Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental

ARTUR LIRA DOS SANTOS

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC

BELÉM/PA
2024

Artur Lira dos Santos

Uma Sequência Didática para o Ensino de MMC e MDC

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção de título de mestre em ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática vinculado à Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

BELÉM/PA
2024

ARTUR LIRA DOS SANTOS

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Data de aprovação: 03/10/2024

Banca examinadora

Natanael Freitas Cabral ________________. Orientador
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

Gustavo Nogueira Dias ________________. Examinador Externo
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Humanidades e Arte – Ciências da Educação – Universidade Nacional de Rosário
Escola Tenente Rego Barros – I COMAR

Belém – PA

2024

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor, Deus de toda ciência, que sempre esteve comigo durante a trajetória do curso e desta pesquisa.

Ao meu orientador, professor doutor Natanael Freitas Cabral, pela disposição nos momentos de orientação do trabalho, paciência e encorajamentos para que avançasse com a pesquisa.

À minha família, pelo amor e estima que dispensam a mim.

Aos professores doutores Miguel Chaquiam e Gustavo Nogueira Dias pelas valiosas contribuições dadas ao trabalho no momento da qualificação.

Aos colegas Betânia de Almeida Prestes e Lourival dos Santos Nascimento Júnior, pela parceria, troca de ideias e palavras de incentivo durante o período de construção da dissertação.

A todos os professores e professoras do curso de mestrado pelos ensinamentos, preocupação e encorajamentos.

Aos secretários do PPGEM, Robertyson Martins Castro e Millene Albuquerque Bemerguy Oliveira de Menezes, por sempre serem solícitos quando precisava de algo da competência da secretaria.

RESUMO

SANTOS, Artur Lira dos. **Uma Sequência Didática para o Ensino de MMC e MDC**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). UEPA, Belém/PA, 2024.

As pesquisas acadêmicas e as percepções de professores de Matemática mostram que os estudantes apresentam dificuldades na referida disciplina. Diante disso, esta pesquisa tenta contribuir para o ensino e a aprendizagem do componente curricular em questão, com foco nos conteúdos mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc). O problema de pesquisa a ser respondido é “que contribuições a utilização de uma sequência didática, elaborada segundo o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARCs), traz para o processo de ensino e aprendizagem de mmc e mdc realizado com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental?”. Foi estabelecido como objetivo para este trabalho analisar as contribuições para o ensino e a aprendizagem de mmc e mdc resultantes do uso de uma sequência didática baseada em Cabral (2017). Como aportes teóricos e metodológicos, abordou-se a teoria Psicologia Histórico-Cultural de Vygotsky (1984), a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), a estrutura de sequência didática de Cabral (2017), a Análise Microgenética, segundo Góes (2000), e a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002). Discorreu-se também sobre trabalhos acadêmicos já realizados sobre o ensino dos referidos conteúdos matemáticos escolares, sobre pesquisa de campo feita com docentes, bem como realizada com estudantes egressos do 7º ano. Com base nas pesquisas de campo e sobre os próprios objetos matemáticos em questão, foi elaborada uma sequência didática com o objetivo de ensinar esses conteúdos de forma dinâmica e na qual o educando construa o próprio conhecimento de forma gradual e reflexiva. Por fim, a sequência foi aplicada e avaliada utilizando a Análise Microgenética e a Análise do Discurso. Os resultados da pesquisa mostraram que durante o uso do material didático construído houve indícios de aprendizagem pelos educandos, a qual se deu mediante construções de reflexões e hipóteses; que a relação professor/aluno/saber foi enriquecida com mais dinamismo nas aulas, interações e ajuda mútua entre os estudantes; e que houve a intensificação da criação de zonas de desenvolvimento proximais nos alunos. Portanto, a sequência didática é válida para ser usada por outros professores, estando estes atentos às demandas específicas de suas respectivas turmas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Teoria das Situações Didáticas. MMC e MDC. Sequência Didática.

ABSTRACT

SANTOS, Artur Lira dos. **A Didactic Sequence for the Teaching of LCM and GCD**. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching). UEPA, Belém/PA, 2024.

Academic researches and the perceptions of mathematics teachers show that students have difficulties in this discipline. In view of this, this research attempts to contribute to the teaching and learning of the curricular component in question, with a focus in the contents least common multiple (lcm) and greatest common divisor (gcd). The problem of research to be answered is "what contributions to the use of a didactic sequence, elaborated according to the model of the Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARCs), brings to the teaching and learning process of lcm and gcd carried out with students in the 7th grade of Elementary School?". It was set as a goal for this. This paper analyzes the contributions to the teaching and learning of lcm and gcd resulting from the use of a didactic sequence based on Cabral (2017). As contributions theoretical and methodological approaches, Vygotsky's Historical-Cultural Psychology theory was discuss, Brousseau's Theory of Didactic Situations (2008), the sequence structure Cabral's (2017), Microgenetic Analysis, according to Góes (2000), and the Analysis of the Discourse, according to Mortimer and Scott (2002). There was also a discussion about academic studies already carried out on the teaching of the mentioned school mathematical contents, regarding the field research conducted with faculty members and former seventh-grade students, a didactic sequence was developed based on both field research findings and the mathematical objects under investigation. This sequence was designed to teach these contents through dynamic methodologies, enabling learners to construct knowledge progressively and reflectively. Subsequently, the sequence was implemented and evaluated utilizing Microgenetic Analysis and Discourse Analysis frameworks. Research findings demonstrated that during the implementation of the constructed didactic material, there were significant indicators of student learning, which manifested through the construction of reflections and hypotheses. Furthermore, the teacher-student-knowledge relationship was enhanced through more dynamic classroom interactions and mutual support among students, leading to an intensification in the creation of zones of proximal development among learners. Consequently, this didactic sequence proves viable for implementation by other educators, provided they remain attentive to the specific requirements and characteristics of their respective student cohorts.

Keywords: Mathematics Teaching. Theory of Didactic Situations. LCM and GCD. Didactic Sequence.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática está presente em todos os ramos da vida em sociedade, no trabalho, no comércio, nos jogos, nas brincadeiras infantis etc. Porém, ao mesmo tempo em que essa ciência faz parte do cotidiano, ela desperta o temor de muitos estudantes que sentem dificuldade de aprendê-la.

Essa dificuldade é perceptível quando vemos os resultados de exames de larga escala usados para aferir o conhecimento discente, como o do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e o do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, na sigla em inglês). Em pesquisa feita com base nos resultados do Saeb 2021, o último divulgado, apurou-se que apenas 5% dos estudantes da Rede Pública terminam o Ensino Médio com aprendizado adequado em Matemática e que nos anos finais do Ensino Fundamental esse índice é de 15,3% (Só 5% terminam..., 2022). Apesar da pesquisa a qual nos referimos ter sido feita somente com estudantes da rede pública, pois eles são o maior foco do Saeb, acreditamos que a realidade nas redes particulares não seja muito diferente.

Por outro lado, na edição de 2022 do PISA, que avalia estudantes com 15 anos de escolas públicas e particulares, 73% dos alunos brasileiros registraram baixo desempenho em Matemática (Assessoria de Comunicação Social do Inep, 2023).

Diante desse cenário muitas pesquisas tem sido feitas com o objetivo de tornar o processo de ensino e aprendizagem mais eficiente e significativo, trazendo novas metodologias de ensino, alternativas ao modo tradicional, no qual os conceitos e procedimentos são apresentados de modo já consolidados aos estudantes e estes não ocupam lugar de protagonistas no processo.

Também é importante ressaltarmos que na nossa experiência como estudante da Educação Básica notamos que a Matemática tem sido ensinada de forma mecânica e superficial, em que os procedimentos matemáticos são apresentados como receitas para resolver questões sem ser mostrado os motivos matemáticos (ainda que de forma pouco formal) que os justificam. Também percebemos que a manipulação de procedimentos é priorizada, enquanto que a conceituação e as aplicações são deixados em segundo plano.

Assim, nosso trabalho tenta contribuir para melhorar o processo de ensino e aprendizagem de mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc), apresentando uma sequência didática desses conteúdos matemáticos escolares a ser usada em sala de aula.

Sobre o ensino dos conceitos de mmc e mdc, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática trazem a seguinte orientação para o 3º ciclo do Ensino Fundamental (atuais 6º e 7º anos):

> Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (Brasil, 1998, p. 66).

Concebemos que nossa proposta de procedimento didático está de acordo com essa orientação, pois trabalhará bastante os conceitos de mmc e mdc e a resolução de situações-problema e não somente o cálculo do seu valor por meio de um algoritmo.

Por outro lado, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece somente a seguinte orientação sobre o ensino de mmc e mdc (habilidade EF07MA01 a ser trabalhada com os alunos do 7º ano):

> Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos (Brasil, 2018, p. 307).

Concebemos como algo negativo a pouca menção feita a esses conteúdos no documento supracitado. A Base estabelece somente os conteúdos mínimos a serem ensinados, podendo as redes de ensino complementar os conteúdos programáticos de cada ano escolar, entretanto, essa pouca menção pode influenciar as redes a não elencar a abordagem dos assuntos mmc e mdc ou exigi-la sem levar em conta o aprendizado dos processos práticos para calcular o seu valor.

Cremos também que a importância desses conteúdos serem abordados, entre outros motivos, se deve ao fato de os mesmos consolidarem o ensino dos assuntos multiplicação e divisão com números naturais, múltiplos e divisores de números naturais, critérios de divisibilidade, números primos e decomposição de um número natural em fatores primos.

Sobre a questão da não abordagem dos algoritmos, Souza (2018) argumenta que

> [...] quando se é orientado pelos documentos curriculares a deixar de trabalhar algoritmos que vão possibilitar a determinação do mdc e mmc, por exemplo, podemos pensar que estaremos negando aos alunos a oportunidade de conhecer e trabalhar com cálculos facilitadores e, também, de conhecer a história da Matemática, visto que alguns algoritmos como o da determinação de todos os divisores de um número e do mdc de dois números pelo método de Euclides, e o método do Crivo de Eratóstenes para o reconhecimento dos números primos, têm origem na época da Matemática grega antiga (p. 430).

O Problema Científico a ser respondido nesta pesquisa é “que contribuições a utilização de uma sequência didática, elaborada segundo o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARCs), traz para o processo de ensino e aprendizagem de mmc e mdc realizado com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental?”

Desse modo, o objetivo geral do trabalho é analisar as contribuições para o ensino e a aprendizagem de mmc e mdc resultantes do uso de uma sequência didática baseada em Cabral (2017).

Para alcançar o objetivo geral da dissertação, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Sondar o que tem sido discutido sobre o ensino de mmc e mdc ou, de forma mais geral, sobre o ensino de divisibilidade nas pesquisas acadêmicas mais recentes, com o intuito de obter informações sobre pontos exitosos e não exitosos das experiências para a elaboração da nossa sequência didática.
- Apurar junto aos professores como acontece o processo de ensino de mmc e mdc nas escolas públicas do Pará e que concepções têm os mesmos sobre o aprendizado discente, tendo em vista construir uma sequência que atenda às demandas relatadas.
- Identificar as dificuldades de aprendizagem dos estudantes egressos do 7º ano do Ensino Fundamental no que tange aos conteúdos mmc e mdc, para atender a essas dificuldades na fase experimental deste trabalho.
- Discutir de maneira formal e aprofundada os objetos matemáticos mmc e mdc, tendo em vista obter subsídios para a construção do procedimento didático, em relação ao conteúdo matemático do mesmo, e oportunizar um material de estudo para professores de Matemática.
- Elaborar uma sequência didática, segundo o modelo sugerido por Cabral (2017), para o ensino de mmc e mdc.

- Analisar os resultados da aplicação da sequência didática elaborada, tendo em vista sua validação.

Esta pesquisa está organizada em cinco capítulos, além desta introdução e das considerações finais. O primeiro capítulo aborda os aportes teóricos e metodológicos que a baseiam: a teoria Psicologia Histórico-Cultural, de Lev Vygotsky (1896-1934), a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, a Análise Microgenética, a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002), bem como o conceito de sequência didática e o conceito de UARC.

O segundo capítulo discute sobre o processo de ensino e aprendizagem de mmc e mdc, apresentando uma revisão de literatura sobre o ensino desses conteúdos ou, de forma mais abrangente, sobre o ensino de divisibilidade, e abordando os resultados de uma pesquisa com professores sobre o ensino de mmc e mdc e as concepções deles sobre o aprendizado dos estudantes, e os resultados de uma pesquisa com estudantes egressos do 7º ano sobre a experiência que tiveram durante a aprendizagem dos referidos conteúdos escolares e sobre suas dificuldades nos mesmos.

O terceiro capítulo apresenta os aspectos conceituais dos objetos matemáticos mmc e mdc por meio de um tratamento formal e aprofundado, o qual foi feito com o objetivo de contribuir para a nossa construção da sequência didática e servir de base para o estudo de professores interessados no tema.

O quarto capítulo expõe a sequência didática elaborada, composta por 7 UARCs, as quais abordam os conceitos de mmc e mdc, os algoritmos para o cálculo do valor desses objetos matemáticos, o conceito de números primos entre si, e uma importante propriedade do mmc e do mdc.

O quinto capítulo aborda a aplicação da sequência e as nossas análise e reflexões dessa experiência. Nesse momento usamos a Análise Microgenética e a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002), na busca por indícios de aprendizagem demonstrados pelos estudantes durante a aplicação.

Por fim, apresentaremos as considerações finais do trabalho, em que elencamos os resultados da aplicação da sequência didática construída e desta pesquisa como um todo.

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

O ensino e a aprendizagem da Matemática são permeados por diversos fatores, entre eles as concepções de Educação construídas pelos professores e pelas instituições educativas. Assim, é imprescindível aos educadores e às instituições estarem atentos às teorias que tentam formular aspectos que contribuirão para o êxito do ensino.

É preciso também se apropriar das metodologias de ensino que surgem para tentar minimizar as dificuldades dos estudantes com a aprendizagem da Matemática. Muitas pesquisas têm surgido com o objetivo de dar respostas para as inquietações de professores relacionadas ao processo educativo.

Desse modo, este capítulo elenca e discute as teorias e mecanismos metodológicos usados nesta pesquisa para favorecer a aprendizagem dos conteúdos mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc), quais sejam, a teoria Psicologia Histórico-Cultural, de Lev Vygotsky (1896-1934), a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, o conceito de sequência didática, a estrutura para esse procedimento estabelecida por Cabral (2017), a Análise Microgenética, segundo Góes (2000), e a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002).

1.1 Psicologia Histórico-Cultural

A teoria Psicologia Histórico-Cultural foi estabelecida pelo soviético Lev Semyonovich Vygotsky (1896-1934), trazendo reflexões acerca do desenvolvimento e da aprendizagem dos indivíduos. Para esse pesquisador as interações sociais e o contexto cultural têm papel fundamental no processo de construção dos conhecimentos.

O conhecimento surge do coletivo para o individual segundo esse autor. É com a família, com amigos, com a comunidade na qual está inserida que se forma o intelecto de cada pessoa. A teoria supracitada é importante, ao nosso ver, pelos seguintes fatos: no exercício da atividade docente o professor se depara com alunos que possuem conhecimentos aprendidos fora da escola, pois são a esses conhecimentos que primeiramente os estudantes recorrem para solucionar as atividades da escola, e os mesmos podem ser usados como pontapé inicial para a aprendizagem dos conteúdos formais; é impossível fazer um bom trabalho educativo sem olhar para o contexto em que vive o grupo de alunos para o qual se ensina; é na interação com os colegas de classe que muitos alunos tiram dúvidas, resolvem problemas e evoluem em relação a Matemática.

Um conceito que podemos destacar na teoria de Vygotsky é o de “lei genética geral do desenvolvimento cultural”, a qual pode ser explicada nos termos abaixo:

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (Vygotsky, 1981, p. 163).

A BNCC do Ensino Fundamental também ressalta a pertinência das interações e do trabalho coletivo dos estudantes em sala de aula na 8ª competência específica de Matemática a ser adquirida pelos educandos durante essa etapa da Educação Básica. Vejamos:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 2018, p. 263).

Segundo Davis e Oliveira (2010) a teoria Psicologia Histórico-Cultural estabelece os conceitos de Zona de Desenvolvimento Real, que é aquela em que um indivíduo resolve uma atividade sem ajuda de um terceiro, de Zona de Desenvolvimento Potencial, correspondente àquela em que a pessoa necessita de outra mais experiente para resolver uma tarefa, e de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que está relacionada a transição entre as duas zonas já mencionadas, no processo de obtenção de autonomia diante de uma atividade a ser realizada.

O trabalho eficiente do professor tem que ser pautado pela criação de ZDPs nos estudantes, ou seja, etapas em que os mesmos caminharão para a consolidação da aprendizagem de conceitos e procedimentos. Essas ZDPs podem ser construídas com o auxílio das atividades escolares que privilegiem a interação entre os alunos, o levantamento de hipóteses, a busca conjunta pela solução de situações-problema e a argumentação dos educandos frente a própria tarefa.

Outro ponto importante da teoria que estamos discutindo é o papel da fala no desenvolvimento e na aprendizagem humana. A fala é responsável pela comunicação de conhecimentos que, posteriormente, serão internalizados pelas crianças e é o mecanismo pelo qual as próprias crianças irão demonstrar como conceberam um objeto de conhecimento, sendo fundamental o docente estar atento às falas dos estudantes durante o processo de ensino.

Também destacamos que para Vygotsky existem quatro níveis de desenvolvimento humano, a saber, os níveis filogenético, sociogenético, ontogenético e microgenético. Neste trabalho discutiremos o nível microgenético, que corresponde ao processo de consolidação das funções psicológicas superiores dentro de um contexto social como uma sala de aula. Esclarecemos que não foi o próprio Vygotsky que definiu esse nível de desenvolvimento, mas o psicólogo norte-americano James Werstch, baseando-se nos trabalhos do soviético, os quais continham a origem do referido nível.

Desse modo, dois mecanismos para analisar o processo de aprendizagem de estudantes que surgiram em decorrência da teoria de Vygotsky foram a Análise Microgenética e a Análise do Discurso, os quais trataremos nos subcapítulos 1.4 e 1.5 destes aportes teóricos e metodológicos.

