Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Poliedros de Platão com Animações em PDF

Pablo Jackson Rodrigues Silva

Produto Educacional

Orientador: Prof. Dr. Reinaldo de Marchi

Cuiabá - MT

2024

Sumário

1 Resumo

O produto educacional Poliedros de Platão com Animações em PDF apresenta uma sequência didática voltada para o ensino interativo e significativo dos sólidos platônicos. O objetivo principal é conectar os conceitos matemáticos à prática, promovendo a compreensão das propriedades geométricas, volumétricas e simétricas dos poliedros de Platão. Atividades propostas incluem a exploração da fórmula de Euler, a comparação de volumes e alturas desses sólidos e a construção de planificações geométricas. Com suporte da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o produto enfatiza o desenvolvimento de habilidades investigativas, raciocínio lógico e uso ético de tecnologias. Dessa forma, espera-se engajar estudantes no estudo da geometria espacial, fomentando sua curiosidade e criatividade.

Palavras-chave: geometria espacial, poliedros regulares, sólidos platônicos, tecnologia educacional, ensino básico.

2 Introdução

Esta sequência didática é um produto educacional derivado da dissertação intitulada **Poliedros de Platão com animações em PDF**. Seu objetivo é oferecer uma abordagem lúdica e significativa para o ensino dos sólidos de Platão, conectando conceitos matemáticos à prática por meio de recursos interativos.

Vivemos em um mundo tridimensional, no qual as noções de altura, largura e profundidade são fundamentais para a compreensão da Geometria Espacial. Entretanto, ao observarmos objetos representados em superfícies bidimensionais, como páginas de livros ou telas, estamos diante de representações semióticas, não dos próprios objetos. Essa limitação pode dificultar a compreensão das propriedades espaciais e a distinção entre formas planas e tridimensionais, criando barreiras para o aprendizado da geometria. Para superar esses desafios, estratégias didáticas que valorizem a experimentação e a interação são essenciais, favorecendo a construção do conhecimento por meio de experiências práticas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2018, destaca a relevância de práticas pedagógicas que estimulem a curiosidade, o raciocínio lógico, a investigação e o uso de tecnologias no processo de ensino-aprendizagem. Entre as competências gerais e específicas estabelecidas, destacam-se:

- **Exercitar a curiosidade intelectual** e utilizar abordagens científicas para investigar, refletir, criar e resolver problemas;
- **Compreender e criar tecnologias digitais** de maneira ética e significativa;
- **Desenvolver o raciocínio lógico** e a construção de argumentos convincentes;
- **Investigar e validar conjecturas matemáticas** com o apoio de tecnologias e práticas experimentais.

A BNCC também enfatiza a importância da geometria no currículo escolar, promovendo o entendimento de propriedades geométricas, a análise de formas tridimensionais e a resolução de problemas espaciais. Segundo (Barbosa, 2003), a geometria espacial desempenha um papel crucial no desenvolvimento de habilidades cognitivas, espaciais e abstratas. No entanto, o ensino tradicional muitas vezes enfrenta dificuldades em engajar estudantes que têm pouca familiaridade com características tridimensionais. Ferramentas como o software GeoGebra oferecem alternativas dinâmicas e interativas, permitindo aos alunos explorar propriedades geométricas de forma intuitiva e significativa (Alves e Soares, 2003).

Dessa forma, esta sequência didática busca introduzir os poliedros de Platão de maneira acessível e prática, destacando sua relevância matemática e explorando suas propriedades únicas. Para alcançar esse propósito, foram definidos os seguintes objetivos:

1. Demonstrar a relação de Euler;

2. Discutir a existência de apenas cinco classes de poliedros regulares convexos;

3. Proporcionar uma experiência interativa por meio da planificação e construção desses sólidos.

Com esta proposta, almeja-se promover um ensino de geometria espacial que seja engajador, significativo e alinhado às competências da BNCC, fomentando a construção do conhecimento matemático e o desenvolvimento de habilidades investigativas e criativas dos estudantes.

Habilidades Trabalhadas

- **EF08MA20**: Reconhecer e representar planificações, vistas, perspectivas e projeções de sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas e poliedros regulares.

- **EF08MA21**: Resolver problemas que envolvam o cálculo de áreas da superfície de sólidos geométricos, inclusive no contexto de planificação, utilizando a composição e decomposição de figuras planas.

- **EF08MA22**: Relacionar o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de prismas, pirâmides e outros poliedros convexos, verificando a validade da relação de Euler ($V - A + F = 2$).

Para visualizar as animações contidas nesse arquivo pdf, é preciso usar programas tais como Adobe Acrobat Reader, Okular ou SumatraPDF.

