Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

A GEOMETRIA DO TÁXI COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Mestre Samir Borges Viana

Doutora Ana Paula Tremura Galves

Uberlândia-MG

2024

Introdução

Ao analisarmos os currículos oficiais, a exemplo da Base Nacional Comum Curricular [1, BNCC] e do Currículo de Referência de Minas Gerais [3, CRMG], deparamo-nos com a abordagem da geometria. Embora essa não represente a única forma geométrica existente, tampouco seja sempre a mais aplicável às situações cotidianas, é a geometria euclidiana que predomina no ensino em sala de aula. Os livros didáticos também reforçam essa perspectiva.

Além disso, ao estudarmos a história da Matemática, percebemos a existência de outras geometrias, como a elíptica, a hiperbólica e a do táxi, esta última sendo nosso principal objeto de estudo. A geometria do táxi surge com o objetivo de analisar deslocamentos em uma cidade ideal, similar ao plano cartesiano, ou seja, através de combinações de segmentos horizontais e verticais que simulam as curvas percorridas. Em 1975, [2, Krause] apresentou de forma didática e prática as aplicações dessa geometria no cotidiano dos estudantes iniciantes, em sua obra intitulada "*Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*".

Da mesma forma, buscamos a apresentação de uma sequência didática contendo atividades que estimulem os estudantes da Educação Básica a explorarem a geometria, despertando a curiosidade por possibilidades não euclidianas de fácil compreensão e aplicáveis no dia a dia.

Tal sequência didática faz parte da dissertação de mestrado do autor Samir Borges Viana, sob orientação da Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves, do Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT [4, Samir].

Planejamento da sequência didática: contexto, pré-requisitos e metodologias

A sequência didática proposta neste trabalho tem como objetivo geral proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma experiência prática e interativa no estudo da geometria, utilizando como contexto o sistema de coordenadas cartesianas e o conceito de distância em forma de "táxi". Dessa forma, oportunizaremos a exploração dos conceitos de geometria do táxi e das cônicas de forma integrada. Além disso, o projeto visa envolver os estudantes em atividades que estimulem o raciocínio lógico e a compreensão dos conceitos geométricos por meio da resolução de problemas aplicados em situações reais ou contextualizadas.

Esta sequência didática está dividida em três atividades contextualizadas e lúdicas. Para isso, foram criados personagens fictícios em um ambiente de uma cidade ideal, com situações cotidianas que permitem a abordagem de conteúdos matemáticos de forma ordenada, estruturada e articulada. Tais atividades serão apresentadas e detalhadas, com sugestões e comentários, visando à apreciação dos professores interessados em aplicá-las. O roteiro das atividades para impressão estará disponível na seção final deste material. Vale lembrar que o público-alvo são estudantes da Educação Básica, mais especificamente do terceiro ano do Ensino Médio.

Para o desenvolvimento dessas atividades, ressalta-se a importância do professor avaliar previamente se os estudantes possuem os pré-requisitos necessários, tais como:

- localizar um ponto no plano cartesiano;
- calcular a distância euclidiana entre dois pontos;
- identificar um ponto médio de um segmento;
- calcular o valor absoluto;
- calcular o fatorial;
- calcular a permutação com repetição;
- resolver uma equação modular;
- calcular áreas de triângulo e círculo;
- identificar uma função linear de primeiro grau;
- resolver uma equação do primeiro grau;
- reconhecer cada uma das cônicas como um lugar geométrico;
- identificar e distinguir as equações e os gráficos das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola).

Além de estudarmos os conteúdos listados como pré-requisitos, também exploraremos alguns deles, como a distância entre dois pontos, ponto médio, equações e gráficos da circunferência, elipse, hipérbole e parábola, mas na distância do táxi.

Além dos estudantes terem os pré-requisitos, o professor deverá ter recursos didáticos disponíveis, como:

- quadro branco ou lousa para exposição dos conceitos teóricos;

- papel e lápis para os alunos realizarem cálculos, desenhos e representações gráficas;
- materiais manipuláveis, como régua, compasso e papel milimetrado ou Geoplano, para auxiliar os alunos nas atividades práticas;
- computadores ou dispositivos móveis com acesso à internet para pesquisas complementares;
- material de apoio impresso ou digital contendo informações sobre a geometria do táxi e das cônicas;
- recursos visuais, como projeção de slides ou vídeos explicativos, para auxiliar na apresentação dos conceitos;
- softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, para facilitar a visualização e exploração dos conceitos.

Quanto às metodologias a serem utilizadas, caberá ao professor, de acordo com sua prática e realidade, escolher uma ou mais para aplicação da sequência didática. Abaixo, listamos algumas sugestões.

- Iniciar as atividades apresentando uma introdução teórica com uma breve explicação sobre o conceito de geometria do táxi.
- Apresentar exemplos práticos por meio de situações-problema reais e/ou contextualizadas em que a geometria do táxi é aplicada, como a determinação da distância percorrida por um táxi.
- Dividir os estudantes em grupos e propor desafios práticos a serem resolvidos utilizando a geometria do táxi.
- Promover discussões em grupo sobre as soluções encontradas pelos alunos, estimulando-os a realizar análises críticas com justificativas para suas respostas e também comparar as diferentes abordagens para a resolução de problemas.
- Propor uma atividade prática em que os estudantes possam aplicar a geometria do táxi em um contexto real.

Nas seções a seguir, serão apresentadas as atividades, cujos enunciados estão destacados em quadros e, em seguida, com os devidos comentários, sugestões e/ou orientações didáticas para auxiliar o professor na aplicação.

Primeira atividade

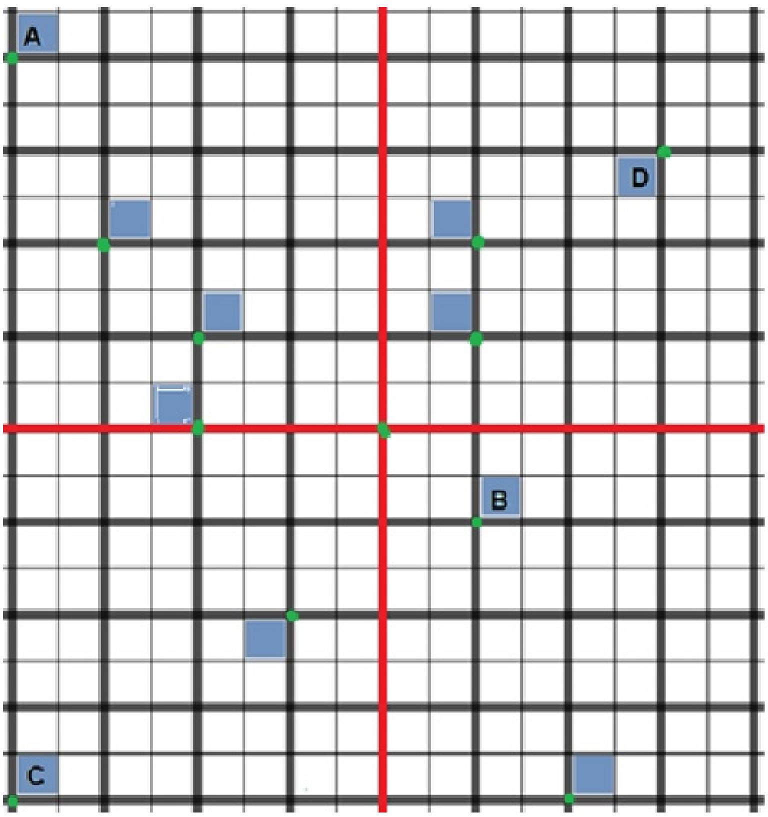
Para o desenvolvimento da primeira atividade da sequência didática, utilizaremos o Geoplano, que possibilita a construção, movimentação e desfazer formas geométricas. Ele é formado por uma placa de madeira ou material similar (como o MDF, que é mais leve) em que pregos são alinhados formando uma malha quadriculada. Nessa malha, colocaremos elásticos ou barbantes coloridos para destacar as distâncias citadas na atividade. Além disso, existe a possibilidade de utilizar a versão do Geoplano *online* no *site* https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/.

Além disso, pensando nos estudantes com deficiência visual, o Geoplano deve ser adaptado, colocando a malha quadriculada com alto relevo, possibilitando o toque, a participação e o desenvolvimento da atividade pelo estudante.

Enunciados, comentários e orientações didáticas da primeira atividade

Esta atividade apresentará aos estudantes o conceito de distância do táxi e sua finalidade por meio de uma situação-problema contextualizada. Nessa situação, os personagens se deslocarão em uma cidade ideal, na qual todos os quarteirões são quadrados de mesma área, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Cidade ideal.

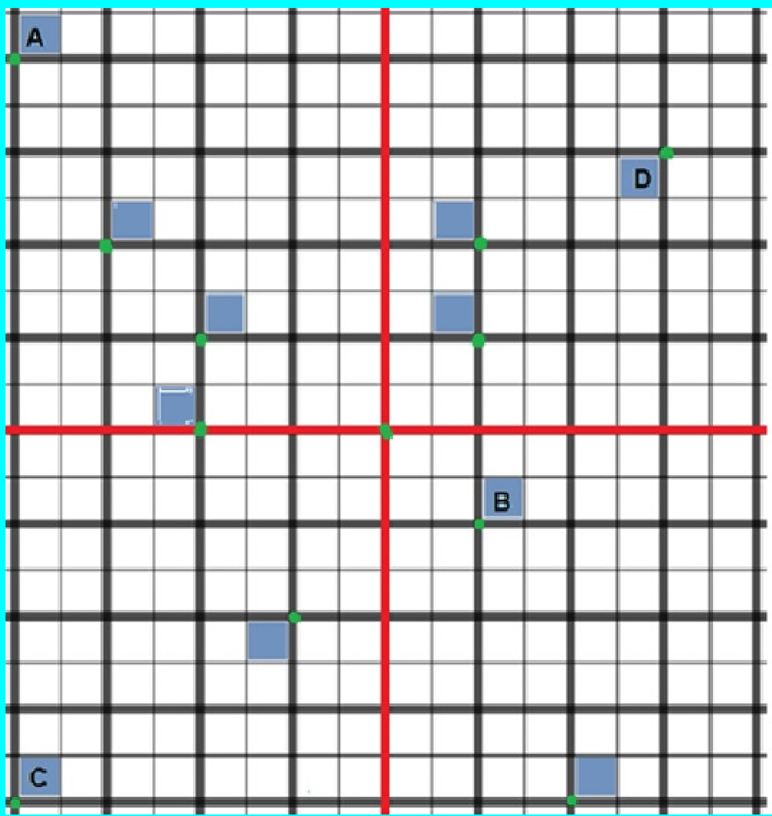


Fonte: Elaborado pelo autor.

No primeiro momento, o professor apresentará o roteiro da atividade impressa aos estudantes, orientando-os de que a Figura 1 representa o mapa de uma cidade ideal. Será explicado que os quarteirões são quadrados com mesma área, e que as ruas e avenidas são perpendiculares entre si. Além disso, duas ruas destacadas em vermelho que se cruzam perpendicularmente serão consideradas como os eixos de um plano cartesiano. Isso possibilitará a localização de moradias e estabelecimentos a partir do ponto de interseção dessas ruas, que servirá como ponto de referência ou origem.