1.2 Teoria das Situações Didáticas

A partir da década de 1960 houve uma intensificação, principalmente em países francófonos, no movimento de pesquisadores preocupados com o ensino e a aprendizagem da Matemática. Esse movimento criou grupos de pesquisas, congressos e culminou por estabelecer as teorias da Didática da Matemática. Entre elas surge a Teoria das Situações Didáticas, estruturada pelo pesquisador francês Guy Brousseau em 1986. A partir de então a referida teoria começou a ser usada em pesquisas da Educação Matemática e a contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina escolar.

A Teoria da Situações Didáticas se debruça sobre o triângulo professor/ aluno/saber, refletindo sobre as relações entre esses componentes. Para Brousseau (2008) a aprendizagem se concretiza com as adaptações dos estudantes a um meio composto de contradições e desequilíbrios. Este meio é criado pelo professor, constituindo-se de uma atividade, um jogo etc. e as regras de interação com esse dispositivo. É na formulação de hipóteses, na argumentação com seus pares, na construção de modelos, na rejeição a soluções erradas que os alunos aprendem os conhecimentos matemáticos.

Outro conceito discutido na Teoria das Situações Didáticas é o de contrato didático.

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (Brousseau, 1986, *apud* Silva, 2008, p. 50).

Nesse contrato é importante o que Brousseau (2008) chama de devolução, que é quando o docente consegue que o discente se sinta responsável por uma situação de aprendizagem ou pela resolução de um problema.

A referida teoria estabelece que situação adidática é uma situação ou problema que foi escolhida pelo educador com o propósito de que o estudante construa um conhecimento novo. Esse problema ou situação o aluno não consegue resolver imediatamente. Durante a busca pela resolução o educando interagirá com o meio em uma atuação dinâmica, inclusive participando de um jogo de perguntas e respostas (“pingue-pongue”) conduzido pelo professor com o objetivo de que o próprio estudante “descubra” o conhecimento que o docente quer que ele aprenda. Esse processo mais amplo é chamado de situação didática.

O processo de ensino, no seio da Teoria da Situações Didáticas, é constituído de quatro fases, quais sejam:

Fase da ação: É o momento em que o docente propõe uma atividade ao discente, o qual se dedicará a resolvê-la.

Fase da formulação: É a etapa em que o aluno discutirá com seus pares sobre o que foi realizado na fase de ação, quais conclusões foram tiradas, qual visão cada um tem sobre a resolução da atividade.

Fase da validação: É o momento em que a resolução é compartilhada com os alunos que ainda não chegaram a ela. Em que é pedido aos estudantes que encontraram a solução as justificativas de que a referida solução é válida.

Fase da Institucionalização: É a etapa em que o professor formaliza e sistematiza os conhecimentos corretos construídos pelos alunos durante a atividade.

Cabe ressaltarmos que essas fases podem ocorrer de uma maneira não tão linear como a descrita aqui, devido ao caráter dinâmico e imprevisível que possui a atividade educacional.

Percebemos que a Teoria das Situações Didáticas propõe um tipo de ensino que rompe com o modelo tradicional, pois estabelece que o educando construa o seu próprio conhecimento a partir de suas reflexões e interações com seus pares, ao invés de ser logo exposto a ele de maneira consolidada.

1.3 Sequência Didática e UARC

O ensino da Matemática pode ser feito de variadas maneiras, usando diversos recursos e metodologias. Neste trabalho usaremos a sequência didática como procedimento para favorecer a aprendizagem dessa disciplina.

Existem várias definições para sequência didática. Esclarecemos, então, que aqui ela é concebida como um procedimento didático composto por várias atividades que objetivam que o estudante que dela participa construa os conhecimentos, vinculados na mesma, de forma gradual e dinâmica, tornando-se protagonista do processo de aprendizagem.

Desse modo, para Zabala (1998, p. 18) sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

Assim, a sequência, como todo trabalho pedagógico, tem que ter um objetivo de aprendizagem bem definido, para o qual avançará o educando superando suas dificuldades com a ajuda de colegas de classe e do professor, que deverá intervir em momentos apropriados.

Também existem várias maneiras de estruturar esse procedimento didático. Nesta pesquisa adotamos a estrutura proposta por Cabral (2017), o qual introduz o conceito de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC). Fala-se de reconstrução porque o aluno vai aprender um conteúdo já sistematizado e elencado no currículo escolar. Cabral (2017) compara o objeto de conhecimento que o docente deseja ensinar a uma superfície S e cada UARC a uma unidade de medida unitária com a qual deseja-se medir essa superfície S, ou seja, cada UARC é um passo que o estudante deverá dar em direção à aprendizagem do conteúdo como um todo. Cada

UARC está ligada a outra como num revestimento de piso. Assim, a escolha da primeira UARC, por parte do professor, influenciará a escolha das demais.

As UARCs se materializam por meio de diferentes tipos de intervenções, as quais passamos a descrever agora:

Intervenção Inicial (I_i): É o primeiro elemento do processo didático, em que o estudante será envolvido com o tema a ser trabalho e estimulado a perceber algumas ideias sobre o mesmo;

Intervenção Reflexiva (I_r): É o momento em que o aluno será questionado com relação a alguns aspectos do objeto de conhecimento que está sendo trabalhado. O objetivo é que o educando reflita sobre suas ações e construa hipóteses, verifique possibilidades etc.;

Intervenção Exploratória (I_e): É a etapa em que os alunos aprofundarão o seu olhar nas respostas dadas na etapa anterior. Essa intervenção se concretiza por meio de procedimentos que o docente pede para os alunos fazerem, como simulações, descrições, preenchimento de tabelas etc.;

Intervenção Formalizante (I_f): É o momento em que o professor enuncia de maneira formal, com o rigor próprio da Matemática, o que os alunos já construíram de forma empírica-intuitiva nas intervenções anteriores;

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): É a etapa em que se busca identificar as aprendizagens dos alunos em dois aspectos: “o que é o conceito trabalhado?” e “como se justificam e se operam os algoritmos desse objeto de conhecimento?”;

Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a): É o momento final do processo didático, em que os estudantes serão avaliados por meio da resolução de problemas aplicados do conteúdo estudado.

Além dessas intervenções que fazem parte do texto escrito da sequência didática, Cabral (2017) estabelece o conceito de Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO), a qual é a intervenção feita pelo professor no seu discurso, durante a aplicação de uma sequência, para orientar os estudantes na direção dos objetivos da mesma. Essa intervenção é útil também para o docente avaliar o texto da sequência e fazer modificações futuras que respondam às demandas percebidas nos alunos que se “afastam” dos objetivos de aprendizagem durante a aplicação.

É importante notarmos aqui que uma sequência didática estruturada conforme Cabral (2017) estará alinhada com a teoria Psicologia Histórico-Cultural e a Teoria das Situação Didáticas.

1.4 Análise Microgenética

A Análise Microgenética é uma metodologia que busca inferir os processos psicológicos que ocorrem na microgênese. Segundo Kelman e Branco (2004 p. 95), microgênese seria “um domínio genético, porque Vygotsky percebeu que era exatamente no aqui e agora das ações e interações diante de uma situação problema que se encontravam os processos mentais mais ricos”.

Assim, essa análise busca investigar a formação do subjetivo dos pesquisados relacionado ao intersubjetivo, na forma das interações entre as pessoas e das condições sociais em que ocorre a situação observada na pesquisa. Para concretizar esse objetivo são colocados em relevo os gestos, as falas, as expressões dos que estão sendo pesquisados e do pesquisador.

Para Góes (2000 p. 15), nesse tipo de análise “é destacado o exame de processos interativos e de pistas de internalização”. Destaca-se então o olhar para o pontual, pois a investigação se dá na tentativa de reconhecer os processos individuais de transformação de ideias e significados. Contudo, não há o desprezo pela totalidade, pois trata-se de entender melhor aspectos gerais por meio da observação aos aspectos pormenores.

Cabe ressaltarmos que a Análise Microgenética é uma metodologia que possui um foco diferente, que observa mais o individual e os detalhes, o que muitas vezes é negligenciado por outras metodologias de pesquisa. Para observar as minúcias dos momentos pesquisados em investigações de cunho educacional geralmente são feitas gravações de vídeo ou áudios e a transcrição de conversas entre professor e discentes ou entre alunos e seus colegas ocorridas em pequenos intervalos de tempo.

É importante observar que os diversos estudantes tem características, ritmos de aprendizagem e modos diferentes de conceber os conteúdos escolares, e que a Análise Microgenética é útil para ajudar o professor a perceber essas diferenças e fazer um trabalho que atenda a essas demandas em uma classe de alunos.

Segundo Góes (2000), no termo microgenética, micro vem de minúcias indiciais que demonstram os momentos em que ocorrem processos psicológicos, e genética é explicado pelo sentido histórico, pois relaciona condições passadas, presentes e futuras. Na metodologia de pesquisa que estamos discutindo o processo é o objetivo de análise e não o resultado final, pois segundo Vygotsky (1984, p. 74) “é somente em movimento que o corpo mostra o que é”.

São exemplos de trabalhos em que a Análise Microgenética foi usada como metodologia de pesquisa os de Kelman e Branco (2004), Barboza e Zanella (2005), Pacheco (2016), Cabral, Dias e Lobato Júnior (2019), Mota (2019), Secco et al (2020) e Gama (2020).

Na presente pesquisa usaremos a Análise Microgenética para inferir indícios de aprendizagem dos conteúdos ensinados presentes nos estudantes pesquisados.

1.5 Análise do Discurso

Como expusemos no subcapítulo anterior, a metodologia da Análise Microgenética enfatiza os detalhes das interações entre os indivíduos pesquisados para inferir os processos psicológicos que estão ocorrendo no interior desses indivíduos. Assim, a Análise do Discurso, a qual discutiremos agora, é um mecanismo pertinente para efetivar a Análise Microgenética.

A Análise do Discurso é uma ferramenta analítica que surge como resultado do movimento de pesquisa em Educação em Ciências que coloca como foco a construção de significados pelos estudantes por meio da comunicação (linguagem e outras formas), e do movimento da psicologia que volta-se para a investigação do discurso, das interações, sob influência dos estudos de Vygotsky.

Neste trabalho usaremos a ferramenta de Análise do Discurso apresentada por Mortimer e Scott (2002). Esse método focaliza o papel do professor e possui cinco aspectos que interligam focos do ensino, abordagem e ações:

Quadro 1 - Estrutura analítica de interações e produção de significados

Aspectos da Análise		
i. Focos do ensino	*1. Intenções do professor*	*2. Conteúdo*
ii. Abordagem	*3. Abordagem comunicativa*	
iii. Ações	*4. Padrões de interação*	*5. Intervenções do professor*

Fonte: Mortimer e Scott (2002, p. 285)

Para Mortimer e Scott (2002), o professor, durante a sua atuação em sala de aula, desenvolve uma “estória científica” e nesse percurso o docente pratica as seguintes intenções: cria um problema; explora a visão dos estudantes; introduz e desenvolve a “estória científica”; guia os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização; guia os estudantes na aplicação das ideias científicas e na expansão de seu uso, transferindo progressivamente para eles o controle e responsabilidade por esse uso; e mantém a narrativa, sustentando o desenvolvimento da "estória científica".

Os conteúdos dessa Análise são os relacionados a "estória científica" e no discurso na sala de aula se separam em três categorias, que são a descrição, a explicação e a generalização do assunto ensinado.

A abordagem comunicativa da estrutura analítica supracitada é composta por duas dimensões: discurso dialógico ou de autoridade e discurso interativo ou não-interativo. Uma abordagem dialógica ocorre quando um docente ouve o que o estudante diz e considera aquilo pela ótica do próprio aluno; nesse caso, há mais de um ponto de vista. Já a abordagem de autoridade acontece quando um professor ouve o que o aluno diz e considera o que foi falado pela ótica do conhecimento científico; nesse caso, há somente um ponto de vista. Na prática, de acordo com Mortimer e Scott (2002 p. 287), "qualquer interação provavelmente contém aspectos de ambas as funções, dialógica e de autoridade".

É importante frisar que o discurso dialógico pode ser feito por uma só pessoa, desde que nele contenha mais de um ponto de vista. No discurso interativo ocorre a participação de dois ou mais indivíduos e no discurso não-interativo somente um indivíduo comunica.

Desse modo, há quatro classes de abordagem comunicativa, quais sejam:

Interativo/dialógico: docente e discentes discutem pontos de vista diferentes;

Não-interativo/dialógico: o professor fala considerando dois ou mais pontos de vista;

Interativo/de autoridade: o educador interage com os alunos, mas os direciona para um único ponto de vista;

Não-interativo/de autoridade: somente o professor comunica um ponto de vista;

Outro ponto dessa estrutura analítica são os padrões de interação. Segundo Mortimer e Scott (2002), o mais comum dos padrões em uma sala de aula é o do tipo I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor), mas existem outros como os do tipo I-R-P-R-P... ou I-R-F-R-F..., onde o P representa momentos em que o educador tenta fazer com que o estudante prossiga o seu raciocínio e F vem de *feedback* que o educador dar a fala do estudante para tentar fazer com que ele explique com mais clareza o que está argumentando.

Existem seis maneiras de intervenção pedagógica do docente na estrutura que estamos discutindo, as quais estão elencadas e alinhadas com o foco e as ações que as definem no quadro 2 a seguir.

Quadro 2 – Formas de intervenção do professor

Intervenção do professor	**Foco**	**Ação - o professor:**
1. Dando forma aos significados	Explorar as ideias dos estudantes.	- introduz um termo novo; parafraseia uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados.
2. Selecionando significados	Trabalhar os significados no desenvolvimento da estória científica.	- considera a resposta do estudante na sua fala; ignora a resposta de um estudante.
3. Marcando significados chaves		- repete um enunciado; pede ao estudante que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma ideia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado.
4. Compartilhando significados	Tornar os significados disponíveis para todos os estudantes da classe.	- repete a ideia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas ideias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe.
5. Checando o entendimento dos estudantes	Verificar que significados os estudantes estão atribuindo em situações específicas.	- pede a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita aos estudantes que escrevam suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados.
6. Revendo o progresso da estória científica	Recapitular e antecipar significados.	- sintetiza os resultados de um experimento particular; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

Fonte: Mortimer e Scott (2002, p. 289)

Nesta pesquisa as interações são divididas em turnos, segmentos e episódios para ser feita a Análise do Discurso. Turno é cada uma das falas dos indivíduos participantes da investigação, segmento é um conjunto de turnos e episódio é um conjunto de segmentos.

Destacamos também que há uma junção da Análise Microgenética com a Análise do Discurso, neste trabalho, para inferirmos indícios de aprendizagem durante a aplicação da sequência didática para os alunos. Essas duas Análises se complementam na nossa pesquisa.

2. O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MMC E MDC

Este capítulo discute o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos escolares mmc e mdc. Assim, apresenta uma revisão de literatura dos trabalhos recentes publicados nessa perspectiva, bem como expõe os resultados de duas pesquisas de campo: uma feita com professores de Matemática que ministram aulas em escolas públicas do Pará e outra com estudantes egressos do 7º ano do Ensino Fundamental.

O objetivo dessas três pesquisas foi colher informações pertinentes para a elaboração da sequência didática e para o momento de aplicação desse procedimento didático.

2.1 Revisão de Literatura

Com o objetivo de estudarmos o que tem sido realizado ultimamente na academia sobre o ensino de mmc e mdc, para subsidiar a construção da nossa sequência didática, pesquisamos as produções sobre o ensino e a aprendizagem desses conteúdos escolares no Google, no Google Acadêmico e no site do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA). Como encontramos poucos trabalhos sobre esses temas, resolvemos ampliar a pesquisa para materiais sobre divisibilidade, área maior da qual fazem parte mmc e mdc.

Assim, encontramos nove pesquisas, sendo oito dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, sobre as quais discorreremos agora. Elas têm seu ano de conclusão variando de 2014 a 2020. Separamos os referidos trabalhos em três categorias: estudos experimentais, estudos propositivos e estudo teórico. A primeira categoria está relacionada aos trabalhos que relatam aplicações de atividades pelo autor para colher resultados com vista a melhorar o ensino e a aprendizagem do objeto matemático escolar. A segunda categoria corresponde aos trabalhos em que são feitas propostas de atividades a serem usadas com os estudantes, mas não são feitas aplicações das mesmas. A terceira categoria corresponde às pesquisas bibliográficas sobre o ensino do assunto escolar em foco.

Assim, os trabalhos pesquisados estão agrupados no quadro 3.

Quadro 3 – Classificação dos estudos revisados

Categoria dos Estudos	Autor/Ano	Título
Experimentais	Silva (2014)	Múltiplos e Divisores: Importantes Ferramentas no Ensino Médio
	Valentim (2017)	A Divisibilidade no Ensino Fundamental
	Fiorelli (2017)	Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum Generalizados Aplicados no Ensino Básico
	Nunes (2017)	Números Primos e a Constituição do MMC E MDC
	Castro (2019)	O Ensino de Divisibilidade de Números Naturais por Atividades
	Silva (2020)	Divisibilidade no Ensino Fundamental: Uma Proposta de Abordagem Usando Questões da OBMEP
Propositivos	Priebe (2016)	Tópicos de Aritmética para as Séries Finais do Ensino Fundamental: Uma Proposta Focada na Resolução de Problemas
	Lopes (2017)	Geogebra como Ferramenta Auxiliar no Processo de Aprendizagem de Números Primos na Educação Básica
Teórico	Souza (2018)	Os Conteúdos de Divisibilidade nos Livros Didáticos de Matemática do 6º Ano e Documentos Curriculares do Ensino Fundamental Anos Finais

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

2.1.1 Estudos Experimentais

O trabalho realizado por Silva (2014) teve como objetivo propor um estudo com a finalidade de suscitar uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem de múltiplos, divisores, mmc e mdc, a partir do conteúdo frações, que problematize e apresente possíveis soluções para os docentes de Matemática do Ensino Médio, visto que os estudantes apresentam muitas dificuldades nesses assuntos matemáticos.

A metodologia usada por esse autor consistiu em estudo teórico sobre frações (incluindo a história desse conceito), números decimais, números racionais e irracionais, números primos e fatoração. Depois foi realizada uma intervenção pedagógica com uma turma de 2º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Rio das Ostras/RJ.

