Definição 3.22 (Anti-simétrica)**.** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre A é chamada *anti-simétrica* se para todo $x, y \in A$ tal que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ tem-se que $x = y$, ou seja, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R}$, então $x = y$.

Exemplo 3.23.

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ uma relação sobre A. Temos que $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica, pois $1\mathcal{R}2$ e $2\mathcal{R}1$, mas $1 \neq 2$.

2. Seja $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ uma relação sobre A. Então, $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, pois $a\mathcal{R}a$ e $a\mathcal{R}a$ e logo $a = a$. Os demais elementos de $\mathcal{R}$ não contradizem a definição de anti-simetria.

Definição 3.24 (Transitiva)**.** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre A é chamada *transitiva* se para todo $x, y, z \in A$ tal que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ tem-se que $x\mathcal{R}z$, isto é, se $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$ implica que $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Exemplo 3.25. 1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ uma relação sobre A. Temos que $\mathcal{R}$ é transitiva, pois

$$\begin{array}{cccc}
1\mathcal{R}1 & \text{e} & 1\mathcal{R}2 & \text{então} & 1\mathcal{R}2 \\
1\mathcal{R}2 & \text{e} & 2\mathcal{R}2 & \text{então} & 1\mathcal{R}2 \\
1\mathcal{R}2 & \text{e} & 2\mathcal{R}1 & \text{então} & 1\mathcal{R}1 \\
2\mathcal{R}2 & \text{e} & 2\mathcal{R}1 & \text{então} & 2\mathcal{R}1 \\
2\mathcal{R}1 & \text{e} & 1\mathcal{R}2 & \text{então} & 2\mathcal{R}2
\end{array}$$

2. Seja $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ uma relação sobre A. Então, $\mathcal{R}$ é transitiva, pois

$$\begin{array}{ccccc}
a\mathcal{R}a & \text{e} & a\mathcal{R}b & \text{então} & a\mathcal{R}b \\
a\mathcal{R}b & \text{e} & b\mathcal{R}c & \text{então} & a\mathcal{R}c \\
a\mathcal{R}a & \text{e} & a\mathcal{R}c & \text{então} & a\mathcal{R}c
\end{array}$$

Definição 3.26 (Relação de ordem parcial)**.** Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma **relação de ordem parcial** sobre A se $\mathcal{R}$ for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Se além disso, $\mathcal{R}$ também satisfazer: para todo $x, y \in A$ tem-se que $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, dizemos que $\mathcal{R}$ é uma **relação de ordem total** sobre A.

Exemplo 3.27. 1. A relação $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$ não é uma relação de ordem parcial, pois $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica.

2. A relação $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ sobre $A = \{a, b, c\}$ não é uma relação de ordem parcial, pois $\mathcal{R}$ não é reflexiva.

3. Seja $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$ uma relação sobre $\mathbb{N}$, isto é,

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \qquad a\mathcal{R}b \iff a \leq b.$$

   Então:

   - $\mathcal{R}$ é reflexiva, pois $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{N}$
   - $\mathcal{R}$ não é simétrica, pois $1 \leq 2$ mas $2 \nleq 1$.
   - $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, pois $\forall a, b \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq b$ e $b \leq a$ implica que $a = b$.
   - $\mathcal{R}$ é transitiva, pois $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

   Logo $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial. Mais ainda, como para todo $x, y \in \mathbb{N}$ é sempre verdade que $x \leq y$ ou $y \leq x$, segue que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total.

Definição 3.28 (Relação de equivalência)**.** Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma **relação de equivalência** sobre A se $\mathcal{R}$ for reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 3.29.

1. A relação $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ sobre $A = \{1,2,3\}$ é uma relação de equivalência, pois $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.
2. A relação $\mathcal{R} = \{(a,a), (a,b), (b,c), (a,c)\}$ sobre $A = \{a,b,c\}$ não é uma relação de equivalência, pois $\mathcal{R}$ não é reflexiva.
3. A relação $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$ sobre $\mathbb{N}$ não é relação de equivalência, pois $\mathcal{R}$ não é simétrica.

Exercício 3.30. Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre $\mathbb{Q}$ definida da seguinte forma: para $x, y \in \mathbb{Q}$

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Verifique que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

4 Funções

Considere os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações de A em B.

1. $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x|\}$

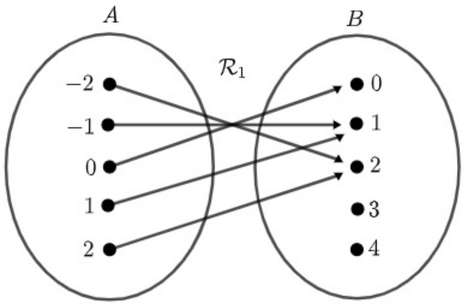
2. $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

3. $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

4. $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Z}\}$

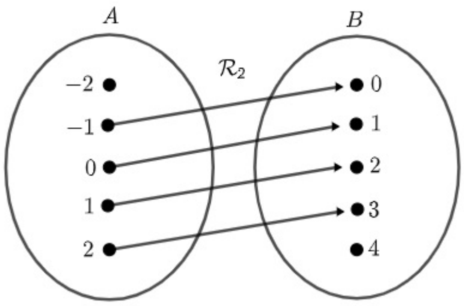
Analisando cada uma das relações dadas, temos

1. $\mathcal{R}_1 = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$



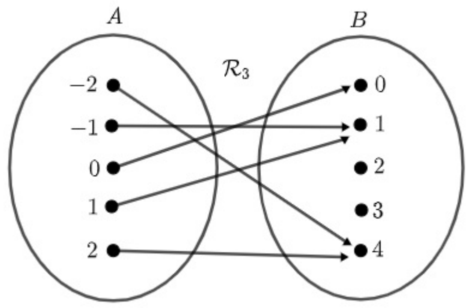
Temos $D(\mathcal{R}_1) = A$ e $Im(\mathcal{R}_1) = \{0, 1, 2\}$. Note que para todo elemento x de A, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in \mathcal{R}_1$.

2. $\mathcal{R}_2 = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$



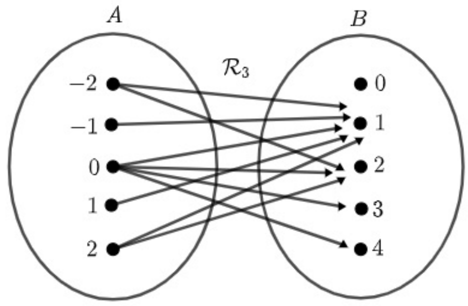
Temos $D(\mathcal{R}_2) = \{-1, 0, 1, 2\} \neq A$ e $Im(\mathcal{R}_2) = \{0, 1, 2, 3\}$. Note que nem todo elemento x de A está relacionado com algum $y \in B$. Neste caso, $-2 \in A$ não está relacionado com nenhum elemento de B.

3. $\mathcal{R}_3 = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$



Temos $D(\mathcal{R}_3) = A$ e $Im(\mathcal{R}_3) = \{0, 1, 4\}$. Note que para todo elemento x de A, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in \mathcal{R}_3$.

4. $\mathcal{R}_4 = \{(-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$



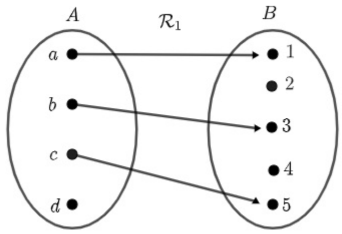
Temos $D(\mathcal{R}_4) = A$ e $Im(\mathcal{R}_4) = \{1, 2, 3, 4\}$. Note que para todo elemento x de A, existe pelo menos $y \in B$ tal que $(x, y) \in \mathcal{R}_4$. Alguns elementos de A estão relacionados com mais de um elemento de B, como por exemplo, $-2, 0$ e 2.

A partir de agora, estaremos interessados nas relações de A em B, onde cada elemento de A esteja relacionado com um único elemento de B, como visto nas relações $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_3$ acima.

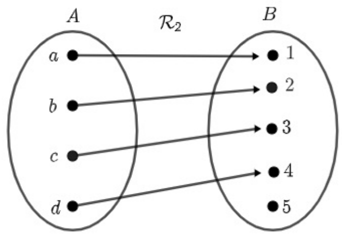
Definição 4.1 (Função)**.** Dados dois conjuntos A e B não-vazios, uma relação f de A em B é chamada de *aplicação* de A em B ou *função definida em A com imagens em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Exemplo 4.2. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere as seguintes relações de A em B:

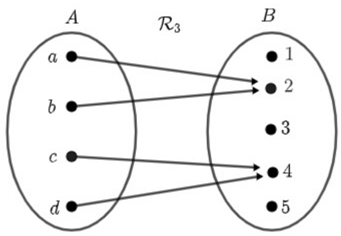
1. $\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4)\}$ não é função, pois d não está relacionado a nenhum elemento de B.



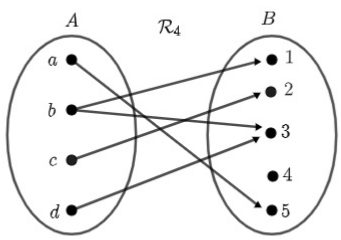
2. $\mathcal{R}_2 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$ é uma função.



3. $\mathcal{R}_3 = \{(a,2),(b,2),(c,4),(d,4)\}$ é uma função.

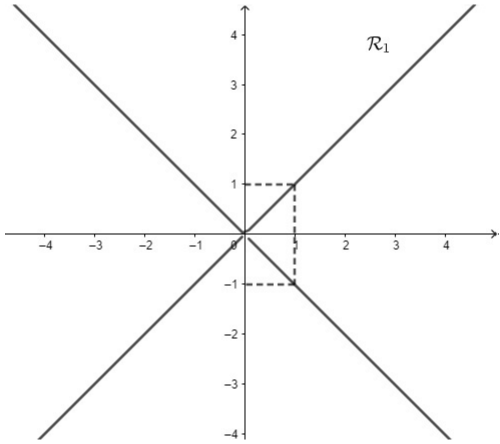


4. $\mathcal{R}_4 = \{(a,5),(b,3),(b,1),(c,2),(d,3)\}$ não é uma função, pois b está relacionado a 3 e 1 em B.

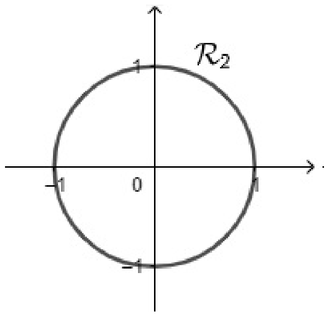


Exemplo 4.3. Seja $A = B = \mathbb{R}$, e considere as seguintes relações sobre $\mathbb{R}$:

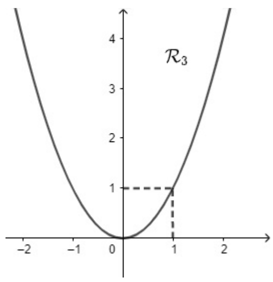
1. $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\}$, não é função, pois $(1,1),(1,-1) \in \mathcal{R}_1$.



2. $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ não é função, pois $(0, 1), (0, -1) \in \mathcal{R}_2$.

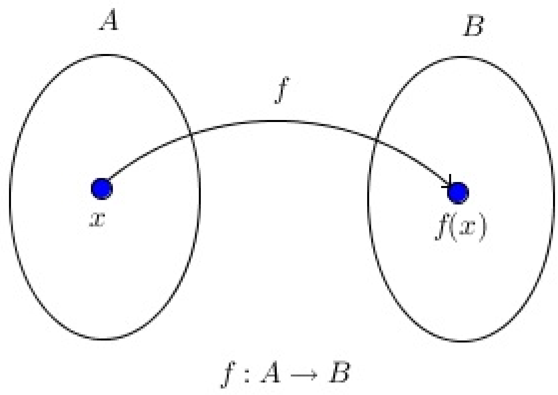


3. $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ é função.



Observação 4.4. 1. Se f for uma função de A em B então denotaremos por $f : A \to B$ e escrevemos $y = f(x)$ para indicar que $(x, y) \in f$.

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$



2. O conjunto A é o domínio da função f, e denotado por

$$A = D_f = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

3. O conjunto B é chamado *contradomínio* de f.

4. A *imagem* de f é conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ em B quando x varia por todo domínio A.

$$\text{Im} f = \{y = f(x) \in B \mid x \in A\} \subset B.$$

5. Todo elemento de A deve estar relacionado com um único elemento de B.

6. É comum fazer referência a uma função fornecendo apenas sua lei de formação, isto é, $y = f(x)$. Nestes casos, convenciona-se que o domínio de f é o maior conjunto onde se pode definir a função. Assim, dizemos que x é a *variável independente*, e y é a *variável dependente*.

7. Se $(x, y) \in f$, o elemento y é chamado de *imagem* de x pela função f, ou de *valor* de f em x.

8. Dizemos que uma função $f : A \to B$ é uma *função de uma variável real a valores reais*, ou *função real*, se os conjuntos A e B são subconjuntos dos números reais $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.5. Seja $f : A \to B$ uma função real. Determine o domínio de f:

1. $f(x) = 2x - 3$

Como não há nenhuma restrição para $x \in \mathbb{R}$ que gere algum conflito em $f(x)$, temos que $D_f = A = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{2}{5x}$

   Como não é possível dividir por 0, devemos tomar $x \in \mathbb{R}$ tal que $5x \neq 0$, ou seja, $x \neq 0$. Logo $D_f = A = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

3. $f(x) = \sqrt{x+2}$

   Como não é possível calcular raiz quadrada de números negativos, então devemos tomar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x+2 \geq 0$, ou seja, $x \geq -2$. Logo $D_f = A = \{x \in \mathbb{R} \,|x \geq -2\} = [-2, +\infty[$.

4. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

   Note que não há restrições para $x-1$. Porém, como não é possível dividir por 0, devemos tomar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 4 \neq 0$, isto é, $(x-2)(x+2) \neq 0$. Então $x \neq 2$ e $x \neq -2$. Logo $D_f = A = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq -2 \text{ e } x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Exercício 4.6. Considere os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Verifique quais das seguintes relações de A em B são funções.

1. $f_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

2. $f_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x\}$

3. $f_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \dfrac{1}{x}\}$

4. $f_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 1 - x\}$

Exercício 4.7. Determine o domínio das seguintes funções reais:

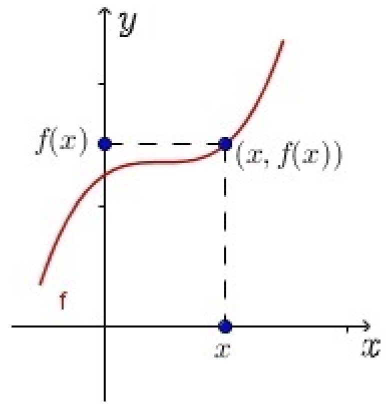
a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x}$ *b)* $g(x) = \sqrt{5-3x}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ *d)* $r(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Definição 4.8 (Gráfico de função)**.** O conjunto formado por todos os pares ordenados $(x, f(x)) \in A \times B$, onde x varia no domínio A de f, denotado por

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

é chamado de **gráfico** da função f.

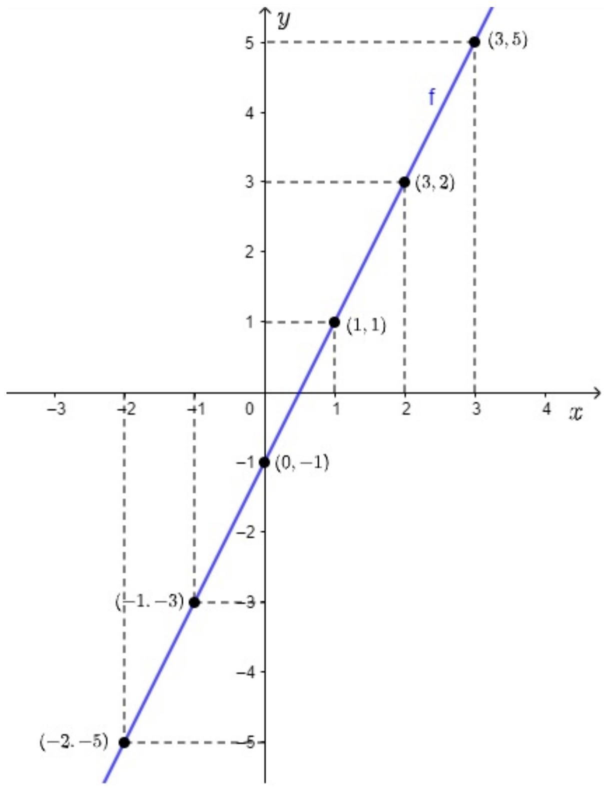


Exemplo 4.9. 1. Considere a função $f(x) = 2x - 1$.

Domínio de f: $D_f = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5

Imagem de f: $\text{Im}f = \mathbb{R}$.



2. Considere a função $f(x) = x^2$.

Domínio de f: $D_f = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

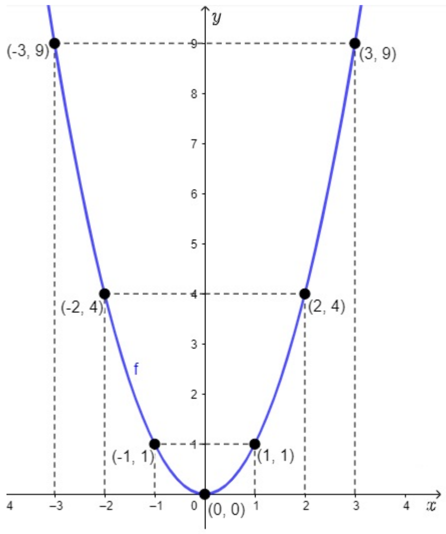


Imagem de f: $\mathrm{Im} f = [0, +\infty[$.