Na Figura 2 está o mapa de uma cidade ideal, na qual os quarteirões são quadrados de mesma área. Nesse mapa, é possível visualizar duas ruas principais destacadas em vermelho, que se cruzam perpendicularmente, formando um plano cartesiano e facilitando a localização de moradias e estabelecimentos.

Figura 2: Cidade ideal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste mapa, estão destacadas as localizações das moradias de quatro amigos: Ana, Bruno, Carlos e Daniela, representados, respectivamente, pelos pontos A, B, C e D. Além disso, estão marcadas as localizações de alguns estabelecimentos da cidade, como supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.

Em seguida, com a leitura da introdução do enunciado da atividade, espera-se que os estudantes entendam o contexto dos pontos demarcados no mapa. Ou seja, os pontos representam as localizações das residências dos quatro amigos citados (Ana, Bruno, Carlos e Daniela) e também alguns estabelecimentos da cidade, como supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.

A partir desse contexto apresentado na atividade, serão propostas questões que explorarão conteúdos matemáticos e desenvolverão habilidades nos estudantes, os quais detalharemos em cada item.

(a) Quais as coordenadas cartesianas das residências de Ana, Bruno, Carlos e Daniela?

Nesta questão, os estudantes devem determinar as coordenadas cartesianas das residências de Ana, Bruno, Carlos e Daniela no mapa da cidade ideal. Essa tarefa permitirá que eles pratiquem e apliquem os conceitos de localização no plano cartesiano, associando cada pessoa (representada por um ponto no mapa) a um par ordenado que indica sua posição em relação aos eixos x e y. O objetivo é que os estudantes compreendam como as coordenadas cartesianas podem ser usadas para identificar e representar as posições de diferentes pontos no espaço.

(b) Marque na Figura 2 os pontos $E = (-3,2)$, $F = (2,-4)$, $G = (1,2)$, $H = (1,1)$, $I = = (-2,1)$, $J = (-1,-2)$, $L = (-2,0)$ que representam, respectivamente, a localização do supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.

Neste item, serão localizados os pontos no plano cartesiano a partir das coordenadas indicadas no enunciado.

(c) Qual a distância do menor caminho entre as residências de:

c.1) Ana e Bruno?

c.2) Ana e Carlos?

c.3) Ana e Daniela?

c.4) Bruno e Carlos?

c.5) Bruno e Daniela?

c.6) Carlos e Daniela?

Neste item, será calculada a menor distância entre duas residências indicadas no enunciado. Ao final deste item, o professor deverá questionar os estudantes sobre como foram realizados os cálculos dessas distâncias, visando formalizar o conceito de distância do táxi (d_T) e chegar no modelo:

$$d_T(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$

(d) Qual a distância em linha reta entre as casas de:

d.1) Ana e Bruno?

d.2) Ana e Carlos?

d.3) Ana e Daniela?

d.4) Bruno e Carlos?

d.5) Bruno e Daniela?

d.6) Carlos e Daniela?

(Sugestão: utilizar o Teorema de Pitágoras.)

Neste item, será calculada a distância em linha reta entre duas residências indicadas no enunciado. Provavelmente, os estudantes calcularão a distância usando o Teorema de Pitágoras. Ao término desse item, o professor questionará qual o método utilizado pelos alunos e, em seguida, formalizará o conceito de distância euclidiana (d_E) entre dois pontos, apresentando o modelo:

$$d_E(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

(e) Qual é a relação entre as distâncias dos menores caminhos e as distâncias em linha reta?

Neste item, o professor irá estimular os alunos a comparar e estabelecer relações entre a distância do táxi e a distância euclidiana, a partir de observações dos resultados obtidos nos itens (c) e (d) (sugestão: montar uma tabela). Em seguida, os estudantes, com a mediação do professor, formalizarão o conceito de que a distância euclidiana é menor ou igual à distância do táxi, isto é, $d_E(A,B) \leq d_T(A,B)$.

Como sugestão, é interessante que o professor demonstre algebricamente essa desigualdade (a demonstração está na chave de correção).

(f) Certo dia, os quatro amigos saíram de suas respectivas casas e foram para a escola, onde passaram toda a manhã. Decidiram almoçar juntos, assistir a um filme no cinema do shopping e, por volta das 16:00 horas, dirigiram-se ao clube para aproveitar a tarde ensolarada. Mais tarde, cada um deles voltou para sua própria casa.

f.1) Qual é a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

f.2) Se fosse em linha reta, qual seria a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

Neste item, é apresentada uma nova situação-problema na qual os estudantes devem calcular o perímetro percorrido pelos personagens, utilizando tanto a distância do táxi quanto a distância euclidiana. Espera-se que os alunos percebam que para cada personagem existem dois percursos distintos dos demais: da casa à escola e do clube de volta para casa. Os demais percursos são compartilhados, uma vez que os estudantes viajam juntos. Caso não haja esta percepção, o professor orientará os estudantes a representar no plano cartesiano a situação propostas no enunciado. Naturalmente, depois de realizados os cálculos, será necessário conduzir uma discussão sobre os resultados, com o intuito de formalizar o conceito de perímetro e estabelecer comparações entre as distâncias percorridas.

(g) Um dos percursos mais curtos entre Bruno e Daniela possui dois estabelecimentos destacados no mapa. Qual estabelecimento desses está precisamente localizado na metade do caminho?

(h) Sabemos que existem outros caminhos mais curtos entre Bruno e Daniela, implicando na existência de outros pontos médios. Quantos pontos médios existem e quais são as coordenadas correspondentes a esses pontos?

(i) Em um dos percursos mais curtos entre Bruno e Ana, existem alguns estabelecimentos. Qual deles está precisamente localizado na metade do caminho mais curto?

(j) Sabemos que há outros caminhos mais curtos entre Bruno e Ana. Portanto, também existem outros pontos médios. Quantos são e quais são as coordenadas desses pontos médios?

Nestes itens, os estudantes deverão encontrar os pontos médios que existem entre dois pontos. Para isso, eles devem reconhecer que há vários caminhos que representam o percurso mais curto entre esses pontos, o que chamamos de distância do táxi.

(k) Considerando o caminho mais curto, quantos percursos distintos são possíveis para:

k.1) Ana ir à escola?

k.2) Bruno ir ao supermercado?

k.3) Carlos ir à farmácia?

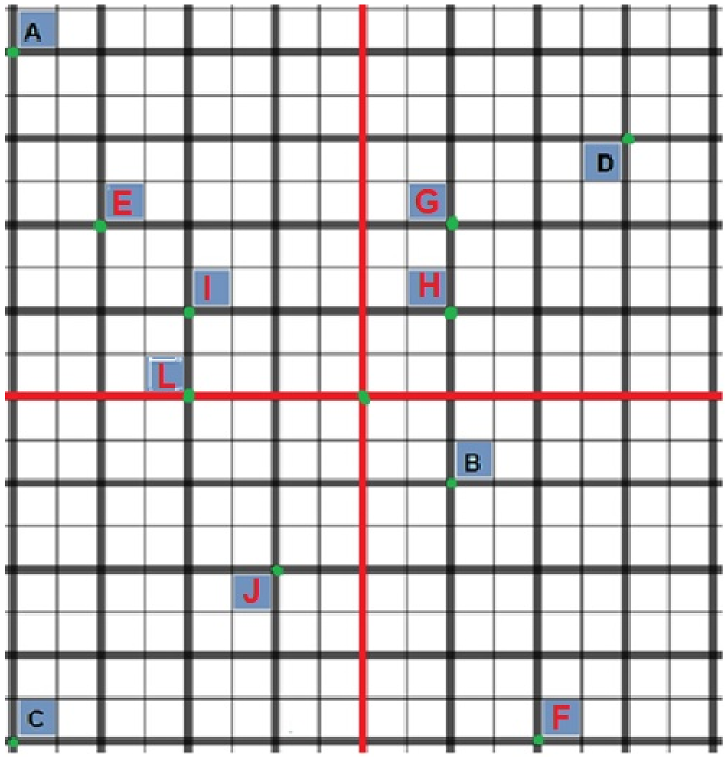
k.4) Daniela ir ao shopping?

Neste item, os alunos calcularão o número de diferentes possibilidades de percursos, levando em consideração a distância do táxi, que já foi conceituada nos itens anteriores. Inicialmente, os alunos realizarão cálculos por contagem, e o professor mediará, apresentando outra abordagem de cálculo, como a permutação com repetição. No terceiro cenário, "Carlos ir à farmácia", é observado um percurso em linha reta. Nesse momento, o professor tem a oportunidade de questionar os alunos sobre o motivo pelo qual existe apenas um único caminho mais curto possível. Espera-se que os estudantes reflitam e concluam que, nesse caso, isso ocorre devido à igualdade entre as distâncias euclidiana e do táxi.

Chave de correção da primeira atividade

(a) $A = (-4,4)$, $B = (1,-1)$, $C = (-4,-4)$ e $D = (3,3)$.

(b) Resposta na figura abaixo.



(c) Considerando as coordenadas: $A = (-4,4)$, $B = (1,-1)$, $C = (-4,-4)$ e $D = (3,3)$, temos:

c.1) $d_{AB} = |-4-(+1)| + |4-(-1)| = |-5| + |+5| = 5+5 = 10$

c.2) $d_{AC} = |-4-(-4)| + |4-(-4)| = |0| + |+8| = 0+8 = 8$

c.3) $d_{AD} = |-4-(+3)| + |4-(+3)| = |-7| + |+1| = 7+1 = 8$

c.4) $d_{BC} = |+1-(-4)| + |-1-(-4)| = |+5| + |+3| = 5+3 = 8$

c.5) $d_{BD} = |+1-(+3)| + |-1-(+3)| = |-2| + |-4| = 2+4 = 6$

c.6) $d_{CD} = |-4-(+3)| + |-4-(+3)| = |-7| + |-7| = 7+7 = 14$

(d) Considerando as coordenadas: $A = (-4,4)$, $B = (1,-1)$, $C = (-4,-4)$ e $D = (3,3)$, temos:

d.1) $d_{AB} = \sqrt{[-4-(+1)]^2 + [4-(-1)]^2} = \sqrt{[-5]^2 + [+5]^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{2 \cdot 25} =$
$= 5\sqrt{2} \approx 7,1$

d.2) $d_{AC} = \sqrt{[-4-(-4)]^2 + [4-(-4)]^2} = \sqrt{[0]^2 + [+8]^2} = \sqrt{0+64} = \sqrt{64} = 8$

d.3) $d_{AD} = \sqrt{[-4-(+3)]^2 + [4-(+3)]^2} = sqrt[-7]^2 + [+1]^2 = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} =$
$= \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2} \approx 7,1$

d.4) $d_{BC} = \sqrt{[+1-(-4)]^2+[-1-(-4)]^2} = \sqrt{[+5]^2+[+3]^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5,8$

d.5) $d_{BD} = \sqrt{[+1-(+3)]^2+[-1-(+3)]^2} = \sqrt{[-2]^2+[-4]^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} =$
$= \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5} \approx 4,5$

d.6) $d_{CD} = \sqrt{[-4-(+3)]^2+[-4-(+3)]^2} = \sqrt{[-7]^2+[-7]^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{2\cdot 49} =$
$= 7\sqrt{2} \approx 9,9$

(e) As distâncias dos menores caminhos são denominadas distância do táxi e as distâncias dos menores caminhos em linha reta são denominadas distância euclidiana.