Inicialmente foi ministrado de maneira expositiva algumas propriedades das operações com frações. Após esse momento foi proposto aos estudantes situações-problema sobre o conteúdo trabalhado. Em uma segunda etapa dessa intervenção foi ministrado de maneira tradicional o assunto operações com frações heterogêneas, e, em seguida, propostas situações-problema para consolidar as ideias matemáticas envolvidas. Na terceira fase da intervenção realizada pelo autor foram ministrados os conteúdos múltiplos, divisores, mmc e mdc (incluindo algoritmos para o cálculo deles) e equações diofantinas lineares, em seguida, foram propostas três atividades que envolviam os conceitos de mmc e mdc. A primeira atividade abrangia uma curiosidade histórica; a segunda pedia, entre outros elementos, para os alunos medirem as dimensões da quadra de esporte da escola e da trave contida na quadra, o que os levou para fora da sala de aula e proporcionou algo não rotineiro; e a terceira era uma lista de exercícios com questões de vestibulares.

Para avaliar a experiência pedagógica realizada com os alunos o autor levou em conta o envolvimento e o desempenho dos estudantes nas atividades, relatando que eles apresentaram dificuldades, mas que o trabalho foi satisfatório principalmente por conta do envolvimento deles.

Silva (2014) concluiu que a pesquisa realizada foi importante e contribuiu para a prática docente de professores de Matemática; que os conteúdos múltiplos, divisores, números primos, mmc e mdc são relevantes e atuais; e, por fim, que é importante que o ensino seja provocador para que o próprio aluno construa instrumentos e modelos matemáticos necessários.

A dissertação de Valentim (2017) teve por objetivo realizar uma intervenção pedagógica sobre o ensino de múltiplos e divisores com atividades lúdicas e atividades tradicionais com o intuito de provocar uma melhoria na aprendizagem desses conteúdos pelos estudantes.

A metodologia desse trabalho foi efetivada por meio do estudo teórico sobre alguns autores que contribuíram para a área da teoria dos números e as obras deles. Assim, foi falado sobre Euclides de Alexandria, Diofanto, Fermat, Euler, Lagrange e

Gauss. Posteriormente, foram abordados conceitos elementares da teoria dos números, a saber, divisibilidade, divisão euclidiana, sistemas de numeração, mdc, algoritmo de Euclides, mmc e números primos e compostos.

A aplicação das atividades foi realizada em uma turma de 8º ano de uma escola municipal de Puxinanã/PB. Inicialmente foram abordados os assuntos múltiplos e divisores por meio de duas situações-problema. Após, foi aplicado um jogo chamado "bingo dos divisores". Em seguida, houve uma atividade que envolvia o preenchimento de um quadrado mágico (objeto que possui a mesma soma nas linhas, colunas e diagonais). Na continuação do processo, foram distribuídas tabelas para os alunos acharem números primos, e depois foi explicado o procedimento do crivo de Eratóstenes. Também foi explicado sobre mmc e mdc por meio de situações-problema e propostas atividades sobre esses conteúdos.

Finalizado esse período de ministrações e atividades, o pesquisador aplicou um teste com oito questões para verificar a aprendizagem dos alunos durante o referido período. Valentim (2017) atribuiu notas de 0 a 10 para os discentes, conforme o que apresentaram no teste. A relação está na tabela 1 seguinte, onde os 24 alunos que responderam as questões estão representados por A1, A2, ... A23 e A24.

Tabela 1 - Nota obtida por cada aluno

Aluno	**Nota**	**Aluno**	**Nota**	**Aluno**	**Nota**
A1	4,0	A9	9,0	A17	8,5
A2	5,5	A10	6,5	A18	5,5
A3	4,0	A11	4,5	A19	7,5
A4	6,5	A12	7,5	A20	8,0
A5	5,5	A13	4,5	A21	8,0
A6	8,0	A14	9,0	A22	8,5
A7	7,5	A15	10,0	A23	7,5
A8	6,5	A16	10,0	A24	6,5

Fonte: Valentim (2017)

Desse modo, para o autor do estudo, os resultados mostram que as atividades foram válidas e alcançaram o objetivo de contribuir para uma aprendizagem mais concreta.

O pesquisador concluiu que o trabalho alcançou o objetivo pedagógico traçado; que a assimilação dos conteúdos foi mais eficaz devido às atividades lúdicas; e que os educandos sentiram uma dificuldade maior com o conceito de mdc, pois questões do teste sobre o mesmo tiveram poucos acertos.

A pesquisa de Fiorelli (2017) possuiu o objetivo de

> [...] apresentar a importância de retomar os conceitos de mínimo múltiplo comum (MMC) e de máximo divisor comum (MDC) à medida que outros conjuntos numéricos, além dos naturais, são introduzidos aos alunos, de uma forma mais lúdica, pensando na inter e transdisciplinariedade, visto que estes não generalizam as propriedades das operações como esperado pela maior parte dos professores (p. 11-12).

Os principais autores em que se baseou a pesquisadora foi Ripoll, Ripoll e Sant'Ana (2006), que abordam o tema "mmc e mdc generalizados", usado por ela em sua dissertação.

Como metodologia de trabalho, Fiorelli (2017) pesquisou inicialmente sobre a descoberta dos números incomensuráveis e sobre a discussão sobre os fundamentos da Matemática, ocorrida com o estabelecimento da teoria dos conjuntos por Georg Cantor (1845-1918). Esses dois momentos da história da Matemática ela chamou de crises dessa ciência. Depois, a pesquisadora abordou com formalismo os conceitos de mmc e mdc no conjunto dos números naturais, com apelo a elementos da teoria dos conjuntos, mmc e mdc no conjunto dos números inteiros, e por último, os números reais comensuráveis, quando definiu o mínimo múltiplo comum generalizado (mmcg) e o máximo divisor comum generalizado (mdcg). Assim, concluída essa etapa, a autora da dissertação discorre sobre o currículo de Matemática, para o Ensino Fundamental – Anos Finais e para o Ensino Médio, da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEESP), refletindo que mmc e mdc só são abordados em um único período letivo. Do mesmo modo, a menção a esses conteúdos só é feita dentro do conjunto dos números naturais, no volume 1 do caderno do aluno do 6º ano. Isso também é observado em livros didáticos para o Ensino Fundamental e Médio por Fiorelli (2017). Diante desses fatos, a pesquisadora aplicou o projeto "MMC e MDC: Gostosura ou Tortura?" em uma escola pública estadual localizada em Valinhos/SP em três turmas de 8º ano do Ensino Fundamental e duas de 3º ano do Ensino Médio.

Com as turmas de 8º ano a pesquisadora inicialmente aplicou um teste sobre mmc e mdc de números naturais. Como os alunos tiveram uma dificuldade acentuada para resolver as questões da avaliação e ficaram curiosos de como elas poderiam ser resolvidas, a autora do trabalho expôs os conceitos de mmc e mdc de forma sucinta, depois ministrou outros conceitos, também de forma breve, e propôs atividades envolvendo materiais concretos, de maneira provocativa, em que os alunos teriam que testar hipóteses. As tarefas também envolveram história da Matemática e situações-problema e foram realizadas disputas entre grupos de alunos durante as atividades.

Durante esses momentos foram explicados os conceitos de mmc e mdc de números inteiros positivos e os algoritmos para serem calculados. Por fim, foram trabalhados com os estudantes os conteúdos mmcg e mdcg.

Nas turmas de 3º ano o primeiro momento do projeto foi marcado por uma aula de formato expositivo sobre as estruturas algébricas de anel e corpo, pois esses conteúdos englobam os conceitos de conjuntos numéricos e números comensuráveis e incomensuráveis. No encontro seguinte com a turma, a pesquisadora aplicou um teste para inferir o que os educandos tinham aprendido do conteúdo ministrado no primeiro encontro. Muitos alunos não quiseram fazer a avaliação e, dos que fizeram, a maioria não a resolveu completamente. O projeto seguiu com o ensino de mmc e mdc de números naturais por meio de situações-problema do cotidiano. Depois disso foi ensinado os conteúdos mmcg e mdcg de forma provocativa.

Para verificar os resultados do projeto foram aplicados testes no fim do processo, além dos testes do começo da intervenção. Com as turmas de 8º ano foi percebido que, na maioria dos casos, não houve melhora nos resultados do teste depois de realizado o projeto, porém, que as atividades foram importantes para mais tarde serem ministrados os conteúdos números racionais e números reais para as turmas. Com o 3º ano foi apurado que muitos discentes conseguiram um bom resultado no segundo teste, entretanto, alguns ainda possuíam dificuldades em conhecimentos básicos.

Fiorelli (2017) concluiu que muitos alunos do 8º ano, mesmo depois do projeto, ainda tinham dificuldades com os conceitos de múltiplos, divisores, mmc, mdc e com o algoritmo da divisão; que os estudantes do 3º ano mostraram bastante desinteresse em participar das atividades da intervenção pedagógica; e que o período da aplicação do projeto foi curto, inviabilizando resultados mais exitosos que provassem que um ensino interdisciplinar e que leva em conta os conceitos já internalizados pelos educandos favorece uma melhor aprendizagem.

O trabalho de Nunes (2017) teve como objetivo

> [...] elaborar uma Sequência Didática baseada em Rickenmann e sempre recorrendo a conhecimentos prévios que favoreçam a compreensão das noções de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e do Máximo Divisor Comum (MDC) inspirados no Crivo de Eratóstenes. [...] (p. 7).

A questão que norteou a dissertação que estamos discutindo foi “Uma sequência didática definida a partir de noções de teoria dos números e estudos da área da educação matemática favorece a compreensão e cálculo do MMC e do MDC?” (Nunes, 2017, p. 16).

Os principais autores usados na referida pesquisa foram Brousseau (1996), o qual fundamentou a Teoria das Situações Didáticas, Almouloud e Silva (2012), que discorreram sobre a metodologia da Engenharia Didática criada por Michèle Artigue em 1988, e Rickenmann (1998), o qual embasou a elaboração da sequência didática do trabalho que estamos estudando aqui.

A metodologia da investigação de Nunes (2017) foi a Engenharia Didática. Na primeira fase, dessa metodologia, chamada “análises preliminares”, o pesquisador estudou de forma profunda e formal os objetos mmc e mdc, bem como a sua abordagem em livros didáticos, artigos e outros materiais.

Na segunda etapa, denominada “concepção e análise a priori”, da Engenharia, o autor construiu a sequência didática composta de 15 tarefas e analisou cada uma delas, elencando os objetivos das mesmas, os conhecimentos prévios para a sua realização e as expectativas do que aconteceria com os alunos durante o processo de ensino.

Na terceira fase, chamada “experimentação”, da metodologia da pesquisa, as atividades foram aplicadas com um grupo de dez alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Belém/PA, durante três dias, nos quais foram utilizados cinco tempos de 50 minutos e uma tarefa da sequência didática foi feita em casa e trazida para a escola resolvida durante essa aplicação.

Na quarta etapa, denominada “análise a posteriori e validação”, o pesquisador relatou o que tinha acontecido durante a fase anterior, com relação a participação dos alunos, suas dúvidas e suas resoluções das tarefas. Assim, nessa etapa foi feita a comparação do que foi exposto na “análise a priori” e o que aconteceu durante a aplicação da sequência didática, sendo verificado que muitas expectativas se concretizaram. Além disso, foi contabilizada a quantidade de estudantes que acertaram cada tarefa aplicada, o que está exposto na tabela 2 seguinte:

Tabela 2 - Demonstrativo de acertos das 15 tarefas da sequência didática

Tarefas	**Quantidade de alunos que acertaram**	**Porcentagem de alunos que acertaram**
1	8	80 %
2	10	100 %
3	9	90 %
4	8	80 %

5	8	80 %
6	9	90 %
7	8	80 %
8	8	80 %
9	9	90 %
10	8	80 %
11	8	80 %
12	10	100 %
13	8	80 %
14	8	80 %
15	7	70 %

Fonte: Nunes (2017)

Nunes (2017) concluiu que diante da sequência produzida a questão de pesquisa teve resposta positiva; que os estudos feitos na fase das “análises preliminares” possibilitou elaborar uma sequência em que os educandos construam os conceitos de mmc e mdc de forma gradativa por meio de tarefas articuladas e consigam usar o conhecimento aprendido em diferentes situações; que a pesquisa contribui de forma significativa para o ensino e a aprendizagem da Matemática; e que durante a aplicação do material elaborado foi percebido falta de conhecimentos prévios e obstáculos linguísticos e psicológicos nos alunos, como consequência, o pesquisador teve que fazer intervenções fornecendo conhecimentos e encorajando os discentes com o objetivo de que avançassem na construção dos objetos matemáticos mmc e mdc.

A pesquisa de Castro (2019) foi realizada com o objetivo de “[...] avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino de divisibilidade de números naturais por meio de atividades sobre os aspectos conceituais, propriedades e desempenho na resolução de questões referentes ao assunto. [...]” (p. 5).

O problema de pesquisa do referido trabalho foi

> [...] que efeitos, a aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de divisibilidade de números naturais em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de São João de Pirabas provoca sobre a atuação em aulas de Matemática e no desempenho na resolução de questões sobre divisibilidade de números naturais? [...] (Castro, 2019, p. 5).

A pesquisa se desenvolveu por meio da metodologia Engenharia Didática. Nas “análises prévias” foram estudados os aspectos curriculares, históricos e matemáticos de divisibilidade de números naturais, a opinião de alunos que tinham estudado no ano anterior esse conteúdo e, por fim, trabalhos que tinham focado no ensino desse tema.

Na “concepção e análise a priori” foi estudado o ensino de Matemática de forma geral, destacando-se a metodologia “ensino por atividades”, bem como foi elaborada a sequência didática, a qual iria ser aplicada posteriormente, e feitas as análises de cada atividade dela.

Na etapa da “experimentação” foi aplicada a sequência didática para 13 alunos de uma turma de 6º ano de uma escola da Rede Municipal de São João de Pirabas/PA, durante 12 encontros, ocorridos em dois meses. Inicialmente foi proposto aos discentes um questionário sócio econômico e um teste para sondar o conhecimento que possuíam sobre divisibilidade de números naturais. Depois, foram sendo aplicadas as 20 atividades que faziam parte da sequência.

Na “análise a posteriori e validação” o pesquisador fez o confronto entre as análises realizadas antes da intervenção pedagógica e as feitas depois e percebeu que em 85% das atividades aconteceu o esperado, de forma positiva. Também foi avaliado, nesse momento, o desempenho dos estudantes nos blocos de questões propostas que foram aplicados durante o período da “experimentação”, mas eram distintas das atividades da sequência, e foi verificado que a maioria dos educandos as resolveu corretamente. Diante desses dois fatos, o pesquisador concebeu que a sequência didática foi favorável para que os estudantes tivessem um bom desempenho em resoluções de questões sobre o tema abordado, validando a mesma.

Castro (2019) concluiu que o que foi realizado nas “análises prévias” foi importante para a construção das atividades que seriam propostas aos estudantes, pois mostrou as dificuldades de alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo trabalhado; que durante a aplicação das atividades foram notados erros básicos dos educandos; e que a sequência didática elaborada favorece uma boa compreensão dos conceitos e procedimentos de divisibilidade de números naturais e é uma alternativa para o processo de ensino.

A dissertação de Silva (2020) foi efetivada com o objetivo de abordar o conteúdo divisibilidade por meio da resolução de problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), nível 1, pretendendo aumentar a quantidade de estudantes em contato com essas questões, para alcançar uma melhoria na Educação Básica.

A metodologia desse trabalho consistiu em, primeiramente, estudar a definição de olimpíada de Matemática, a história da Olimpíada de Matemática no Brasil e a história da OBMEP. Na etapa posterior foram elencados, de modo formal e rigoroso, tópicos sobre divisibilidade no conjunto dos números inteiros. Na etapa seguinte foram discutidos os aspectos do ensino tradicional e do ensino inovador, momento em que foi apontada a necessidade de colocar em prática, nas escolas, novas metodologias de ensino, e destacado a importância do uso de Tecnologias da Informação e Comunicação. Na etapa seguinte, houve uma discussão a respeito do procedimento sequência didática. Depois, foi feita a aplicação desse procedimento didático, nos moldes inovadores, sobre conteúdos de divisibilidade, em uma turma de 7º ano de uma escola municipal de Água Branca/AL e, simultaneamente, foram trabalhados os mesmos conteúdos, de forma tradicional, com outra turma de 7º ano da mesma escola, ou seja, usando-se aulas expositivas e caderno. Nas duas turmas foram trabalhados os assuntos escolares durante um período igual. Com a classe em que foram aplicados métodos diferenciados de ensino, usou-se o Portal do Saber da OBMEP, o qual contém videoaulas, exercícios resolvidos, aplicativos, testes etc., e usou-se também aplicativos de Matemática para celulares.

Para avaliar a aprendizagem das duas turmas nesse período foram aplicados um teste (sobre o conteúdo de divisibilidade de anos anteriores ao 7º) antes da intervenção pedagógica e um depois (sobre o conteúdo de divisibilidade abordado com as turmas durante o processo). No primeiro teste foi constatado que as turmas estavam, praticamente, no mesmo nível de aprendizagem dos assuntos em questão e que esse nível era bastante baixo. No segundo teste foi verificado que a turma a qual teve aulas com metodologias inovadoras avançou significativamente na aprendizagem, enquanto que a outra apresentou um avanço tímido, fatos que mostraram que o processo de ensino diferenciado foi mais eficaz.

Silva (2020) concluiu que a inserção de questões da OBMEP na prática de ensino pode contribuir para que os educandos se tornem mais participativos, interessados e despertem o gosto pela Matemática; e que o uso de metodologias diferenciadas de ensino mostrou produzir melhores resultados, o que também ressalta a necessidade do uso de novas tecnologias na ministração de aulas.

2.1.2 Estudos Propositivos

A dissertação de Priebe (2016) foi realizada com o objetivo de

> [...] apresentar uma proposta de ensino de alguns tópicos de Aritmética, também denominada de Teoria dos Números, às séries

> finais do Ensino Fundamental, com foco na resolução de problemas, visando desafiar e fascinar os alunos com a gama de possibilidades oriunda das propriedades da Teoria dos Números e desenvolver sua capacidade de raciocínio através de problemas interessantes que darão uma nova vida ao assunto. [...] (p. 12).