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Domínio de f: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

x	$f(x)$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{3}$	-3
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

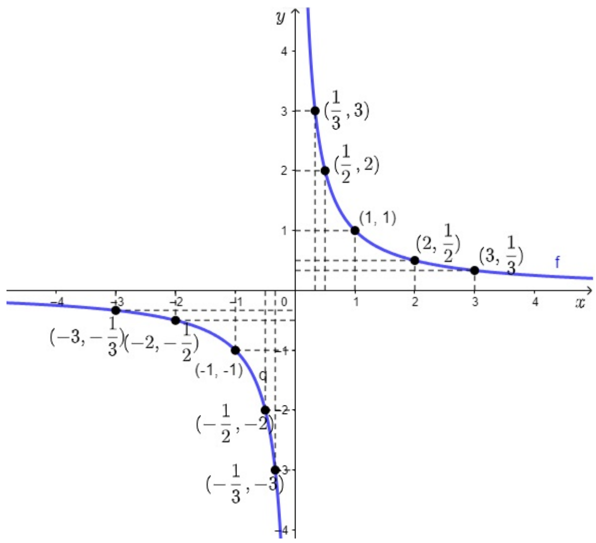


Imagem de f: $\mathrm{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$.

4. Considere a função $f(x) = 1$.

Domínio de f: $D_f = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
-2	1
-1	1
0	1
1	1
2	1

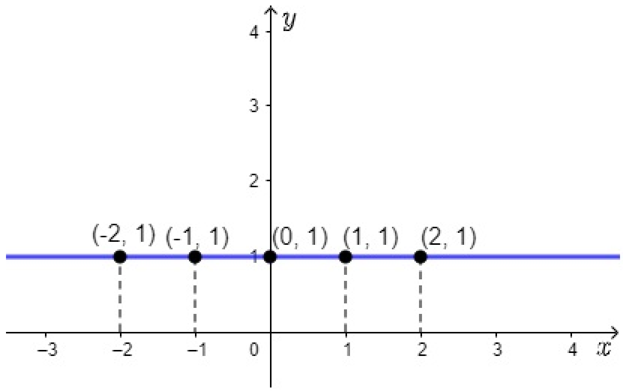


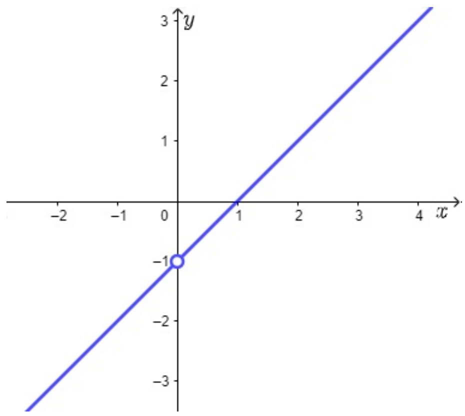
Imagem de f: $\text{Im}f = \{1\}$.

Exercício 4.10. Esboce o gráfico da função

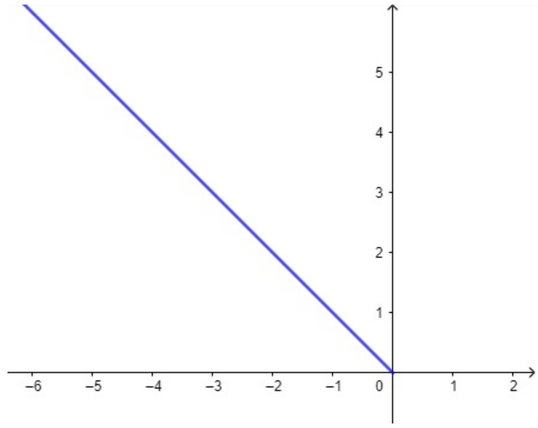
$$f(x) = \begin{cases} -2 & , \text{ se } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & , \text{ se } -1 < x < 2 \\ 3 & , \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

Definição 4.11 (Funções iguais)**.** Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : A \to B$, elas são ditas *iguais* se, e somente se, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplo 4.12. 1. As funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ para todo $x \in A = \mathbb{R} - \{0\}$.



2. As funções $f(x) = |x|$ e $g(x) = -x$ para todo $x \in A =]-\infty, 0]$.



Exercício 4.13. Verifique se as funções reais $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = x$ definidas em $\mathbb{R}$ são iguais.

Definição 4.14 (Raízes de funções)**.** Chama-se *zero de função* ou *raízes de uma função* ao valor de x tal que $f(x) = 0$.

Exemplo 4.15.

1. Seja $f(x) = 2x-1$, então a raiz de f são os valores x tais que $f(x) = 0$, isto é, $2x - 1 = 0$, ou seja, $x = \dfrac{1}{2}$.
2. Seja $f(x) = x^2 - 4$, então as raízes de f são os valores tais que $x^2 - 4 = 0$, ou seja, $x = -2$ e $x = 2$.

Observação 4.16. No gráfico de uma função, as raízes de uma função são as abscissas dos pontos cujo gráfico corta o eixo x.

5 Funções de 1º grau

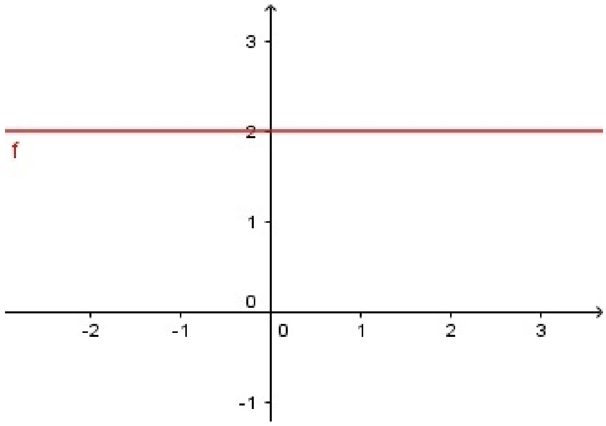
5.1 Função Constante

Definição 5.1 (Função Constante)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma *função constante* se $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $b \in \mathbb{R}$.

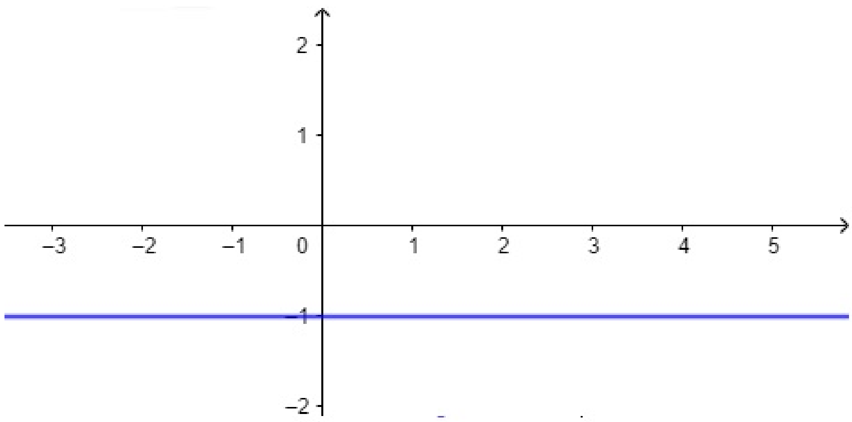
Para as funções contantes, temos que $D_f = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}f = \{b\}$. Seus gráficos consistem de uma reta horizontal, paralela ao eixo x, cortando o eixo y em $y = b$.

Exemplo 5.2.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2$.



2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$.

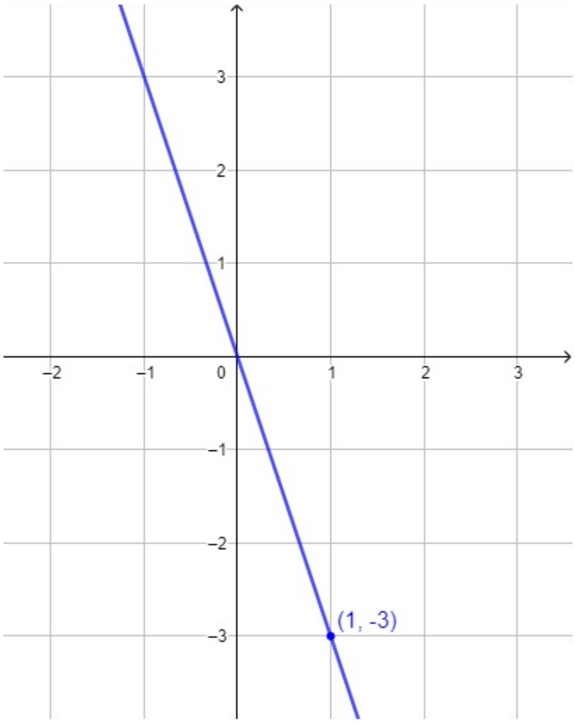


5.2 Função Linear

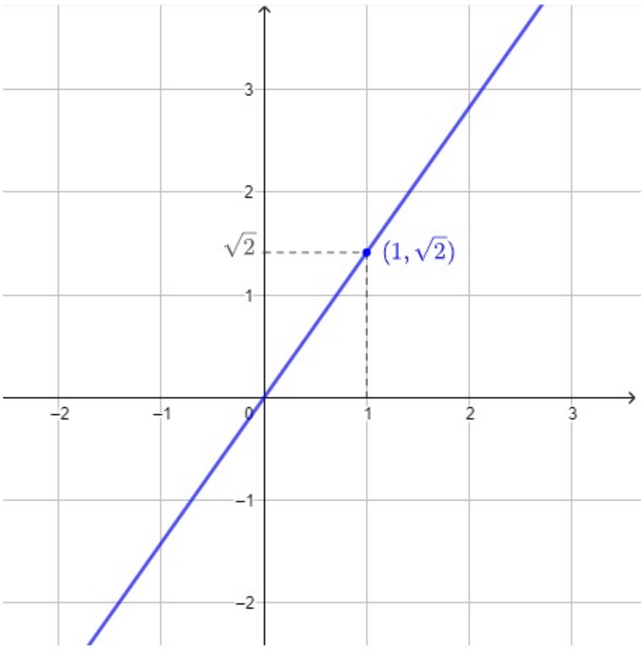
Definição 5.3 (Função linear)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma *função linear* se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

Para as funções lineares, temos que $D_f = \mathbb{R}$ e $\text{Im}f = \mathbb{R}$. Seus gráficos consistem de uma reta passando pela origem $(0, 0)$ e pelo ponto $(1, a)$, com $a \in \mathbb{R}$.

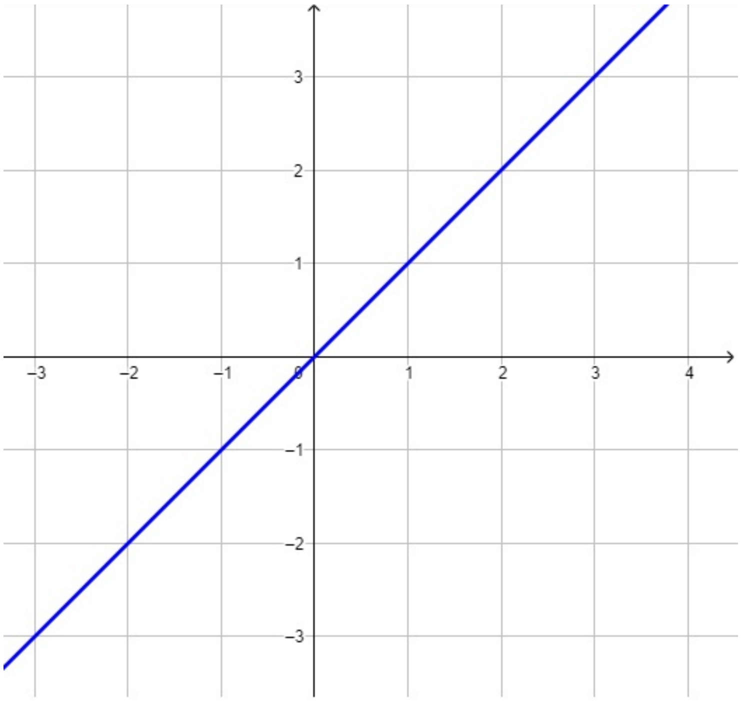
Exemplo 5.4. 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3x$.



2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{2}x$.



3. (Função Identidade) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



5.3 Função Afim

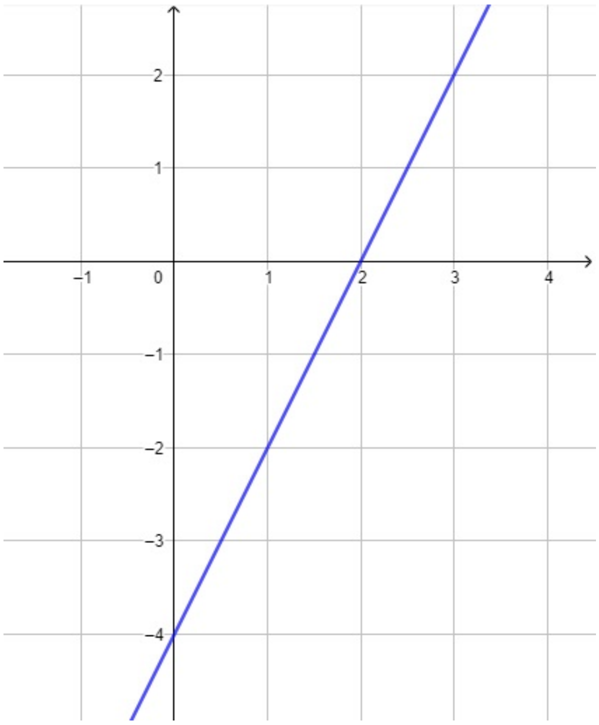
Definição 5.5 (Função Afim)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de *função afim* se $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Para as funções afins, temos que $D_f = \mathbb{R}$ e $\text{Im}f = \mathbb{R}$. Seus gráficos consistem de uma reta passando pelos pontos $(0, b)$ e pelo ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, ou uma reta passando por qualquer dois pontos $(x, f(x))$ da função.

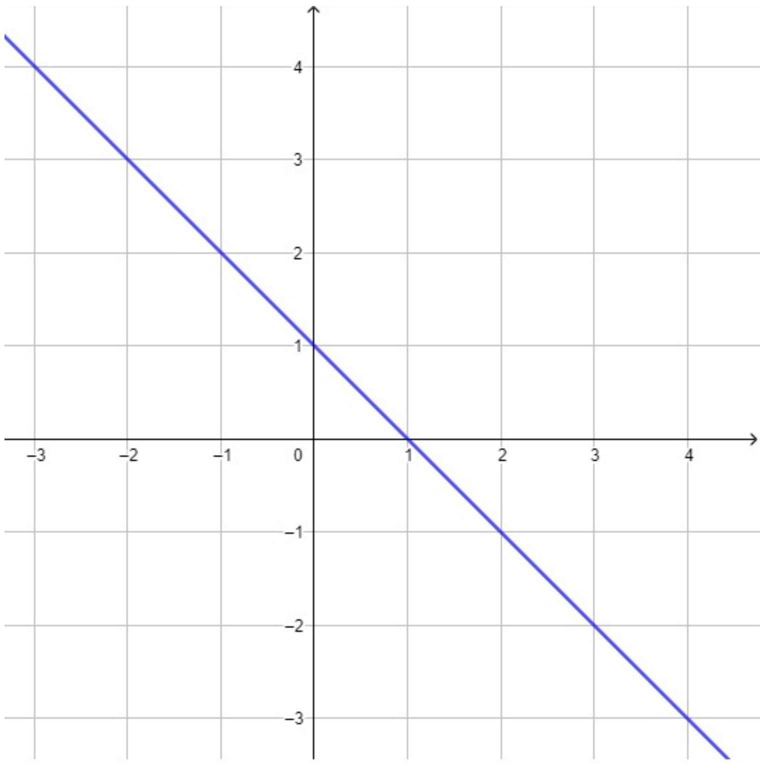
Observe que as funções constantes e as funções lineares são casos particulares de uma função afim.

Exemplo 5.6. 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 4$.

Exemplo 5.8.



2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 1$.



Exercício 5.7. Determine o gráfico da função afim $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$

Exemplo 5.8. 1. Seja $f(x) = 3x - 1$. Determine $f(2x + 1)$.

$$f(2x + 1) = 3(2x + 1) - 1 = 6x + 3 - 1 = 6x + 2$$

2. Seja $f(x-8) = 2x - 5$. Determine $f(x)$ e $f(4x+1)$.

Seja $u = x - 8$, então $x = u + 8$. Desta forma,

$$f(u) = 2(u+8) - 5 = 2u + 16 - 5 = 2u + 11$$

Logo, trocando u por x, temos que $f(x) = 2x + 11$. Assim

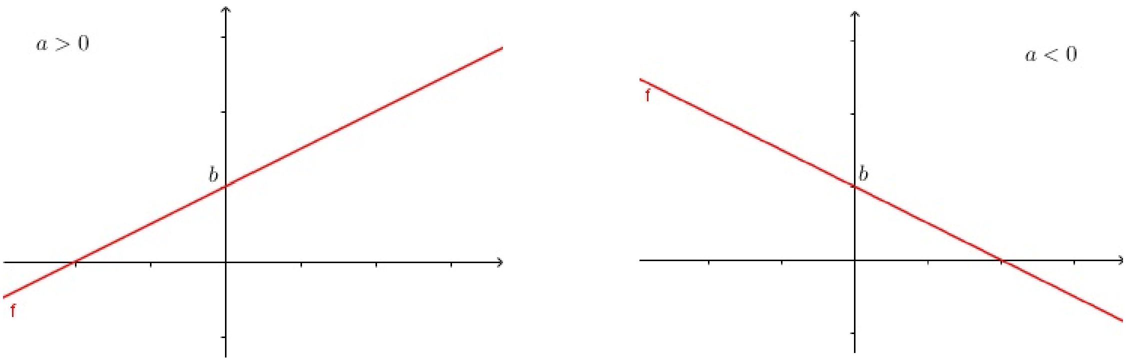
$$f(4x+1) = 2(4x+1) + 11 = 8x + 2 + 11 = 8x + 13$$

Observação 5.9. 1. A raiz de uma função afim são os valores x tais que $f(x) = 0$, ou seja, $ax + b = 0$, isto é, $x = -\dfrac{b}{a}$, desde que $a \neq 0$. O ponto $(-\dfrac{b}{a}, 0)$ corresponde ao ponto onde o gráfico de f corta o eixo das abscissas.