A tabela abaixo apresenta as distâncias entre os quatro amigos calculadas nos itens (c) e (d), sendo a primeira coluna considera a distância do táxi e a segunda a distância euclidiana.

Distância do táxi	**Distância euclidiana**
$d_{AB} = 10$	$d_{AB} \approx 7,1$
$d_{AC} = 8$	$d_{AC} = 8$
$d_{AD} = 8$	$d_{AD} \approx 7,1$
$d_{BC} = 8$	$d_{BC} \approx 5,8$
$d_{BD} = 6$	$d_{BD} \approx 4,5$
$d_{CD} = 14$	$d_{CD} \approx 9,9$

Comparando as distâncias apresentadas na tabela percebemos que a distância do táxi é sempre maior ou igual a distância euclidiana. Isso pode ser comprovado de maneira geral.

Demonstração. Consideremos os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e a desigualdade

$$2|x_B - x_A|.|y_B - y_A| \geq 0.$$

Somando $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ aos dois membros desta desigualdade obtemos

$$2|x_B - x_A|.|y_B - y_A| + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Reorganizando a desigualdade no primeiro membro e usando a propriedade comutativa da adição, ficamos com

$$(x_B - x_A)^2 + 2|x_B - x_A||y_B - y_A| + (y_B - y_A)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Observando o primeiro membro da desigualdade anterior, notemos que se trata de um produto notável. Reescrevendo obtemos

$$(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Como os dois membros desta desigualdade são maiores do que ou iguais a zero, extraindo a raiz quadrada dos dois membros a desigualdade continua válida, ou seja,

$$\sqrt{(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2} \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Dessa forma, temos

$$|x_B - x_A| + |y_B - y_A| \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Por outro lado, sabemos que $d_T(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$ e $d_E(A,B) = $
$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Portanto,

$$d_T(A,B) \geq d_E(A,B).$$

(f) Calcularemos a distância do táxi em f.1) para determinar o percurso de cada um dos amigos e em f.2) a distância euclidiana imaginando o percurso em linha reta.

f.1) Considerando as coordenadas: $A = (-4,4)$; $B = (1,-1)$; $C = (-4,-4)$; $D = (3,3)$; $I = (-2,1)$; $L = (-2,0)$ e $G = (1,2)$, temos:

- Distância percorrida em grupo: $d_{IL} + d_{LG} = 1 + 5 = 6$

  $d_{IL} = |-2-(-2)| + |1-0| = |0| + |+1| = 0 + 1 = 1$

  $d_{LG} = |-2-(+1)| + |0-(+2)| = |-3| + |-2| = 3 + 2 = 5$

- Distância percorrida por Ana: $d_{AI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GA} = 5 + 6 + 7 = 18$

  $d_{AI} = |-4-(-2)| + |+4-(+1)| = |-2| + |+3| = 2 + 3 = 5$

  $d_{GA} = |+1-(-4)| + |+2-(+4)| = |+5| + |-2| = 5 + 2 = 7$

- Distância percorrida por Bruno: $d_{BI} + (d_{IL} + d_{LG}) + d_{GB} = 5 + 6 + 5 = 16$

  $d_{BI} = |+1-(-2)| + |-1-(+1)| = |+3| + |-2| = 3 + 2 = 5$

  $d_{GB} = |+1-(-1)| + |+2-(-1)| = |+2| + |+3| = 2 + 3 = 5$

- Distância percorrida por Carlos: $d_{CI}+(d_{IL}+d_{LG})+d_{GC}=7+6+11=24$

  $d_{CI}=|-4-(-2)|+|-4-(+1)|=|-2|+|-5|=2+5=7$

  $d_{GC}=|+1-(-4)|+|+2-(-4)|=|+5|+|+6|=5+6=11$

- Distância percorrida por Daniela: $d_{DI}+(d_{IL}+d_{LG})+d_{GD}=7+6+3=16$

  $d_{DI}=|+3-(-2)|+|+3-(+1)|=|+5|+|+2|=5+2=7$

  $d_{GD}=|+1-(+3)|+|+2-(+3)|=|-2|+|-1|=2+1=3$

f.2) Considerando as coordenadas: $A=(-4,4)$; $B=(1,-1)$; $C=(-4,-4)$; $D=(3,3)$; $I=(-2,1)$; $L=(-2,0)$ e $G=(1,2)$, temos:

- Distância percorrida em grupo: $d_{IL}+d_{LG}\approx 1+3,6\approx 4,6$

  $d_{IL}=\sqrt{[-2-(-2)]^2+[1-0]^2}=\sqrt{[0]^2+[1]^2}=\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1$

  $d_{LG}=\sqrt{[-2-(+1)]^2+[0-(+2)]^2}=\sqrt{[-3]^2+[-2]^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\approx 3,6$

- Distância percorrida por Ana: $d_{AI}+(d_{IL}+d_{LG})+d_{GA}\approx 3,6+4,6+5,4\approx 13,6$

  $d_{AI}=\sqrt{[-4-(-2)]^2+[+4-(+1)]^2}=\sqrt{[-2]^2+[-3]^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3,6$

  $d_{GA}=\sqrt{[+1-(-4)]^2+[+2-(+4)]^2}=\sqrt{[+5]^2+[-2]^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}\approx 5,4$

- Distância percorrida por Bruno: $d_{BI}+(d_{IL}+d_{LG})+d_{GB}\approx 3,6+4,6+3,6\approx 11,8$

  $d_{BI}=\sqrt{[+1-(-2)]^2+[-1-(+1)]^2}=\sqrt{[+3]^2+[-2]^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\approx 3,6$

  $d_{GB}=\sqrt{[+1-(-1)]^2+[+2-(-1)]^2}=\sqrt{[+2]^2+[+3]^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3,6$

- Distância percorrida por Carlos: $d_{CI}+(d_{IL}+d_{LG})+d_{GC}\approx 5,4+4,6+7,8\approx 17,8$

  $d_{CI}=\sqrt{[-4-(-2)]^2+[-4-(+1)]^2}=\sqrt{[-2]^2+[-5]^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}\approx 5,4$

  $d_{GC}=\sqrt{[+1-(-4)]^2+[+2-(-4)]^2}=\sqrt{[+5]^2+[+6]^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}\approx 7,8$

- Distância percorrida por Daniela: $d_{DI}+(d_{IL}+d_{LG})+d_{GD}\approx 5,4+4,6+2,2\approx 12,2$

  $d_{DI}=\sqrt{[+3-(-2)]^2+[+3-(+1)]^2}=\sqrt{[+5]^2+[+2]^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}\approx 5,4$

  $d_{GD}=\sqrt{[+1-(+3)]^2+[+2-(+3)]^2}=\sqrt{[-2]^2+[-1]^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\approx 2,2$

(g) Como a distância do táxi entre Bruno e Daniela é $d_{BD}=6$, então o estabelecimento destacado no mapa que está a três unidades de Bruno e de Daniela, logo o estabelecimento é o clube, representado pelo ponto G.

  $d_{BD}=|+1-(+3)|+|-1-(+3)|=|-2|+|-4|=2+4=6$

(h) Considerando a distância do táxi existem três pontos médios entre Bruno e Daniela com as seguintes coordenadas: $(1,2)$; $(2,1)$ e $(3,0)$.

(i) Como a distância do táxi entre Bruno e Ana é $d_{BA} = 10$, então o estabelecimento destacado no mapa que está a cinco unidades de Bruno e de Ana, logo o estabelecimento é a escola, representado pelo ponto I.

$d_{BA} = |+1-(-4)| + |-1-(+4)| = |+5| + |-5| = 5+5 = 10$

(j) Considerando a distância do táxi existem seis pontos médios entre Bruno e Ana com as seguintes coordenadas: $(-4,-1)$; $(-3,0)$; $(-2,1)$; $(-1,2)$; $(0,3)$; e $(1,4)$.

(k) Considerando a distância do táxi:

k.1) Existem 10 percursos distintos para Ana ir à escola.

$$P_5^{2H,3V} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

k.2) Existem 35 percursos distintos para Bruno ir ao supermercado.

$$P_7^{4H,3V} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

k.3) Existe um único caminho para Carlos ir à farmácia.

$$P_6^{6H,0V} = \frac{6!}{6!0!} = 1$$

k.4) Existem 56 percursos distintos para Bruno ir ao shopping.

$$P_8^{5H,3V} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

Segunda atividade

Considerando a realidade atual e as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, percebemos que os avanços tecnológicos impactam de maneiras distintas, seja pelas exigências do mercado de trabalho, seja pela influência das redes sociais, entre outros aspectos. Nessa perspectiva, utilizaremos recursos tecnológicos no desenvolvimento da segunda e terceira atividades da sequência didática. Vale destacar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) incentiva o uso de recursos tecnológicos nas práticas docentes, como aplicativos, calculadoras e softwares.

Assim, na segunda e terceira atividades, utilizaremos o software GeoGebra, uma ferramenta tecnológica que vem sendo cada vez mais adotada por professores em suas práticas pedagógicas.

Embora muitas escolas e estudantes enfrentem limitações no acesso a recursos tecnológicos, como computadores, o GeoGebra tem se tornado popular devido à sua acessibilidade e à crescente interação entre pessoas e tecnologia na educação.

Portanto, as atividades serão desenvolvidas com o uso do GeoGebra, proporcionando aos estudantes a oportunidade de interagir com um ambiente virtual que permite visualizar e comparar as diferenças entre a geometria euclidiana e a geometria do táxi. Além disso, os estudantes poderão observar os gráficos e as equações de cada uma das cônicas apresentadas nas atividades.