A metodologia de pesquisa do trabalho em questão consistiu, em um primeiro momento, em discorrer sobre divisibilidade e resto, abordando de maneira formal os assuntos números primos e compostos, mdc e mmc, restos, e algoritmo de Euclides, ao mesmo tempo em que propunha questões sobre esses conteúdos a serem usadas com os alunos do Ensino Fundamental. Posteriormente, foi falado sobre congruências (que, na visão da autora, pode ser inserido no currículo do Ensino Fundamental), abordando de maneira matematicamente rigorosa os tópicos bases numéricas, representação decimal e testes de divisibilidade, e raiz digital, propondo também questões a serem abordadas com os estudantes. As questões que a pesquisadora propôs para o uso em sala de aula foram mais incomuns e curiosas do que se costuma ver em livros didáticos.

Priebe (2016) concluiu que a aritmética é uma área pouco explorada no Ensino Fundamental – Anos Finais, apesar da riqueza da mesma; e que os problemas matemáticos são importantes para o aprendizado de novos assuntos, devendo os professores trabalhar com os educandos o estímulo a solução de desafios.

O trabalho de Lopes (2017) tinha o objetivo de “enriquecer e incentivar a aprendizagem de números primos por alunos do Ensino Médio;” (p. 13).

A metodologia dessa dissertação se configura inicialmente discutindo o ensino de maneira geral e, especificamente, o de Matemática sob a ótica dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Após isso são abordados alguns trabalhos acadêmicos que tinham tema igual ou parecido com o da referida dissertação. Na continuação do trabalho são apresentadas de maneira formal algumas definições, lemas, teoremas, corolários e proposições relativos a divisibilidade e a congruência. O texto segue falando de criptografia de maneira geral e, em particular, do modelo que foi usado na proposta metodológica de ensino, ou seja, o sistema de criptografia Rivest-Shamir-Adleman (RSA), suas características e a Matemática envolvida nele. O trabalho segue expondo um pouco a respeito do aplicativo Geogebra, suas características e funções; da modelagem do sistema RSA nesse aplicativo, seu funcionamento e sua construção; e da aplicação do modelo de criptografia RSA em sala de aula com o uso do Geogebra, objetivando o ensino de números primos. Na etapa posterior o autor discute sobre o procedimento para encontrar números primos chamado crivo de Eratóstenes, sua modelagem no aplicativo Geogebra e a proposta de ensino do conteúdo para os estudantes.

Lopes (2017) concluiu que a interdisciplinaridade e a contextualização são fundamentais para a formação ética, autônoma e crítica dos educandos; que as modelagens no Geogebra apresentadas na dissertação podem ser melhoradas, tendo os leitores do trabalho oportunidade para fazê-lo; que o professor deve ser capaz de fazer a conexão dos conteúdos por ele ministrados com outras áreas de conhecimento e com a realidade do aluno; que a construção de novos materiais e projetos pelo docente contribui para a formação do estudante e do próprio professor; e que as tecnologias podem contribuir muito para a elaboração de materiais didáticos interessantes.

2.1.3 Estudo Teórico

O trabalho de Souza (2018) foi realizado com o objetivo de

> [...] verificar se houve redução expressiva dos conteúdos de Divisibilidade (múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade, números primos, decomposição em fatores primos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum) nos livros didáticos de matemática do sexto ano e nos documentos curriculares de matemática do ensino fundamental anos finais. [...] (p. 9).

A questão de pesquisa dessa tese foi “[...] Existe alguma redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano e nos documentos oficiais referentes ao ensino fundamental dos anos finais?” (Souza, 2018, p. 40).

A metodologia dessa investigação foi documental. No primeiro momento da pesquisa foram discutidas as concepções de ensino de Matemática as quais ocorreram no Brasil ao longo do tempo, as influências delas nos livros didáticos, as reformas educacionais do ensino da disciplina e como a Matemática é tratada no PCN e na BNCC do Ensino Fundamental, no que tange aos anos finais.

Na etapa posterior é abordado o conceito de transposição didática, introduzido pelo francês Yves Chevallard em 1985, a transposição da teoria dos números como saber científico para o saber escolar, essa transposição nos livros didáticos de 6º ano e, mais especificamente, discute-se a divisibilidade enquanto saber científico e saber escolar.

Na fase seguinte são destacados a configuração e os procedimentos metodológicos da pesquisa documental do trabalho, inclusive são elencados os conteúdos de divisibilidade os quais serão procurados nos livros pesquisados.

Na etapa seguinte foram feitas análises de documentos oficiais da Educação Básica brasileira para verificar os conteúdos de divisibilidade propostos para o 6º ano do Ensino Fundamental. Os documentos analisados foram o PCN, a BNCC e Programas Curriculares dos estados de Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro, Roraima e São Paulo. Também foram analisados três planos de ensino de Matemática de escolas estaduais de Boa Vista/RR, com foco nos conteúdos de divisibilidade propostos para o ano (antiga série) citado.

A tese segue, nesse momento, falando sobre a história e desenvolvimento junto às escolas do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com direcionamento maior da pesquisadora para os livros de Matemática. O texto segue estabelecendo a análise de 27 livros didáticos de Matemática do 6º ano (ou equivalentes) com o intuito de inferir se houve redução expressiva de conteúdos de divisibilidade ao longo do tempo. Para a análise os livros são divididos em três fases: de 1926 a 1979; de 1980 a 2014; e do PNLD-2017.

Souza (2018) concluiu que a tese inicial se confirmou, pois nos documentos curriculares dos seis estados brasileiros selecionados há redução expressiva de conteúdos de divisibilidade, dos planos de ensino de escolas estaduais acessados um apresentou redução dos conteúdos em questão, e os livros didáticos da fase 1 (1926-1979) apresentaram ausência inexpressiva ou pouco expressiva dos assuntos matemáticos focados pela pesquisa, enquanto que os da fase 2 (1980-2014) retrataram ausência pouco expressiva, moderadamente expressiva e ausência expressiva dos conteúdos e os da fase 3 (livros pertencentes ao PNLD-2017) apresentaram ausência moderadamente expressiva, ausência expressiva e muito expressiva; que houve mudanças gráficas e nas abordagens metodológicas e pedagógicas dos livros didáticos no início do século XXI influenciadas pela publicação dos PCNs em 1998, e que essas mudanças provocaram a redução dos conteúdos matemáticos escolares de modo geral; que as atuais tendências de ensino presentes nos livros didáticos priorizam assuntos matemáticos mais pertinentes à realidade da sociedade atual, mas pode-se refletir se essas tendências tem contribuído para uma aprendizagem maior, visto que os resultados das avaliações nacionais dos estudantes mostram que não houve melhora nesse ramo; que é provável que no futuro exista redução maior dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos e, consequentemente, em sala de aula, por conta do estabelecimento da BNCC; que o conhecimento fruto da pesquisa é importante para a prática de formadora de professores que a própria autora da tese exerce; e que estamos presenciando uma ruptura com conhecimentos que eram predominantes, porém, isso poderá ser negativo para a compreensão da Matemática.

2.2 Concepções dos Docentes

Com o objetivo de obter os dados para apurar como acontece o ensino de mmc e mdc nas escolas públicas do Pará realizamos uma pesquisa de campo. Segundo Gil (2008, p. 55),

> As pesquisas deste tipo se caracterizam pela interrogação direta das pessoas cujo comportamento se deseja conhecer. Basicamente, procede-se à solicitação de informações a um grupo significativo de pessoas acerca do problema estudado para em seguida, mediante análise quantitativa, obter as conclusões correspondentes dos dados coletados.

Desse modo, elaboramos um questionário por meio do aplicativo Google Forms com 27 perguntas (das quais usamos 25 nesta seção) para serem respondidas por professores de Matemática, envolvendo dados pessoais e profissionais, dados relacionados a metodologia de ensino usada, de forma geral e em específico durante a ministração de mmc e mdc, o tipo de avaliação aplicada pelo pesquisado na disciplina e a percepção do mesmo com relação a dificuldades apresentadas por estudantes, de forma geral na disciplina Matemática e em específico nos conteúdos matemáticos escolares da nossa pesquisa. O questionário aplicado aos docentes está no Anexo A desta dissertação.

Ressaltamos que as escolas públicas que citamos aqui fazem parte das redes estadual e municipais.

Esse questionário foi enviado por um aplicativo de mensagens instantâneas, de forma pessoal ou em grupos de docentes, pelo mecanismo de conversas de uma rede social e por e-mail, obtendo-se uma amostra de 45 professores. A aplicação do instrumento de pesquisa ocorreu em dezembro de 2020.

É importante mencionar a dificuldade para a realização da pesquisa devido muitas pessoas receberem o questionário e não responderem. A quantidade de questionários respondidos é bem inferior à quantidade que deveríamos ter para a análise dos dados que nos interessam.

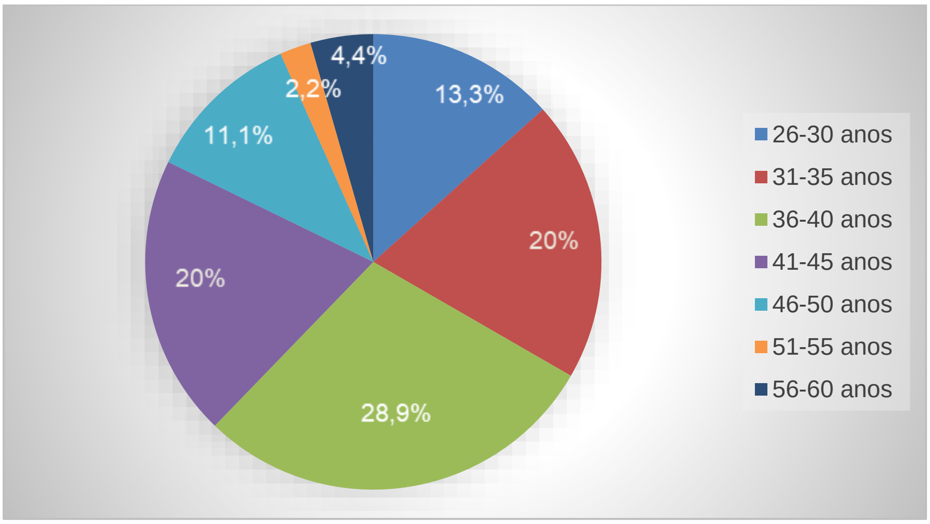
De posse dos dados colhidos, fizemos a sua descrição e análise, procurando traçar o panorama do processo de ensino de mmc e mdc realizado pelos professores. Essa pesquisa resultou em um artigo publicado, em parceria com a professora do PPGEM doutora Ana Kely Martins da Silva, no 11º Seminário de Cognição e Educação Matemática (SCEM), evento realizado pela UEPA anualmente.

Aqui separamos a análise em três categorias: perfil dos professores, aspectos do ensino de Matemática e aspectos do ensino e aprendizagem de mmc e mdc.

2.2.1 Perfil dos Professores

Ao todo tivemos 45 questionários respondidos por professores para a realização da análise dos dados. Dos 45 docentes de Matemática, 32 (71,1%) eram do sexo masculino e 13 (28,9%) do sexo feminino. O gráfico 1 mostra a faixa etária dos professores pesquisados.

Gráfico 1 - Faixa etária dos docentes.

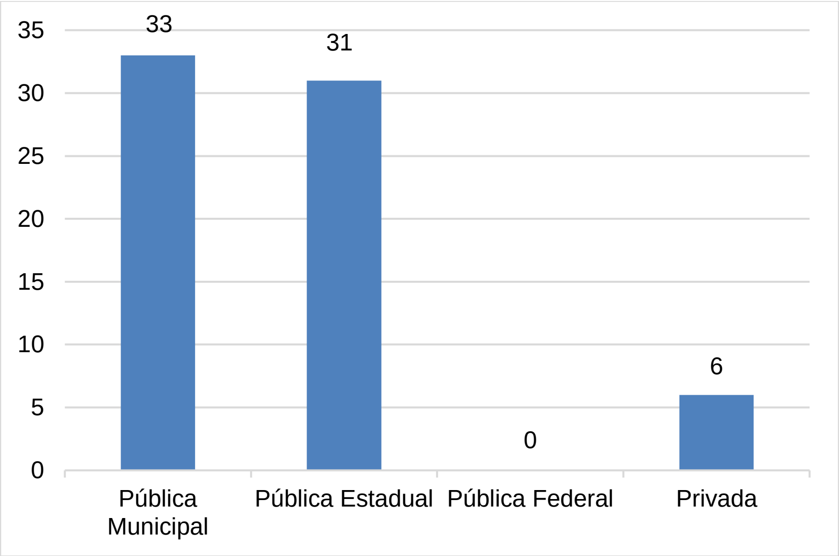


Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Percebemos no gráfico 1 que a maioria, ou seja, 31 (68,9%) professores tinham entre 31 a 45 anos de idade. Sobre qual curso de graduação possuíam os pesquisados, 44 (97,8%) tinham Licenciatura em Matemática e 1 (2,2%) tinha Pedagogia; 30 (66,7%) tinham especialização como maior titulação acadêmica, 8 (17,8%) tinham apenas graduação e 7 (15,6%) tinham curso de mestrado. Nota-se aqui um ponto positivo: o interesse dos professores pesquisados por cursos de pós-graduação.

O gráfico 2 a seguir mostra em que tipo de escola trabalhavam os pesquisados.

Gráfico 2 - Tipo de escola em que trabalhavam os professores



Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Notamos do gráfico 2 que 33 (73,3%) educadores trabalhavam em escola pública municipal, 31 (68,9%) em escola pública estadual e 6 (13,3%) em escola privada (alguns trabalhavam em mais de uma esfera e foi pedido a eles que respondessem as questões sobre ensino e aprendizagem considerando sua experiência na rede pública); a maior parte dos pesquisados, ou seja, 30 (66,7%) tinham entre 6 a 20 anos de tempo de serviço como professor de Matemática.

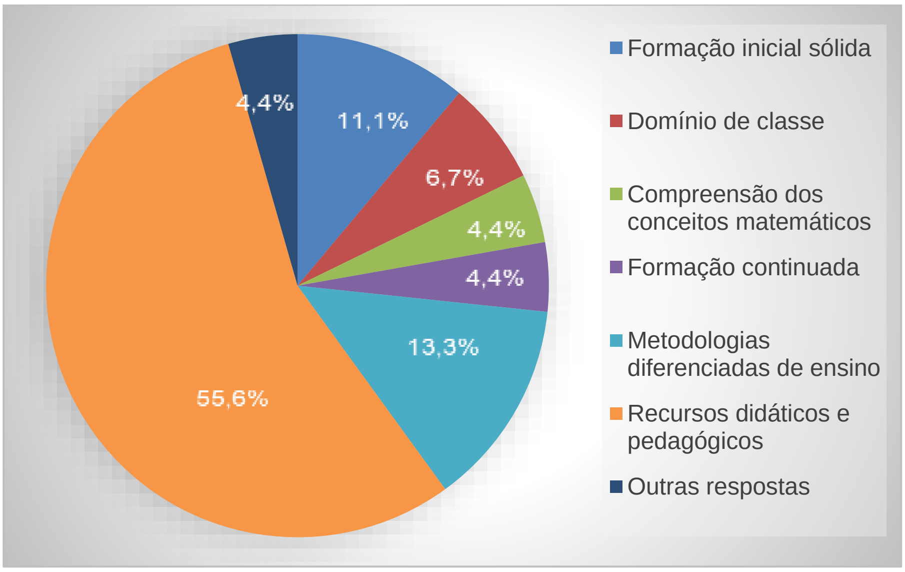
Quando perguntado aos professores pesquisados se a(s) rede(s) pública(s) de ensino em que atuava(m) oferecia(m) formação continuada, 29 (64,4%) responderam que oferecia(m) raramente, 10 (22,2%) que ofertava(m) frequentemente, 3 (6,7%) que oferecia(m) sempre e outros 3 (6,7%) disseram que não ofertava(m); quando questionado qual era a sua atitude quando a(s) rede(s) pública(s) de ensino onde trabalhavam, ou ainda outras instituições, ofertavam curso de formação continuada, 17 (37,8%) responderam que participavam poucas vezes, 15 (33,3%) que participavam sempre, 11 (24,4%) que participavam muitas vezes e 2 (4,4%) que não participavam.

Observamos dois fatos negativos: a maioria dos pesquisados afirmou que há pouca oferta de cursos de formação continuada por parte da(s) rede(s) onde lecionava e também boa parte dos professores afirmou que participava poucas vezes ou não participava de cursos desse tipo quando eram ofertados, apesar de termos notado mais acima o interesse desses docentes por cursos de pós-graduação. Ao nosso ver, a formação continuada é muito importante para a melhoria do ensino e da aprendizagem e não se limita somente a cursos de especialização, mestrado e doutorado.

2.2.2 Aspectos do Ensino de Matemática

Quando perguntado aos professores sobre a maneira como costumavam iniciar suas aulas de Matemática, 24 (53,3%) disseram que iniciavam com uma situação-problema para depois introduzir o assunto, 17 (37,8%) que iniciavam pelo conceito seguido de exemplos e exercícios, 1 (2,2%) que começava com a criação de um modelo para uma situação e em seguida analisando o modelo, e 3 (6,7%) deram outras respostas. Quando questionados sobre o que mais sentiam falta quando ministravam suas aulas de Matemática, os professores deram as respostas que estão no gráfico 3.

Gráfico 3 - O que mais os professores sentiam falta na ministração de aulas



Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Segue do gráfico 3 que 25 (55,6%) professores responderam que sentiam falta de recursos didáticos e pedagógicos, 6 (13,3%) afirmaram que sentiam falta de metodologias diferenciadas de ensino, 5 (11,1%) disseram que sentiam falta de formação inicial sólida, 3 (6,7%) responderam que sentiam falta de domínio de classe, 2 (4,4%) afirmaram que sentiam falta de compreensão dos conceitos matemáticos, 2 (4,4%) disseram que sentiam falta de formação continuada e outros 2 (4,4%) deram outras respostas. Isso mostra que a maioria das aulas que são ministradas não envolvem muitos recursos didáticos e metodologias diferenciadas, seja pela falta de estrutura das escolas, pela falta de tempo disponível do docente para a preparação de aulas com recursos inovadores, pelos educadores não estarem preparados devido sua formação inicial não ter abordado de maneira profunda esses assuntos ou por outros motivos.