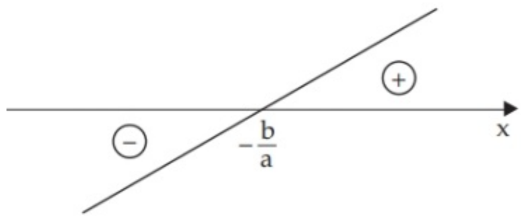
2. O coeficiente b de uma função afim $f(x) = ax + b$ é chamado de *coeficiente linear*. O ponto $(0, b)$ é o ponto onde o gráfico de f corta o eixo das ordenadas.

3. O coeficiente a é chamado de *coeficiente angular* de f.

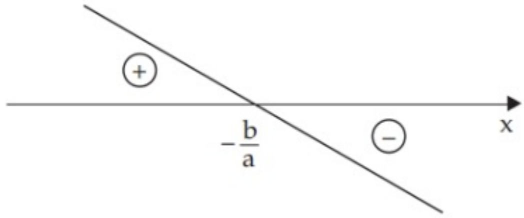
4. Dada a função afim $f(x) = ax + b$, temos que a inclinação do gráfico de f depende do sinal do coeficiente angular a.



- Se $a > 0$ dizemos que f é *crescente*. Neste caso, temos que $f(x) > 0$ para todo $x > -\dfrac{b}{a}$, e $f(x) < 0$ para todo $x < -\dfrac{b}{a}$.



- Se $a < 0$ dizemos que f é *decrescente*. Neste caso, temos que $f(x) < 0$ para todo $x > -\dfrac{b}{a}$, e $f(x) > 0$ para todo $x < -\dfrac{b}{a}$

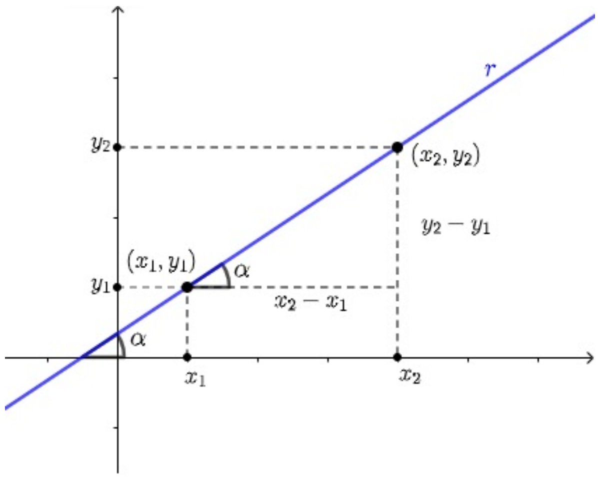


Exercício 5.10. Esboçar o gráfico, calcular a raiz, e estudar o sinal das funções $f(x) = -2x + 5$ e $g(x) = 4x - 8$.

5.3.1 Equação de reta

A equação de uma reta r é dada por $y = ax + b$. Desta forma, tomando dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de r, temos que $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$. Assim, fazendo

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= ax_2 + b - (ax_1 + b) \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b \qquad \Longrightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$



Note que $\mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ (coeficiente angular).

Assim, se são dados dois pontos de uma reta (x_1, y_1) e (x_2, y_2), para determinar sua equação, basta tomarmos $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, e depois para determinar o coeficiente linear b, basta substituir um dos pontos na equação da reta $y = ax + b$, por exemplo, $b = y_1 - ax_1$. Ou também, pode-se aplicar a fórmula abaixo para encontrar a equação de r:

$$(y - y_1) = a(x - x_1)$$

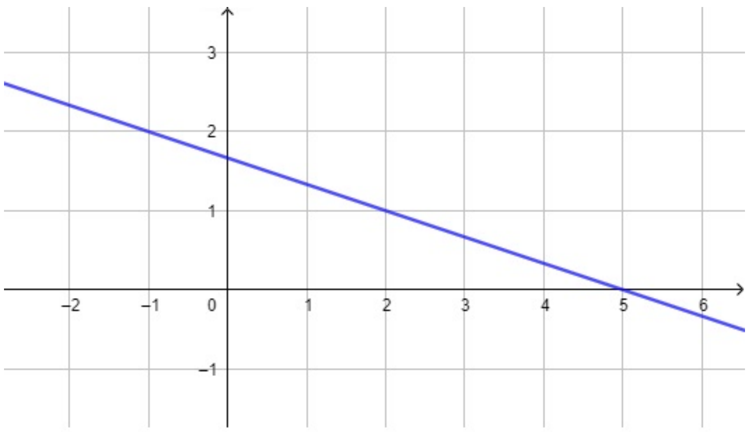
Exemplo 5.11. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(2, 1)$ e $(-1, 2)$.

Vamos determinar a equação da reta $y = ax + b$. Para isso, tomemos $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e $(x_2, y_2) = (-1, 2)$ dois pontos da reta. Então

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$

$$(y-1) = \left(-\frac{1}{3}\right)(x-2) \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 1 \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

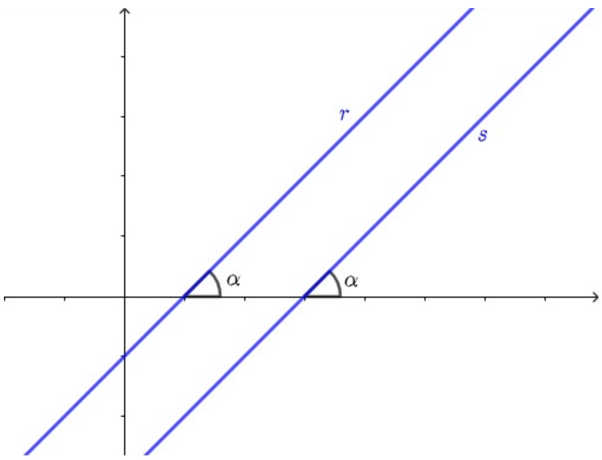
Portanto, a equação da reta é dada por $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.



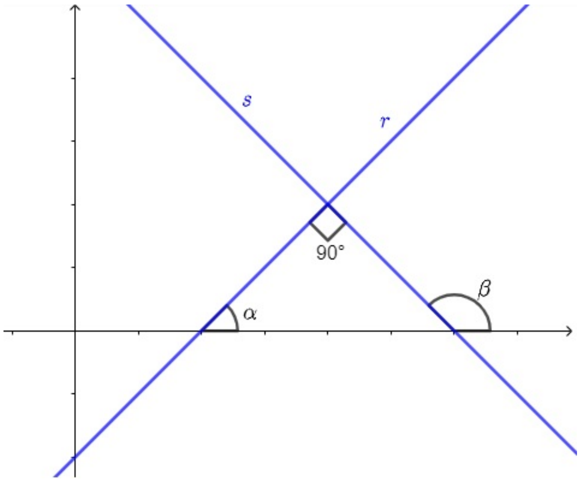
Exercício 5.12. Determine a função afim cujo gráfico passa por $(-3, -1)$ e tem coeficiente linear igual a 1.

Observação 5.13. Dadas duas retas $r : y = a_r x + b_r$ e $s : y = a_s x + b_s$,

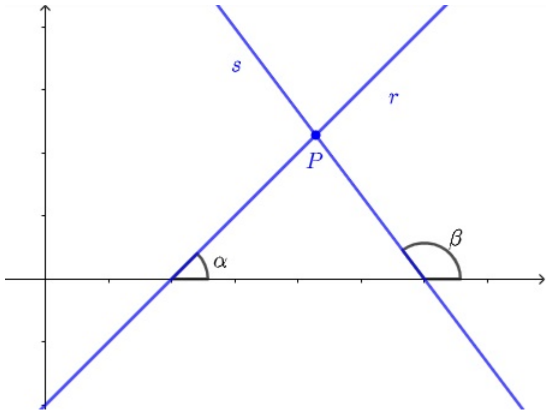
1. (Condição de Paralelismo) r e s serão paralelas $(r//s)$ se, e somente se, $a_r = a_s$.



2. (Condição de Perpendicularismo) r e s serão perpendiculares $(r \perp s)$ se, e somente se, $a_r \cdot a_s = -1$.



3. (Interseção de retas) r e s se interceptam ($r \cap s = P$) se, e somente se, $a_r \neq a_s$.



Neste caso, para determinar o ponto de interseção $P = (x, y)$ basta igualar as equações das duas retas $a_r x + b_r = a_s x + b_s$ para obter o valor da variável x. E depois basta substituir o valor de x em uma das equações para encontrar o valor de y.

Exemplo 5.14. Dadas as retas r e s abaixo, verifique se estas são paralelas ou perpendiculares. Determine o ponto de interseção, caso r e s se interceptam.

a) $\begin{cases} r: \; y = 1 - x \\ s: \; y = -\dfrac{2x+3}{2} \end{cases}$

Resolução:

Observe que a equação de s é dada por $y = -x - \dfrac{3}{2}$. Logo, os coeficientes angulares de r e s são iguais a -1, e portanto, temos que r é paralela a s.

b) $\begin{cases} r: \; y = 3x + 2 \\ s: \; y = -\dfrac{2}{6}x + 4 \end{cases}$

Resolução:

Observe que o produto dos coeficientes angulares de r e s são iguais a $3 \cdot \left(-\frac{2}{6}\right) = -1$, e portanto, temos que r é perpendicular a s. Vamos determinar o ponto de interseção entre r e s.

$$\begin{aligned} 3x + 2 = -\frac{2}{6}x + 4 \iff & \quad 3x + \frac{2}{6}x = 4 - 2 & \iff 3x + \frac{1}{3}x = 2 \\ \iff & \quad \frac{9x + x}{3} = 2 & \iff \frac{10x}{3} = 2 \\ \iff & \quad 10x = 6 & \iff x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

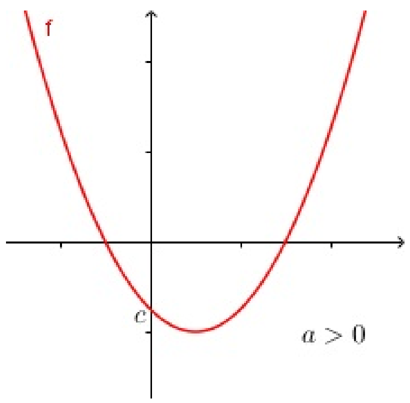
Substituindo $x = \frac{3}{5}$ em r, temos $y = 3 \cdot \frac{3}{5} + 2 = \frac{9 + 10}{5} = \frac{19}{5}$. Logo, o ponto de interseção entre r e s é $P = \left(\frac{3}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

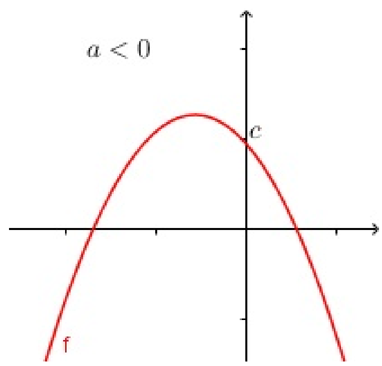
Exercício 5.15. Determine a interseção entre as retas r e s sabendo que r é a reta que passa pelo ponto $(2, 1)$ e $(-1, -2)$ e s é a reta que passa por $(1, 2)$ e é perpendicular a r.

6 Funções de 2º grau

Definição 6.1 (Função Quadrática)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de *função quadrática* se $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Para as funções quadráticas, temos que $D_f = \mathbb{R}$. Seus gráficos consistem de uma parábola, que corta o eixo y no ponto $(0, c)$, e cuja concavidade pode ser voltada para cima ou para baixo, a depender do valor do coeficiente a.





Exemplo 6.2. 1. Considere a função $f(x) = x^2 + 1$.

Domínio de f: $D_f = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
0	1
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

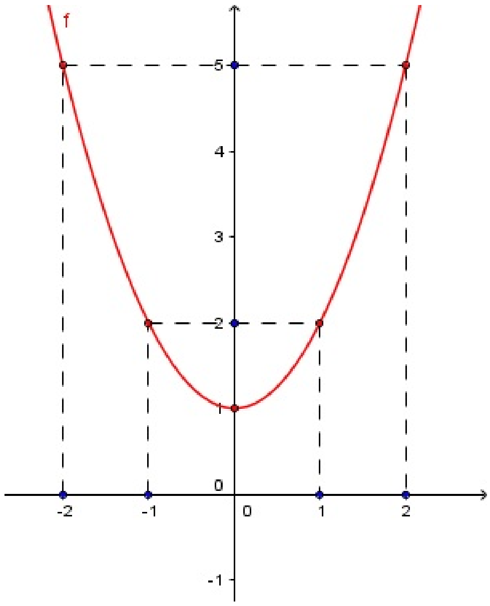


Imagem de f: $\text{Im}f = [1, +\infty[$.

2. Considere a função $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Domínio de f: $D_f = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
0	-1
$\frac{1}{2}$	0
1	0
-1	-6
2	-3
3	-10
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

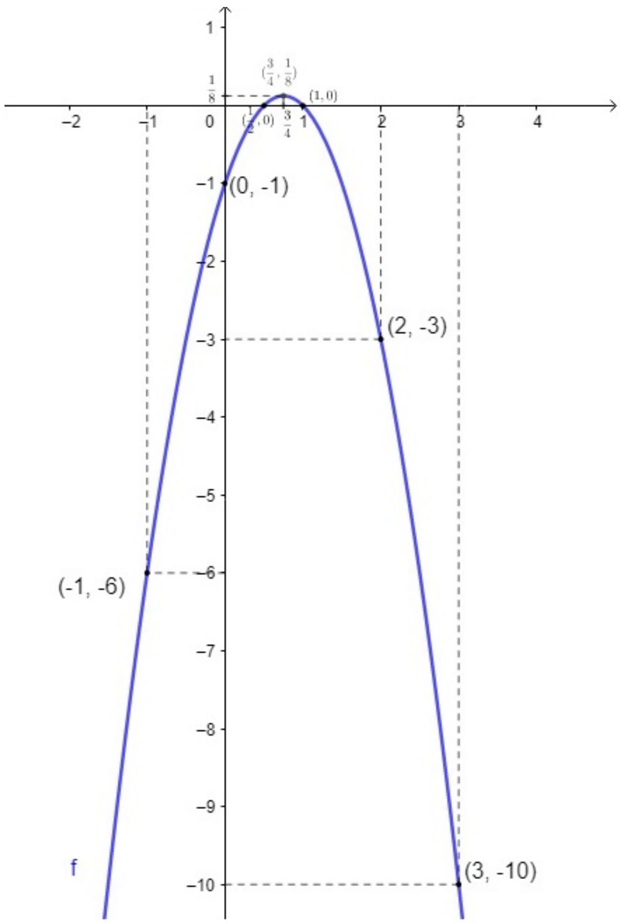


Imagem de f: $\text{Im}f =]-\infty, \frac{1}{8}]$.

Observação 6.3. 1. Para obter o zeros (raízes) de $f(x)$, vamos reescrever a função para facilitar encontrar o valor de x quando $f(x) = 0$.

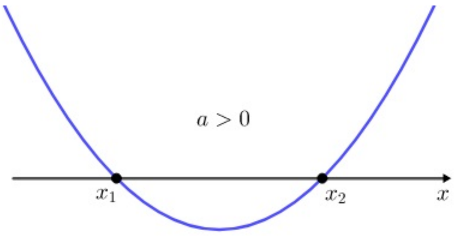
$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&\overset{\text{completando quadrados}}{=} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b - 4ac}{4a^2}\right)\right] \\
&\overset{\Delta = b^2 - 4ac}{=} a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

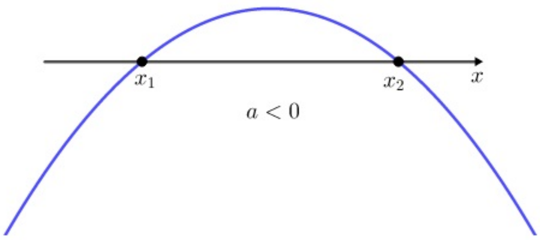
Fazendo $f(x) = 0$, como $a \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\
&\overset{\text{raiz quadrada}}{\iff} x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

- Se $\Delta > 0$, então $f(x) = 0$ terá duas raízes reais distintas:

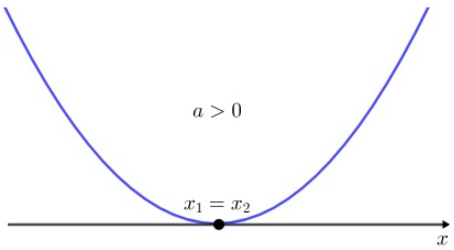
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

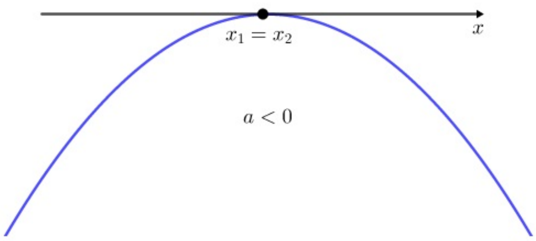




Neste caso, a parábola corta o eixo x em dois pontos.

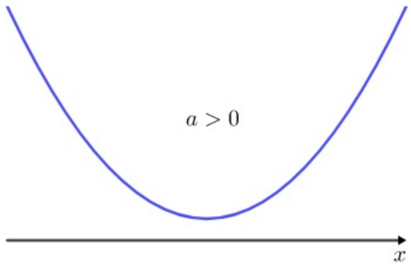
- Se $\Delta = 0$, então $f(x) = 0$ terá duas raízes reais iguais: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

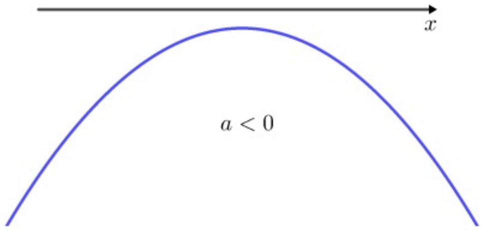




Neste caso, a parábola tangencia o eixo x.

- Se $\Delta < 0$, então $f(x) = 0$ não terá raízes reais.





  Neste caso, a parábola não toca o eixo x.