Enunciados, comentários e orientações didáticas da segunda atividade

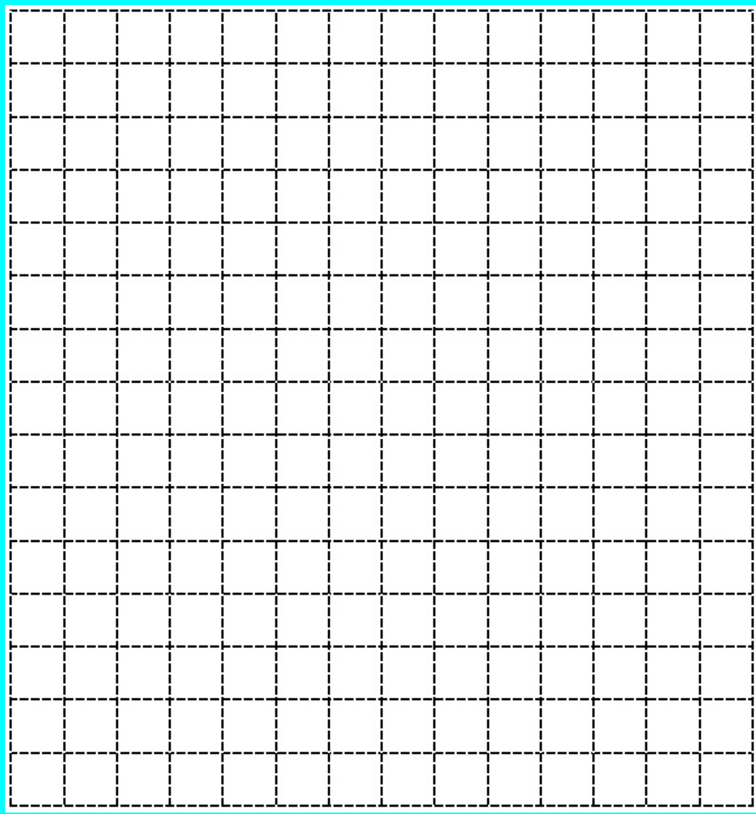
Nesta atividade, o professor apresentará uma situação-problema que envolve o conceito de lugar geométrico, especificamente a circunferência. Será utilizado um cenário de uma pizzaria que atende os clientes tanto presencialmente quanto por meio do serviço de entrega em toda a cidade (*delivery*). Nesse contexto, é estabelecida uma distância de até quatro quadras a partir da pizzaria em que não será aplicada taxa de entrega. No entanto, ao ultrapassar essa distância, será cobrada uma taxa composta por cinco reais acrescidos de cinquenta centavos por cada quadra excedente. É importante destacar que o número de quadras considerado para o cálculo da taxa de entrega será o menor valor possível, correspondendo à distância do táxi.

> A pizzaria La Bella, para além do atendimento presencial, também oferece serviço de entrega em toda a cidade (*delivery*). A taxa de entrega é calculada conforme a seguinte condição: até quatro quadras, não há cobrança de taxa; contudo, ao ultrapassar essa distância, uma taxa de cinco reais, somada a cinquenta centavos por quadra excedente, será aplicada. É importante ressaltar que o número de quadras considerado para o cálculo da taxa de entrega corresponde à menor distância possível (ou seja, a distância do táxi).
>
> (a) Represente na malha quadriculada (Figura 3)
>
> a.1) a pizzaria com um ponto P de sua escolha;
>
> a.2) o limite máximo da região em que não será cobrada a taxa de entrega, correspondendo à distância do táxi;
>
> a.3) o limite máximo da região se fosse considerada a distância euclidiana (usar um compasso).

No item (a), o estudante começará por representar um ponto P, sob orientação do professor para garantir que esse ponto esteja próximo ao centro da malha quadriculada, indicando a localização da pizzaria. A seguir, o estudante marcará outros pontos nessa mesma malha que representem o limite máximo da região onde a taxa de entrega não será cobrada, considerando sempre uma distância de quatro unidades (quadras) de P até esse limite. Em outras palavras, o estudante irá marcar pontos que representem os extremos de um círculo com raio quatro unidades, com centro em P, refletindo a distância do táxi.

Finalmente, utilizando um compasso com ponta seca em P e ajustando a abertura para medir exatamente quatro quadras, o estudante desenhará uma circunferência na mesma malha, levando em conta a distância euclidiana entre P e os pontos nessa circunferência.

Figura 3: Malha quadriculada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

(b) Comparando as figuras do item (a), descreva as semelhanças, se houver, e as diferenças.

Neste item, o professor promoverá a análise das figuras elaboradas pelos alunos no item (a), com o intuito de estimular a percepção de semelhanças e diferenças. É esperado que os estudantes identifiquem aspectos em comum e divergentes entre as representações. No desfecho, o professor formalizará a concepção da circunferência como um lugar geométrico. Ele demonstrará que ambas as figuras consistem em circunferências com o mesmo centro e raio, embora fundamentadas em conceitos distintos – a distância euclidiana e a distância do táxi.

(c) Quais equações representam o limite máximo da área isenta de taxa de entrega, considerando a distância do táxi, e o limite máximo da área se fosse utilizada a distância euclidiana (com o uso de um compasso)?

Neste item, procederemos com a continuação do item (b), porém, agora adotando uma abordagem algébrica. O professor instruirá os alunos sobre as equações que descrevem as circunferências nas perspectivas da distância euclidiana e da distância do táxi.

(d) Qual é a medida da área que estará isenta de taxa de entrega?

(e) Qual é a medida da área se a distância euclidiana fosse considerada?

(f) Em quantos porcento a área calculada com base na distância euclidiana é superior à área calculada com base na distância do táxi?

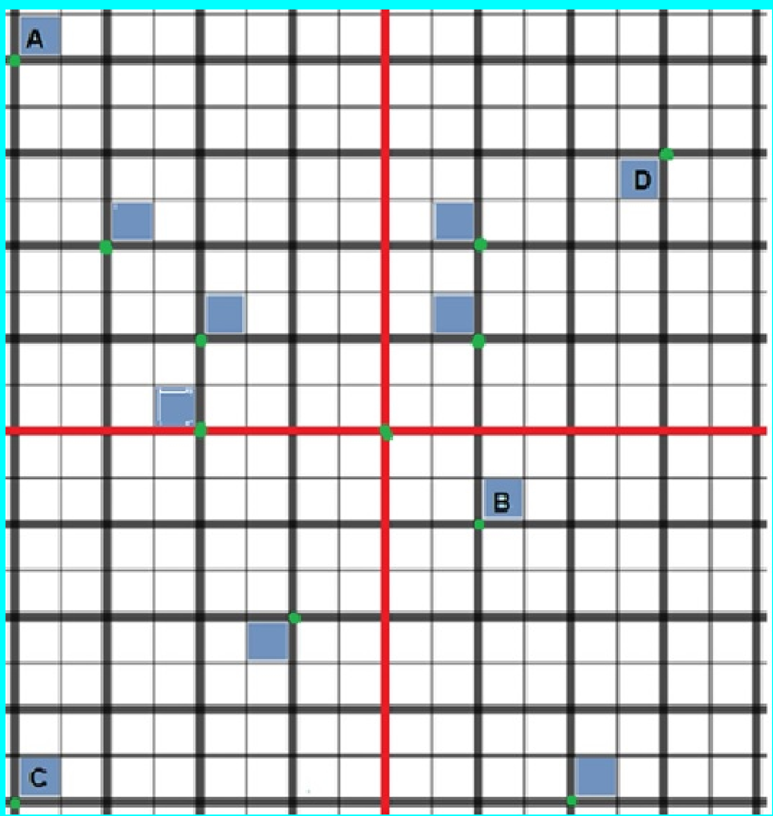
Nos itens (d) e (e), os estudantes irão calcular as áreas das circunferências correspondentes. Já no item (f), eles realizarão uma comparação, expressa em porcentagem, para determinar o aumento da área da circunferência na distância euclidiana em relação à área da circunferência na distância do táxi.

(g) Com base na informação de que a pizzaria La Bella está situada no ponto $P = (0, 0)$ da cidade ideal mostrada na Figura 4 da **Primeira atividade**, forneça as respostas às seguintes questões:

g.1) Qual dos quatro amigos não terá que pagar taxa de entrega?

g.2) Qual será o valor da taxa de entrega para cada um dos quatro amigos?

Figura 4: Cidade ideal.

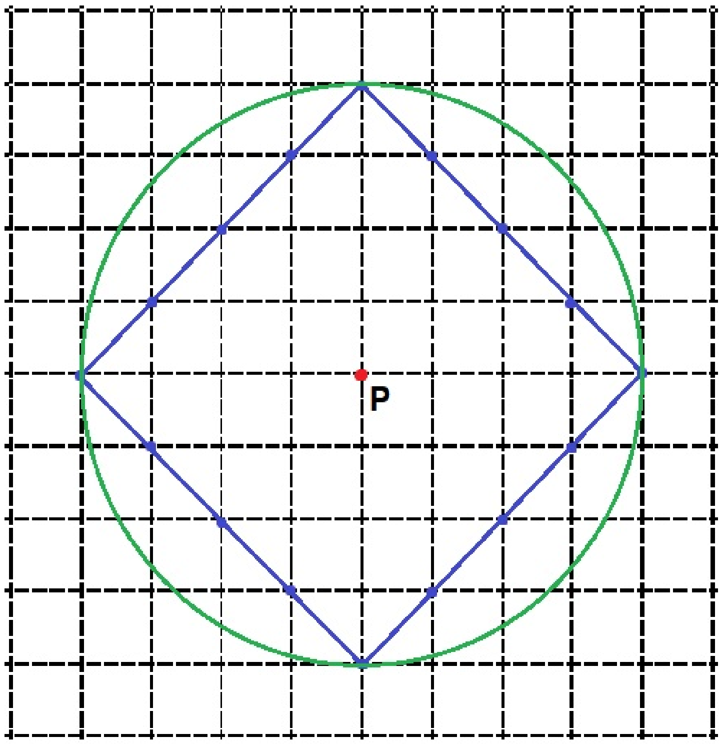


Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste item, a abordagem será voltada ao contexto da primeira atividade. O estudante deverá assinalar na figura a posição da pizzaria e, posteriormente, fornecer respostas para duas perguntas relevantes à situação-problema.

Chave de correção da segunda atividade

(a) Segue a resposta dos itens a.1), a.2) e a.3) na malha quadriculada abaixo.



(b) O centro (local da pizzaria) e o raio para entregas gratuitas são os mesmos, considerando a distância do táxi e a distância euclidiana, porém a área de cobertura para entregas gratuitas é maior quando considera a distância euclidiana, mas que inviável sua utilização para o cálculo de distâncias percorrida por entregadores haja visto que eles não movimentam em uma cidade em linha reta.

(c) Para a distância do táxi a equação que representa o limite máximo é dada por: $|x - x_C| + +|y - y_C| = 4$, em que (x_C, y_C) é o centro e 4 é o raio.

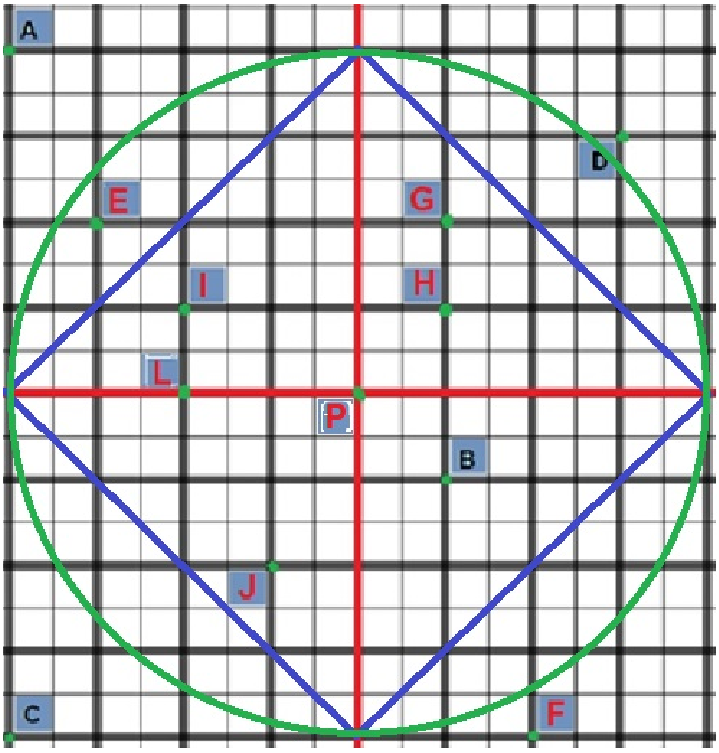
Para a distância euclidiana a equação que representa o limite máximo da região é dada por: $\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = 4$, em que (x_C, y_C) é o centro e 4 é o raio.