3 Poliedros

3.1 Definição Geral

Um **poliedro** é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

Na Figura 1, temos dois exemplos animados de poliedros segundo essa definição geral. Aqui é importante notar que a maneira em que juntamos os polígonos para formar os poliedros nos permite figuras como estas.

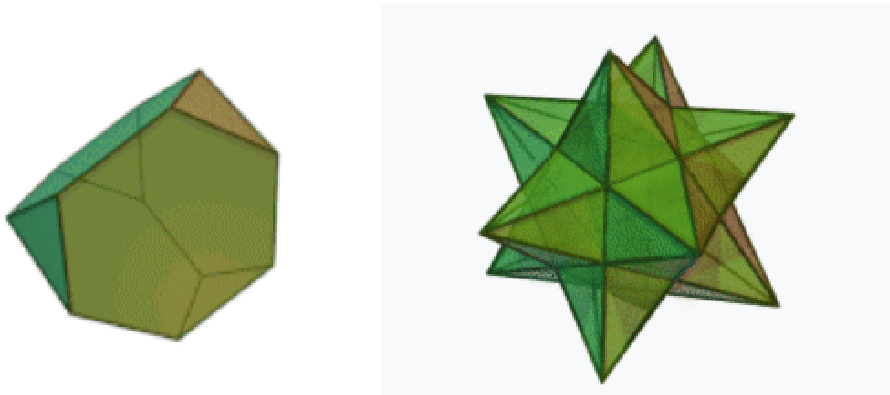

Figura 1: Exemplos animados de poliedros

Um poliedro é **convexo** se, para quaisquer dois pontos internos, o segmento de reta que os une estiver totalmente dentro do poliedro. De forma geral, um conjunto é convexo quando o segmento de reta entre dois pontos quaisquer está inteiramente contido nele.

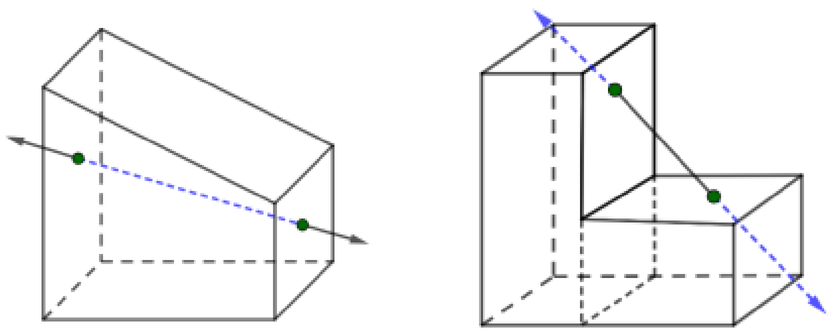

Figura 2: Polígono convexo e polígono não convexo

Para caracterizar um poliedro convexo consideramos n polígonos, com $n \geq 4$, que satisfazem as três condições:

(I) não há dois destes polígonos no mesmo plano;

(II) cada lado de um dos polígonos é comum a dois e apenas dois dos polígonos;

(III) o plano de cada polígono deixa todos os demais polígonos num mesmo semiespaço. (condição de convexidade)

Passamos agora a apresentar alguns objetos que estão associados a um poliedro que são: faces, arestas, vértices e ângulos. Considere um poliedro qualquer. As **arestas** de um poliedro são os segmentos de reta que delimitam a borda onde duas faces se encontram. Os **vértices** são os pontos onde três ou mais arestas se encontram. As **faces** são as superfícies planas que formam os lados do poliedro, delimitando sua estrutura tridimensional. A figura 3 a seguir ilustra esses elementos para um cubo e um tetraedro.