2. Da observação acima, temos

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
= {} & a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\
= {} & a\left[x - \left(\underbrace{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_1}\right)\right] \cdot \left[x - \left(\underbrace{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_2}\right)\right] \\
= {} & a(x - x_1)(x - x_2) \longrightarrow \text{Forma fatorada de } f(x) \\
= {} & a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) \\
= {} & a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)
\end{aligned}
$$

   Segue daí que:

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\
x_1x_2 = \dfrac{c}{a}
\end{cases}
$$

3. Note que $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que:

   - Para $a > 0$, temos que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$
f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\} = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[
$$

Neste caso, $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo de f.

- Para $a < 0$, temos que $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\} = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

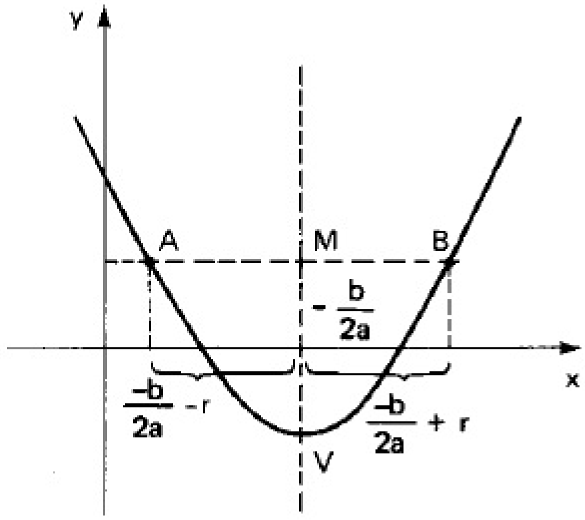
Neste caso, $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo de f.

- Note que para $x = -\dfrac{b}{2a}$, temos que

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

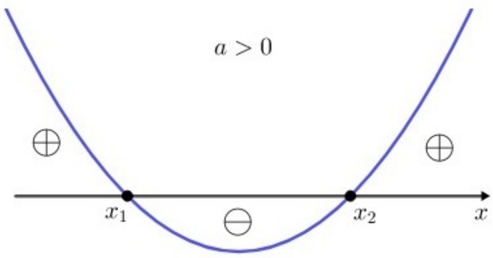
Desta forma, o ponto $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

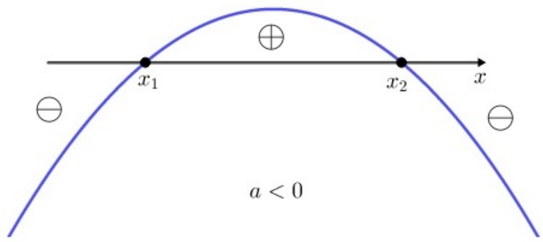
A reta vertical que passa pelo vértice V é chamado de *eixo de simetria* da parábola.



4. Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, vamos analisar os intervalos onde $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

- Para $\Delta > 0$





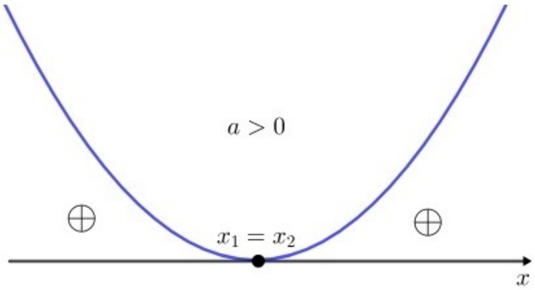
$f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\, \cup\,]x_2, +\infty[$

$f(x) < 0$ em $]x_1, x_2[$

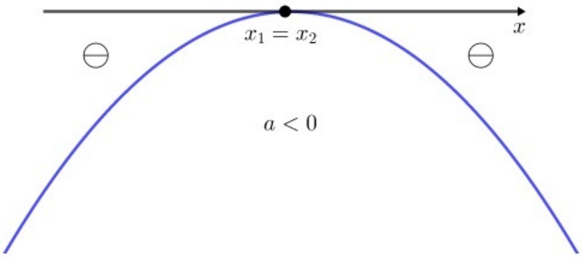
$f(x) > 0$ em $]x_1, x_2[$

$f(x) < 0$ em $]-\infty, x_1[\, \cup\,]x_2, +\infty[$

- Para $\Delta = 0$

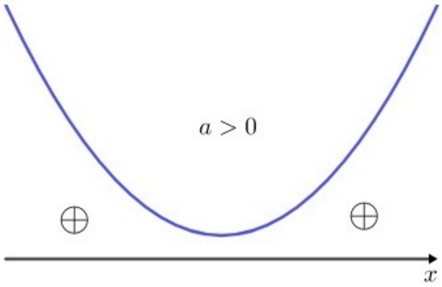


$f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\,\cup\,]x_1, +\infty[$

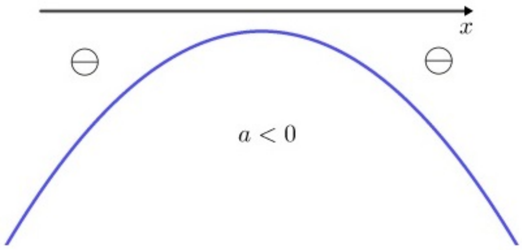


$f(x) < 0$ em $]-\infty, x_1[\,\cup\,]x_1, +\infty[$

- Para $\Delta < 0$



$f(x) > 0$ em $\mathbb{R}$



$f(x) < 0$ em $\mathbb{R}$

Exemplo 6.4. Esboce o gráfico das função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Observe que, como $a = 1 > 0$ então $f(x)$ possui concavidade para cima. Assim, vamos determinar os zeros de f.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 3 = 0 \quad && \Leftrightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} && \Leftrightarrow x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ e } x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Vamos determinar o vértice de $f(x)$. Como $a = 1, b = -4, c = 3$ e $\Delta = 4$, então

$$-\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \text{ e } -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4} = -1$$

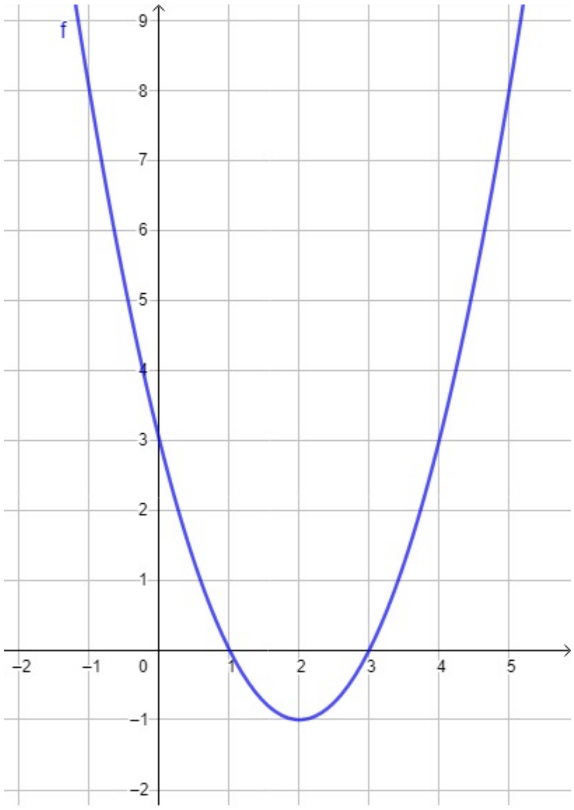
Logo o vértice, é $V = (2, -1)$.

Desta forma:

Domínio de f: $D_f = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
0	3
3	0
1	0
2	-1
-1	8
4	3
5	8

Imagem de f: $\text{Im}f = [-1, +\infty[$.

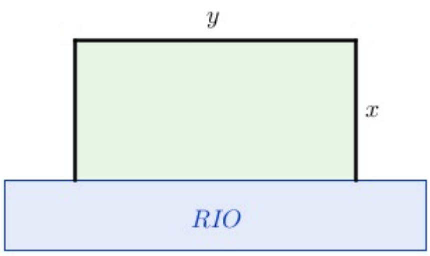


Exercício 6.5. Esboce o gráfico das funções $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ e $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Exemplo 6.6. Um fazendeiro possui 1200 metros de cerca e deseja cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Determine dimensões do campo cercado de forma a obter área máxima.

Resolução:

Como a área a ser cercada é retangular, chame de y o comprimento da cerca paralela ao rio, e chame de x o comprimento da cerca vertical ao rio.



Então a área do campo é $A = xy$. Como o fazendeiro possui 1200 m de cerca, temos então que $y + 2x = 1200 \Longrightarrow y = 1200 - 2x$. Logo

$$A = xy = x(1200 - 2x) \Longrightarrow A(x) = 1200x - 2x^2$$

Queremos maximizar a área A. Então devemos encontrar um ponto de máximo de $A(x)$. Como $A(x)$ é uma função quadrática com concavidade para baixo ($a = -2 < 0$), segue que o ponto de máximo de $A(x)$ ocorre no vértice da parábola $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Assim,

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1200}{2(-2)} = \frac{1200}{4} = 300$$

e

$$A(300) = 1200(300) - 2(300)^2 = 180000 \quad \text{(área máxima)}$$

Como estamos interessados nas dimensões do campo na qual o mesmo terá área máxima, então o campo terá área máxima quando $x = 300$ m e $y = 1200 - 2(300) = 600$ m.

Exercício 6.7. Um dia na praia a temperatura atingiu seu valor máximo às 14h. Suponha que neste dia a temperatura era dada por $T(t) = -t^2 + bt - 156$. Sendo o tempo medido em horas, a temperatura em graus celsius e o tempo $8 < t < 20$, pede-se:

a) O valor de b.
b) A temperatura máxima nesse dia.

6.1 Inequação de 2º grau

Uma *inequação do 2º grau* é toda expressão que pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c < 0 \text{ e } ax^2 + bx + c \leq 0$$

Para resolver as inequações, basta determinarmos os intervalos em $\mathbb{R}$ onde as inequações são satisfeitas, como vistas na observação 6.3(4).

Exemplo 6.8. Resolva a inequação: $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos que $a = 1 > 0$ e $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Desta forma, $f(x)$ tem raiz em $x = \frac{-b}{2} = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1$. Como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, segue que $f(x) \leq 0$ somente em $x = 1$. Portanto a solução é $S = \{1\}$.

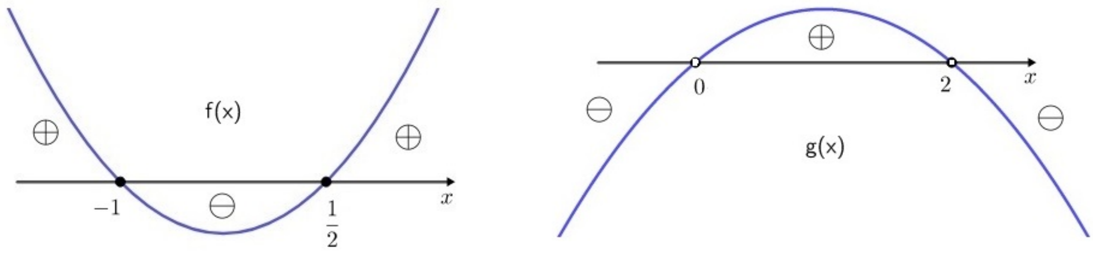
Exercício 6.9. Resolva a inequação: $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

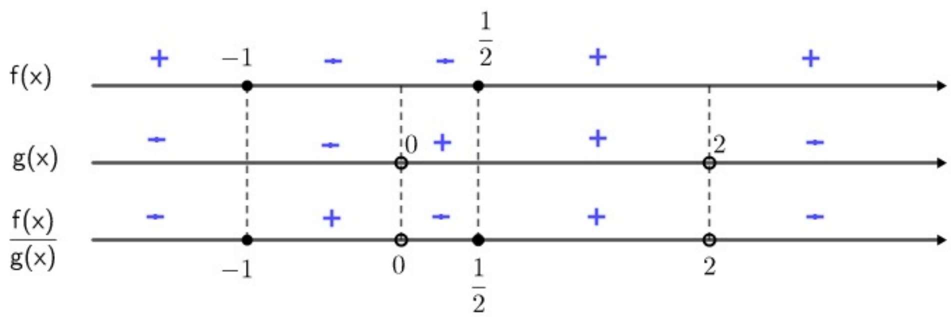
Exemplo 6.10. Resolva a inequação: $\dfrac{2x^2+x-1}{-x^2+2x} \geq 0$

Considerando $f(x) = 2x^2 + x - 1$, temos que $a = 2 > 0$ e $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$, obtendo desta forma duas raízes para f, sendo $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$ e $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -1$.

Considerando $g(x) = -x^2 + 2x$, temos que $a = -1 < 0$, e pela fatoração de $g(x) = x(-x+2)$, temos que g possui duas raízes $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Analisando os sinais de f e g, temos





Logo $\dfrac{2x^2+x-1}{-x^2+2x} \geq 0$ se, e somente se, $-1 \leq x < 0$ e $\dfrac{1}{2} \leq x < 2$. Portanto a solução

$$S = [-1, 0[\cup [\frac{1}{2}, 2[.$$

Exercício 6.11. Resolva a inequação: $5x \leq 3 - 2x^2 < -x^2 - 1$

6.2 Outras Funções

6.2.1 Função Polinomial

Definição 6.12 (Função polinomial)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função polinomial de grau n* se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $D_f = \mathbb{R}$.

As funções afins e as funções quadráticas são funções polinomiais de grau 1 e grau 2, respectivamente.

Exemplo 6.13. Considere a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$

Domínio de f: $D_f = \mathbb{R}$

x	$f(x)$
0	-1
-2	-35
-1	-9
0	-1
1	-5
2	-15
4	-29
6	5

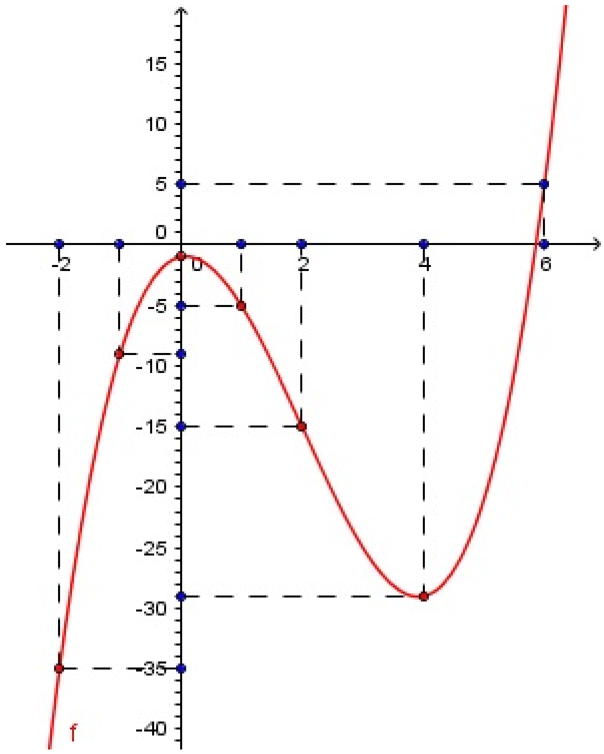


Imagem de f: $\text{Im}f = \mathbb{R}$.

6.2.2 Função Potência

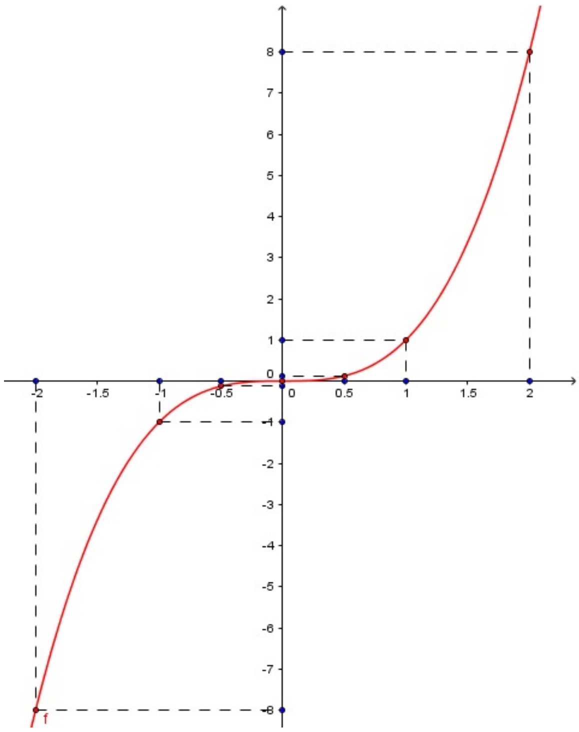
Definição 6.14 (Função Potência)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função potência* se $f(x) = x^k$, onde k é uma constante.

Exemplo 6.15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Então

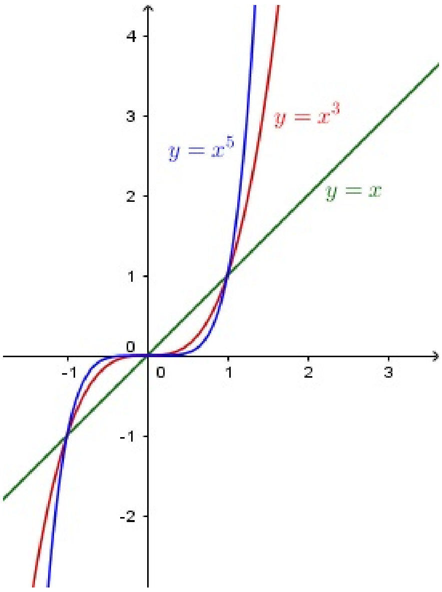
Domínio de f: $D = \mathbb{R}$

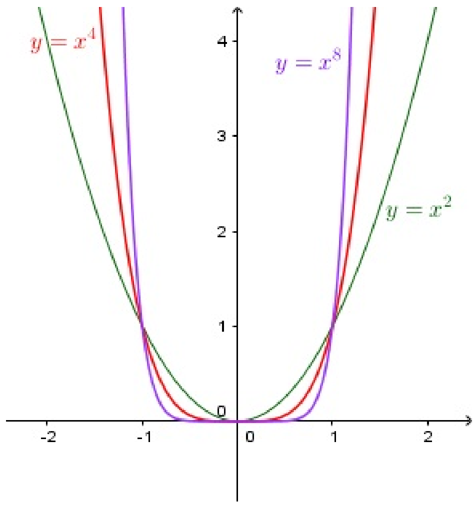
x	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8

Imagem de f: $\text{Im} f = \mathbb{R}$.