(d) $A = 4 \cdot A_T = 4 \cdot \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 32$

(e) $A = \pi \cdot r^2 \approx 3,14 \cdot 4^2 \approx 3,14 \cdot 16 \approx 50,24$

(f) $\dfrac{50,24 - 32}{32} \cdot 100 = \dfrac{18,24}{32} \cdot 100 = 0,57 \cdot 100 = 57\%$

(g) Observando a figura:



g.1) Bruno não terá que pagar taxa de entrega.

g.2) O valor da taxa de entrega:

Ana: $5+0,5\cdot d_AP = 5+0,5\cdot 4 = 5+2 = 7$

Bruno: 0

Carlos: $5+0,5\cdot d_CP = 5+0,5\cdot 4 = 5+2 = 7$

Daniela: $5+0,5\cdot d_DP = 5+0,5\cdot 3 = 5+1,5 = 6,5$

Terceira atividade

Com os avanços tecnológicos transformando a forma como interagimos com o mundo e com a educação, é essencial incorporar ferramentas digitais no ensino da matemática. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância do uso de tecnologias, como aplicativos e softwares, para enriquecer as práticas pedagógicas.

Nesta terceira atividade, continuaremos a explorar o potencial do software GeoGebra, uma ferramenta amplamente utilizada por professores e estudantes. O objetivo é proporcionar uma experiência interativa que permita aos estudantes comparar as diferenças entre a geometria euclidiana e a geometria do táxi, focando na análise de gráficos e equações de cônicas. Assim, espera-se que os estudantes desenvolvam uma compreensão mais profunda e visual dos conceitos matemáticos abordados.

Enunciados, comentários e orientações didáticas da terceira atividade

Nesta atividade, serão abordadas as cônicas como lugares geométricos. Serão equacionadas a partir de suas definições e, em seguida, representadas graficamente levando em consideração as geometrias euclidiana e do táxi.

(a) Sabendo que a circunferência é um lugar geométrico dos pontos que distam uma medida r (raio) de um ponto fixo O (centro), sua definição pode ser expressa como $C = \{P = = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(O, P) = r\}$. Desse modo, a equação da circunferência é dada por:

Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$.

Na geometria do táxi: $|x-a| + |y-b| = r$.

Considerando as coordenadas do centro da circunferência como $O = (3, 2)$ e o raio com medida igual a 5, determine as equações das circunferências considerando as geometrias euclidiana e do táxi.

Nesta etapa, os alunos, sob a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como circunferência. Essas equações serão desenvolvidas levando em consideração tanto a geometria euclidiana quanto a geometria do táxi.

(b) Sabemos que a elipse é um lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é igual a uma constante maior do que a distância entre os focos.

Dados os pontos $F_1 = (a, b)$, $F_2 = (c, d)$ e $P = (x, y)$, e a constante $k \in \mathbb{R}$, temos que a elipse é definida por $E = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2k\}$. Desse modo, a equação da elipse é dada por:

Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2k$.

Na geometria do táxi: $|x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 2k$.

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das elipses a seguir, sabendo que:

b.1) os focos $F_1 = (0, 3)$, $F_2 = (0, 3)$ e constante $k = 4$;

b.2) os focos $F_1 = (4, 1)$, $F_2 = (-4, 1)$ e constante $k = 10$.

Neste item, os alunos, sob a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como elipse. Essas equações serão desenvolvidas levando em consideração tanto a geometria euclidiana quanto a do táxi.

(c) Sabemos que a parábola é um lugar geométrico dos pontos no plano onde a distância a F é igual à distância a L, onde L é uma reta diretriz e F é um ponto focal que não está localizado em L.

Dado $L \equiv mx + ny + c = 0$ e $F = (a, b) \notin L$, temos que a parábola é definida por $P = \{Q = (x_Q, y_Q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(Q, F) = d(Q, L)\}$. Assim, a equação da parábola é dada por:

Na geometria euclidiana, $d(Q, L) = \dfrac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. Dessa forma, a equação da parábola é dada por: $\sqrt{(x_Q - a)^2 + (y_Q - b)^2} = \dfrac{|mx_Q + ny_Q + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

Na geometria do táxi , $d(Q, L) = \dfrac{|mx_Q + ny_Q + c|}{max\{|m|, |n|\}}$. Desse modo, a equação da parábola é dada por: $|x_Q - a| + |y_Q - b| = \dfrac{|mx_Q + ny_Q + c|}{max\{|m|, |n|\}}$.

Considerando as geometrias Euclidiana e do Táxi, determine as equações das parábolas a seguir, sabendo que:

c.1) o foco $F = (0, 2)$ e a reta diretriz $L \equiv y - 4 = 0$;

c.2) o foco $F = (-2, 0)$ e a reta diretriz $L \equiv x - 2 = 0$.

Neste item, os alunos, com a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como parábola. Essas equações serão desenvolvidas considerando tanto a geometria euclidiana quanto a do táxi.

(d) Sabemos que a hipérbole é um lugar geométrico dos pontos do plano $P = (x, y)$ para os quais o módulo da diferença das distâncias de P aos focos F_1 e F_2 é igual a um valor constante.

Dados os pontos $F_1 = (a, b)$ e $F_2 = (c, d)$ e a constante $k \in \mathbb{R}$, temos que a hipérbole é definida por $H = \{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, \ |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2k\}$. Desse modo a equação da hipérbole é dada por:

Na geometria euclidiana: $\left|\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}\right| = 2k$;

Na geometria do táxi: $\left||x - a| + |y - b| - (|x - c| + |y - d|)\right| = 2k$.

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das hipérboles a seguir, sabendo que:

d.1) os focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e a constante $k = 2$;

d.2) os focos $F_1 = (-1, 2)$ e $F_2 = (3, -2)$ e a constante $k = 1$.

Neste item, os alunos, sob a orientação do professor, irão deduzir as equações que descrevem o lugar geométrico conhecido como hipérbole. Essas equações serão desenvolvidas considerando tanto a geometria euclidiana quanto a do táxi.

(e) Usando o software GeoGebra, represente graficamente cada uma das equações determinadas nos itens (a), (b), (c) e (d).

Neste ponto, os alunos terão a oportunidade de criar gráficos com base nas equações abordadas nos itens anteriores, utilizando o software GeoGebra. O professor, além de fornecer orientação, incentivará os alunos a fazer comparações por meio da observação dos gráficos das cônicas nas geometrias euclidiana e do táxi.

É importante ressaltar que essa atividade proporcionará uma compreensão visual das diferenças e semelhanças entre as geometrias euclidiana e do táxi, permitindo que os estudantes explorem como as cônicas são representadas em cada uma dessas geometrias distintas.

Chave de correção da terceira atividade

(a) Equação da circunferência:

Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=5.$

Na geometria do táxi: $|x-3|+|y-2|=5.$

(b) Equações das elipses:

b.1) Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}=8.$

Na geometria do táxi: $|x+0|+|y-3|+|x-0|+|y+3|=8.$

b.2) Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}=10.$

Na geometria do táxi: $|x-4|+|y-1|+|x+4|+|y-1|=10.$

(c) Equações das parábolas:

c.1) Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|y-4|}{\sqrt{0^2+1^2}}.$

Na geometria do táxi: $|x-0|+|y-2|=\dfrac{|y-4|}{max\{|0|,|1|\}}.$

(.2) Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}.$

Na geometria do táxi: $|x+2|+|y-0|=\dfrac{|x-2|}{max\{|1|,|0|\}}.$

(d) Equações das hipérboles:

d.1) Na geometria euclidiana: $\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}\right|=4$

Na geometria do táxi: $\Big||x+2|+|y-0|-|x-2|-|y-0|\Big|=4$

d.2) Na geometria euclidiana: $\left|\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}\right|=2$

Na geometria do táxi: $\big||x+1|+|y-2|-|x-3|-|y+2|\big|=2$

(e) Cônicas referentes aos itens (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

Figura 5: Circunferência (a).

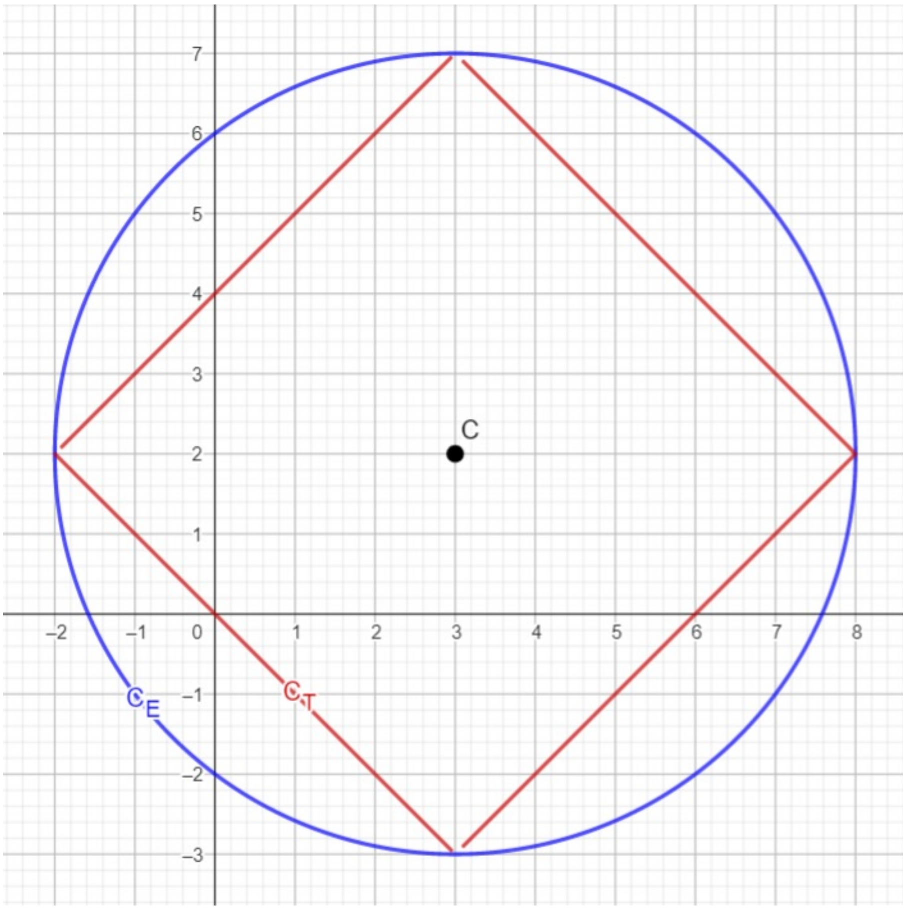


Figura 6: Elipse b.1).