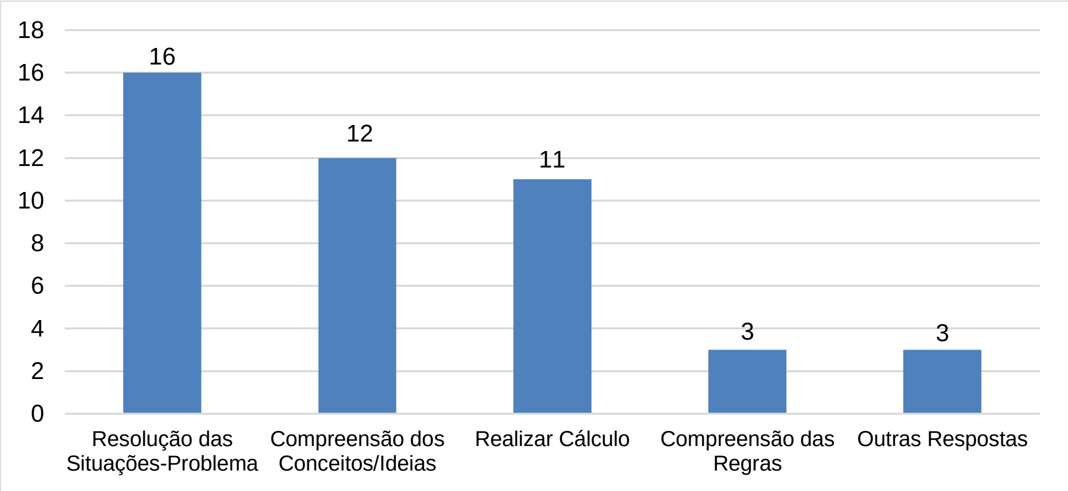
Quando perguntado a partir do que os pesquisados selecionavam os conteúdos de Matemática, 30 (66,7%) disseram que da BNCC, 29 (64,4%) disseram que do livro didático, 13 (28,9%) afirmaram que selecionavam do PCN, 6 (13,3%) responderam que do caderno de orientação da rede de ensino e 3 (6,7%) deram outras respostas (nessa questão os pesquisados podiam marcar mais de uma alternativa). Observamos que a BNCC e o livro didático são muito usados e que, portanto, eles têm uma grande influência sobre o que é ensinado nas escolas.

Quando indagados sobre quais as principais formas de avaliação que costumavam aplicar/utilizar, 41 (91,1%) docentes responderam que utilizavam prova escrita, 35 (77,8%) afirmaram que levavam em conta trabalhos individuais, 31 (68,9%) disseram que levavam em consideração produções no caderno, 26 (57,8%) afirmaram que utilizavam trabalhos aplicados em grupo, 5 (11,1%) responderam que faziam uso da autoavaliação, 3 (6,7%) disseram que utilizavam prova oral e outros 3 (6,7%) deram outras respostas (nessa questão os pesquisados também podiam marcar mais de uma alternativa).

Como o intuito desta dissertação de mestrado era elaborar uma sequência didática para o ensino de mmc e mdc, perguntamos se os professores pesquisados conheciam esse procedimento e se já o utilizaram em suas aulas. 35 (77,8%) educadores responderam que conheciam o procedimento e 10 (22,2%) disseram que não o conheciam, enquanto que 26 (57,8%) afirmaram que não tinham usado o referido procedimento e 19 (42,2%) disseram que já o utilizaram.

Quando perguntado se os professores consideravam a Matemática uma disciplina difícil de ser ensinada, 29 (64,4%) deles responderam que não e 16 (35,6%) afirmaram que sim. Quando indagados sobre se os alunos deles gostavam de Matemática, 32 (71,1%) docentes afirmaram que a minoria dos seus alunos gostava enquanto que 13 (28,9%) responderam que a maioria dos estudantes com quem trabalhavam gostava da disciplina. Consideramos que o fato da minoria dos alunos gostarem de Matemática está de acordo com a realidade enfrentada na nossa atuação e que isso é consequência do insucesso dos estudantes nessa disciplina. O gráfico 4 apresenta as respostas colhidas sobre qual era a maior dificuldade dos alunos dos professores pesquisados nas aulas de Matemática.

Gráfico 4 - Maior dificuldade dos alunos nas aulas



Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Segue do gráfico 4 que 16 (35,6%) professores disseram que a maior dificuldade era a resolução das situações-problema, 12 (26,7%) responderam que era a compreensão dos conceitos/ideias, 11 (24,4%) afirmaram que era realizar cálculo, 3 (6,7%) disseram que era a compreensão das regras e outros 3 (6,7%) deram outras respostas.

2.2.3 Aspectos do Ensino e Aprendizagem de MMC e MDC

Ao serem perguntados sobre quais itens, dos quais listamos, os pesquisados costumavam ensinar quando ministravam mmc, obtivemos as respostas que estão organizadas na tabela 3 seguinte:

Tabela 3 – Itens do conteúdo mmc ensinados pelos professores

Item	Quantidade de Professores que o Ensinam
Conceito de mmc.	37 (82,2%)
Cálculo do mmc entre dois ou mais números sem processo prático.	36 (80%)
Processo prático para o cálculo do mmc entre dois ou mais números.	36 (80%)
Resolução de situações-problema.	39 (86,7%)
Outro item (não listado).	2 (4,4%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Ao serem indagados sobre quais itens, dos quais listamos, os professores costumavam ensinar quando ministravam mdc, obtivemos as respostas organizadas na tabela 4 seguinte:

Tabela 4 – Itens do conteúdo mdc ensinados pelos professores

Item	Quantidade de Professores que o Ensinam
Conceito de mdc.	37 (82,2%)
Cálculo do mdc entre dois ou mais números sem processo prático.	37 (82,2%)
Processo prático para o cálculo do mdc entre dois ou mais números.	37 (82,2%)
Números primos entre si.	35 (77,8%)
Resolução de situações-problema.	37 (82,2%)
Outro item (não listado).	1 (2,2%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Observamos que mesmo a BNCC citando muito pouco o mmc e o mdc, como falamos na introdução deste trabalho, grande parte dos professores lecionava todos os tópicos que elencamos. Talvez o currículo da rede onde esses professores atuavam tenha fundamentado mais o ensino desses conteúdos ou seja consequência do fato de estarem acostumados a ministrá-los antes da homologação da Base. Pode existir o fato também de docentes que lecionaram há alguns anos os referidos assuntos, ou seja, antes da implementação da BNCC, terem respondido o questionário.

Quando questionados sobre o grau de dificuldade dos alunos nos itens que listamos, relacionados ao mmc, com base na experiência que os pesquisados tinham, obtivemos a quantidade de respostas “fácil”, “médio”, “difícil” e “muito difícil” conforme a tabela 5 seguinte:

Tabela 5 – Grau de dificuldade dos alunos nos tópicos de mmc

Item	Respostas “Fácil”	Respostas “Médio”	Respostas “Difícil”	Respostas “Muito Difícil”
Conceito de mmc.	18 (40%)	21 (46,7%)	4 (8,9%)	2 (4,4%)
Cálculo do mmc entre dois ou mais números sem processo prático.	11 (24,4%)	23 (51,1%)	9 (20%)	2 (4,4%)
Processo prático para o cálculo do mmc entre dois ou mais números.	12 (26,7%)	25 (55,6%)	6 (13,3%)	2 (4,4%)
Resolução de situações-problema.	2 (4,4%)	9 (20%)	27 (60%)	7 (15,6%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Observamos que nos três primeiros itens a maior parte dos pesquisados acreditava que o nível de dificuldade dos alunos para a compreensão dos mesmos era médio. E que o quarto item, no qual estudantes têm que interpretar questões e aplicar em alguma situação os conceitos e técnicas que aprenderam, a maioria dos docentes concebia que era de difícil compreensão.

Quando questionados sobre o grau de dificuldade dos alunos nos itens que listamos, relacionados ao mdc, com base na experiência que os pesquisados tinham, obtivemos a quantidade de respostas “fácil”, “médio”, “difícil” e “muito difícil” conforme tabela 6, a seguir:

Tabela 6 - Grau de dificuldade dos alunos nos tópicos de mdc

Item	Respostas “Fácil”	Respostas “Médio”	Respostas “Difícil”	Respostas “Muito Difícil”
Conceito de mdc.	14 (31,1%)	24 (53,3%)	5 (11,1%)	2 (4,4%)
Cálculo do mdc entre dois ou mais números sem processo prático.	6(13,3%)	25 (55,6%)	11 (24,4%)	3 (6,7%)
Processo prático para o cálculo do mdc entre dois ou mais números.	5 (11,1%)	29 (64,4%)	9 (20%)	2 (4,4%)
Números primos entre si.	7 (15,6%)	26 (57,8%)	9 (20%)	3 (6,7%)
Resolução de situações-problema.	1 (2,2%)	13 (28,9%)	24 (53,3%)	7 (15,6%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Constatamos que nos quatro primeiros itens a maior parte dos docentes pesquisados considerava que o nível de dificuldade dos alunos para a compreensão dos mesmos era médio. E que o quinto item, no qual os educandos têm que interpretar questões e aplicar o que aprenderam, a maioria dos professores concebia que era de difícil compreensão. É pertinente dizermos aqui que por mais que seja um desafio abordar situações-problema durante o ensino, elas têm grande importância, pois mostram a aplicação de conteúdos, dando-os significado, e trabalham a leitura e a interpretação de textos.

Quando indagados sobre de que maneira costumavam iniciar a apresentação dos conteúdos mmc e mdc quando os ministravam, os pesquisados deram as respostas que estão na tabela 7 seguinte:

Tabela 7 – Forma de apresentação dos conteúdos mmc e mdc pelos docentes

Maneira que Apresenta os Conteúdos	**Quantidade de Professores que Utiliza a Maneira**
Apresento uma situação-problema e logo depois passo para a definição e os exemplos.	24 (53,3%)
Exponho a definição e exemplos.	13 (28,9%)
Apresento uma atividade introdutória para que os alunos comecem a construir esses conceitos.	7 (15,6%)
Outra maneira (não listada).	1 (2,2%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Notamos que a maior parte dos professores apresentava os conteúdos de maneira tradicional, não privilegiando o uso de uma metodologia que contribua para a construção gradual dos conceitos e procedimentos.

Quando questionados, com base na experiência que tinham como professores, em qual dos assuntos listados por nós os estudantes apresentavam falta de conhecimento ou pouco conhecimento, dificultando o aprendizado dos conteúdos mmc e mdc, os docentes deram as respostas que estão na tabela 8 abaixo (nessa questão os pesquisados podiam marcar mais de uma alternativa):

Tabela 8 – Assuntos em que os estudantes apresentavam pouco conhecimento

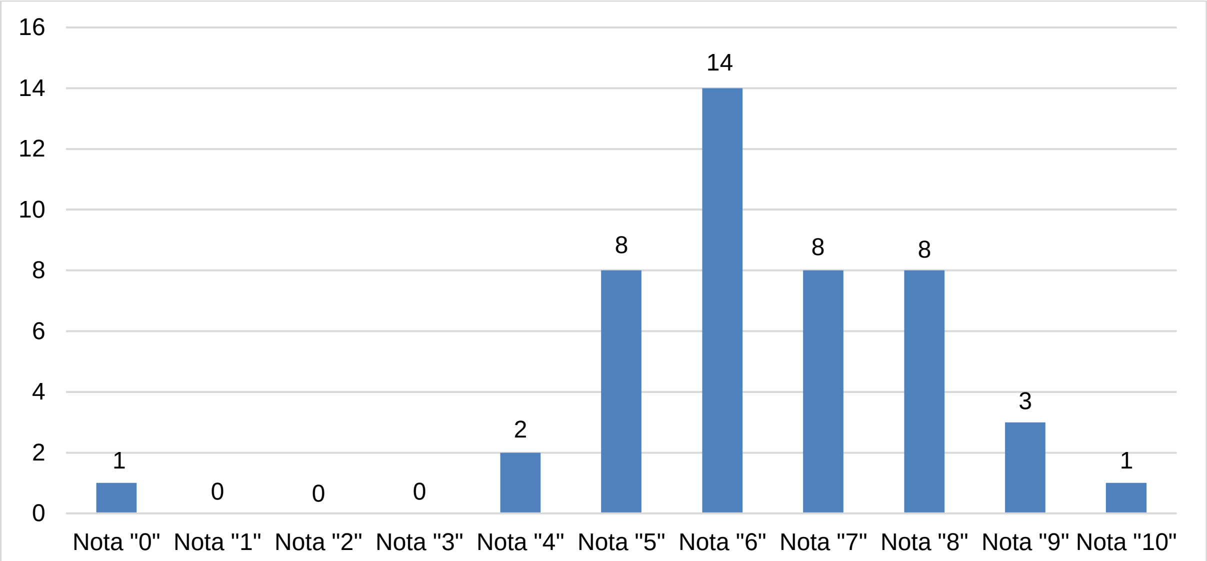
Assunto	**Quantidade de Professores que Indicaram o Assunto**
Multiplicação com números naturais.	18 (40%)
Divisão com números naturais.	34 (75,6%)
Conceito de múltiplos.	20 (44,4%)
Conceito de divisores.	32 (71,1%)
Critérios de divisibilidade.	33 (73,3%)
Números primos.	20 (44,4%)
Decomposição de um número natural em fatores primos.	23 (51,1%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

Notamos que todos os assuntos listados foram indicados por uma porcentagem razoável de professores, porém os mais enfatizados como sendo aqueles que os estudantes tinham falta de conhecimento ou pouco conhecimento foram “divisão com números naturais”, “conceito de divisores” e “critérios de divisibilidade”, fato que está coerente com o que presenciamos no exercício da nossa profissão. Sobre esse ponto, Fiorelli (2017) constata que mesmo depois da aplicação do projeto, que fez parte da sua dissertação, para a aprendizagem de mmc e mdc, os estudantes da turma de 8º ano ainda apresentavam dificuldades com os conceitos de múltiplos, de divisores, de mmc e mdc de números naturais e com o algoritmo da divisão.

Na penúltima questão do questionário pedimos aos professores pesquisados que, com base em suas experiências, avaliassem o aprendizado dos alunos sobre mmc e mdc, depois deles ministrarem esses conteúdos, atribuindo uma nota de 0 a 10, em que 0 significaria que a maioria dos alunos não tem aprendizado nenhum e 10 significaria que eles obtêm um aprendizado excelente. As respostas que obtivemos estão organizadas no gráfico 5 a seguir:

Gráfico 5 - Notas atribuídas ao aprendizado discente



Fonte: Protocolos da pesquisa, 2020.

É importante ressaltarmos que com essa questão não estamos querendo tratar o aprendizado de maneira simplista, sem ter consciência que o conhecimento dos alunos não pode ser medido, porém trata-se de uma maneira de termos a opinião docente sobre a situação dos estudantes em relação aos conteúdos mmc e mdc. Desse modo, notamos que 25 (55,6%) pesquisados atribuíram uma nota igual ou menor a “6”, o que revela que na concepção desses professores os alunos não conseguem aprender os conteúdos de forma profunda. Essa situação também é observada na nossa atuação docente. Assim, concebemos que o ensino de mmc e mdc merece uma atenção especial.

Na última questão do questionário de pesquisa perguntamos qual seria, na opinião dos professores pesquisados, o fator principal para que os estudantes apresentassem o nível de aprendizado sobre os conteúdos mmc e mdc que os docentes responderam na questão anterior.

Desse modo, educadores que atribuíram uma nota igual ou superior a 8, deram respostas como “Relaciono os conteúdos com situações cotidianas para que assim traga o aluno pra perto do conteúdo.”, “Perseverança nos estudos.”, “O bom relacionamento com a turma facilita a aceitação das atividades introdutórias e a competição” e “Ao longo do processo os alunos vão evoluindo para o estudo de MDC e MMC”. E docentes que atribuíram nota igual ou inferior a 7, apresentaram respostas como “A grande maioria não tem incentivo dos pais um acompanhamento mínimo p resolver as atividades.”, “Falta de interesse e compromisso no estudo”, “Ausência do domínio em assuntos que são pré-requisitos para compreender MMC e MDC.”, “As condições sociais e econômicas dos alunos da escola pública acabam afetando o seu desempenho.”, “Salas super lotadas e pouco estrutura para desenvolver nossas atividades” e “Falta de base e poucas qualificações ao professor como cursos e outros”.

Consideramos preocupante a pouca participação da família dos estudantes na educação deles e a pouca estrutura oferecida nas escolas da Educação Básica por parte da gestão pública, pois formar cidadãos qualificados exige participação de toda a sociedade. Contudo, por mais que alguns fatores que contribuem para um desempenho não satisfatório dos alunos não estejam diretamente relacionados com o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, as respostas das duas últimas questões do questionário denotam a necessidade da elaboração de materiais didáticos inovadores para o ensino de mmc e mdc, com o objetivo de melhorar a aprendizagem desses conteúdos. Esses materiais podem despertar o interesse dos alunos para a Matemática.

2.3 Concepções dos Estudantes Egressos do 7º Ano

Para obter mais informações acerca do ensino e aprendizagem de mmc e mdc também realizamos uma pesquisa de campo com estudantes que tinham saído do 7º ano do Ensino Fundamental recentemente. Assim, em dezembro de 2022 fomos presencialmente em duas escolas da Rede Estadual de Ensino do Pará e uma escola da Rede Municipal de Ananindeua/PA aplicar um questionário com 22 questões para estudantes que estavam cursando o 8º ano. O referido questionário encontra-se no Anexo B deste trabalho.

O questionário era composto de questões sociais, as quais possuíam o intuito de traçar o perfil social dos pesquisados, de questões sobre o ensino e aprendizagem de Matemática de forma geral, e de questões mais específicas sobre o ensino e aprendizagem de mmc e mdc.

Ao aplicar os questionários explicamos alguns pontos nos quais, ao nosso ver, os estudantes poderiam apresentar dúvidas, dissemos que as questões em que eles não lembravam ou não tinham a informação para responder, ou ainda, não estavam de acordo com respostas anteriores dadas no referido instrumento, deveriam deixar em branco, com exceção da questão 19, única na qual havia como colocar que não lembrava de algo. Também nos colocamos a disposição para esclarecer dúvidas durante toda a aplicação.