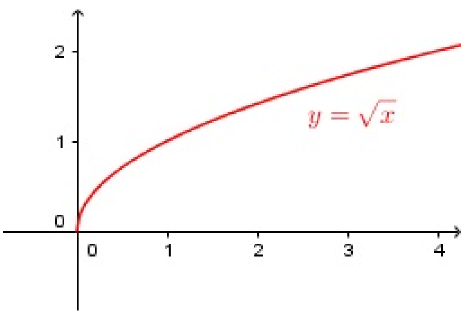


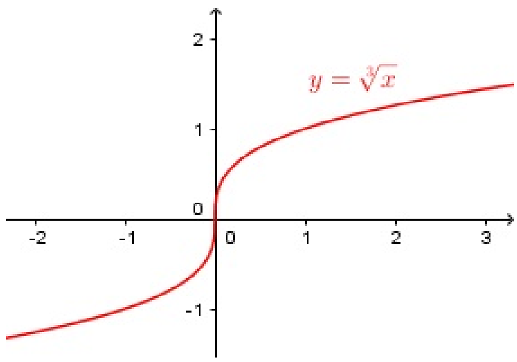
Observação 6.16. 1. $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$.



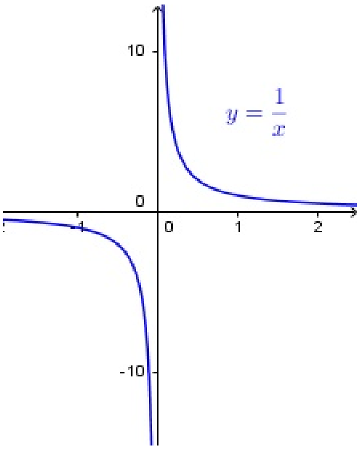


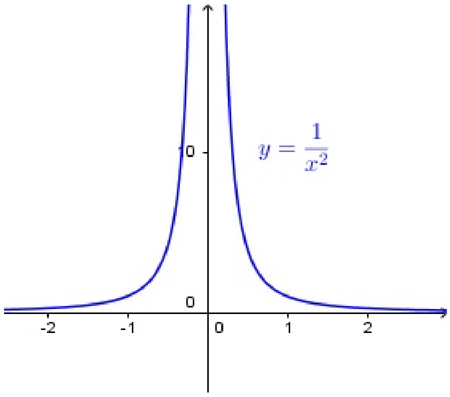
2. $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, com $n \in \mathbb{N}$.





3. $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, com $n \in \mathbb{N}$.



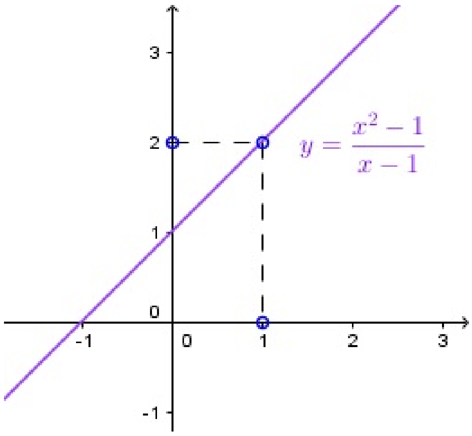


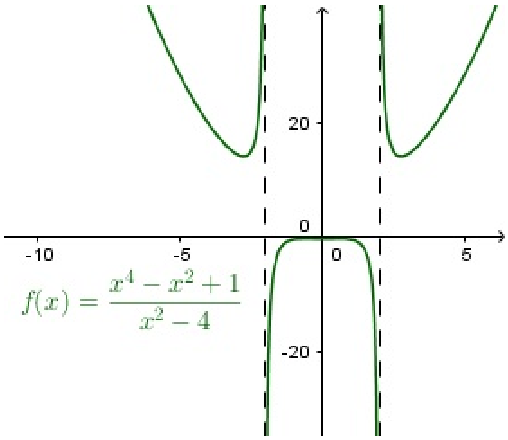
6.2.3 Funções Racionais

Definição 6.17 (Funções Racionais)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função racional* se

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

onde $g(x)$ e $h(x)$ são funções polinomiais. Neste caso, segue que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$.





Exercício 6.18. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}$

a) Represente graficamente $f(x)$.

b) Determine D_f e $\mathrm{Im}(f)$.

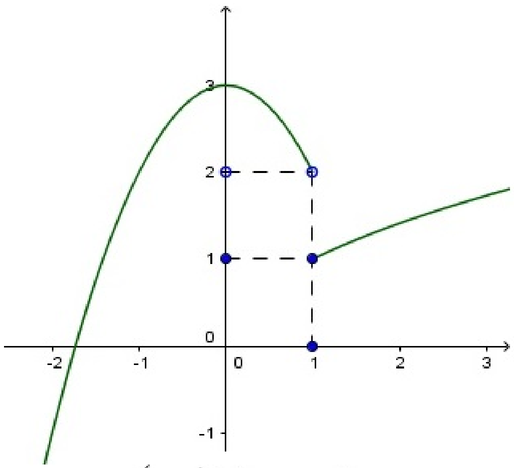
c) Calcule $f(-1)$, $f(2)$, $f(1)$ e $f(-3)$.

6.2.4 Funções definidas por partes

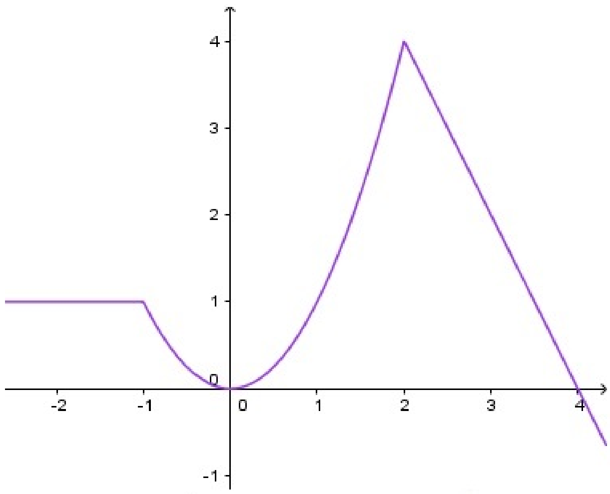
Definição 6.19 (Função definida por partes)**.** Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma *função definida por partes* se

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & ,\ \text{se } x<k \\ h(x) & ,\ \text{se } x\geq k, \end{cases}$$

onde $g(x)$ e $h(x)$ são funções reais.



$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3, & \text{se } x<1 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} 1 & ,\ \text{se } x<-1 \\ x^2 & ,\ \text{se } -1\leq x<2 \\ -2x+8 & ,\ \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

Exercício 6.20. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & ,\ \text{se } x>3 \\ -x^2+9 & ,\ \text{se } -3\leq x\leq 3 \\ -x-3 & ,\ \text{se } x<-3 \end{cases}$$

a) Represente graficamente $f(x)$.

b) Determine D_f e $\mathrm{Im}(f)$.

c) Calcule $f(-1)$, $f(-3)$, $f(3)$, $f(-5)$ e $f(5)$.

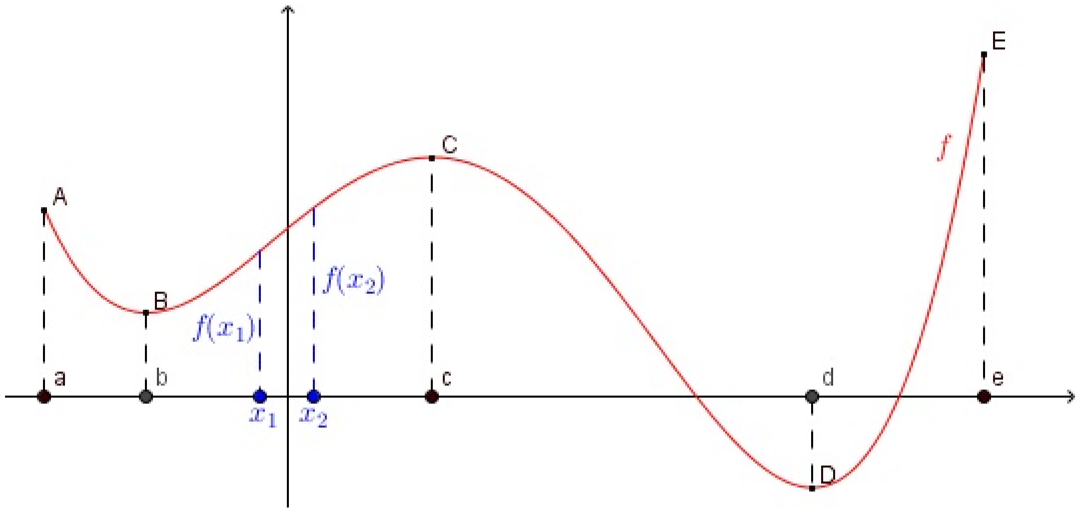
7 Alguns conceitos e propriedades sobre funções

Definição 7.1 (Crescente e Decrescente)**.** Sejam $f:A\to B$ uma função, I um subconjunto de A, e $x_1,x_2\in I$.

1. Uma função é chamada *crescente* em I se $f(x_1)<f(x_2)$ sempre que $x_1<x_2$ em I.

2. Uma função é chamada *decrescente* em I se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I.

Exemplo 7.2. Considere o gráfico da função $y = f(x)$ abaixo.

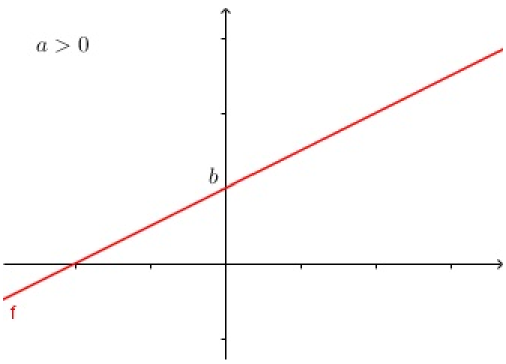


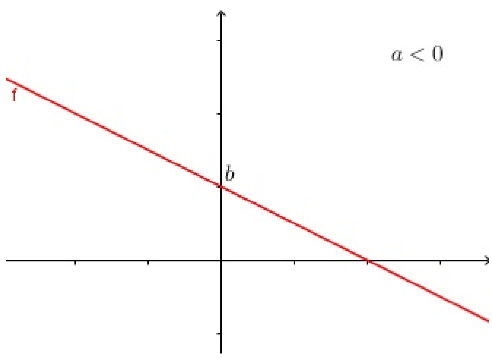
(Ver Geogebra)

Observe que para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$, com $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$, e logo a função é decrescente. Já para todo $x_1, x_2 \in [b, c]$, com $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$, e portanto f é crescente. De forma análoga, conclui-se que no intervalo $[c, d]$ f é decrescente, e no intervalo $[d, e]$ a função é crescente.

Porém, se analisarmos a função f no intervalo $[b, d]$, nada podemos concluir sobre f, pois neste intervalo teremos momentos com $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$.

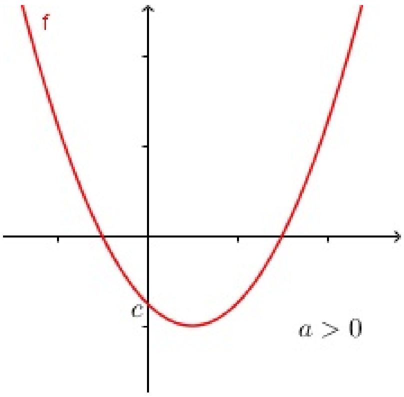
Exemplo 7.3. 1. Dada a função afim $f(x) = ax + b$, temos que quando $a > 0$ então f é crescente em $\mathbb{R}$, e quando $a < 0$ então f é decrescente em $\mathbb{R}$.

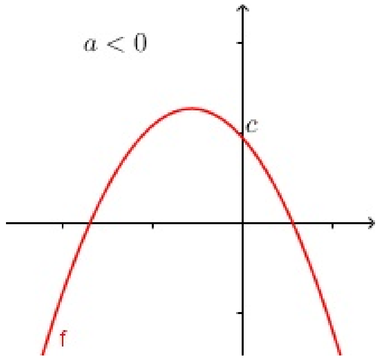




2. Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos

- $a > 0$ então f é decrescente em $]-\infty, -\dfrac{b}{2a}[$ e f é crescente em $]-\dfrac{b}{2a}, +\infty[$.
- $a < 0$ então f é crescente em $]-\infty, -\dfrac{b}{2a}[$ e f é decrescente em $]-\dfrac{b}{2a}, +\infty[$.





Exercício 7.4. Determine os intervalos onde a função abaixo é crescente e decrescente.

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & , \text{ se } x > 3 \\ -x^2+9 & , \text{ se } -3 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & , \text{ se } x < -3 \end{cases}$$

Definição 7.5 (Funções pares e ímpares)**.** Seja $f : A \to B$ uma função.

1. Dizemos que f é uma função *par* se para todo $x \in A$ tem-se que $f(-x) = f(x)$.
2. Dizemos que f é uma função *ímpar* se para todo $x \in A$ tem-se que $f(-x) = -f(x)$.

Exemplo 7.6.

1. As funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = |x|$ são funções pares, pois para todo $x \in \mathbb{R}$:
   - $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$
   - $g(-x) = |-x| = |x| = g(x)$
2. As funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^3 - x$ são funções ímpares, pois para todo $x \in \mathbb{R}$:
   - $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$
   - $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$

Exercício 7.7. Determine se as seguintes função são pares ou ímpares.

1. $f(x) = -x^4 + 10x^2 + 9$
2. $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^3}$

Definição 7.8 (Operações com Funções)**.** Sejam f e g duas funções com domínios D_f e D_g, respectivamente.

1. *Soma de funções:* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, onde $D_{(f+g)} = D_f \cap D_g$.

2. *Diferença de funções:* $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, onde $D_{(f-g)} = D_f \cap D_g$.

3. *Produto de funções:* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, onde $D_{(f \cdot g)} = D_f \cap D_g$.

4. *Quociente de funções:* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde $D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

Exemplo 7.9. Sejam $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$, com $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$, respectivamente.

a) $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x^2+2x+1)+x}{x+1} = \dfrac{x^3+3x^2+4x+1}{x+1}$,

com $D_{(f+g)} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

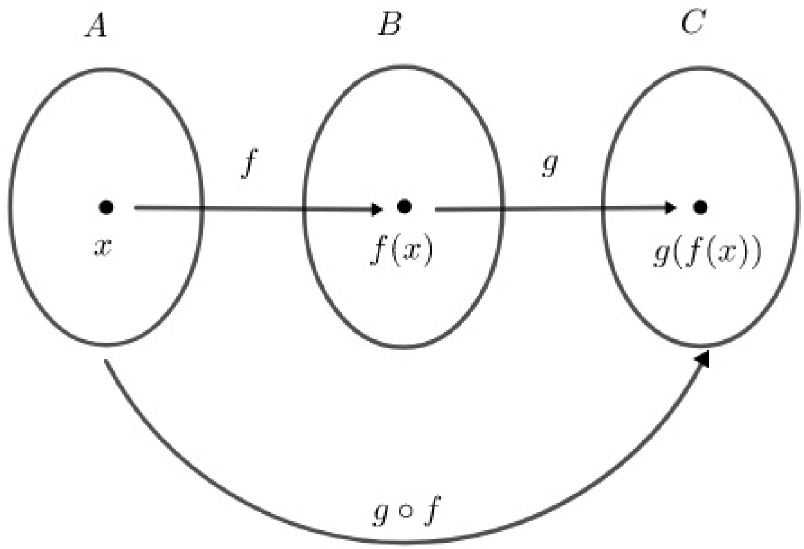
b) $(f \cdot g)(x) = (x^2+2x+1) \cdot \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x(x+1)^2}{x+1} = x(x+1) = x^2 + x$,

com $D_{(f \cdot g)} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{\dfrac{x}{x+1}} = \dfrac{(x+1)(x^2+2x+1)}{x} = \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x}$,

com $D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

Definição 7.10 (Função Composta)**.** Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções tais que $\mathrm{Im} f \subset D_g$. A *função composta* $g \circ f : A \to C$ é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para $x \in D_{(g \circ f)} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.



Exemplo 7.11. Considere as funções $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = \sqrt{x}$. Então

1. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1 = 2x^2 + 6x + 1$

2. $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$

3. $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3(\sqrt{x}) = x + 3\sqrt{x}$

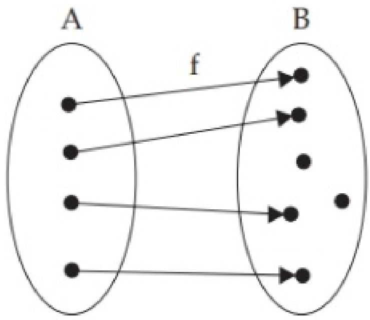
4. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 3(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 1 + 6x + 3 = 4x^2 + 10x + 4$

Exercício 7.12. Dadas as funções $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 3 - 2x$, determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(1)$ e $(g \circ f)(1)$.

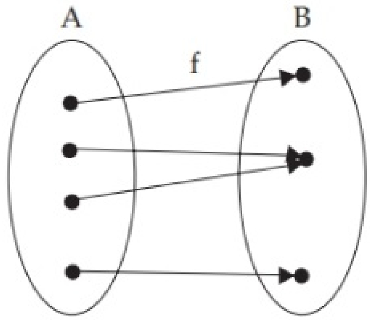
7.1 Funções Inversas

Definição 7.13 (Injetora, Sobrejetora, Bijetora)**.** Seja $f : A \to B$ uma função.

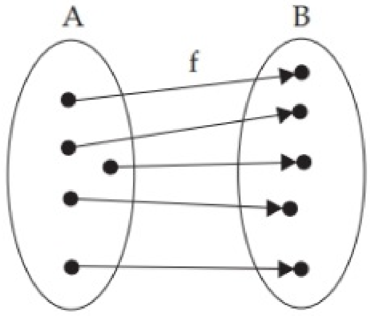
1. Dizemos que f é uma função *injetora* se para quaisquer $a, b \in A$ tais que $f(a) = f(b)$, temos que $a = b$. Ou ainda, se para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \neq b$, temos que $f(a) \neq f(b)$.