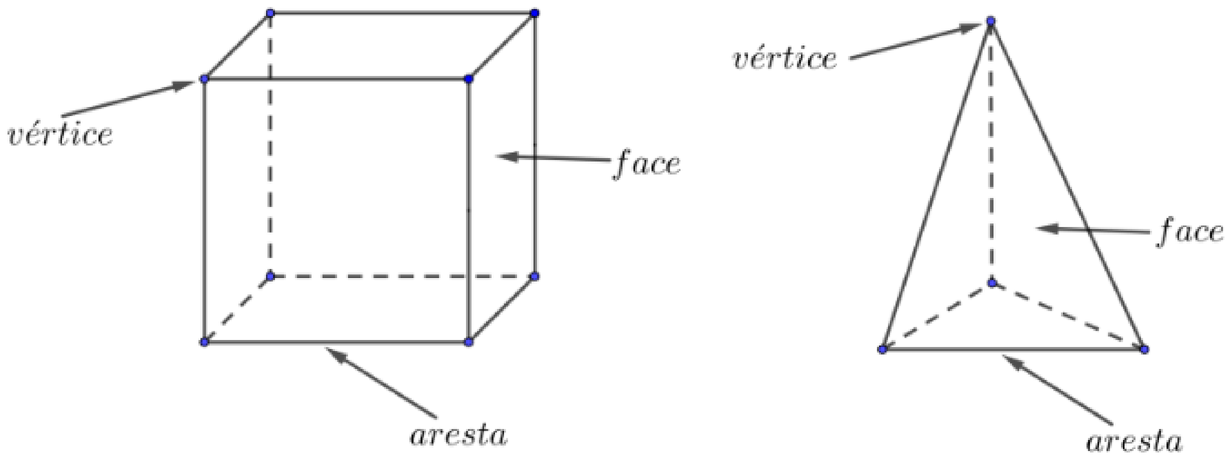

Figura 3: Vértices, arestas e faces de um cubo e um pirâmide

Vamos falar de dois exemplos de poliedros que aparecem com muita frequência em Geometria Espacial: prisma e pirâmide.

3.2 Prisma

Prismas são poliedros que possuem duas bases paralelas e congruentes, com faces laterais que são paralelogramos (Figura 4).

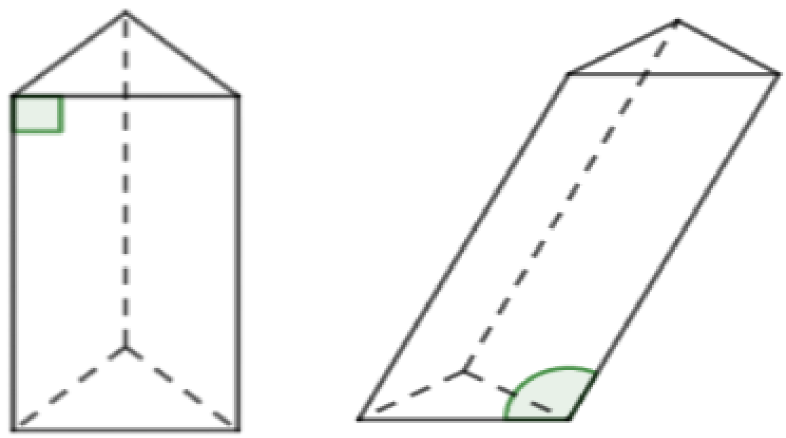

Figura 4: Prisma reto e prisma oblíquo

Esse tipo de poliedro é utilizado regularmente como reservatórios pela sua rigidez e praticidade de construção já que usualmente são paralelepípedos (todas faces retangulares), para calcular a capacidade volumétrica de um prisma utilizamos o princípio de Cavalieri, que geralmente é apresentado nas seções de geometria espacial dos livros de matemática na educação básica. (Lima, 2006) na pág. 256 nos traz esse axioma da seguinte forma:

Axioma 3.1 (Princípio de Cavalieri)**.** *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.*

O Princípio de Cavalieri é um poderoso conceito que simplifica o cálculo de volumes e permite comparações entre sólidos aparentemente diferentes. Ele se baseia na ideia de que o volume de um sólido pode ser determinado a partir das áreas de suas secções transversais, desde que essas áreas sejam equivalentes em cada nível.

Sabendo que o volume de um paralelepípedo de área de base A_b e altura h é dado por

$$V = A_b h.$$

Para um prisma de mesma altura h, traçamos uma seção transversal que terá área A. Naturalmente, é possível obter um retângulo cuja área seja A. Portanto, usando o axioma, segue que o volume do prisma também será $V = Ah$.

3.3 Pirâmide

Uma **pirâmide** é formada por uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um ponto comum, o vértice (Figura 5).

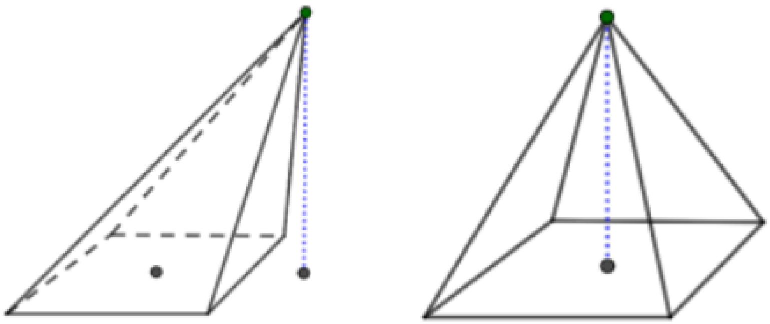

Figura 5: Pirâmide quadrangular oblíqua e pirâmide quadrangular reta

Pirâmides e prismas são nomeados conforme o formato de suas bases, como prismas hexagonais e pirâmides pentagonais. A pirâmide quadrangular, comum em exemplos como as pirâmides do Egito, tem base quadrada e quatro faces triangulares. Ela pode ser reta, com o vértice diretamente acima do centro da base e segmento ortogonal à base, ou oblíqua, quando o vértice não está alinhado com o centro, formando uma estrutura inclinada.