Ao todo obtivemos 103 questionários respondidos. Os dados analisados estão separados em três categorias: perfil social dos estudantes, aspectos do ensino e aprendizagem de Matemática e aspectos do ensino e aprendizagem de mmc e mdc.

2.3.1 Perfil Social dos Estudantes

Sobre a faixa etária dos pesquisados, 16 (15,5%) estudantes responderam que tinham 13 anos, 36 (34,9%) disseram que tinham 14 anos, 23 (22,3%) responderam que tinham 15 anos, 18 (17,4%) pesquisados disseram que possuíam 16 anos, 6 (5,8%) responderam que sua idade era 17 anos, 1 (0,9%) disse que tinha 18 anos e 3 (2,9%) não informaram a idade.

Dos estudantes que responderam ao questionário, 57 (55,3%) eram do sexo masculino, 45 (43,6%) eram do sexo feminino e 1 (0,9%) não declarou seu sexo.

Sobre o tipo de escola em que estudavam os pesquisados, 43 (41,7%) eram de escola pública municipal, 59 (57,2%) frequentavam escola pública estadual e 1 (0,9%) não informou o tipo de escola.

Quando perguntados sobre quem era seu responsável masculino, 58 (56,3%) disseram que era o pai, 9 (8,7%) responderam que era o avô, 8 (7,7%)

informaram que o tio era o responsável por eles, 18 (17,4%) disseram que não possuíam, 7 (6,7%) disseram que o responsável era outra opção não elencada na questão e 3 (2,9%) não responderam. Chama-nos atenção a quantidade considerável de escolares que não tem como responsável masculino o próprio pai, e também, e mais preocupante, a quantidade dos que não possuem responsável do sexo masculino. Esse tipo de ausência de responsável pode estar trazendo consequências negativas tanto para a vida financeira da família dos estudantes como para outras áreas da vida e desenvolvimento dos adolescentes, entre elas, a Educação escolar.

Quando indagados sobre qual era a escolaridade do seu responsável masculino, 1 (0,9%) educando disse que o responsável não estudou, 22 (21,3%) responderam que era Ensino Fundamental incompleto, 13 (12,6%) disseram que era Ensino Fundamental completo, 19 (18,4%) informaram que o responsável possuía Ensino Médio completo, 5 (4,8%) responderam que o responsável masculino tinha Ensino Superior e 43 (41,7%) não responderam essa questão. A quantidade grande de escolares que não responderam se deve ao fato de parte deles não possuírem responsável do sexo masculino.

Ao serem perguntados se seu responsável masculino trabalhava, 79 (76,6%) responderam que sim, 4 (3,8%) disseram que não e 20 (19,4%) não responderam.

Quando questionados sobre quem era sua responsável feminina, 83 (80,5%) disseram que era a mãe, 10 (9,7%) responderam que era a avó, 6 (5,8%) relataram que era a tia, 1 (0,9%) informou que não possuía responsável feminina, 2 (1,9%) deram outras respostas não abrangidas na questão e 1 (0,9%) não respondeu.

Quando indagados sobre qual era a escolaridade da sua responsável feminina, 3 (2,9%) educandos relataram que a responsável não estudou, 24 (23,3%) responderam que era Ensino Fundamental incompleto, 21 (20,3%) disseram que era Ensino Fundamental completo, 27 (26,2%) informaram que a responsável tinha Ensino Médio completo, 8 (7,7%) responderam que a responsável feminina possuía Ensino Superior e 20 (19,4%) não responderam essa questão.

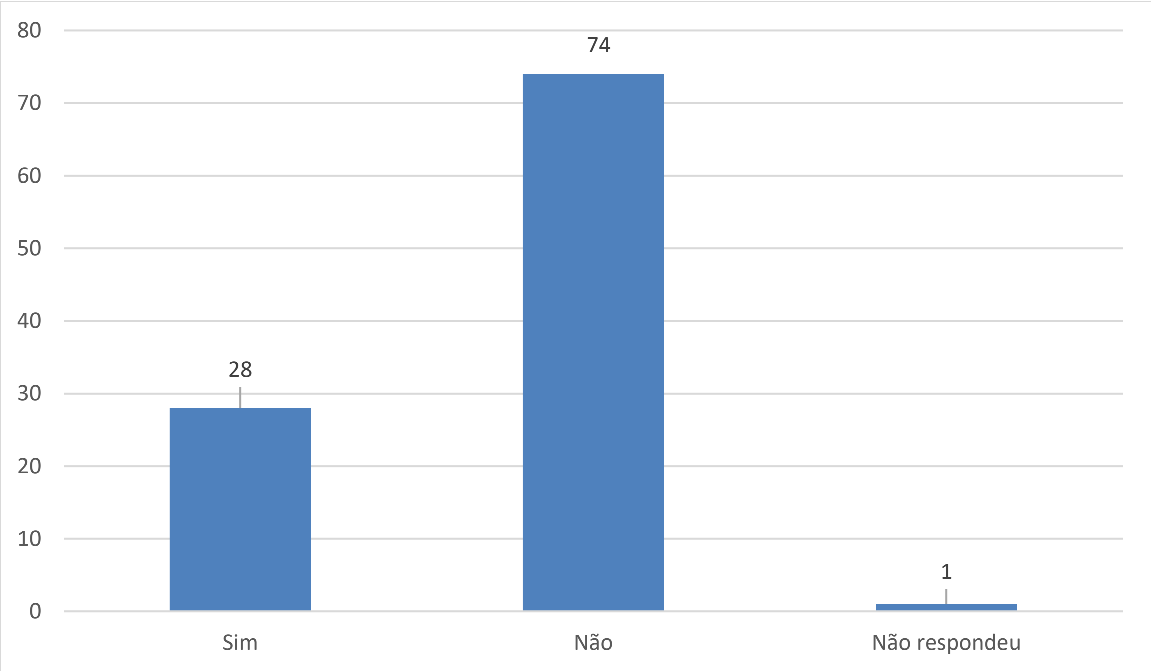
Nota-se que o grau de escolaridade dos responsáveis masculino e feminino da maioria dos estudantes é baixo, com poucos com a formação do Ensino Médio e mais raramente com a do Ensino Superior.

O que vemos na nossa experiência profissional é que, geralmente, pais que não estudaram muito não passam para seus filhos a orientação da importância de alcançar níveis altos de instrução. Também é comum a pouca escolaridade influenciar na condição financeira da família. Esses dois fatos devem causar nos educadores a reflexão sobre executar trabalho pedagógico apropriado para esse público de estudantes tão presente na escola pública.

Ao serem questionados se sua responsável feminina trabalhava, 65 (63,1%) responderam que sim, 36 (34,9%) disseram que não e 2 (1,9%) não responderam.

O gráfico 6 apresenta as respostas colhidas do questionamento sobre se os estudantes trabalhavam para ajudar a família ou mesmo gastar dinheiro com eles próprios.

Gráfico 6 - Respostas sobre se o estudante trabalhava



Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

Segue do gráfico 6 que 28 (27,1%) dos pesquisados disseram que sim, 74 (71,8%) disseram que não e 1 (0,9%) não respondeu. Vemos que uma parte considerável dos educandos pesquisados já trabalhava. O tipo de trabalho e a quantidade de horas trabalhadas podiam estar influenciando negativamente a vida escolar dos pesquisados. Existe também a questão do crime de trabalho infantil, que muitos deles podiam estar sendo vítimas.

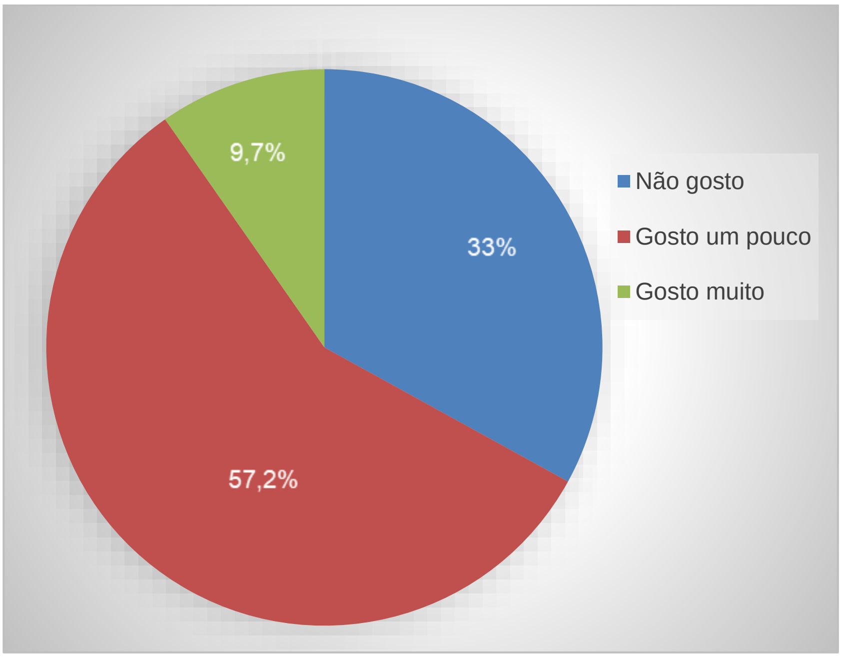
2.3.2 Aspectos do Ensino e Aprendizagem de Matemática

Ao serem perguntados sobre se já tinham ficado reprovados na escola, 55 (53,3%) adolescentes responderam que não, 26 (25,2%) disseram que tinham ficado uma vez, 16 (15,5%) relataram que ficaram duas vezes, 5 (4,8%) disseram que ficaram reprovados mais de duas vezes e 1 (0,9%) não deu resposta a essa questão.

Ao serem indagados sobre se já tinham ficado em dependência em Matemática, 78 (75,7%) educandos responderam que não, 12 (11,6%) disseram que ficaram uma vez, 2 (1,9%) relataram que ficaram duas vezes, 5 (4,8%) responderam que ficaram mais de duas vezes e 6 (5,8%) não deram resposta a essa questão.

Quando questionados se gostavam de Matemática, os estudantes deram as respostas que estão no gráfico 7.

Gráfico 7 - Respostas sobre se o discente gostava de Matemática

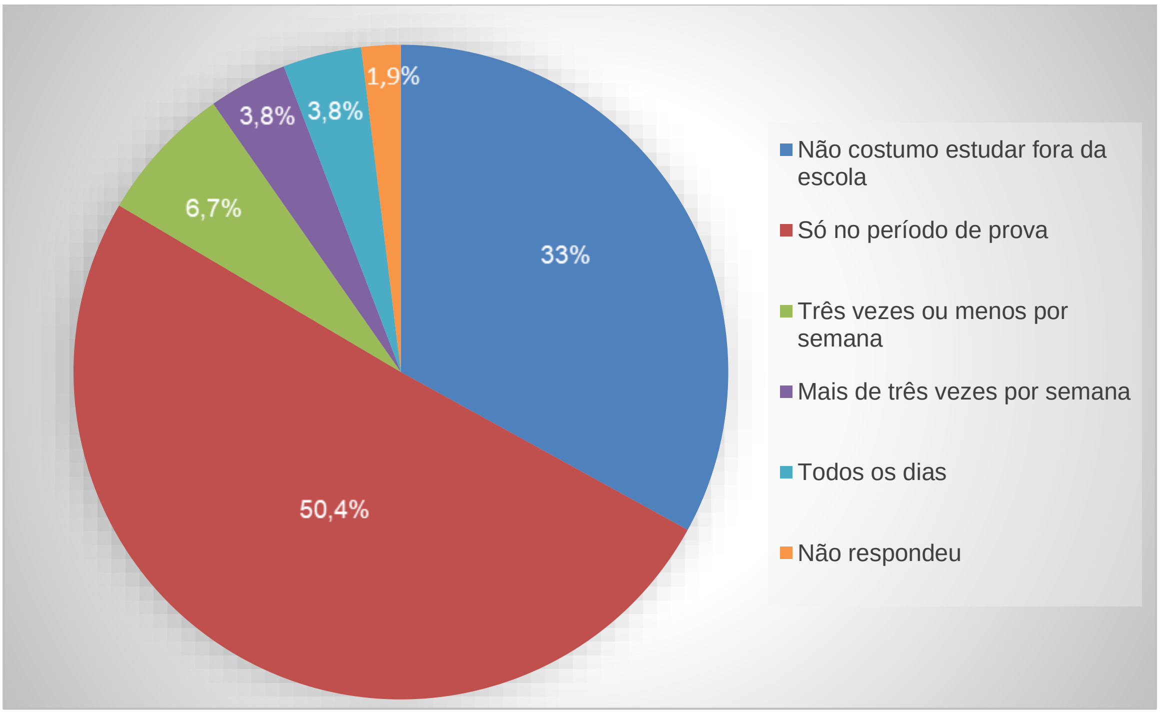


Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

Segue do gráfico 7 que 34 (33%) estudantes responderam que não gostavam de Matemática, 59 (57,2%) afirmaram que gostavam um pouco e 10 (9,7%) disseram que gostavam muito da disciplina. Observamos que uma quantidade considerável de educandos declarou que não gostava dessa disciplina escolar, o que implicará na atitude deles diante do processo de aprendizagem. Desse modo, mais uma vez fica nítida a importância da construção de metodologias e materiais didáticos que tragam dinamismo e até diversão para o processo educativo.

Perguntamos também aos discentes com que frequência costumavam estudar Matemática fora da escola. As respostas estão no gráfico 8.

Gráfico 8 - Frequência com que o estudante estudava Matemática fora da escola



Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

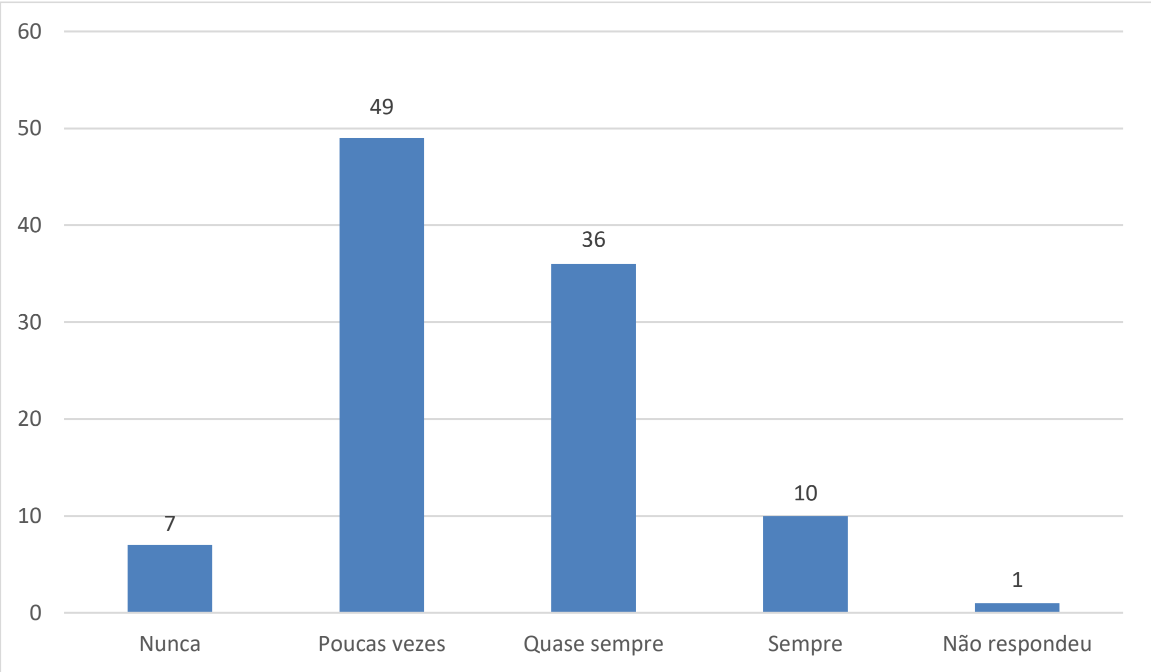
Segue do gráfico que 34 (33%) adolescentes responderam que não costumavam estudar Matemática quando não estavam na escola, 52 (50,4%) informaram que estudavam só no período de prova, 7 (6,7%) disseram que costumavam estudar três vezes ou menos por semana, 4 (3,8%) relataram que estudavam mais de três vezes por semana, 4 (3,8%) disseram que estudavam todos os dias e 2 (1,9%) não responderam. Percebemos a ausência de hábito de estudo na maioria dos pesquisados, o que, certamente, implica no seu desempenho na disciplina.

Quando indagados sobre quem mais os ajudava nas tarefas de Matemática, 3 (2,9%) discentes responderam que era o professor particular deles, 12 (11,6%) disseram que era o pai ou responsável masculino, 16 (15,5%) relataram que era a mãe ou responsável feminina, 3 (2,9%) responderam que era o irmão ou a irmã, 6 (5,8%) informaram que era um colega de turma, 53 (51,4%) disseram que ninguém os ajudava, 5 (4,8%) pesquisados deram outras respostas não listadas na questão e 5 (4,8%) deles não responderam. Notamos com isso a falta de acompanhamento e atuação da família dos estudantes, fato também abordado pelos professores de Matemática na pesquisa com os docentes, no subcapítulo anterior.

Nesse ponto, cabe ressaltarmos a queixa de vários professores de Matemática e em geral de que as instituições de ensino e a sociedade os tem, muitas vezes, como os únicos responsáveis pelo eventual fracasso escolar discente, mas é notório que muitos alunos e famílias de estudantes não têm o compromisso que deveriam ter no processo educativo, sem falar em outros fatores negativos que também não são da competência dos docentes.

Ao perguntarmos se o professor de Matemática dos pesquisados demonstrava ter um bom nível de conhecimento e segurança ao trabalhar os conteúdos escolares, 100 (97%) estudantes responderam que sim e 3 (2,9%) disseram que não. Quando indagamos sobre a frequência com que os educandos conseguiam compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática, obtivemos as respostas que estão no gráfico 9.

Gráfico 9 – Compreensão das explicações dadas em sala de aula



Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

Vemos do gráfico que 7 (6,7%) adolescentes disseram que nunca compreendiam as explicações dadas pelo professor nas aulas de Matemática, 49 (47,5%) responderam que entendiam poucas vezes, 36 (34,9%) alegaram que compreendiam quase sempre, 10 (9,7%) informaram que entendiam sempre as explicações e 1 (0,9%) não deu resposta a essa questão. Percebemos que mesmo com quase a totalidade dos estudantes reconhecendo que seu professor de Matemática tem um bom nível de conhecimento e segurança ao ensinar, uma boa parte dos educandos disse que nunca ou poucas vezes compreendia as explicações dos conteúdos.