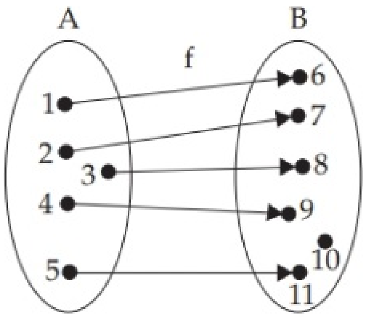
2. Dizemos que f é uma função *sobrejetora* se para qualquer $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Neste caso, $\mathrm{Im} f = B$.



3. Dizemos que f é uma função *bijetora* se f é injetora e sobrejetora.



Exemplo 7.14. 1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ e $f : A \to B$ a função dada pelo seguinte diagrama:



- f é injetora, pois para qualquer $a, b \in A$ com $a \neq b$, temos que $f(a) \neq f(b)$.
- f não é sobrejetora, pois dado $10 \in B$, não existe $a \in A$ tal que $f(a) = 10$.

Logo f não é bijetora.

2. Seja a função $f : A \to B$ dada por $f(x) = 2x$, com $A = B = \mathbb{R}$.

- f é injetora, pois para qualquer $a, b \in A$ com $a \neq b$, temos que $f(a) = 2a \neq 2b = f(b)$.
- f é sobrejetora, pois dado qualquer $b \in B$, se tomarmos $a = \dfrac{b}{2} \in A$ então $f(a) = 2a = 2\left(\dfrac{b}{2}\right) = b$.

Logo f é bijetora.

3. Considere a função $f : A \to B$ dada por $f(x) = x^2$, com com $A = B = \mathbb{R}$.

- f não é injetora, pois $-2 \neq 2$, mas $f(-2) = 4 = f(2)$.

- f também não é sobrejetora, pois $-1 \in B$ e não existe $a \in A$ tal que $f(a) = -1$.

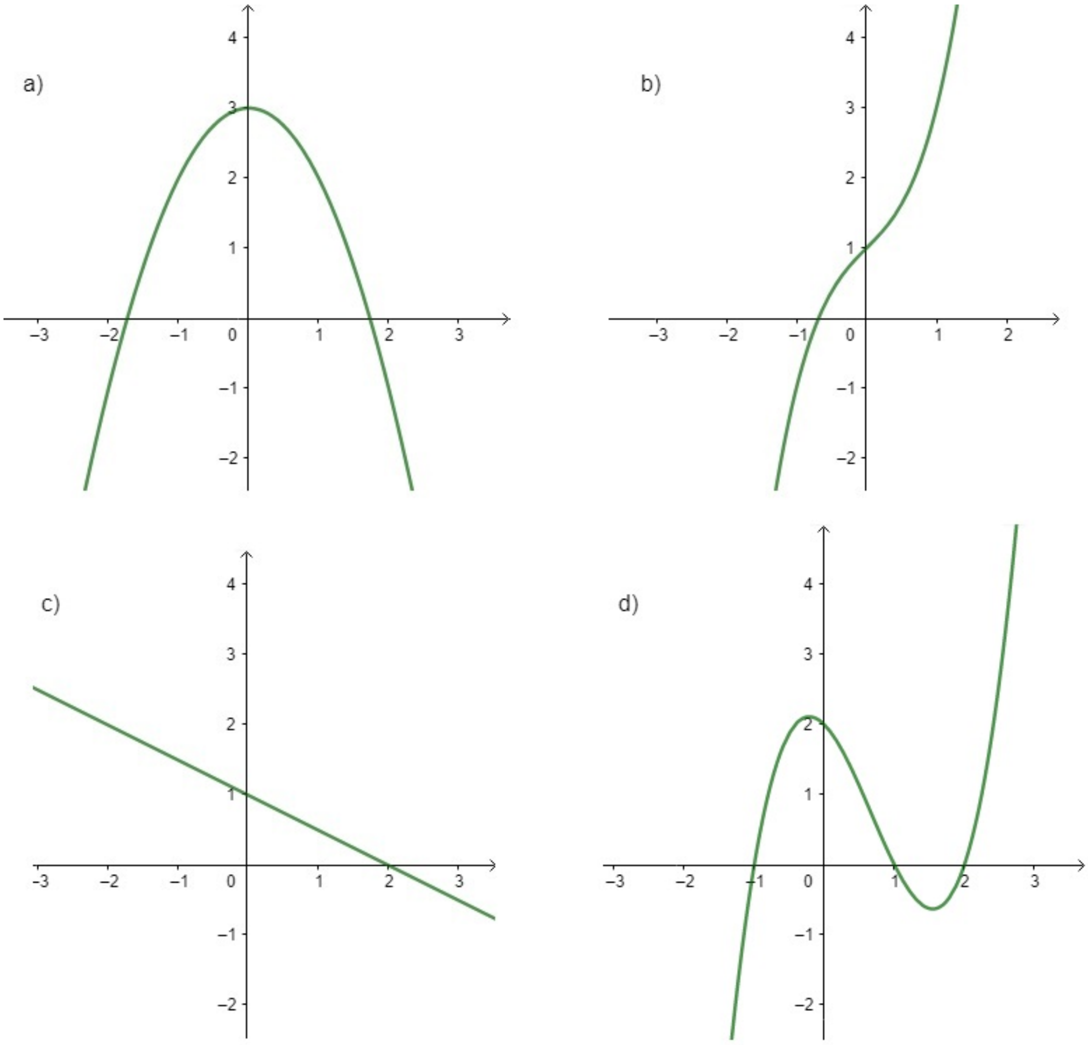
Note que se tomarmos $A = B = [0, +\infty[$, então $f(x) = x^2$ será bijetora. De fato,

- f é injetora, pois se tomarmos $a, b \in A$ tais que

$$f(a) = f(a) \Longrightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \overset{a,b \geq 0}{\Longrightarrow} a = b.$$

- f é sobrejetora, pois para todo $b \in B$, basta tomar $a = \sqrt{b} \in A$ tal que $f(a) = a^2 = (\sqrt{b})^2 = b$.

Exercício 7.15. Com base nos gráficos das funções reais abaixo, indique quais são injetoras, sobrejetoras e bijetoras.



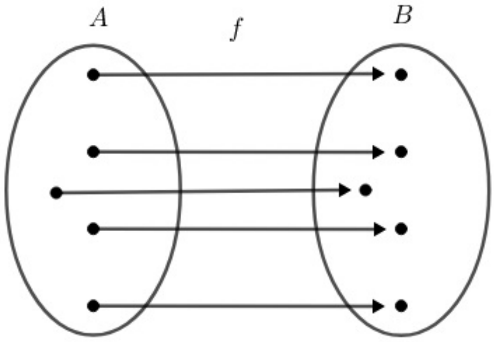
a) $f(x) = -x^2 + 3$, b) $g(x) = x^3 + x + 1$, c) $h(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$ e d) $t(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$

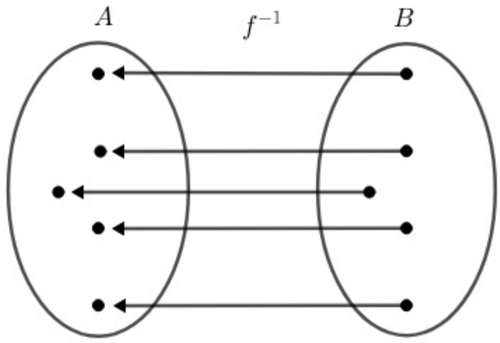
Exercício 7.16. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é bijetora.

Definição 7.17 (Função Inversa)**.** Seja uma função $f : A \to B$ bijetora, onde $A = D_f$ e $B = \mathrm{Im}f$. Então sua *função inversa* $f^{-1} : B \to A$ tem domínio B e imagem A, sendo definida por,

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

para todo $y \in B$.





Mais ainda,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, \quad \text{para todo } x \in A.$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y, \quad \text{para todo } y \in B.$$

Esta característica algébrica permite afirmar que os gráficos de f e de sua inversa de f^{-1} são simétricos em relação à função identidade $y = x$.

Propriedades 7.18. Seja $f : A \to B$ uma função bijetora com função inversa $f^{-1} : B \to A$. Então

1. $D(f^{-1}) = Im(f) = B$

2. $Im(f^{-1}) = D(f) = A$

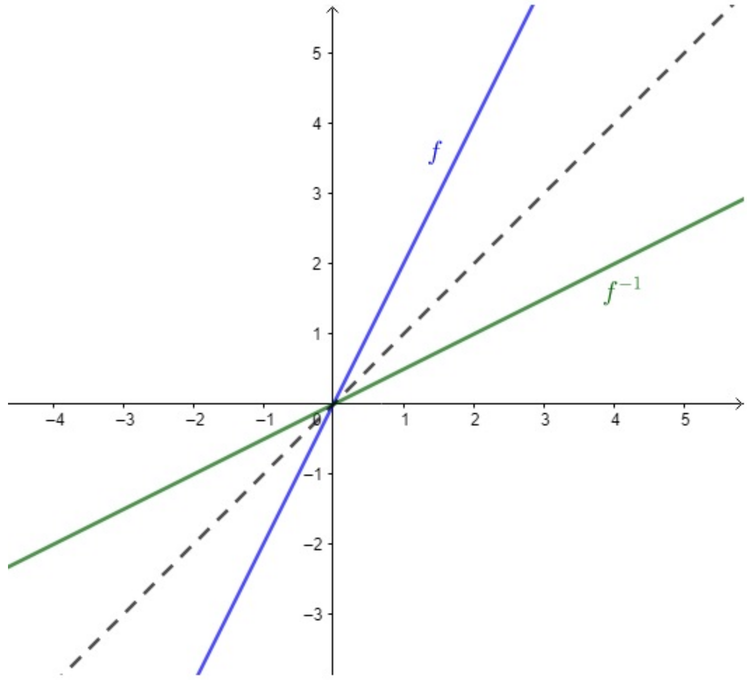
3. $(f^{-1})^{-1} = f$

Demonstração. Segue das propriedades 3.17. □

Exemplo 7.19. 1. A função $f : A \to B$ dada por $f(x) = 2x$, com $A = B = \mathbb{R}$, é bijetora. Assim, vamos determinar sua inversa $f^{-1} : B \to A$:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

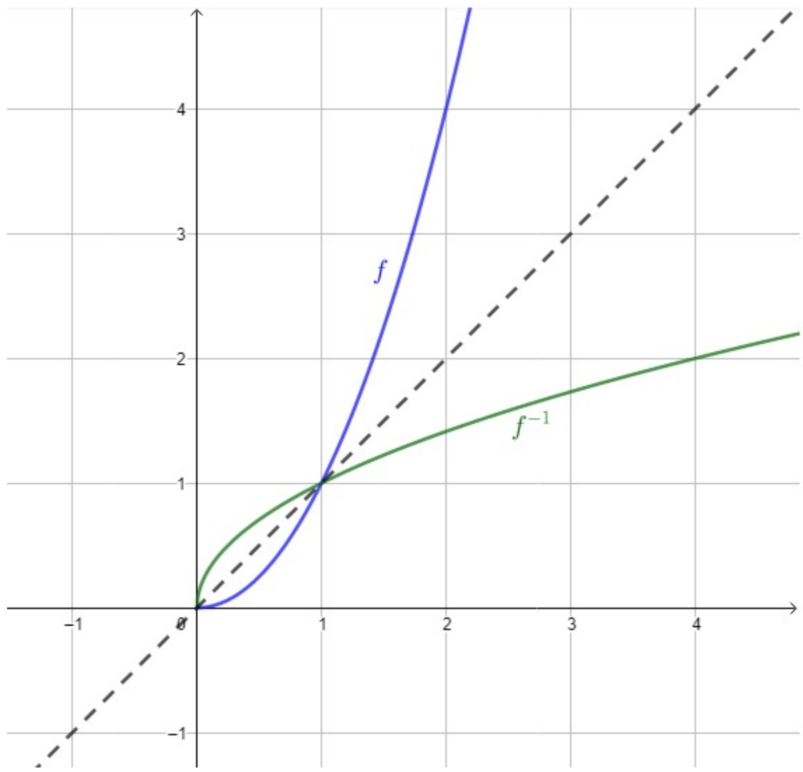
$$f(x) = y = 2x \Longleftrightarrow x = \frac{y}{2} \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$$



2. A função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $f(x) = x^2$ é bijetora, assim sua função inversa f^{-1} : $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é dada por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$

ou seja, $f(x) = y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$ e portanto $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.



Exercício 7.20. Para cada uma das funções abaixo, mostre que f é bijetora, e determine sua função inversa.

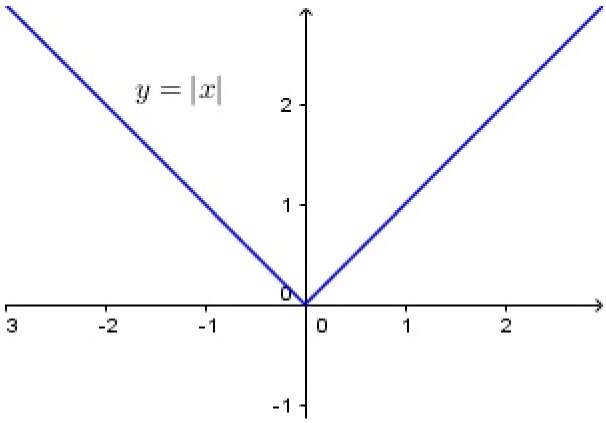
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 2$

b) $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{3 - x}$

8 Funções Modulares

Definição 8.1 (Função modular)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função modular* se

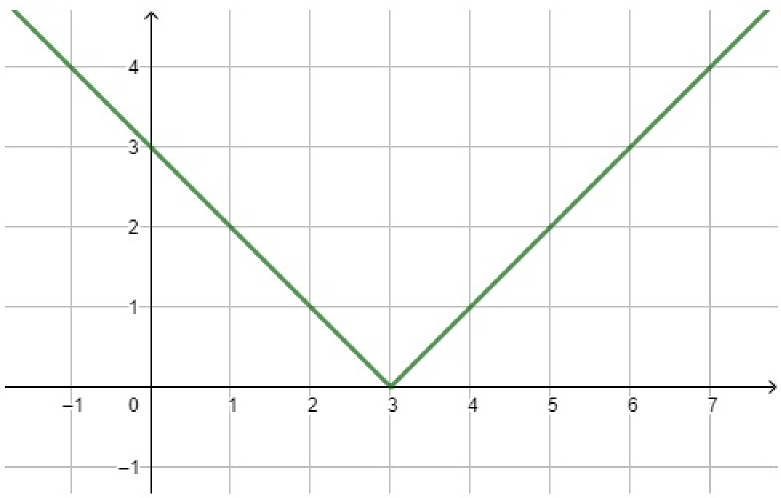
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \text{ se } x \geq 0 \\ -x & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$



Observe que $D_f = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$. Também podemos considerar funções do tipo $f(x) = |g(x)|$, onde $g(x)$ é uma função real.

Exemplo 8.2. 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

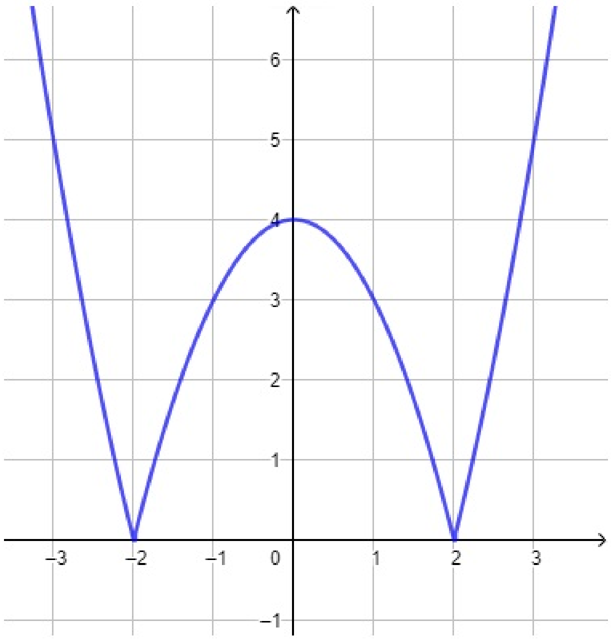
$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & , \text{ se } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & , \text{ se } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & , \text{ se } x \geq 3 \\ -x + 3 & , \text{ se } x < 3 \end{cases}$$



2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x^2 - 4|$. Então

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & , \text{ se } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) & , \text{ se } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\iff f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & , \text{ se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & , \text{ se } -2 < x < 2 \end{cases}$$



3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$. Então

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & , \text{ se } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{ se } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & , \text{ se } x \geq 1 \\ -x + 1 & , \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

e

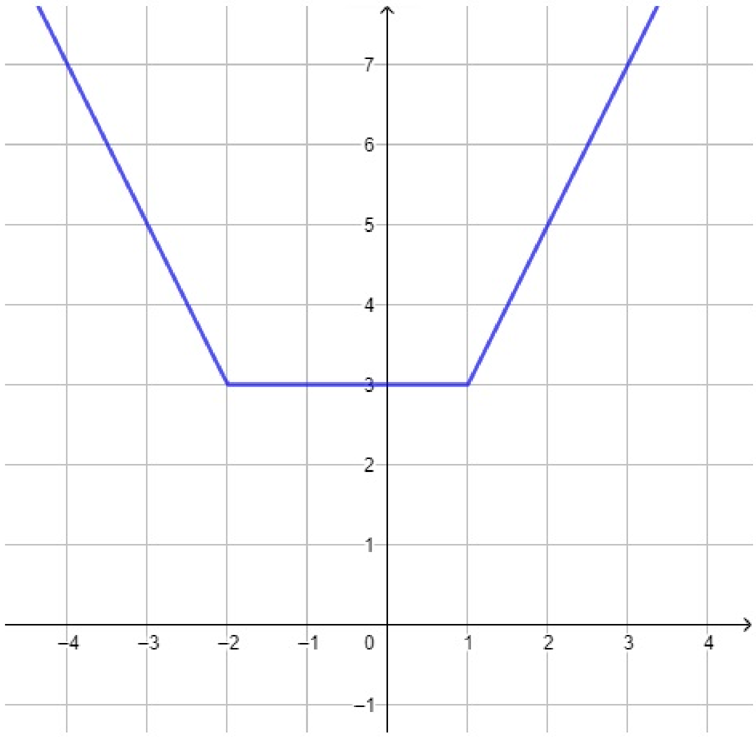
$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & , \text{ se } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & \text{ se } x + 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2 & , \text{ se } x \geq -2 \\ -x - 2 & , \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

Assim, analisando as possibilidades acima, temos

- Se $x < -2 \Longrightarrow |x - 1| + |x + 2| = (-x + 1) + (-x - 2) = -2x - 1$.
- Se $-2 \leq x < 1 \Longrightarrow |x - 1| + |x + 2| = (-x + 1) + (x + 2) = 3$.
- Se $x \geq 1 \Longrightarrow |x - 1| + |x + 2| = (x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$.