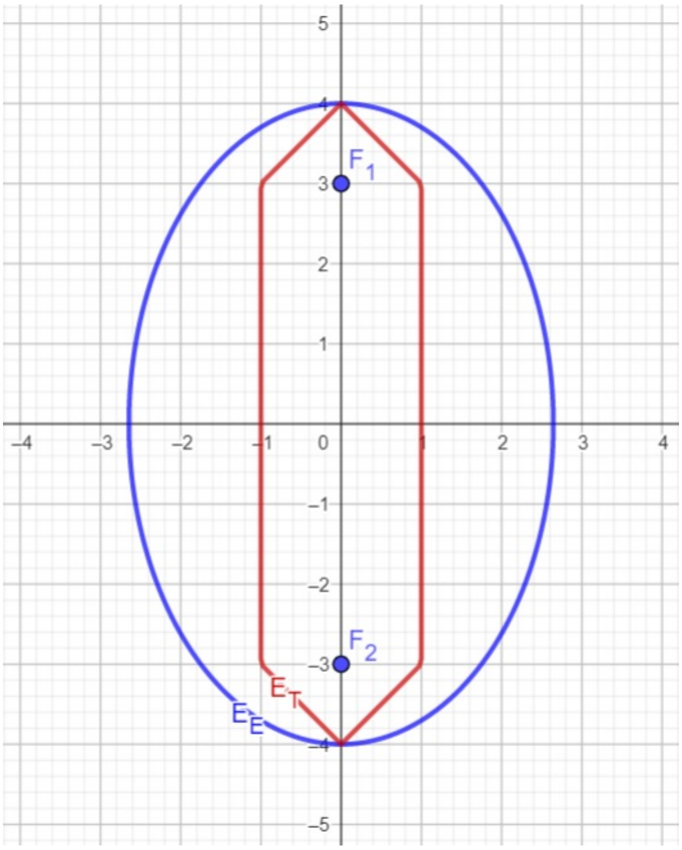


Figura 7: Elipse b.2).

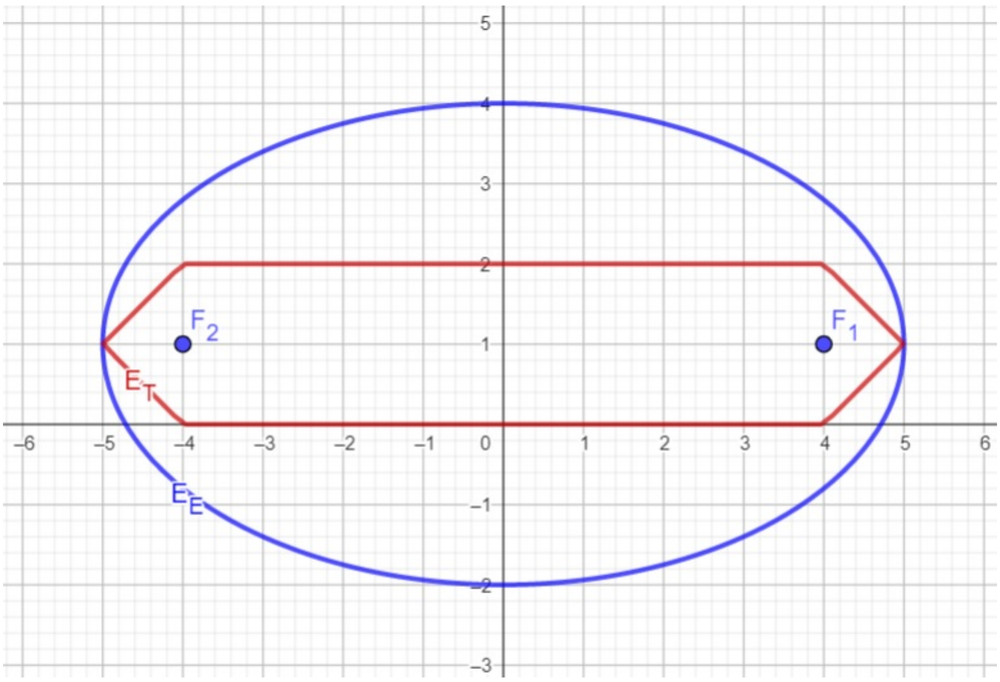


Figura 8: Parábola c.1).

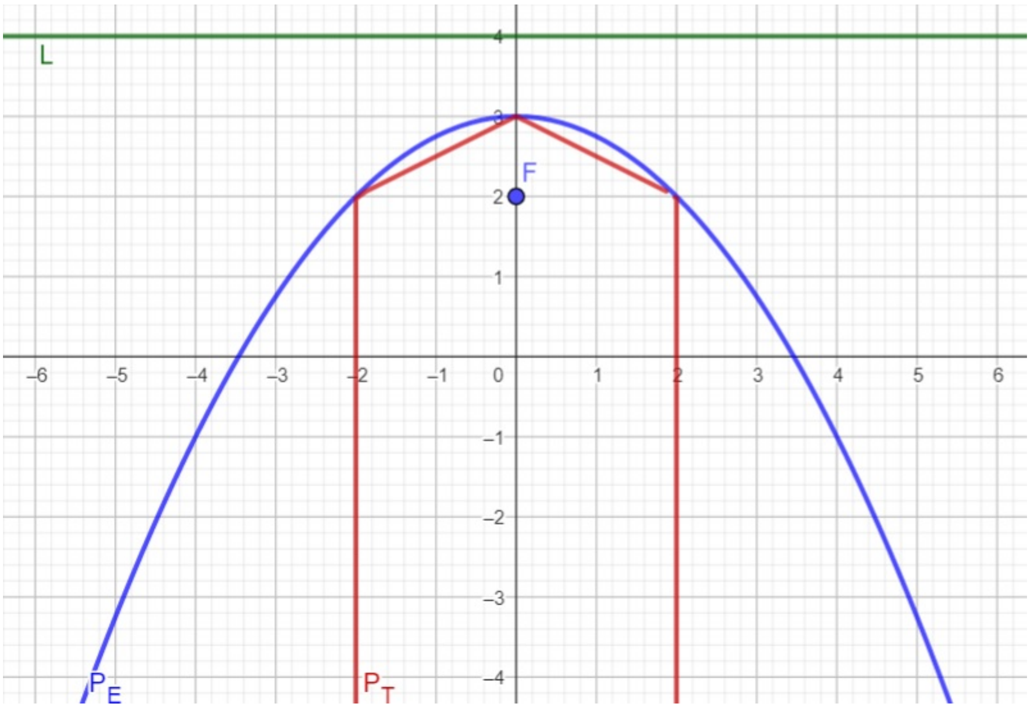


Figura 9: Parábola c.2).

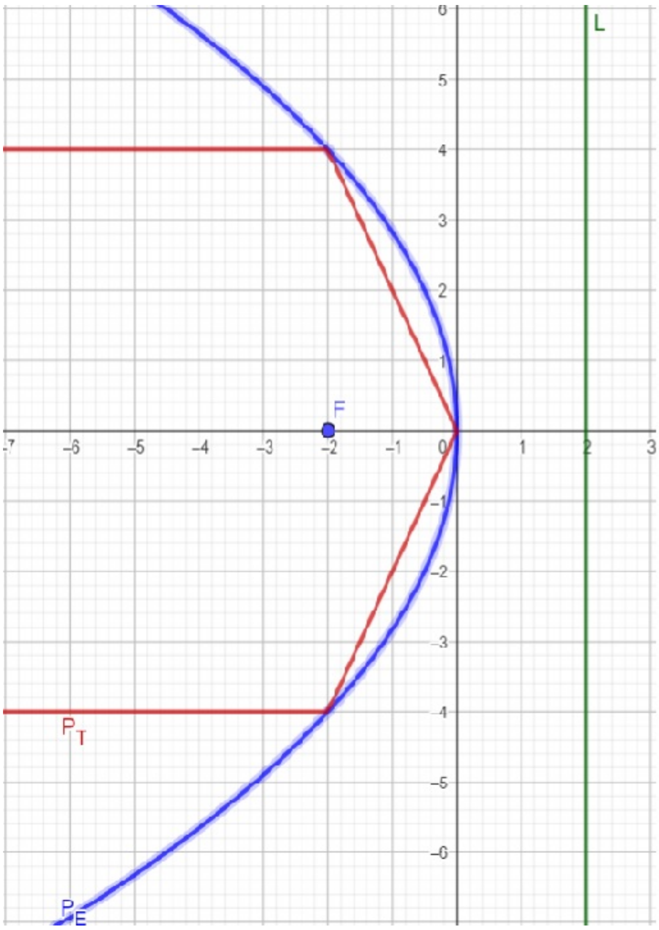


Figura 10: Hipérbole d.1).