Alguns sólidos geométricos são facilmente identificáveis em nosso dia a dia. Um prisma retangular, por exemplo, pode ser visto em caixas de sapatos, enquanto uma pirâmide triangular pode ser encontrada em estruturas arquitetônicas como telhados. Por exemplo, temos o dado de 6 lados (Figura 6)), também conhecido como dado cúbico ou dado comum, é um objeto utilizado em muitos jogos de mesa e atividades lúdicas. Ele é um dos tipos mais populares de dados e é construído de maneira que cada uma das seis faces é marcada com um número de pontos de 1 a 6.

Figura 6: Dado no formato de hexágono

Um ringue octogonal, também conhecido como octógono, é uma estrutura geométrica que possui oito lados e oito ângulos. Este formato é popularmente conhecido no mundo dos esportes de combate, especialmente no MMA (Mixed Martial Arts), onde o ringue de competição tem forma octogonal, conforme ilustrado na Figura 7.

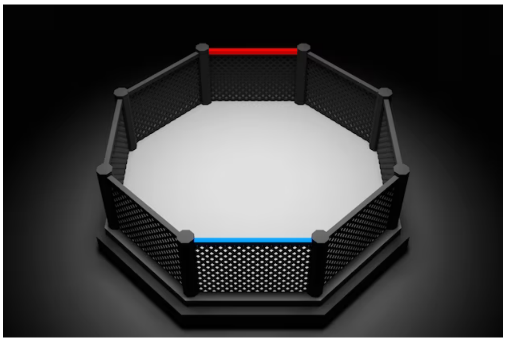

Figura 7: Octógono com forma de um prisma octogonal

Vamos agora estabelecer a fórmula do volume de uma pirâmide de base triangular.

Proposição 3.1. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da sua base pela sua altura.*

A demonstração dessa proposição é ilustrada pela seguinte figura animada:

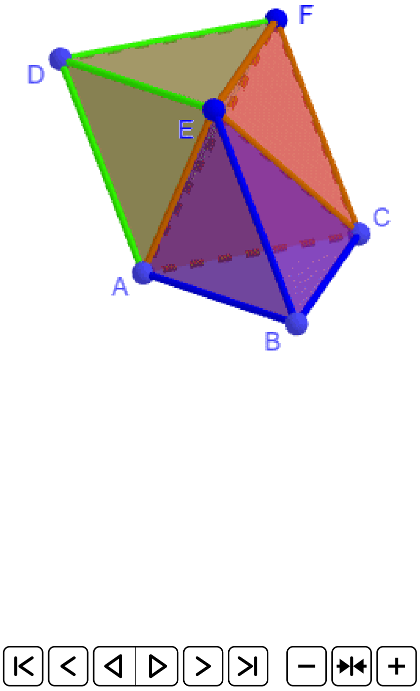

Figura 8: Prisma em três tetraedros de mesmo volume

Uma vez que o prisma $ABC - DEF$ fica dividido em três pirâmides de mesmo volume, concluímos que o volume de qualquer uma dessas pirâmides é a terça parte do volume do prisma. Em particular, o volume da pirâmide $E - ABC$ é um terço do prisma $ABC - DEF$. Mas o volume de $ABC - DEF$ é bh.

Portanto,

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

4 Atividade: Explorando a Fórmula de Euler para Poliedros

Objetivos:

- Compreender e verificar a fórmula de Euler: $V - A + F = 2$, válida para poliedros convexos.
- Identificar a relação entre vértices (V), arestas (A) e faces (F) em diferentes poliedros usando representações esquemáticas.

Material necessário:

- Papel, lápis e calculadora.
- Representações planificadas ou esquemáticas dos poliedros (desenhos apresentados no quadro ou distribuídos como material impresso ou construídas no Geogebra).

Etapas:

1. **Introdução:**
   - Apresente a fórmula de Euler para poliedros:

   $$V - A + F = 2$$

   - Explique o significado de V (vértices), A (arestas) e F (faces), utilizando o cubo como exemplo. Mostre que:

   $$V = 8, \quad A = 12, \quad F = 6 \quad \Rightarrow \quad V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

2. **Exploração prática:**
   (a) Apresente representações esquemáticas de poliedros convexos, utilizando recursos diversos para facilitar a compreensão visual e espacial. Exemplos incluem planificações geométricas, projeções desenhadas no quadro, material impresso, imagens geradas em softwares como GeoGebra e modelos físicos, como sólidos em acrílico ou papelão.

   (b) Peça aos alunos que analisem cada figura para contar o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F).