Portanto,

$$f(x) = |x-1| + |x+2| = \begin{cases} -2x-1 & , \text{ se } x < -2 \\ 3 & , \text{ se } -2 \leq x < 1 \\ 2x+1 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$



Exercício 8.3. Esboce o gráfico de das funções.

a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = |-3x+1| + 2$

c) $f(x) = |-x^2 + 4x - 3|$

9 Funções Exponenciais

Potenciação

Seja a um número real e n um número natural, definimos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplo 9.1. 1. $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

2. $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

3. $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

4. $a^1 = a$

5. Para $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Propriedades 9.2. Seja a um número real e n e m números naturais.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \overset{\text{Exemplo}}{\Longrightarrow} 2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32.$

2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, desde que $a \neq 0 \quad \overset{\text{Exemplo}}{\Longrightarrow} 4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}.$

3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, desde que $a \neq 0 \quad \overset{\text{Exemplo}}{\Longrightarrow} \dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27.$

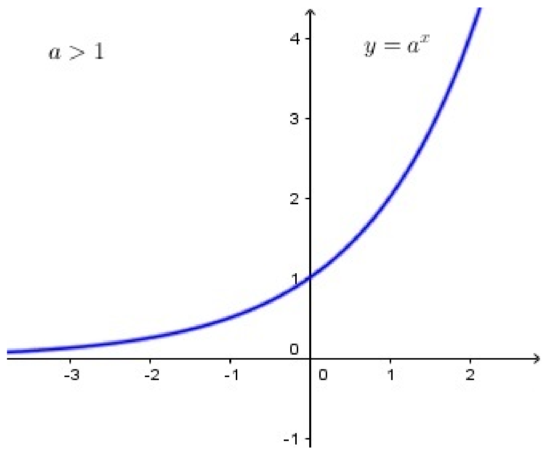
4. $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \overset{\text{Exemplo}}{\Longrightarrow} (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64.$

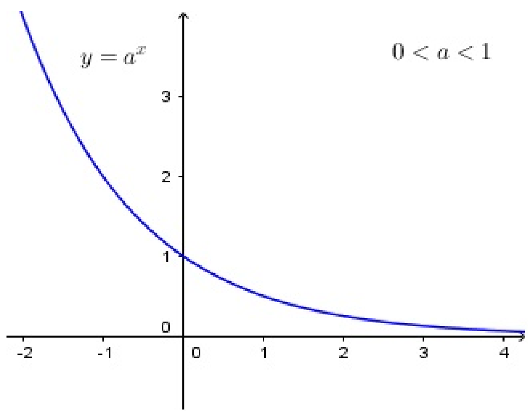
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, desde que $b \neq 0 \quad \overset{\text{Exemplo}}{\Longrightarrow} \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{3^3}{4^3} = \dfrac{27}{64}.$

6. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \overset{\text{Exemplo}}{\Longrightarrow} 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3.$

7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \overset{\text{Exemplo}}{\Longrightarrow} 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$

Definição 9.3 (Funções exponenciais)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função exponencial de base* a se $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

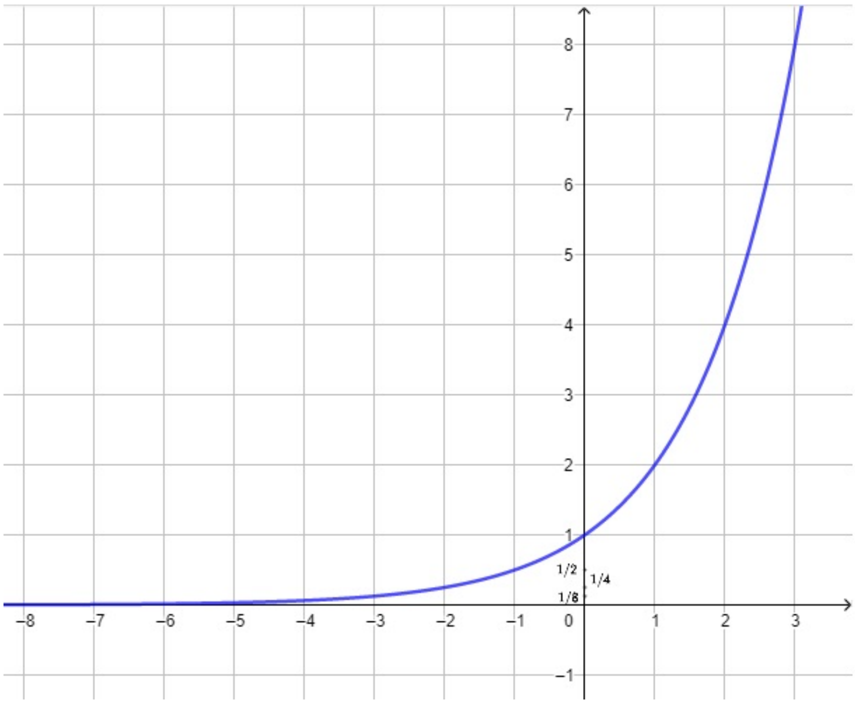




Note que $D_f = \mathbb{R}$ e $\text{Im} f =]0, +\infty[$.

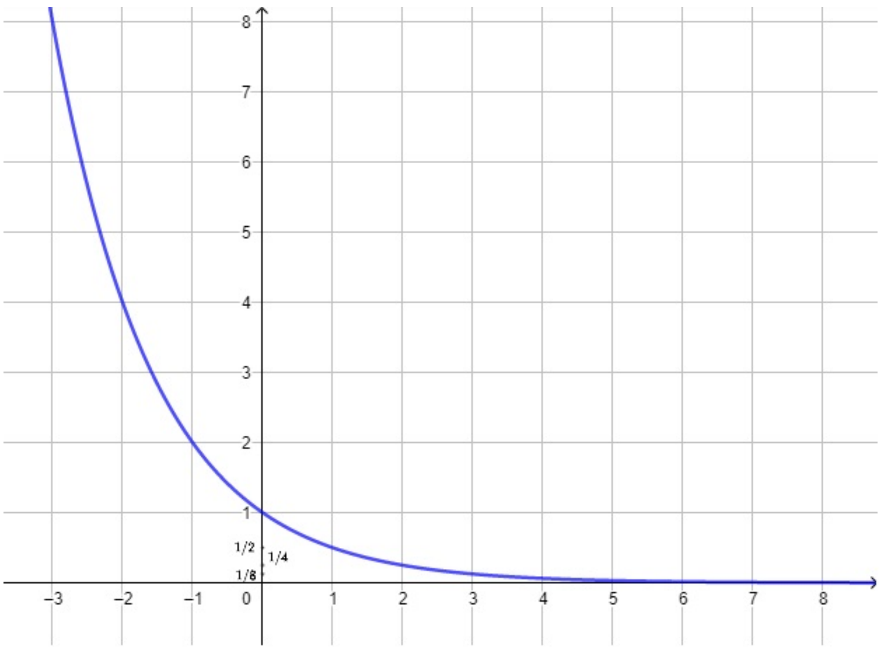
Exemplo 9.4. 1. Dada a função $f(x) = 2^x$, temos

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-3	$\frac{1}{8}$



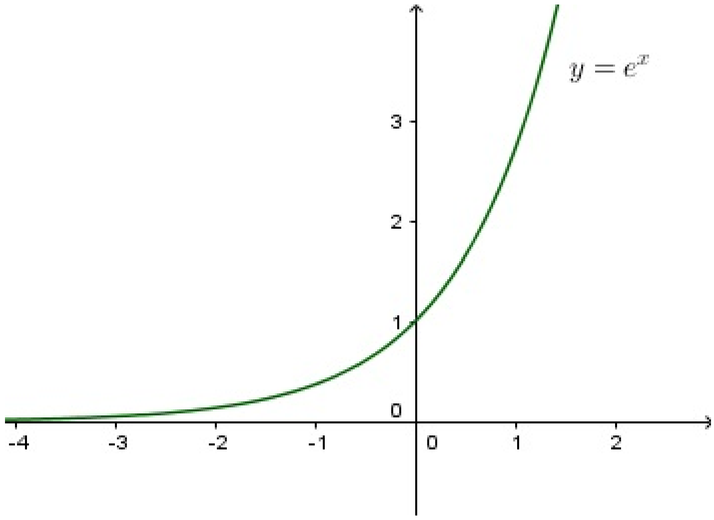
2. Dada a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, temos

x	$f(x)$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
-1	2
-2	4
-3	8



3. A função exponencial natural na base $e = 2,718281...$ é dada por

$$f(x) = e^x$$



Observação 9.5.

1. O gráfico de qualquer função exponencial passa pelo ponto $(0,1)$, pois para $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que $a^0 = 1$.

2. O gráfico da função exponencial não toca o eixo x. Neste caso, o eixo x (reta $y = 0$) é uma assíntota horizontal para o gráfico da função exponencial.

3. Se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente, pois se $x < y$ então $f(x) = a^x < a^y = f(y)$.

4. Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é decrescente, pois $x < y$ então $f(x) = a^x > a^y = f(y)$.

5. Pelos dois itens anteriores, temos que função exponencial $f(x) = a^x$ é injetora.

Propriedades 9.6. Para $a, b \in]0, +\infty[$, e $x, y \in \mathbb{R}$, temos

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

3. $a^{xy} = (a^x)^y$.

4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Exercício 9.7. Esboce o gráfico de $f(x) = 3^{-x}$.

9.1 Equações Exponenciais

Definição 9.8 (Equação exponencial)**.** Chama-se *equação exponencial* toda equação que contém incógnita no expoente.

Exemplo 9.9.

1. $2^x = 32$
2. $3^{x-1} = 27$
3. $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$
4. $4^x - 2^x = 2$

Para resolver uma equação exponencial, devemos transformá-la de modo a obter potências de mesma base no primeiro e no segundo membros da equação utilizando as definições e propriedades da potenciação. Além disso, usaremos o seguinte fato: para $a > 0$ e $a \neq 1$

$$a^x = a^p \iff x = p$$

Exemplo 9.10. Resolva:

1. $2^x = 32 \iff 2^x = 2^5 \iff x = 5$

   Solução: $\{5\}$

2. $3^{x-1} = 27 \iff 3^{x-1} = 3^3 \iff x - 1 = 3 \iff x = 4$

   Solução: $\{4\}$

3. $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \iff \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = (3^4)^{\frac{1}{3}} \iff 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \iff \dfrac{x}{2} = \dfrac{4}{3} \iff x = \dfrac{8}{3}$

   Solução: $\{\dfrac{8}{3}\}$

4. $4^x - 2^x = 2 \iff (2^2)^x - 2^x = 2 \iff 2^{2x} - 2^x = 2 \iff (2^x)^2 - 2^x = 2$

   Chamando $2^x = y$, temos que

   $y^2 - y = 2 \iff y^2 - y - 2 = 0 \iff y = 2$ ou $y = -1$

   - Para $y = 2$, então $2^x = 2 = 2^1 \iff x = 1$.
   - Para $y = -1$ não é possível obter solução, pois $2^x > 0$.

Logo, a solução é $\{1\}$.

Exercício 9.11. Resolva:

1. $4^x = 512$
2. $3^{2x-8} = 81$

Exercício 9.12. O número de bactérias de uma cultura, t horas após o inicio de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,5t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38.400 bactérias?

9.2 Inequações Exponenciais

Definição 9.13 (Inequação exponencial)**.** Chama-se *inequação exponencial* toda inequação que contém incógnita no expoente.

Exemplo 9.14.
1. $2^x > 32$
2. $3^{x^2} \leq 81$
3. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+3} < 1$
4. $4^x - 2 \geq 2^x$

Para resolver inequações exponenciais, devemos observar dois passos importantes:

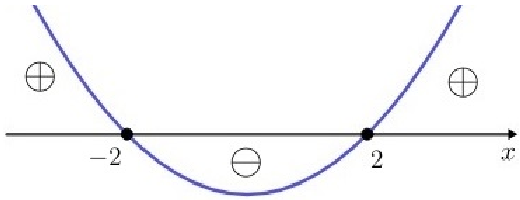
1. Redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base.
2. Verificar a base da exponencial, $a > 1$ ou $0 < a < 1$, aplicando as propriedades a seguir:
   - Caso $a > 1$, então $a^m > a^n \Longrightarrow m > n$
   - Caso $0 < a < 1$, então $a^m > a^n \Longrightarrow m < n$

Exemplo 9.15. Resolva:

1. $2^x > 32 \Longleftrightarrow 2^x > 2^5 \Longrightarrow x > 5$

   Logo, a solução é dada por $S = \{x, \in \mathbb{R} \mid x > 5\} =]5, +\infty[$.

2. $3^{x^2} \leq 81 \Longleftrightarrow 3^{x^2} \leq 3^4 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow x^2 - 4 \leq 0$



Logo, a solução é dada por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$.

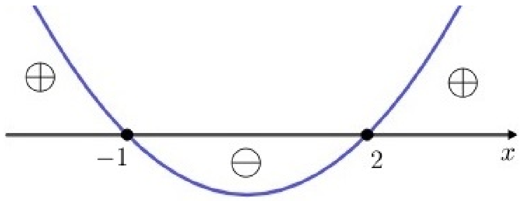
3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} < 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} < \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \Longrightarrow 2x + 3 > 0 \Longrightarrow x > -\frac{3}{2}$

Logo, a solução é dada por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\} = \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

4. $4^x - 2 \geq 2^x \Longleftrightarrow 4^x - 2^x - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow (2^2)^x - 2^x - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 \geq 0$

Chamando $2^x = y$, temos que

$(2^x)^2 - 2^x - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow y^2 - y - 2 \geq 0$



Logo $y^2 - y - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow y \leq -1$ ou $y \geq 2 \overset{y=2^x}{\Longleftrightarrow} 2^x \leq -1$ ou $2^x \geq 2$.

- Para $y \leq -1$, teríamos $2^x \leq -1$, o que é impossível, pois $2^x > 0$.
- Para $y \geq 2$, temos $2^x \geq 2 \Longrightarrow x \geq 1$.

Logo, a solução é dada por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1, +\infty[$.

Exercício 9.16. Resolva:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-7}$

2. $\frac{1}{27} < 3^x < 81$

10 Funções Logarítmicas

Definição 10.1 (Logaritmo)**.** Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo de b na base a* o expoente real x ao qual se eleva a para obter b, isto é,

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Na igualdade $\log_a b = x$, tem-se

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.

Exemplo 10.2. 1. $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$

2. $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$

3. $\log_3 1 = 0$, pois $3^0 = 1$

Exemplo 10.3. Determine os logaritmos.

1. $\log_3 \dfrac{1}{9}$

   Chamando $\log_3 \dfrac{1}{9} = x$, temos

$$\log_3 \frac{1}{9} = x \iff 3^x = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} \iff 3^x = 3^{-2} \Longrightarrow x = -2$$

2. $\log_4 8$

   Chamando $\log_4 8 = x$, temos

$$\log_4 8 = x \iff 4^x = 8 \iff (2^2)^x = 2^3 \iff 2^{2x} = 2^3 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$$

Observação 10.4. Para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0,\ b > 0$ e $a \neq 1$, segue da definição de logaritmo:

1. O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a zero, pois $\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$.

2. O logaritmo da própria base é igual a 1, pois $\log_a a = 1 \iff a^1 = a$.

3. O logaritmo de uma potência da base é igual ao expoente, pois

$$\log_a a^m = m \Longleftrightarrow a^m = a^m.$$

4. O logaritmo de b na base a é o expoente ao qual devemos elevar a para obter b

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b \Longrightarrow a^{\log_a b} = b.$$

5. Dois logaritmos de mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmos são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow b = c$$

De fato, pois

$$\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow a^{\log_a c} = b \Longleftrightarrow c = b.$$

6. Quando não se indica a base do logaritmo, fica subtendido que a base é 10, isto é, $\log b = \log_{10} b$.

7. Para $e = 2,718281...$, defini-se o *logaritmo natural* de base e (base de Neeper)

$$\log_e b = \ln b.$$

Assim $\ln b = x \Longleftrightarrow e^x = b$.

Propriedades 10.5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ e $a \neq 1$.

1. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.
2. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.
3. $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a b$, onde $r \in \mathbb{R}$.
4. Supondo $c \neq 1$, então $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (mudança de base)

Demonstração. 1. Tomando $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b \cdot c) = z$, temos

$$\left.\begin{array}{lll} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_a c = y & \Longrightarrow & a^y = c \\ \log_a(b \cdot c) = z & \Longrightarrow & a^z = b \cdot c \end{array}\right. \Longrightarrow a^z = b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Longrightarrow z = x + y$$

Logo, $\log_a(b \cdot c) = z = x + y = \log_a b + \log_a c$.

2. Tomando $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, temos

$$\left.\begin{array}{lcl} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_a c = y & \Longrightarrow & a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z & \Longrightarrow & a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right. \Longrightarrow a^z = \frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Longrightarrow z = x - y$$

Logo, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z = x - y = \log_a b - \log_a c$.

3. Tomando $\log_a b = x$ e $\log_a(b^r) = y$, temos

$$\left.\begin{array}{lcl} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_a(b^r) = y & \Longrightarrow & a^y = b^r \end{array}\right. \Longrightarrow a^y = b^r = (a^x)^r = a^{rx} \Longrightarrow y = rx$$

Logo, $\log_a(b^r) = y = rx = r \log_a b$.