Quando questionados sobre como os estudantes se sentiam quando estavam diante de uma avaliação em Matemática, 9 (8,7%) pesquisados responderam que se sentiam entusiasmados, 34 (33%) disseram que se sentiam tranquilos, 50 (48,5%) informaram que se sentiam preocupados, 33 (32%) alegaram que se sentiam com medo, 4 (3,8%) responderam que se sentiam com raiva, 8 (7,7%) disseram que se sentiam de outra forma não listada na questão e 1 (0,9%) não respondeu. Nessa questão os pesquisados podiam marcar mais de uma alternativa.

2.3.3 Aspectos do Ensino e Aprendizagem de MMC e MDC

Pedimos aos adolescentes que assinalassem que conteúdos de divisibilidade que elencamos já haviam estudado na escola. Nosso interesse foi pela divisibilidade como um todo porque estávamos interessados tanto nas informações sobre terem estudado ou não mmc e mdc como sobre terem visto ou não outros assuntos que são a base para entender esses dois conteúdos. As respostas dadas estão na tabela 9.

Tabela 9 – Conteúdos de divisibilidade estudados e não estudados

Conteúdo	**Respostas “Estudei”**	**Respostas “Não Estudei”**	**Respostas “Não Lembro se Estudei”**
Múltiplos	67 (65%)	6 (5,8%)	21 (20,3%)
Divisores	68 (66%)	5 (4,8%)	18 (17,4%)
Critérios de divisibilidade	19 (18,4%)	22 (21,3%)	49 (47,5%)
Números primos	69 (66,9%)	6 (5,8%)	14 (13,5%)
Decomposição de um número em fatores primos	43 (41,7%)	14 (13,5%)	37 (35,9%)
Mínimo múltiplo comum	48 (46,6%)	14 (13,5%)	29 (28,1%)
Máximo divisor comum	31 (30%)	14 (13,5%)	43 (41,7%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

É importante ressaltarmos que muitos desses alunos ou talvez a totalidade deles fizeram o 7º ano em 2021, ano em que na maioria das escolas o ano letivo começou de forma remota e só depois passou a ser presencial, devido a pandemia de covid-19, e que em várias Secretarias de Educação a orientação foi ministrar um currículo escolar propedêutico. Nesse sentido, alguns conteúdos que listamos podem ter sido eliminados do currículo.

Cabe ressaltarmos que a suspensão das aulas presenciais durante a pandemia de covid-19 também acentuou as dificuldades dos estudantes nas disciplinas escolares, pois, na maioria das redes de ensino, durante um ano e meio, o ensino aconteceu de forma precária, sem recursos didáticos, sem a presença constante do professor e sem as interações dos alunos com os seus colegas. Essa lacuna na aprendizagem acompanhará a vida escolar dos alunos mais jovens por anos. Assim, muitas vezes, os docentes encontram bastantes obstáculos para ensinar conteúdos, pois a base para o aprendizado dos mesmos foi prejudicada. Diante disso, as escolas e os educadores têm que fazer um trabalho paciente voltado a minimizar as deficiências deixadas por esse período, ou seja, um trabalho para recompor aprendizagens.

Na questão seguinte do questionário pedimos aos estudantes que assinalassem o nível de dificuldade que tiveram durante a aprendizagem dos conteúdos de divisibilidade que elencamos. As respostas dadas estão na tabela 10. Nesse momento, apresentaremos o percentual em cada item considerando como a totalidade a quantidade de educandos que responderam e não os 103 questionários aplicados.

Tabela 10 - Grau de dificuldade dos estudantes nos conteúdos de divisibilidade

Conteúdo	**Respostas “Fácil”**	**Respostas “Médio”**	**Respostas “Difícil”**	**Respostas “Muito Difícil”**
Múltiplos	30 (44,7%)	28 (41,7%)	8 (11,9%)	1 (1,4%)
Divisores	17 (25,3%)	36 (53,7%)	13 (19,4%)	1 (1,4%)
Critérios de divisibilidade	8 (44,4%)	3 (16,6%)	6 (33,3%)	1 (5,5%)
Números primos	27 (42,8%)	30 (47,6%)	4 (6,3%)	2 (3,1%)
Decomposição de um número em fatores primos	15 (34,8%)	16 (37,2%)	8 (18,6%)	4 (9,3%)
Mínimo múltiplo comum	12 (25,5%)	20 (42,5%)	12 (25,5%)	3 (6,3%)
Máximo divisor comum	6 (19,3%)	14 (45,1%)	9 (29%)	4 (6,4%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

Percebemos que os conteúdos em que mais houveram estudantes considerando-os “difíceis” foram critérios de divisibilidade e mdc, e aqueles em que mais educandos consideraram “muito difíceis” foram decomposição de um número em fatores primos e mdc.

Na penúltima questão do questionário pedimos para os pesquisados sinalizarem como iniciava a maioria das aulas quando estudaram mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Os dados colhidos estão na tabela 11. Nesse momento, também apresentaremos o percentual em cada item considerando como a totalidade a quantidade de educandos que responderam e não os 103 questionários aplicados.

Tabela 11 – Maneira que iniciava a maioria das aulas sobre mmc e mdc

Maneira que Iniciava a Maioria das Aulas	**Quantidade de Estudantes que Sinalizaram a Maneira**
Iniciavam pela definição seguido de exemplos e exercícios	22 (47,8%)
Iniciavam com uma situação-problema para logo depois serem dadas a definição e os exemplos	13 (28,2%)
Iniciavam construindo um modelo para uma situação e em seguida analisando o modelo	9 (19,5%)
Iniciavam com jogos para depois serem sistematizados os conceitos	1 (2,1%)
Iniciavam com uma atividade introdutória para que nós (os alunos) começássemos a construir esses conceitos.	1 (2,1%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

Na última questão do questionário pedimos para os discentes sinalizarem que estratégia o professor deles usou para que os alunos fixassem os conteúdos mmc e mdc quando estudaram os mesmos. Os dados obtidos estão na tabela 12. Novamente, apresentaremos o percentual em cada item considerando como a totalidade a quantidade de educandos que responderam e não os 103 questionários aplicados.

Tabela 12 – Estratégia usada para a fixação dos conteúdos mmc e mdc

Estratégia Usada para a Fixação dos Conteúdos	**Quantidade de Estudantes que Sinalizaram a Estratégia**
Apresentou uma lista de exercícios para serem resolvidos	29 (64,4%)
Apresentou jogos envolvendo o assunto	3 (6,6%)
Solicitou que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático	10 (22,2%)
Não propôs questões de fixação	2 (4,4%)
Outra maneira (não listada)	1 (2,2%)

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2022.

Vemos das respostas dadas às duas questões anteriores, mais uma vez, que o modo de ensinar dos professores ainda é bastante tradicional.

3. ASPECTOS CONCEITUAIS FORMAIS DE MDC E MMC

Neste capítulo abordaremos os aspectos conceituais formais de máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc) no conjunto dos números naturais. Optamos por delimitar a esse conjunto porque a sequência didática deste trabalho abordará esses conteúdos dentro do mesmo. Para entendermos melhor esses conceitos matemáticos, inicialmente discorreremos sobre múltiplos e divisores. Depois a definição dos objetos mdc e mmc são apresentadas, bem como os algoritmos que são usados para o seu cálculo e as justificativas formais desses processos práticos.

Este capítulo se destina, principalmente, a docentes de Matemática que queiram aprofundar seus conhecimentos sobre os referidos objetos e nos forneceu subsídios para a elaboração da sequência didática, haja vista que o professor precisa conhecer o que ensina em um nível elevado.

3.1 Múltiplos e Divisores

Domingues (1991) apresenta a seguinte definição sobre múltiplos e divisores:

Definição 1: Dizemos que um número natural a divide um número natural b se $b = ac$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Neste caso, dizemos também que a é divisor de b e que b é múltiplo de a. Ou ainda que b é divisível por a.

Indicamos por $a \mid b$ o fato de a dividir b; e se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.

Para ilustrarmos essa definição, apresentamos os seguintes exemplos:

$5 \mid 15$, pois $15 = 5 \cdot 3$; $8 \mid 32$, pois $32 = 8 \cdot 4$; e $4 \nmid 39$.

Sobre múltiplos e divisores, o mesmo autor ainda estabelece o exposto abaixo:

Teorema 1: Quaisquer que sejam os números a, b, c e d $\in \mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:

I) $a \mid a, \forall a \in \mathbb{N}$ (reflexiva).

II) $a \mid b \text{ e } b \mid a \Rightarrow a = b$ (anti-simétrica).

III) $a \mid b \text{ e } b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitiva).

IV) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy), \forall x, y \in \mathbb{N}$.

Em particular: $a \mid b \Rightarrow a \mid bx, \forall x \in \mathbb{N}$.

V) Se $c \mid a$, $c \mid b$ e $a \leq b$, então $c \mid (b - a)$.

VI) Seja $a = b + c$ e suponhamos $d \mid b$. Então $d \mid a \Leftrightarrow d \mid c$. $(c = a - b)$.

VII) Se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $a \leq b$.

Demonstração:

I) Podemos escrever que $a = a \cdot 1$, então $a \mid a$.

II) De fato, $b = ac$ e $a = bd$. Assim, $a = a(cd)$.

Se $a = 0$, como $b = ac$, então $b = 0$.

Se $a \neq 0$, então $cd = 1$ e portanto $c = d = 1$. Logo $a = b$ também neste caso.

III) Como $b = ar$ e $c = bs$, então $c = a(rs)$.

IV) Temos que $b = ar$ e $c = as$.

Daí decorre que $bx = arx$ e $cy = asy$.

Portanto, $bx + cy = arx + asy = a(rx + sy)$.

V) Temos que $a = cr$ e $b = cs$.

Fazendo $b = a + u$, então $cs = cr + u$.

Daí $u = cs - cr = c(s - r)$.

Portanto, $c \mid u$ e como $u = b - a$ a propriedade está provada.

VI) $(\Rightarrow)$ é 5 e $(\Leftarrow)$ é 4 para $x = y = 1$.

VII) Temos que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = aq$.

Como $q > 0$, então $1 = 0 + 1 \leq q$ e portanto $q = 1 + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$.

Assim, $b = aq = a(1 + u) = a + au$, o que implica $a \leq b$. ■

Indicaremos por D_x o conjunto dos divisores de $x \in \mathbb{N}$ e M_x o conjunto dos múltiplos de x.

Por exemplo, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ e $M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$.

3.2 Máximo Divisor Comum (MDC)

A respeito do máximo divisor comum, Domingues (1991) expõe a definição a seguir:

Definição 2: Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que um número $d \in \mathbb{N}$ é máximo divisor comum de a e b se

I) $d \mid a$ e $d \mid b$;

II) Se c é um número natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.

Com o objetivo de ilustrar essa definição, apresentamos o exemplo abaixo:

Sejam $a = 10$ e $b = 12$, então

$D_{10} = \{1, 2, 5\}$ e $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, do que segue $D_{10} \cap D_{12} = \{1, 2\}$.

Notemos que I) $2 \mid 10$ e $2 \mid 12$;

II) Se $c \mid 10$ e $c \mid 12$, então $c = 1$ ou $c = 2$ e, portanto, $c \mid 2$.

Assim, 2 é o máximo divisor comum de 10 e 12.

Usaremos a notação $d = \mathrm{mdc}(a,b)$ para indicar o máximo divisor comum de a e b.

Da definição decorre que $\mathrm{mdc}(a,b) = \mathrm{mdc}(b,a)$.

Mostraremos agora, de um modo geral, que existe somente um máximo divisor comum de a e b.

De fato, se d e d' satisfazem a definição 2, então $d' \mid d$, pois $d' \mid a$ e $d' \mid b$ e d é, por hipótese, máximo divisor comum de a e b, e do mesmo modo, $d \mid d'$, o que implica $d = d'$.

Quanto à existência de máximo divisor comum, examinaremos primeiro o caso $a = 0$ e b qualquer e mostraremos que $b = \mathrm{mdc}(0,b)$.

De fato, $b \mid 0$ e $b \mid b$.

Se $c \mid 0$ e $c \mid b$, obviamente $c \mid b$.

Em particular $\mathrm{mdc}(0,0) = 0$. Neste caso o máximo divisor comum não é o maior dos divisores comuns. Como $1 \mid 0$, $2 \mid 0$, $3 \mid 0$,... não há um maior divisor comum para 0 e 0.

Para $a \neq 0$ e $b \neq 0$ precisaremos das duas proposições a seguir elencadas por Domingues (1991).

Proposição 1: Se $a \mid b$, então $\mathrm{mdc}(a,b) = a$.

Demonstração:

De fato, $a \mid a$ e $a \mid b$.

E se $c \mid a$ e $c \mid b$, obviamente $c \mid a$. ■

Proposição 2: Se $a = bq + r$ e $d = \mathrm{mdc}(a,b)$, então $d = \mathrm{mdc}(b,r)$. E se $d = \mathrm{mdc}(b,r)$, então $d = \mathrm{mdc}(a,b)$.

Demonstração da primeira afirmação:

Como $d = mdc(a,b)$, então $d \mid a$ e $d \mid b$. Desta última relação resulta que $d \mid bq$. Assim, $d \mid (a - bq)$, ou seja, $d \mid r$.

Por outro lado, se $c \mid b$ e $c \mid r$, então $c \mid bq + r$. Como $bq + r = a$, então $c \mid a$ e $c \mid b$, o que implica $c \mid d$, já que $d = mdc(a,b)$.

Demonstração da segunda afirmação:

Como $d = mdc(b,r)$, então $d \mid b$ e $d \mid r$. Daí resulta que $d \mid a$, pois $a = bq + r$.

Por outro lado, se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid bq$ e $c \mid (a - bq)$. Assim, $c \mid r$, pois $r = a - bq$. De $c \mid b$ e $c \mid r$ segue que $c \mid d$ já que $d = mdc(b,r)$. ■

Agora, para provar a existência de máximo divisor comum, aplicaremos sucessivamente, a partir de a e b, o algoritmo da divisão do seguinte modo:

$$a = bq_1 + r_1 \ (r_1 < b)$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \ (r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \ (r_3 < r_2)$$

$$\vdots$$

Se acontecer de r_1 ser nulo a proposição 1 nos garante que $b = mdc(a,b)$ e o processo é concluído na primeira etapa. Mas, de qualquer maneira, na sequência $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$ para algum índice n deverá ocorrer $r_{n+1} = 0$. De fato, se todos os r_i fossem não nulos, então $\{b, r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ seria um subconjunto dos naturais sem mínimo, o que é impossível. Portanto, para algum n:

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$$

Aplicando as proposições 1 e 2, obtemos o seguinte:

$r_n = mdc(r_{n-1}, r_n) = mdc(r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = mdc(b,r_1) = mdc(a,b)$

Ou seja:

$$r_n = mdc(a,b)$$ ■

O dispositivo prático que é usado para aplicar essa demonstração é conhecido como processo das divisões sucessivas.

Por exemplo, vamos encontrar o $\mathrm{mdc}(16{,}38)$ por meio desse processo.

$$38 = 16 \cdot 2 + 6$$
$$16 = 6 \cdot 2 + 4$$
$$6 = 4 \cdot 1 + 2$$
$$4 = 2 \cdot 2$$

Então o $\mathrm{mdc}(16{,}38) = 2$.

Usualmente, esse processo é usado neste formato:

	2	2	1	2
38	16	6	4	2
6	4	2	0	

O primeiro número 2 da primeira linha do esquema é o quociente da divisão de 38 por 16 e o número 6 da última linha é o resto dessa divisão. O segundo número 2 da primeira linha é o quociente da divisão de 16 por 6 e o número 4 da última linha é o resto dessa divisão. O número 1 da primeira linha é o quociente da divisão de 6 por 4 e o número 2 da última linha é o resto dessa divisão. O último número 2 da primeira linha é o quociente da divisão de 4 por 2 e o zero da última linha é o resto dessa divisão.

Outro importante conceito que podemos destacar é o de números primos entre si. Sobre o mesmo, Domingues (1991) apresenta a definição a seguir:

Definição 3: Dizemos que dois números naturais a e b são primos entre si se $\mathrm{mdc}(a{,}b) = 1$. Neste caso, dizemos também que a é primo com b ou vice-versa.

Para ilustrar a definição dada, expomos o seguinte exemplo:

15 e 28 são primos entre si.

	1	1	6	2
28	15	13	2	1
13	2	1	0	

$\mathrm{mdc}(15{,}28) = 1$.

Ainda sobre o mdc, o mesmo autor estabelece a proposição e os corolários a seguir:

Proposição 3: Se $d = mdc(a,b)$, então $mdc(sa,sb) = sd$, para todo $s \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Multipliquemos por s cada uma das igualdades obtidas no processo das divisões sucessivas que leva a d, a partir de a e b:

$$sa = (sb)q_1 + sr_1$$
$$sb = (sr_1)q_2 + sr_2$$
$$sr_1 = (sr_2)q_3 + sr_3$$
$$\vdots$$
$$sr_{n-2} = (sr_{n-1}) \cdot q_n + sr_n$$
$$sr_{n-1} = (sr_n) \cdot q_{n+1}$$

Como consequência das proposições 1 e 2, temos que

$sd = sr_n = mdc(sr_{n-1}, sr_n) = mdc(sr_{n-2}, sr_{n-1}) = \ldots = mdc(sb,sr_1) = mdc(sa,sb)$. ■

Colorário 1: Se $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $d = mdc(a,b)$, então $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. Ou seja: $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são primos entre si.

Demonstração:

Como $d = mdc(a,b) = mdc\left(d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}\right) = d \cdot mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ e $d \neq 0$, então $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. ■

Colorário 2: Se $a \mid bc$ e $mdc(a,b) = 1$, então $a \mid c$.

Demonstração:

De $mdc(a,b) = 1$ segue, pela proposição 3, que $mdc(ac,bc) = c$.