(c) Oriente-os a preencher uma tabela como a seguinte:

Poliedro	**Vértices (V)**	**Arestas (A)**	**Faces (F)**	**V - A + F**
Tetraedro				
Prisma retangular				
Prisma pentagonal				
Pirâmide quadrangular				
Pirâmide pentagonal				

(d) Após preencherem a tabela, peça que discutam suas observações e verifiquem se a fórmula de Euler é válida em todos os casos analisados.

3. **Discussão e reflexões:**

- Pergunte: A fórmula de Euler pode ser aplicada a qualquer tipo de poliedro? Por quê?
- Discuta que a fórmula é válida apenas para poliedros convexos. Explique que, em poliedros não convexos ou em estruturas mais gerais (como sólidos com buracos), a fórmula pode não se aplicar.

Resultados esperados:

- Tabela preenchida pelos alunos com a verificação da fórmula de Euler.
- Relatos breves sobre o que os alunos concluíram com a atividade.

5 Atividade: Poliedros de Platão

Objetivos:

- **Geral:** Compreender as propriedades dos poliedros de Platão, suas características geométricas e simetrias.
- **Específicos:**
    1) Identificar os poliedros de Platão e suas propriedades.
    2) Explorar as faces, arestas e vértices de cada poliedro de Platão.
    3) Relacionar os poliedros de Platão com sua aplicação no mundo real.

Material Necessário

- Quadro e giz ou projetor.
- Papel, lápis e calculadora.
- Representações dos poliedros de Platão (imagens ou representações planificadas).
- Software de geometria dinâmica (GeoGebra).

Estrutura da Sequência Didática

5.1 Introdução ao Tema

Objetivo: Apresentar o conceito de poliedros regulares e os poliedros de Platão.

Atividades:

- Comece explicando o que são **poliedros** e suas características gerais. Enfatize que poliedros são sólidos tridimensionais com faces planas, arestas e vértices.
- Introduza o conceito de **poliedros regulares**, destacando que são poliedros com todas as faces idênticas (polígonos regulares) e o mesmo número de arestas em todos os vértices.
- Explique que Platão foi o primeiro a descrever os **poliedros de Platão**, que são cinco sólidos regulares conhecidos:

I) Tetraedro (faces triangulares),

II) Cubo ou Hexaedro (faces quadradas),

III) Octaedro (faces triangulares),

IV) Dodecaedro (faces pentagonais),

V) Icosaedro (faces triangulares).

- Mostre imagens ou modelos dos poliedros de Platão e explique brevemente as características de cada um. A seguir, apresentamos planificações animadas dos sólidos platônicos:

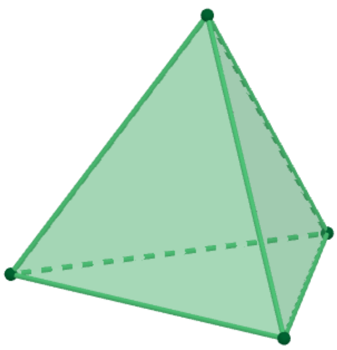

Figura 9: Planificação do Tetraedro

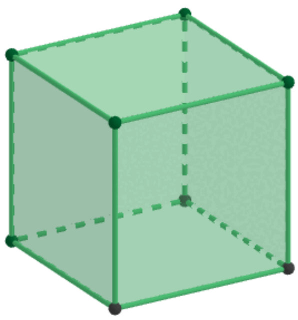

Figura 10: Planificação do Hexaedro

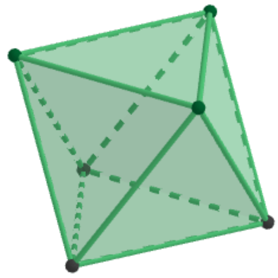

Figura 11: Planificação do Octaedro

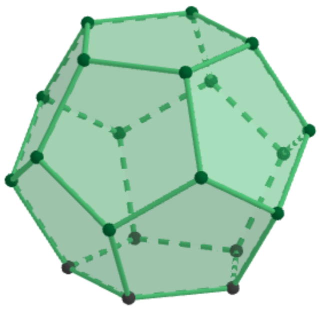

Figura 12: Planificação do Dodecaedro

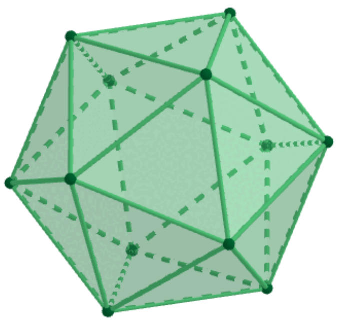

Figura 13: Planificação do Icosaedro

Discussão:

- Pergunte aos alunos: O que torna esses poliedros especiais? Como podemos reconhecê-los?
- Se possível, discuta as aplicações históricas desses poliedros, como em arte, jogos, arquitetura e filosofia.