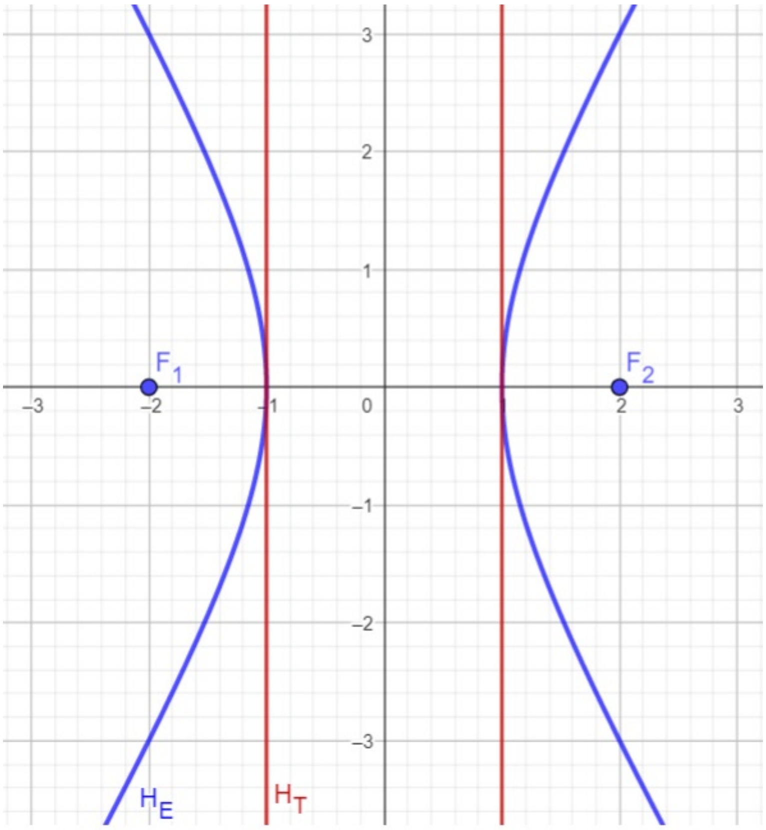
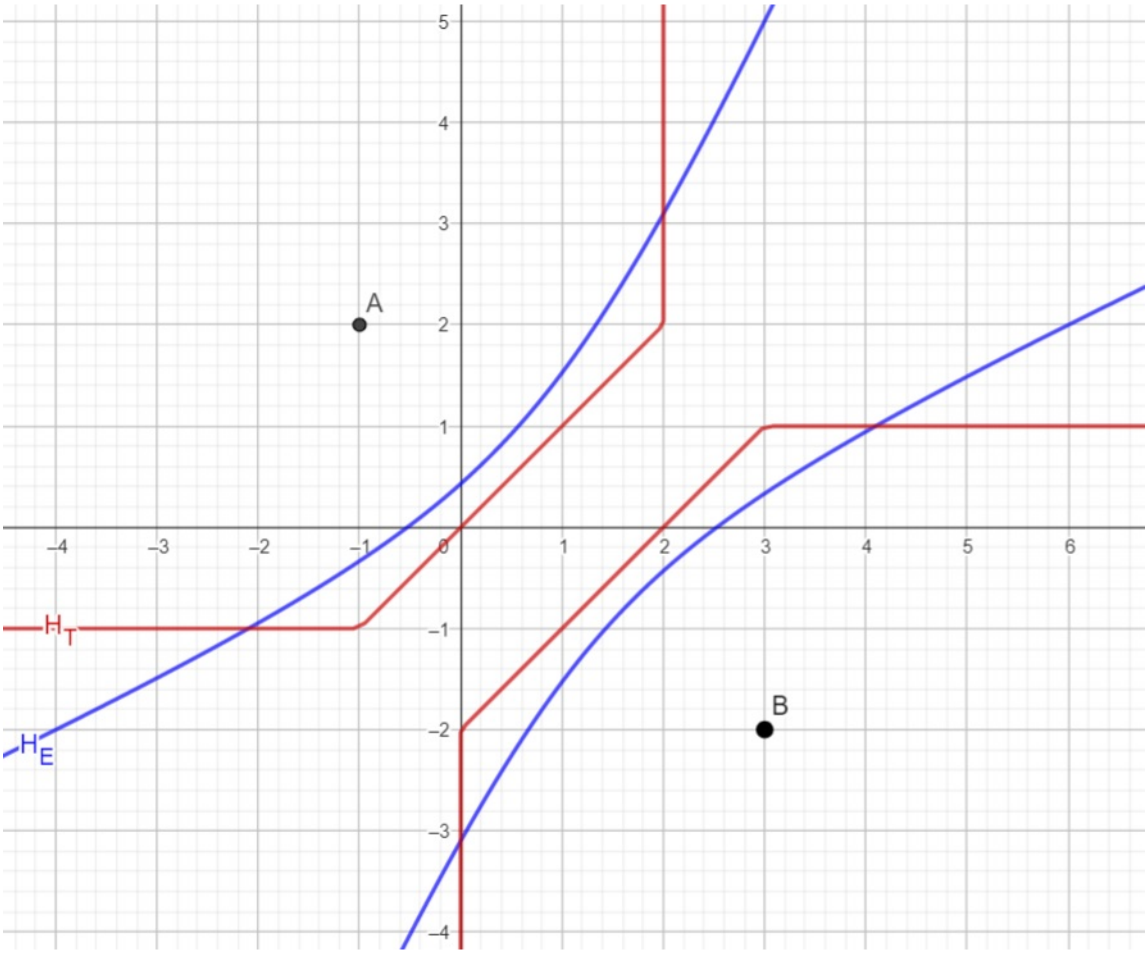


Figura 11: Hipérbole d.2).



Sugestões para a avaliação das atividades

A avaliação dos estudantes pode ser realizada de forma contínua ao longo das atividades, considerando aspectos como participação nas atividades em grupo, capacidade de resolver problemas com base nos conceitos abordados, e a qualidade das discussões e justificativas apresentadas. Além disso, pode-se solicitar a entrega de relatórios individuais ou em grupo, nos quais os alunos demonstrem a aplicação da geometria do táxi e das cônicas em contextos do mundo real.

Como complemento, a avaliação pode incluir uma etapa de autoavaliação, na qual os estudantes reflitam sobre seu próprio aprendizado e os desafios enfrentados durante as atividades. Essa prática oferece uma oportunidade valiosa para que eles avaliem seu progresso e desenvolvimento, promovendo uma compreensão mais aprofundada dos conceitos e princípios explorados.

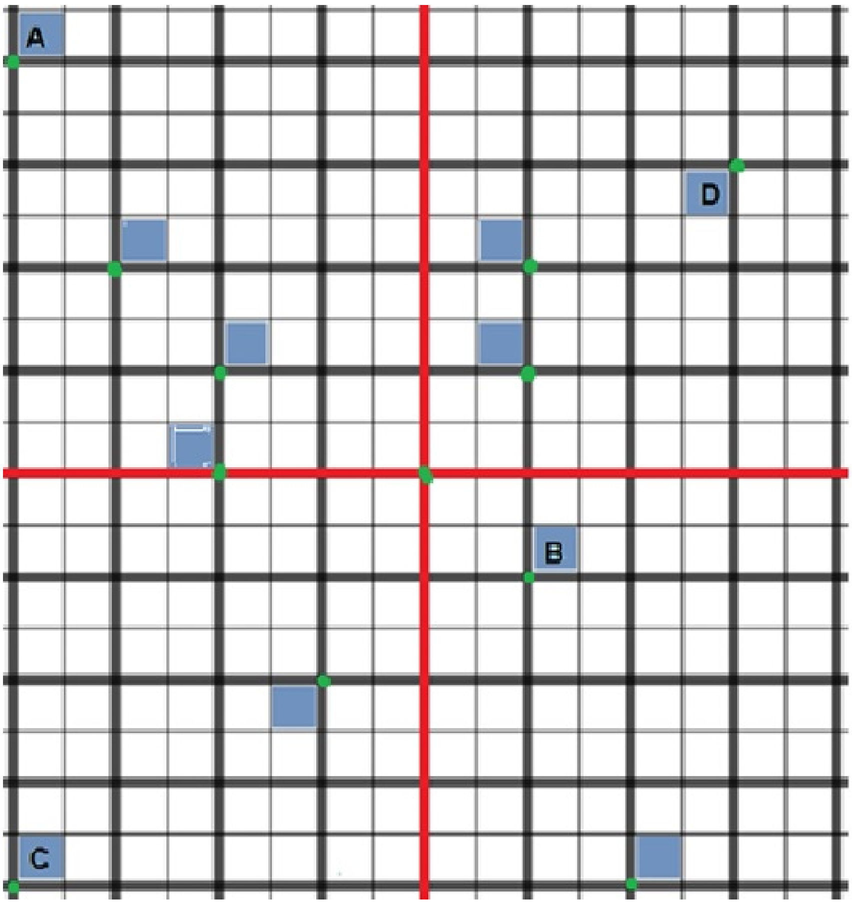
Atividades para impressão

Nesta seção, encontram-se as três atividades detalhadas nas seções anteriores, disponíveis para impressão e utilização por parte do professor ou de qualquer outra pessoa interessada em utilizá-las.

Primeira atividade

Na figura a seguir está o mapa de uma cidade ideal, na qual os quarteirões são quadrados de mesma área. Nesse mapa, é possível visualizar duas ruas principais destacadas em vermelho, que se cruzam perpendicularmente, formando um plano cartesiano e facilitando a localização de moradias e estabelecimentos.

Neste mapa, estão destacadas as localizações das moradias de quatro amigos: Ana, Bruno, Carlos e Daniela, representados, respectivamente, pelos pontos A, B, C e D. Além disso, estão marcadas as localizações de alguns estabelecimentos da cidade, como supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.



(a) Quais as coordenadas cartesianas das residências de Ana, Bruno, Carlos e Daniela?

(b) Marque na figura os pontos $E = (-3, 2)$, $F = (2, -4)$, $G = (1, 2)$, $H = (1, 1)$, $I = (-2, 1)$, $J = (-1, -2)$, $L = (-2, 0)$ que representam, respectivamente, a localização do supermercado, farmácia, clube, banco, escola, hospital e shopping.

(c) Qual a distância do menor caminho entre as residências de:

c.1) Ana e Bruno?

c.2) Ana e Carlos?

c.3) Ana e Daniela?

c.4) Bruno e Carlos?

c.5) Bruno e Daniela?

c.6) Carlos e Daniela?

(d) Qual a distância em linha reta entre as casas de:

d.1) Ana e Bruno?

d.2) Ana e Carlos?

d.3) Ana e Daniela?

d.4) Bruno e Carlos?

d.5) Bruno e Daniela?

d.6) Carlos e Daniela?

(Sugestão: utilizar o Teorema de Pitágoras.)

(e) Qual é a relação entre as distâncias dos menores caminhos e as distâncias em linha reta?

(f) Certo dia, os quatro amigos saíram de suas respectivas casas e foram para a escola, onde passaram toda a manhã. Decidiram almoçar juntos, assistir a um filme no cinema do shopping e, por volta das 16:00 horas, dirigiram-se ao clube para aproveitar a tarde ensolarada. Mais tarde, cada um deles voltou para sua própria casa.

f.1) Qual é a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

f.2) Se fosse em linha reta, qual seria a distância total percorrida por cada um deles ao longo do trajeto?

(g) Um dos percursos mais curtos entre Bruno e Daniela possui dois estabelecimentos destacados no mapa. Qual estabelecimento desses está precisamente localizado na metade do caminho?

(h) Sabemos que existem outros caminhos mais curtos entre Bruno e Daniela, implicando na existência de outros pontos médios. Quantos pontos médios existem e quais são as coordenadas correspondentes a esses pontos?

(i) Em um dos percursos mais curtos entre Bruno e Ana, existem alguns estabelecimentos. Qual deles está precisamente localizado na metade do caminho mais curto?

(j) Sabemos que há outros caminhos mais curtos entre Bruno e Ana. Portanto, também existem outros pontos médios. Quantos são e quais são as coordenadas desses pontos médios?

(k) Considerando o caminho mais curto, quantos percursos distintos são possíveis para:

k.1) Ana ir à escola?

k.2) Bruno ir ao supermercado?

k.3) Carlos ir à farmácia?

k.4) Daniela ir ao shopping?