4. Tomando $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, como $a \neq 1$ então $z \neq 0$. Mostremos que $x = \frac{y}{z}$. De fato,

$$\left.\begin{array}{lcl} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_c b = y & \Longrightarrow & c^y = b \\ \log_c a = z & \Longrightarrow & c^z = a \end{array}\right. \Longrightarrow c^y = b = a^x = (c^z)^x = c^{zx} \Longrightarrow y = zx \Longrightarrow x = \frac{y}{z}$$

Logo, $\log_a b = x = \frac{y}{z} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

$\square$

Exemplo 10.6. 1. $\log_4 32 = \log_4(4 \cdot 8) = \log_4 4 + \log_4 8 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

2. $\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$

3. $\log_9 3 = \log_9(\sqrt{9}) = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_9 9 = \frac{1}{2}$

4. $\log_2 12 = \log_2(2^2 \cdot 3) = \log_2 2^2 + \log_2 3 = 2 \log_2 2 + \log_2 3 = 2 + \log_2 3$

5. $\log 0,01 = \log \frac{1}{100} = \log \frac{1}{10^2} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$

Exemplo 10.7. Sabendo que $\log 2 \approx 0,3$, determine $\log_2 10$.

Temos que

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3} \Longrightarrow \log_2 10 \approx \frac{10}{3}.$$

Exercício 10.8. Sabendo que $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, determine, em função de x e y, os logaritmos $\log 12$ e $\log \sqrt{6}$.

Exemplo 10.9. O número de indivíduos de uma população de bactérias no instante t é definido pela função:

$$f(t) = 30 \cdot 3^{1,095t},$$

onde t é o tempo em minutos. Deseja-se saber após quantos minutos essa população chegará a 9000 bactérias. (Dica: $\log 3 \approx 0,477$)

Resolução: Como $f(t) = 30 \cdot 3^{1,095t}$, queremos determinar o tempo t tal que

$$9000 = 30 \cdot 3^{1,095t} \Longrightarrow 3^{1,095t} = 300$$

. Aplicando o logaritmo na base 10 na igualdade acima, temos

$$\log 3^{1,095t} = \log 300 \Longrightarrow 1,095t \log 3 = \log(3 \cdot 10^2) = \log 3 + \log 10^2 = \log 3 + 2\log 10$$

Então,

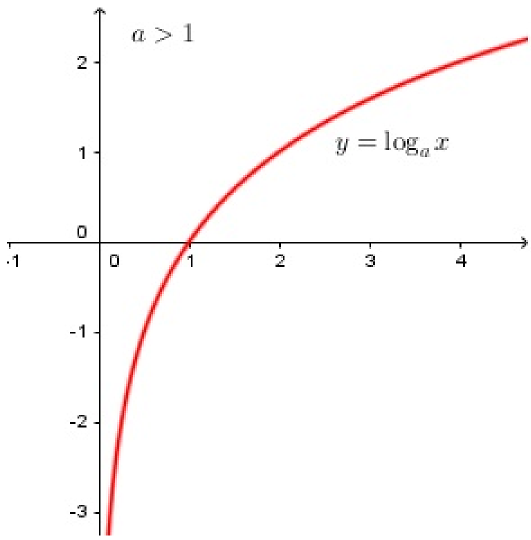
$$1,095t(0,477) \approx 0,477 + 2 \Longrightarrow 0,522315t \approx 2,477 \Longrightarrow t \approx \frac{2,477}{0,522315} \approx 4,742$$

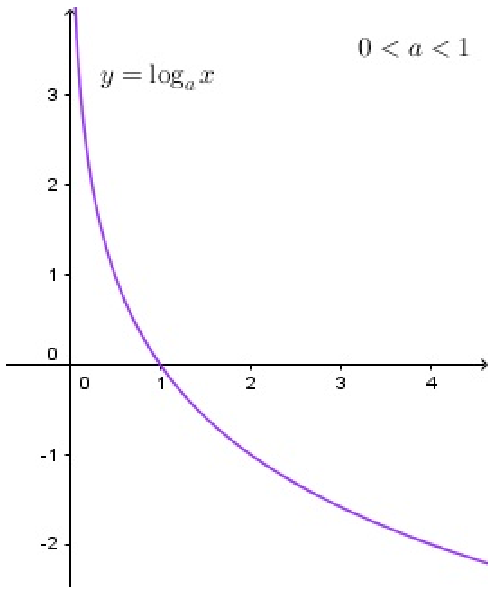
Logo, o tempo para atingir 9000 bactérias é de aproximadamente 4 minutos e 45 segundos.

Definição 10.10 (Função logarítmica)**.** Uma função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log_a x,$$

onde a é uma constante positiva com $a \neq 1$, é chamada de *função logarítmica de base a*.

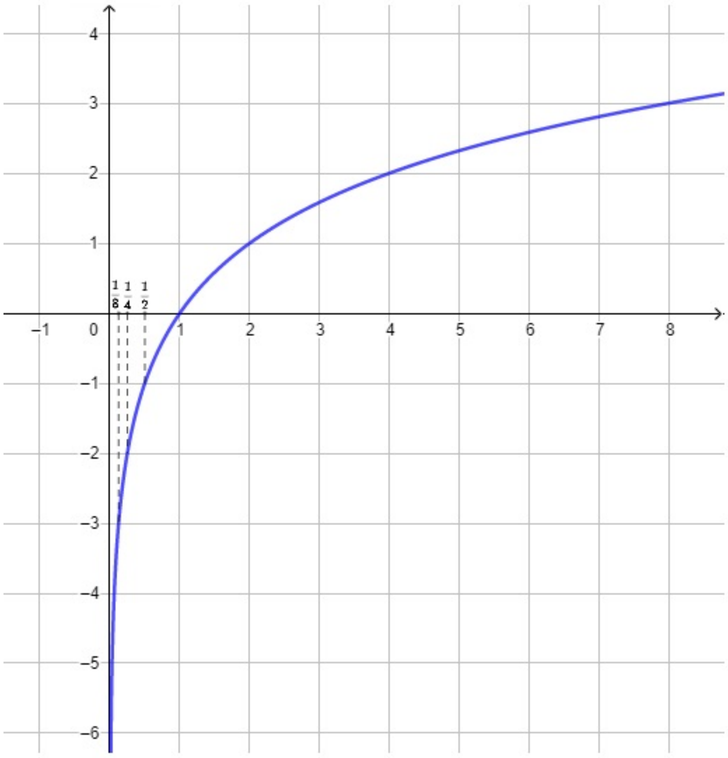




Note que $D_f =]0, +\infty$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

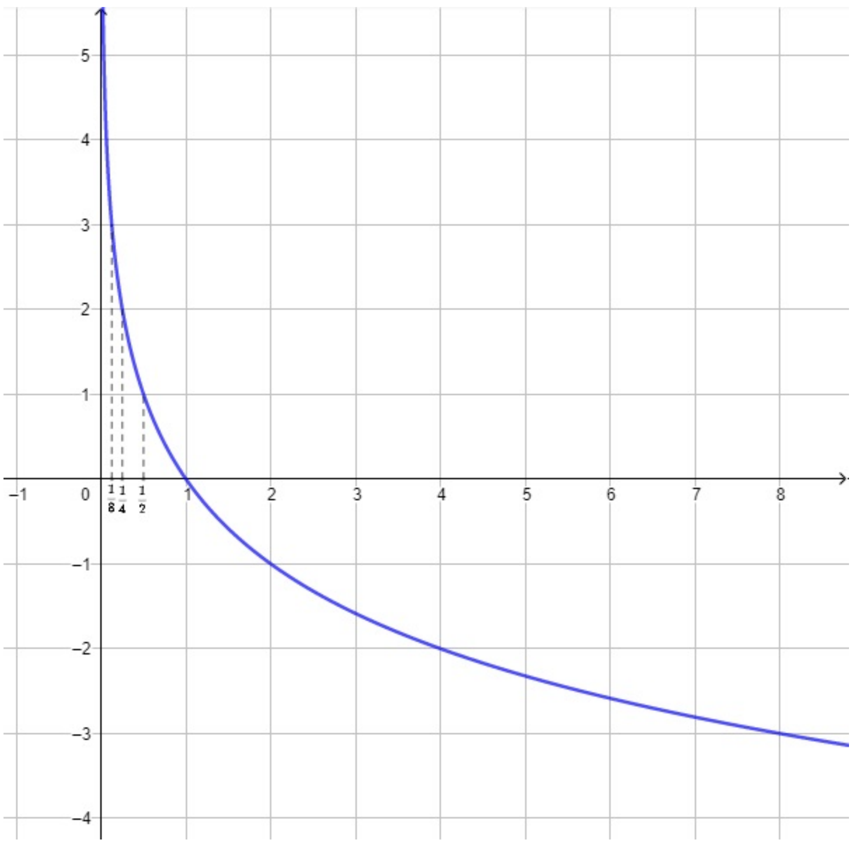
Exemplo 10.11. 1. Dada a função $f(x) = \log_2 x$, temos

x	$f(x)$
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3



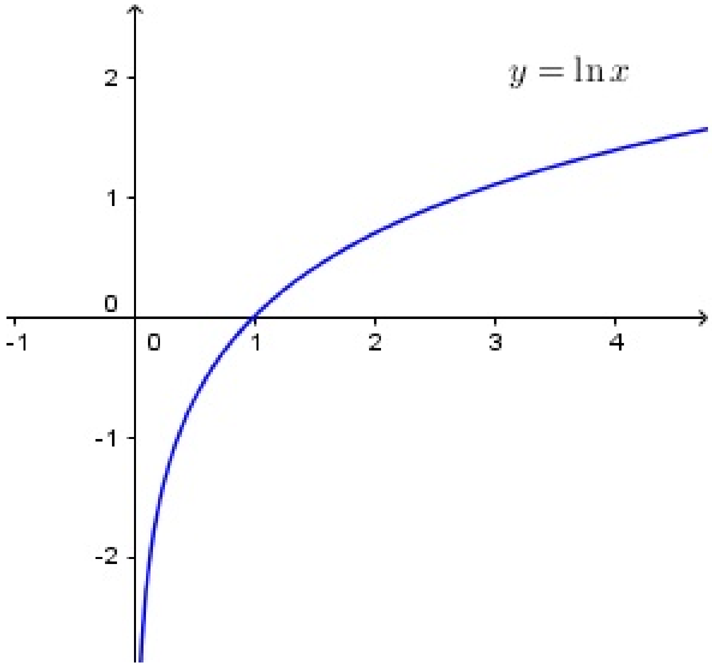
2. Dada a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, temos

x	$f(x)$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3
2	-1
4	-2
8	-3



3. A função logaritmo natural na base $e = 2,718281...$ é dada por

$$f(x) = \ln x$$



Observação 10.12. 1. O gráfico de qualquer função logarítmica passa pelo ponto $(1, 0)$, pois para $\log_a 1 = 0$.

2. O gráfico da função logarítmica não toca o eixo y. Neste caso, o eixo y (reta $x = 0$) é uma assíntota vertical para o gráfico da função logarítmica.

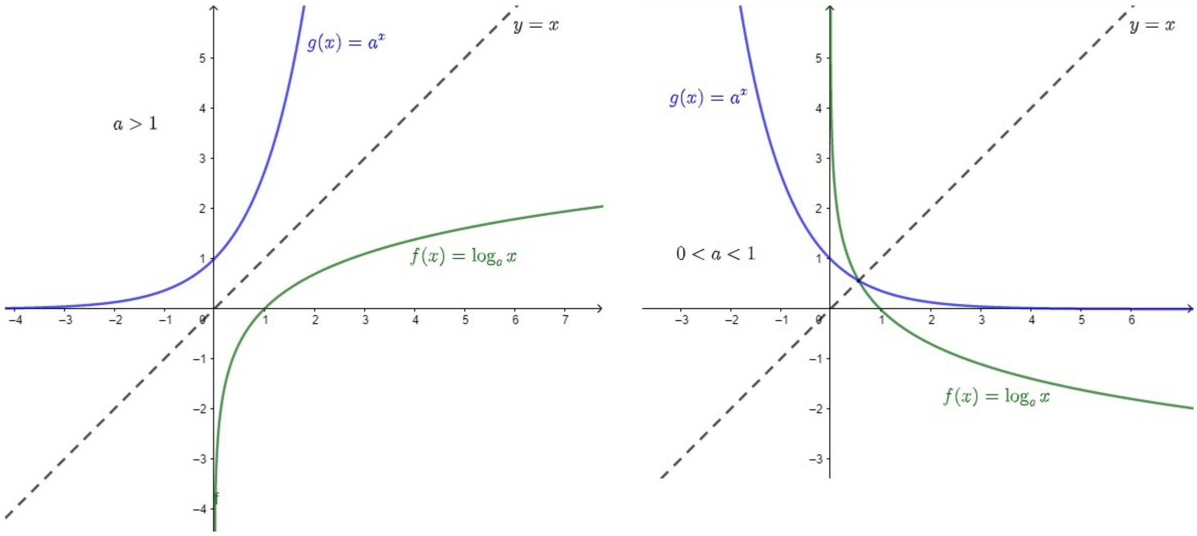
3. Se $a > 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é crescente, pois se $x < y$ então $\log_a x < \log_a y$.

4. Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é decrescente, pois $x < y$ então $\log_a x > \log_a y$.

5. Para $a > 0$ e $a \neq 1$, as funções $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$ e $g : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dada por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra. De fato,

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(a^x) = \log_a a^x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$, para todo $x \in]0, +\infty[$.



Exercício 10.13. Esboce o gráfico de $f(x) = \log_3 x$.

10.1 Equações Logarítmicas

Podemos classificar as equações logarítmicas em três tipos:

- $1^{\underline{o}}$ tipo: Para $a > 0$, $a \neq 1$, $k \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ uma função real:

$$\log_a f(x) = b \Longrightarrow f(x) = a^k$$

Exemplo 10.14. Resolva a equação $\log_2(3x + 1) = 4$.

Resolução:

$$\log_2(3x + 1) = 4 \Longrightarrow 3x + 1 = 2^4 = 16 \Longrightarrow 3x = 15 \Longrightarrow x = 5$$

Logo, a solução é $\{5\}$.

Exercício 10.15. Resolva a equação $\log_3(x^2 + 3x - 1) = 2$.

- $2^{\underline{o}}$ tipo: Para $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$ e $g(x)$ funções reais:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Longrightarrow f(x) = g(x) > 0$$

Exemplo 10.16. Resolva a equação $\log_3(2x - 3) = \log_3(2 - x)$. Resolução:

$$\log_3(2x - 3) = \log_3(2 - x) \Longrightarrow 2x - 3 = 2 - x > 0$$

Então $2 - x > 0 \iff x < 2$. Desta forma

$$2x - 3 = 2 - x \Longrightarrow 3x = 5 \Longrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Como $x = \frac{5}{3} < 2$ então a solução é $\{\frac{5}{3}\}$.

Exercício 10.17. Resolva a equação $\log_5(4x+1) = \log_5 9$.

- $3^{\underline{o}}$ tipo: São as equações que resolvemos fazendo uma mudança de incógnita.

Exemplo 10.18. Resolva a equação $(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$.

A equação dada é equivalente a $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$. Chamando de $\log_2 x = y$, temos

$$y^2 - y - 2 = 0 \iff y = -1 \text{ ou } y = 2.$$

$\star$ Para $y = -1$ temos $\log_2 x = -1 \Longrightarrow x = 2^{-1} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\star$ Para $y = 2$ temos $\log_2 x = 2 \Longrightarrow x = 2^2 \Longrightarrow x = 4$

Logo a solução é $\{\frac{1}{2}, 4\}$.

10.2 Inequações logarítmicas

As inequações logarítmicas também são classificadas em três tipos:

- $1^{\underline{o}}$ tipo: Dado $f(x)$ uma função real e $k \in \mathbb{R}$:

$$\log_a f(x) > k \Longrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k & , \text{ se } a > 1 \\ 0 < f(x) < a^k & , \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

ou

$$\log_a f(x) < k \Longrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^k & , \text{ se } a > 1 \\ f(x) > a^k & , \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 10.19. Resolva a inequação $\log_3(3x+2) < 2$.

Resolução:

$$\log_3(3x+2) < 2 \Longrightarrow 0 < 3x + 2 < 3^2 \Longrightarrow 0 < 3x + 2 < 9.$$

Assim,

$$0 < 3x + 2 < 9 \Longrightarrow -2 < 3x < 7 \Longrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}.$$

Logo, a solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}\}$.

- $2^{\underline{o}}$ tipo: Dado $f(x)$ e $g(x)$ funções reais::

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 & , \text{ se } a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) & , \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 10.20. Resolva a inequação $\log_5(x^2 - 3x) > \log_5 x$.

Resolução:

$$\log_5(x^2 - 3x) > \log_5 x \Longrightarrow x^2 - 3x > x > 0.$$

Assim, $x > 0$ e

$$x < x^2 - 3x \Longrightarrow 0 < x^2 - 4x \Longrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 4$$

Logo, a solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

- $3^{\underline{o}}$ tipo: São as inequações que resolvemos fazendo uma mudança de incógnita.

Exemplo 10.21. Resolva a equação $(\log_3 x)^2 < 2\log_3 x$.

A equação dada é equivalente a $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x < 0$. Chamando de $\log_3 x = y$, temos

$$y^2 - 2y < 0 \Longleftrightarrow 0 < y < 2.$$

$\star$ Para $y > 0$ temos $\log_3 x > 0 \Longrightarrow x > 3^0 = 1$

$\star$ Para $y < 2$ temos $\log_3 x < 2 \Longrightarrow 0 < x < 3^2 \Longrightarrow 0 < x < 9$

Logo a solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 9\}$.

Exercício 10.22. Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x) > -1$.

Referências

[1] Guidorizzi, Hamilton L. Um curso de Cálculo: volume 1. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

[2] IEZZI, G; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 1:Conjuntos e Funções. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2008.

[3] IEZZI, G; MURAKAMI, C, DOLCE, C. Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 2: Logaritmos. 8ª edição. São Paulo: Atual, 2009.

[4] MEDEIROS, Valéria Zuma; CALDEIRA, André Machado; DA SILVA, Luiza Maria Oliveira;

[5] STEWART, James. Cálculo: volume 1. 6ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2010.