5.2 Características dos Poliedros de Platão

Objetivos: Explorar as propriedades dos poliedros de Platão, como o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F).

Atividades:

- Divida os alunos em grupos e forneça representações ou imagens dos cinco poliedros de Platão.
- Peça aos alunos que analisem cada poliedro para identificar e contar:
  - ▷ O número de **vértices** (V),
  - ▷ O número de **arestas** (A),
  - ▷ O número de **faces** (F).

Discussão:

- Após a atividade, discuta com os alunos como esses sólidos possuem simetrias e características geométricas especiais.
- Pergunte: Por que, mesmo com diferentes números de faces e vértices, todos esses poliedros possuem a mesma relação entre V, A e F?

5.2.1 Explorando as Propriedades Geométricas

Objetivo: Explorar as simetrias e características geométricas dos poliedros de Platão.

Atividades:

- Utilize software de geometria dinâmica como o **GeoGebra** (ou outra ferramenta) para explorar as representações interativas dos poliedros de Platão. Os alunos podem observar a simetria das faces, o número de arestas que se encontram em cada vértice, e a forma das faces (triangulares, quadradas, pentagonais).

- Peça que os alunos investiguem a simetria de cada poliedro. Eles devem identificar como as faces são distribuídas ao redor dos vértices e como as arestas se conectam.

Discussão:

- Pergunte aos alunos como as simetrias afetam a estética desses poliedros. Como isso se relaciona com a ideia de Platão sobre os sólidos perfeitos?
- Encoraje os alunos a refletirem sobre como os poliedros de Platão se relacionam com a natureza e a arte, fazendo conexões com a história da matemática e da filosofia.

5.2.2 Conclusão e Reflexões Finais

Objetivo: Consolidar o aprendizado sobre os poliedros de Platão e suas propriedades.

Atividades:

- Revise os conceitos principais abordados na aula: poliedros de Platão, suas propriedades geométricas e suas simetrias.
- Peça que os alunos escrevam um pequeno resumo explicando:
  - ▷ O que são os poliedros de Platão e como são classificados.
  - ▷ Como suas simetrias e características geométricas os tornam especiais.
  - ▷ Onde podemos encontrar esses poliedros na arte, arquitetura ou na natureza.

5.3 Avaliação

- A avaliação pode ser feita por meio da observação da participação dos alunos nas atividades práticas, como contagem de vértices, arestas e faces, e pela qualidade das reflexões escritas no final da aula.
- O envolvimento nas discussões também é um bom indicativo do aprendizado.

6 Atividade: Comparando Volumes e Alturas dos Sólidos de Platão

Nesta atividade vamos obter as medidas que os sólidos de Platão devem ter para que resultem em mesmo volume e em sequência, mesma altura. Temos que todos os sólidos de Platão possuem volume e altura dados por expressões do tipo $V = k \cdot a^3$ e $H = l \cdot a$, respectivamente. Aqui, nossa referência de altura é dada colocando o sólido apoiado em uma de suas faces e calculando sua maior projeção vertical. Em resumo, temos os seguintes resultados:

Tabela 1: Volume e altura dos sólidos de Platão com aresta a

Sólido	**Volume**	**Altura**
Tetraedro	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{6}}{3}a$
Cubo	a^3	a
Octaedro	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{\sqrt{6}}{3}a$
Dodecaedro	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$	$\frac{1}{10}\sqrt{250+110\sqrt{5}}\,a$
Icosaedro	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$	$\frac{\sqrt{3}}{6}(3+\sqrt{5})a$

Objetivo:

- Compreender as diferenças geométricas entre os sólidos de Platão ajustados para o mesmo volume ou mesma altura.
- Relacionar as propriedades métricas dos sólidos com suas características geométricas.

Material necessário:

- Computadores com acesso ao GeoGebra ou outro software de geometria dinâmica.
- Calculadoras ou planilhas eletrônicas.
- Impressões das tabelas e figuras dos sólidos com volumes e alturas iguais.

Etapas:

1. **Introdução:**
   - Apresente a relação entre volume e altura nos sólidos de Platão, explicando que os volumes são proporcionais ao cubo do comprimento da aresta e as alturas, ao comprimento da aresta multiplicado por um fator constante.
   - Denotemos por V_t, V_h, V_o, V_d e V_i os volumes do tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, respectivamente. De forma análoga, designemos as alturas desses sólidos pelos mesmos índices.
   - Mostre as tabelas fornecidas no documento, explicando como as arestas foram ajustadas para que os sólidos tivessem volumes ou alturas iguais.