Segunda atividade

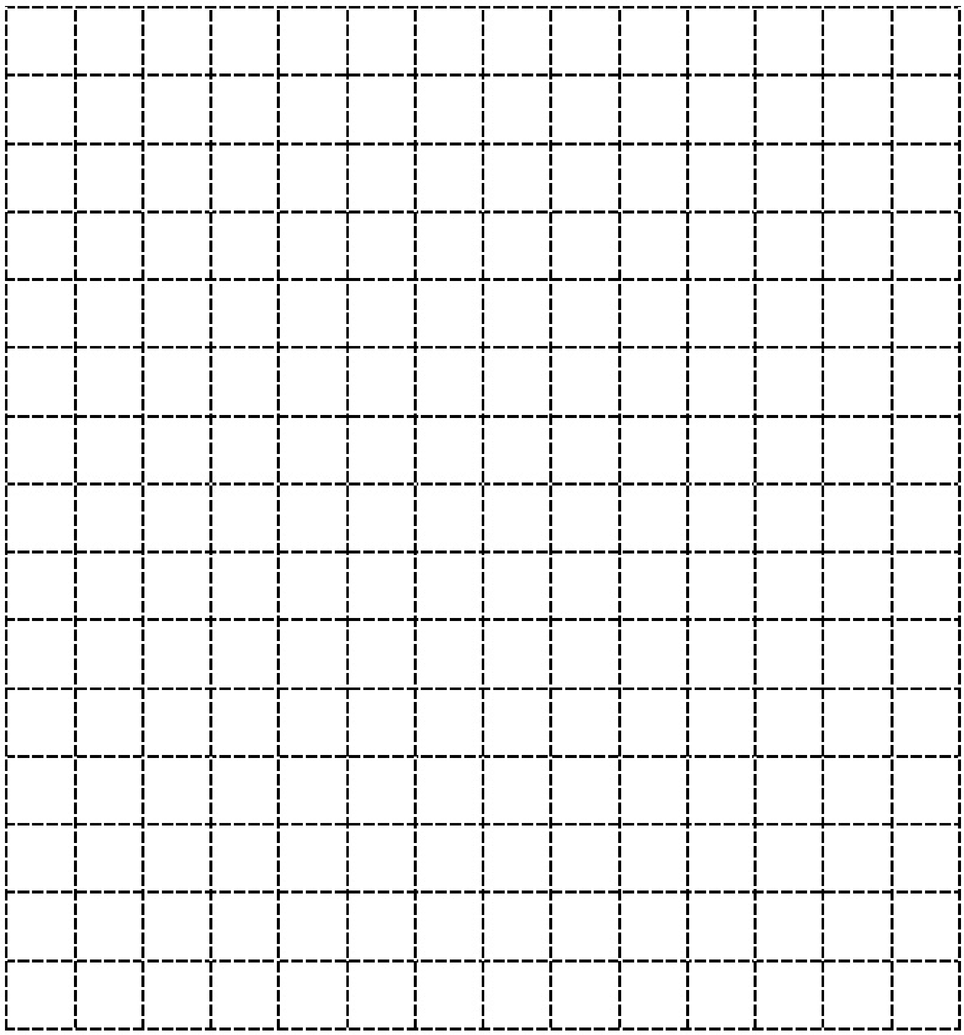
A pizzaria La Bella, para além do atendimento presencial, também oferece serviço de entrega em toda a cidade (*delivery*). A taxa de entrega é calculada conforme a seguinte condição: até quatro quadras, não há cobrança de taxa; contudo, ao ultrapassar essa distância, uma taxa de cinco reais, somada a cinquenta centavos por quadra excedente, será aplicada. É importante ressaltar que o número de quadras considerado para o cálculo da taxa de entrega corresponde à menor distância possível (ou seja, a distância do táxi).

(a) Represente na malha quadriculada a seguir.

  a.1) a pizzaria com um ponto P de sua escolha;

  a.2) o limite máximo da região em que não será cobrada a taxa de entrega, correspondendo à distância do táxi;

  a.3) o limite máximo da região se fosse considerada a distância euclidiana (usar um compasso).



(b) Comparando as figuras do item (a), descreva as semelhanças, se houver, e as diferenças.

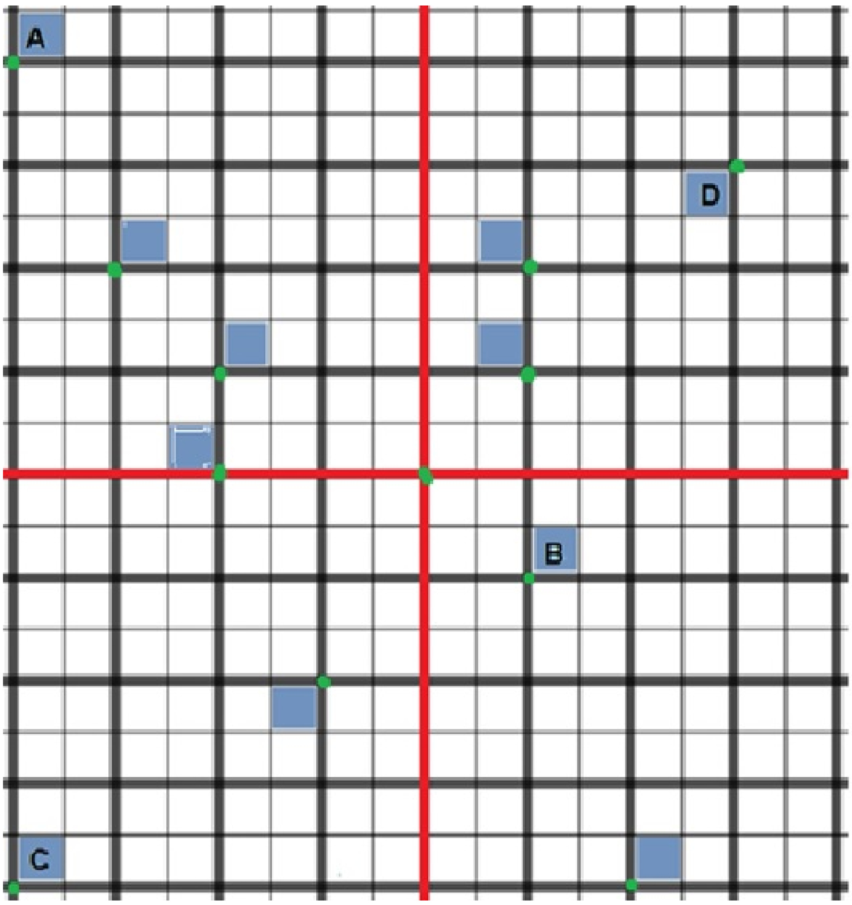
(c) Quais equações representam o limite máximo da área isenta de taxa de entrega, considerando a distância do táxi, e o limite máximo da área se fosse utilizada a distância euclidiana (com o uso de um compasso)?

(d) Qual é a medida da área que estará isenta de taxa de entrega?

(e) Qual é a medida da área se a distância euclidiana fosse considerada?

(f) Em quantos porcento a área calculada com base na distância euclidiana é superior à área calculada com base na distância do táxi?

(g) Com base na informação de que a pizzaria La Bella está situada no ponto $P = (0, 0)$ da cidade ideal apresentada na **Primeira atividade**, utilize a figura a seguir e forneça as respostas às seguintes questões:



g.1) Qual dos quatro amigos não terá que pagar taxa de entrega?

g.2) Qual será o valor da taxa de entrega para cada um dos quatro amigos?

Terceira atividade

(a) Sabendo que a circunferência é um lugar geométrico dos pontos que distam uma medida r (raio) de um ponto fixo O (centro), sua definição pode ser expressa como $C = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(O, P) = r\}$. Desse modo, a equação da circunferência é dada por:

- Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$.
- Na geometria do táxi: $|x-a|+|y-b| = r$.

Considerando as coordenadas do centro da circunferência como $O = (3, 2)$ e o raio com medida igual a 5, determine as equações das circunferências considerando as geometrias euclidiana e do táxi.

(b) Sabemos que a elipse é um lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é igual a uma constante maior do que a distância entre os focos.

Dados os pontos $F_1 = (a, b)$, $F_2 = (c, d)$ e $P = (x, y)$, e a constante $k \in \mathbb{R}$, temos que a elipse é definida por $E = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2k\}$. Desse modo, a equação da elipse é dada por:

- Na geometria euclidiana: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2} = 2k$.
- Na geometria do táxi: $|x-a|+|y-b|+|x-c|+|y-d| = 2k$.

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das elipses a seguir, sabendo que:

b.1) os focos $F_1 = (0, 3)$, $F_2 = (0, 3)$ e constante $k = 4$;

b.2) os focos $F_1 = (4, 1)$, $F_2 = (-4, 1)$ e constante $k = 10$.

(c) Sabemos que a parábola é um lugar geométrico dos pontos no plano onde a distância a F é igual à distância a L, onde L é uma reta diretriz e F é um ponto focal que não está localizado em L.

Dado $L \equiv mx + ny + c = 0$ e $F = (a, b) \notin L$, temos que a parábola é definida por $P = \{Q = = (x_Q, y_Q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(Q, F) = d(Q, L)\}$. Assim, a equação da parábola é dada por:

- Na geometria euclidiana, $d(Q,L)=\dfrac{|mx_Q+ny_Q+c|}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Dessa forma, a equação da parábola é dada por: $\sqrt{(x_Q-a)^2+(y_Q-b)^2}=\dfrac{|mx_Q+ny_Q+c|}{\sqrt{m^2+n^2}}$.
- Na geometria do táxi , $d(Q,L)=\dfrac{|mx_Q+ny_Q+c|}{max\{|m|,|n|\}}$. Desse modo, a equação da parábola é dada por: $|x_Q-a|+|y_Q-b|=\dfrac{|mx_Q+ny_Q+c|}{max\{|m|,|n|\}}$.

Considerando as geometrias Euclidiana e do Táxi, determine as equações das parábolas a seguir, sabendo que:

c.1) o foco $F=(0,2)$ e a reta diretriz $L\equiv y-4=0$;

c.2) o foco $F=(-2,0)$ e a reta diretriz $L\equiv x-2=0$.

(d) Sabemos que a hipérbole é um lugar geométrico dos pontos do plano $P=(x,y)$ para os quais o módulo da diferença das distâncias de P aos focos F_1 e F_2 é igual a um valor constante.

Dados os pontos $F_1=(a,b)$ e $F_2=(c,d)$ e a constante $k\in\mathbb{R}$, temos que a hipérbole é definida por $H=\{P\in\mathbb{R}^2\mid\ |d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2k\}$. Desse modo a equação da hipérbole é dada por:

- Na geometria euclidiana: $\left|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}\right|=2k$;
- Na geometria do táxi: $\left||x-a|+|y-b|-(|x-c|+|y-d|)\right|=2k$.

Considerando as geometrias euclidiana e do táxi, determine as equações das hipérboles a seguir, sabendo que:

d.1) os focos $F_1=(-2,0)$, $F_2=(2,0)$ e a constante $k=2$;

d.2) os focos $F_1=(-1,2)$ e $F_2=(3,-2)$ e a constante $k=1$.

(e) Usando o software GeoGebra, represente graficamente cada uma das equações determinadas nos itens (a), (b), (c) e (d).

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: 17 jul. 2023.

[2] KRAUSE, E. F. **Taxicab geometry: an adventure in non-euclidean geometry**. New York: Dover Publications, 1986.

[3] MINAS GERAIS. **Currículo Referência de Minas Gerais**. Minas Gerais: MEC, 2018. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/. Acesso em: 17 jul. 2023.

[4] SAMIR, B. V. **Geometria do táxi versus geometria euclidiana: explorando as diferenças e aplicações na Educação Básica**. 2023. 114 p. Dissertação - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023.