2. **Exploração prática:**

   (a) **Análise dos volumes:**

   - Distribua as medidas ajustadas para volumes iguais ($V_t = V_h = V_o = V_d = V_i = 1$) e peça que os alunos calculem manualmente o volume de um dos sólidos (à escolha), confirmando os resultados fornecidos.
   - Oriente-os a criar os sólidos no GeoGebra, ajustando os comprimentos das arestas conforme a tabela.
   - Incentive uma comparação visual: Como os formatos diferem, mesmo ocupando o mesmo espaço tridimensional?

   (b) **Análise das alturas:**

   - Repita o procedimento para alturas iguais ($H_t = H_h = H_o = H_d = H_i = 1$).
   - Destaque que o tetraedro e o octaedro possuem a mesma altura quando têm a mesma medida de aresta.

3. **Discussão e reflexões:**

   - Pergunte: Por que as medidas das arestas variam entre os sólidos para alcançar o mesmo volume ou altura?
   - Relacione as propriedades geométricas dos sólidos à maneira como o espaço tridimensional é distribuído em cada formato.

Resultados esperados:

- Representações digitais ou desenhadas dos sólidos com volumes e alturas iguais.
- Relatórios breves com cálculos e reflexões dos alunos.

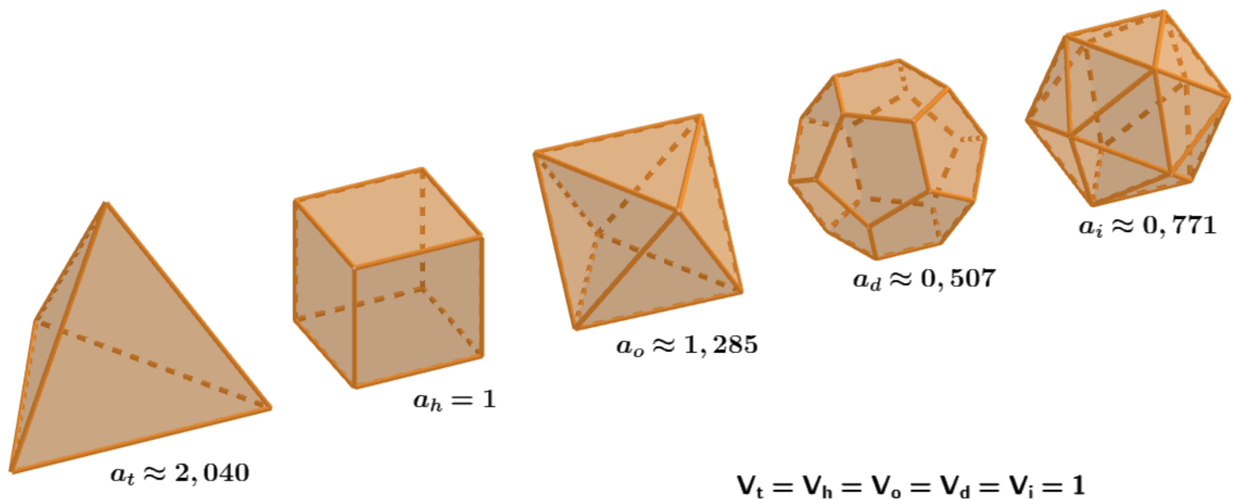

Figura 14: Sólidos de Platão com mesmo volume

Cálculos esperados:

Nesta Figura 14, são apresentados os cinco sólidos de Platão, ajustados para terem volumes iguais. A escala dos comprimentos de aresta de cada sólido foi modificada para garantir que todos os volumes sejam $V_t = V_h = V_o = V_d = V_i = 1$, onde:

- $a_t \approx 2{,}040$ é o comprimento da aresta do tetraedro;
- $a_h = 1$ é o comprimento da aresta do cubo (hexaedro);
- $a_o \approx 1{,}285$ é o comprimento da aresta do octaedro;
- $a_d \approx 0{,}507$ é o comprimento da aresta do dodecaedro;
- $a_i \approx 0{,}771$ é o comprimento da aresta do icosaedro.

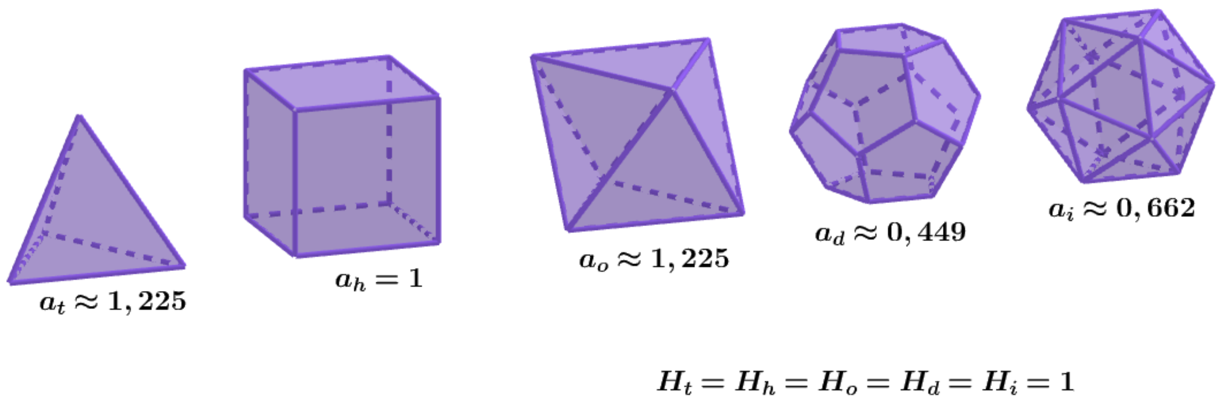

Figura 15: Sólidos de Platão com mesma altura

Para a Figura 15, são apresentados os cinco sólidos de Platão que devem ter a mesma altura, digamos, todas iguais a 1. Daí, as igualdades $H_t = H_h = H_o = H_d = H_i = 1$ implicam que:

- $a_t \approx 1,225$ é o comprimento da aresta do tetraedro;
- $a_h = 1$ é o comprimento da aresta do cubo (hexaedro);
- $a_o \approx 1,225$ é o comprimento da aresta do octaedro;
- $a_d \approx 0,449$ é o comprimento da aresta do dodecaedro;
- $a_i \approx 0,662$ é o comprimento da aresta do icosaedro.

Vale observar que sempre o tetraedro e o octaedro possuem mesma altura no caso em que possuem mesma aresta.

7 Apêndice

Instruções para Inserir Animações em PDFs

A inserção de uma animação em um documento LaTeX é feita a partir de uma sequência de imagens numeradas (por exemplo, frame1.png, frame2.png, etc.). Todas as imagens devem estar no mesmo formato (por exemplo, todas .png ou .jpg).

No preâmbulo do seu documento LaTeX, é necessário incluir o pacote `animate` com o comando `\usepackage{animate}`.

No ponto do documento onde deseja inserir a animação, utilize o comando `\animategraphics`. A sintaxe básica é a seguinte:

```
\animategraphics[<opções>]{<fps>}{<nome do arquivo>}{<número inicial>}{<número final>}
```

As principais opções disponíveis são:

`loop`: Faz a animação repetir continuamente.

`autoplay`: Faz a animação iniciar automaticamente.

`controls`: Adiciona controles de reprodução.

Os parâmetros da sintaxe são:

`fps`: Número de frames por segundo.

`nome do arquivo`: Nome base do arquivo de imagem, sem o número e a extensão.

`número inicial`: Número do primeiro frame.

`número final`: Número do último frame.

Para animações geradas por alguns programas, como o GeoGebra, é possível convertê-las diretamente em formato GIF para figuras planas. No entanto, animações 3D criadas no GeoGebra ainda não possuem uma opção nativa para conversão em GIF. A solução encontrada foi utilizar um programa de gravação de tela que permita salvar diretamente em GIF. No Linux, usamos o programa Peek para esse propósito, que pode ser utilizado para gravar qualquer animação exibida na tela. No Windows, existem aplicativos semelhantes, como o Camtasia, que também oferecem essa funcionalidade.

Tendo a animação em formato GIF, é possível gerar os frames associados utilizando o comando `ffmpeg -i figura.gif figura_%d.png` no terminal do Linux. Um site muito útil, que oferece diversos recursos para manipulação de GIFs, é o *EZGIF*, disponível no endereço https://ezgif.com.

Referências

[1] ALVES, George. S.; SOARES, Adriana. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: IX WORKSHOP EM INFORMÁTICA NA ESCOLA, 9., 2003. São Paulo: USP. 2003. Disponível em: http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/wie/article/download/786/772. Acesso em: 21 nov. 2023.

[2] BARBOSA, Paula. M. O Estudo da Geometria. In: BENJAMIN CONSTANT, 25., 2003. Rio de Janeiro: IBC. 2003. Disponível em: https://revista.ibc.gov.br/index.php/BC/article/view/546/261. Acesso em: 18 jun. 2024.

[3] BRASIL. Ministério da educação e cultura. Base Nacional Curricular Comum: Educação é a Base. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jun. 2024.

[4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. *Fundamentos de matemática elementar: Geometria espacial, volume 10.* 7ª edição, São Paulo: Atual, 2013.

[5] LIMA, Elon L. *A Matemática do Ensino Médio – Volume 2.* 6ª edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.