Como $a \mid bc$ por hipótese e obviamente $a \mid ac$, então $a \mid mdc(ac,bc)$. Ou seja, $a \mid c$. ■

Colorário 3: Se a e b são divisores de $c \neq 0$ e $mdc(a,b) = 1$, então $ab \mid c$.

Demonstração:

De $mdc(a,b) = 1$ decorre, pela proposição 3, que $mdc(ac,bc) = c$.

Também temos que $ab \mid ac$, pois $b \mid c$ e $ab \mid bc$ já que $a \mid c$.

Então, ab divide $mdc(ac,bc)$, isto é, $ab \mid c$. ■

Por exemplo, para que um número seja divisível por 12 é necessário e suficiente que seja divisível por 3 e por 4, pois $\text{mdc}(3,4) = 1$.

Generalização: a definição de máximo divisor comum pode ser estendida para três ou mais números. Para o cálculo do máximo divisor comum de três números, por exemplo, podemos usar o seguinte resultado:

$$\text{mdc}(a,b,c) = \text{mdc}(\text{mdc}(a,b),c) = \text{mdc}(a,\text{mdc}(b,c))$$

Provaremos a primeira dessas igualdades. Seja $d = \text{mdc}(a,b,c)$, então $d \mid a$, $d \mid b$ e $d \mid c$.

Das duas primeiras relações segue que $d \mid \text{mdc}(a,b)$. Logo, $d \mid \text{mdc}(a,b)$ e $d \mid c$.

Seja, agora, k um divisor de $d' = \text{mdc}(a,b)$ e de c. Como $d' \mid a$ e $d' \mid b$, pela transitividade temos que $k \mid a$, $k \mid b$ e $k \mid c$. Assim, $k \mid d$ pois $d = \text{mdc}(a,b,c)$.

Logo, $d = \text{mdc}(\text{mdc}(a,b),c)$.

Provaremos, agora, a segunda dessas igualdades. Seja $d = \text{mdc}(a,b,c)$, então $d \mid a$, $d \mid b$ e $d \mid c$.

Das duas últimas relações segue que $d \mid \text{mdc}(b,c)$. Portanto, $d \mid a$ e $d \mid \text{mdc}(b,c)$.

Seja, agora, k um divisor de $d' = \text{mdc}(b,c)$ e de a. Como $d' \mid b$ e $d' \mid c$, por transitividade temos que $k \mid b$, $k \mid c$ e $k \mid a$. Assim, $k \mid d$ pois $d = \text{mdc}(a,b,c)$.

Logo, $d = \text{mdc}(a,\text{mdc}(b,c))$. ■

Acharemos, por exemplo, $\text{mdc}(4,10,18)$ usando a primeira igualdade.

$10 = 4 \cdot 2 + 2$

$4 = 2 \cdot 2$

$\text{mdc}(4,10) = 2$

O $\text{mdc}(2,18) = 2$, pois 18 é múltiplo de 2. Portanto, $\text{mdc}(4,10,18) = 2$.

3.3 Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Passaremos agora a falar sobre o mínimo múltiplo comum. Sobre esse conceito, apresentamos a definição a seguir de Domingues (1991).

Definição 4: Dizemos que um número m é mínimo múltiplo comum de a e $b \in \mathbb{N}$ se:

I) $a \mid m$ e $b \mid m$ (m é múltiplo de a e de b);

II) $a \mid t$ e $b \mid t \Rightarrow m \mid t$ (todo múltiplo de a e b é também múltiplo de m).

Por exemplo, 15 é mínimo múltiplo comum de 3 e 5.

Usaremos a notação $m = mmc(a,b)$ para indicar o mínimo múltiplo comum de a e b.

Da definição decorre que $mmc(a,b) = mmc(b,a)$.

Mostraremos, nesse momento, que existe somente um mínimo múltiplo comum de a e b.

De fato, se m e m' satisfazem a definição 4, então $m \mid m'$, pois m' é múltiplo de a e b e, por hipótese, m é mínimo múltiplo comum de a e b, e do mesmo modo, $m' \mid m$, o que implica $m = m'$.

Para discutirmos a existência de mínimo múltiplo comum, consideraremos primeiramente o caso $a = 0$ e b qualquer e mostraremos que $mmc(0,b) = 0$.

De fato, $0 \mid 0$ e $b \mid 0$ (pois $0 = b \cdot 0$).

$0 \mid t$ e $b \mid t$ implica obviamente que $0 \mid t$.

Para os outros casos a garantia da existência é dada pela proposição abaixo, elencada por Domingues (1991).

Proposição 4: Para quaisquer a e $b \in \mathbb{N}^*$, se $d = mdc(a,b)$, então $m = \frac{ab}{d}$ é o mínimo múltiplo comum de a e b.

Demonstração:

Observemos inicialmente que $m \in \mathbb{N}$, pois como $d \mid a$ e $d \mid b$, segue que $d \mid (ab)$.

I) Como $a \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d} = m$, então $a \mid m$.

Também, como $b \cdot \frac{a}{d} = \frac{ab}{d} = m$, então $b \mid m$.

II) Seja t um múltiplo de a e de b e suponhamos $t = ar$ e $t = bs$.

Então $ar = bs$ e, portanto, $\frac{a}{d} \cdot r = \frac{b}{d} \cdot s$.

Assim, segue que $\frac{a}{d}$ divide $\frac{b}{d} \cdot s$ e, como $mdc(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$, então $\frac{a}{d} \mid s$ (pelo corolário 2 da proposição 3).

Logo, $s = \frac{a}{d} \cdot v$ para algum $v \in \mathbb{N}$.

Como $t = bs$, obtemos $t = b \cdot \frac{a}{d} \cdot v = \frac{ab}{d} \cdot v = mv$, ou seja, $m \mid t$.

Portanto, $\frac{ab}{d} = \text{mmc}(a,b)$. ■

Corolário: Se a e b são primos entre si, então $\text{mmc}(a,b) = ab$.

Demonstração:

De fato, como $d = \text{mdc}(a,b) = 1$, então $\text{mmc}(a,b) = \frac{ab}{1} = ab$. ■

Notemos que para $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{ab}{d} = m > 0$. Mas 0 é múltiplo de a e múltiplo de b, então m não é o menor do múltiplos comuns de a e b. Neste caso, $m = \text{mmc}(a,b)$ é o menor dos múltiplos comuns não nulos de a e b.

Para ilustrar a proposição 4, vamos usar o que ela estabelece para encontrar o $\text{mmc}(12,30)$.

$30 = 12 \cdot 2 + 6$

$12 = 6 \cdot 2$

Então, o $\text{mdc}(12,30) = 6$ e o $\text{mmc}(12,30) = \frac{12 \cdot 30}{6} = \frac{360}{6} = 60$.

Domingues (1991) ainda apresenta a proposição a seguir sobre o mmc:

Proposição 5: Se $m = \text{mmc}(a,b)$, então $\text{mmc}(sa,sb) = sm$, para qualquer $s \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Quando $a = 0$ ou $b = 0$, então $m = 0$ e $s = 0$ ou $sb = 0$. Assim, $\text{mmc}(sa,sb) = 0 = sm$.

Se $s = 0$, teremos $\text{mmc}(0,0) = 0$, que também é verdadeira.

Suponhamos finalmente a, b e s não nulos. Pelas proposições 3 e 4,

$$\text{mmc}(sa,sb) = \frac{sa \cdot sb}{\text{mdc}(sa,sb)} = \frac{s^2 \cdot ab}{s \cdot \text{mdc}(a,b)} = s \cdot \frac{ab}{\text{mdc}(a,b)} = s \cdot \text{mmc}(a,b) = sm. \quad ■$$

Generalização: a definição de mínimo múltiplo comum para três ou mais números em $\mathbb{N}$ pode ser estendida naturalmente. No caso de três números, por exemplo, o cálculo pode ser feito usando a seguinte propriedade:

$$\text{mmc}(a,b,c) = \text{mmc}(\text{mmc}(a,b), c) = \text{mmc}(a,\text{mmc}(b,c))$$

Provaremos a primeira dessas igualdades. Seja $m = mmc(a,b,c)$, então $a \mid m$, $b \mid m$ e $c \mid m$.

Das duas primeiras relações segue que $mmc(a,b) \mid m$. Logo, $mmc(a,b) \mid m$ e $c \mid m$.

Seja, agora, v um múltiplo de $m' = mmc(a,b)$ e de c. Como $a \mid m'$ e $b \mid m'$, pela transitividade temos que $a \mid v$, $b \mid v$ e $c \mid v$. Assim, $m \mid v$ pois $m = mmc(a,b,c)$.

Logo, $m = mmc(mmc(a,b),c)$.

Provaremos, agora, a segunda dessas igualdades. Seja $m = mmc(a,b,c)$, então $a \mid m$, $b \mid m$ e $c \mid m$.

Das duas últimas relações segue que $mmc(b,c) \mid m$. Portanto, $a \mid m$ e $mmc(b,c) \mid m$.

Seja, agora, v um múltiplo de $m' = mmc(b,c)$ e de a. Como $b \mid m'$ e $c \mid m'$, por transitividade temos que $b \mid v$, $c \mid v$ e $a \mid v$. Assim, $m \mid v$ pois $m = mmc(a,b,c)$.

Logo, $m = mmc(a,mmc(b,c))$. ■

Por exemplo, acharemos $mmc(2,7,21)$ aplicando a primeira igualdade.

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$2 = 1 \cdot 2$

$mdc(2,7) = 1$

Assim, $mmc(2,7) = 2 \cdot 7 = 14$.

Então, $mmc(2,7,21) = mmc(14,21)$.

$21 = 14 \cdot 1 + 7$

$14 = 7 \cdot 2$

$mdc(14,21) = 7$

Portanto, $mmc(2,7,21) = mmc(14,21) = \frac{14 \cdot 21}{7} = 2 \cdot 21 = 42$.

3.4 Cálculo do MDC e MMC a partir de Fatoração

Para discutirmos o algoritmo de cálculo do mdc e mmc usando fatoração elencaremos primeiramente a definição de números primos, algumas proposições e o Teorema Fundamental da Aritmética.

Nascimento e Feitosa (2013) apresentam a seguinte definição para número primo:

Definição 5: Dizemos que um número $p \in \mathbb{N}$ é primo se $p > 1$ e os seus únicos divisores são 1 e p. Se $p > 1$ não é primo, dizemos que p é composto.

Exemplos de números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$.

Observemos que 0 e 1 não são primos nem compostos.

Se n é um número composto, então existem naturais a e b tais que $n = a \cdot b$, com $1 < a < n$ e $1 < b < n$, pois desde que n não é primo, então n possui um divisor positivo a, com $a \neq n$ e $a \neq 1$. Desse modo, $1 < a < n$, $n = a \cdot b$ e $1 < b < n$.

Sobre os números primos, é importante destacarmos a proposição a seguir exposta por Domingues (1991).

Proposição 6: Se p é primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Demonstração:

No caso em que $a = 0$ ou $b = 0$, claramente temos que $p \mid a$ ou $p \mid b$.

No caso em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, se $p \mid a$ não temos o que demonstrar. Se $p \nmid a$, temos que $\mathrm{mdc}(a,p) = 1$. De fato, se $h \mid a$ e $h \mid p$, então $h = 1$ ou $h = p$ (pois p é primo), mas como $p \nmid a$, então $h = 1$ e $\mathrm{mdc}(a,p) = 1$. Pelo corolário 2 da proposição 3 segue, portanto, que $p \mid b$. ■

Corolário: Se p é primo e $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_r)$, $r \geq 1$, então p divide algum dos a_i.

No caso em que algum $a_i = 0$, é claro que p o divide.

No caso em que não temos algum $a_i = 0$, de $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_r)$, se $p \mid a_1$ não há o que provar. Se $p \nmid a_1$, pela proposição 6, p divide o número resultante do produto $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_r$. Assim, de $p \mid a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_r$, se $p \mid a_2$ teremos a afirmação do corolário e não há o que demonstrar. Se $p \nmid a_2$, p divide o número resultante da multiplicação $a_3 \cdot \ldots \cdot a_r$ e podemos repetir esse raciocínio até que chegaremos em $p \mid a_{r-1} \cdot a_r$, e pela proposição 6, $p \mid a_{r-1}$ ou $p \mid a_r$. Portanto, p divide algum dos a_i. ■

A seguir vamos enunciar e provar o Teorema Fundamental da Aritmética. Para demonstra-lo usaremos o segundo princípio de indução, o qual escreveremos abaixo, sem sua respectiva prova.

Segundo princípio de indução: Dado $r \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é uma propriedade sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que:

I) $P(r)$ é verdadeira e

II) para todos $m, n \in \mathbb{N}$, com $r \leq m < n$, sempre que $P(m)$ é verdadeira tem-se que $P(n)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$.

Observamos que se $r = 0$ a propriedade é válida para todos os naturais.

O Teorema Fundamental da Aritmética é apresentado da seguinte maneira por Nascimento e Feitosa (2013):

Teorema 2: Todo número natural $n > 1$ pode ser representado como um produto $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ em que p_1, p_2, ..., p_r são números primos. Além disso, se considerarmos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$, essa representação é única.

Demonstração da existência da representação:

Faremos a demonstração por indução sobre n.

Se $n = 2$, então $n = p_1$ e $p_1 = 2$.

Hipótese de indução: consideremos que se $m \in \mathbb{N}$ e é tal que $1 < m < n$, então m pode ser representado como um produto de primos.

Se n é primo, como no caso $n = 2$, temos $n = p_1$ e p_1 é primo. Agora, se n não é primo, já vimos que $n = a \cdot b$ com $a, b \in \mathbb{N}$ e $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Assim, pela hipótese de indução, a e b podem ser representados como produtos de primos e, portanto, $n = a \cdot b$ também tem uma representação como produto de primos.

Desse modo, pelo princípio de indução, mostramos a existência da representação. É claro que podemos sempre ordenar a representação $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$, de forma que $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$.

Demonstração da unicidade da representação:

Também faremos a demonstração por indução sobre n.

Se $n = 2 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$, como 2 é primo, então $p_1 = 2$ e $r = 1$.

Portanto, a unicidade vale, pois se $r \geq 2$ então $1 = p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$. Logo, $p_2 \mid 1$, então $p_2 \leq 1$, um absurdo.

Hipótese de indução: consideremos que a unicidade vale para todo $m \in \mathbb{N}$, tal que $1 < m < n$.

Se $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$, então $p_1 \mid q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Assim, pelo corolário da proposição 6, $p_1 \mid q_i$, para algum i, tal que $1 \leq i \leq s$ e como q_i é primo, então $p_1 = q_i$. Da mesma forma, $q_1 = p_j$ para algum j tal que $1 \leq j \leq r$. Considerando $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$ e $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_r$, como $p_1 = q_i \geq q_1 = p_j \geq p_1$, então $p_1 = q_1$. Se n é primo, então como no caso $n = 2$, $n = p_1 = q_1$ e $r = s = 1$. Caso contrário, $r > 1$ e $s > 1$ e cancelando p_1 $(= q_1)$ na igualdade $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$, obtemos $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s < q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s = n$. Desse modo, pela hipótese de indução, a representação $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ é única, ou seja, $r = s$ e $p_i = q_i$, para todo i tal que $2 \leq i \leq r$, o que verifica a unicidade. ■

Uma fatoração em primos de um número natural $n > 1$ é uma representação de n como um produto de números primos ou como um produto de potências de números primos, ou seja, $n = {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k_r}$ em que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são números primos e cada $k_i \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, a fatoração de 90 é $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

O processo prático para decompor um número em fatores primos é baseado em fazer várias divisões levando em conta resultados anteriores. Vejamos esse processo para o número 90.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

A explicação é a seguinte: o menor divisor de 90, excluído o 1, é primo (no caso o 2); o menor divisor de 45, com exceção do 1, também é primo e é igualmente divisor de 90 (no caso o 3). Esse raciocínio leva, então, à decomposição de 90 em fatores primos no final do processo.

Vamos agora expor a proposição 7, apresentada por Nascimento e Feitosa (2013), a qual nos será útil para a demonstração do teorema 3.

Proposição 7: Seja $a = {p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n}$ em que $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ são números primos e cada r_i é um número natural. Se d é também um número natural, então $d \mid a$ se, e somente se, $d = {p_1}^{w_1} \cdot {p_2}^{w_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n}$ em que, para cada i, $0 \leq w_i \leq r_i$.

Demonstração:

Se $d \mid a$, então $a = d \cdot c$, para algum natural c. Assim, $d \mid a$ e $c \mid a$. Portanto, se p é um primo que divide c ou divide d, então $p \mid a$. Logo, $p = p_i$ para algum i.

Desse modo, podemos tomar as fatorações de c e d nas formas $c = {p_1}^{z_1} \cdot {p_2}^{z_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{z_n}$ e $d = {p_1}^{w_1} \cdot {p_2}^{w_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n}$, em que cada z_i e cada w_i é um número natural.

Segue de $a = d \cdot c$ que temos

${p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n} = ({p_1}^{w_1} \cdot {p_2}^{w_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n}) \cdot ({p_1}^{z_1} \cdot {p_2}^{z_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{z_n}) = {p_1}^{w_1+z_1} \cdot {p_2}^{w_2+z_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n+z_n}$.

Portanto, pelo teorema 2, $r_i = w_i + z_i \geq 0$.

Por outro lado, se $d = {p_1}^{w_1} \cdot {p_2}^{w_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n}$, em que para cada i, $0 \leq w_i \leq r_i$, então existem números naturais z_i tais que $r_i = w_i + z_i$. Assim, $a = {p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n} = {p_1}^{w_1+z_1} \cdot {p_2}^{w_2+z_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n+z_n} = ({p_1}^{w_1} \cdot {p_2}^{w_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n}) \cdot ({p_1}^{z_1} \cdot {p_2}^{z_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{z_n}) = d \cdot ({p_1}^{z_1} \cdot {p_2}^{z_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{z_n})$. Portanto, $d \mid a$. ■

Para ilustrar esse resultado, apresentamos os exemplos abaixo:

$18 \mid 54$, pois $18 = 2 \cdot 3^2$ e $54 = 2 \cdot 3^3$.

$4 \mid 84$, pois $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e $4 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^0$.

Nascimento e Feitosa (2013) também elencam o teorema a seguir:

Teorema 3: Sejam a e b números naturais, $a = {p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n}$ e $b = {p_1}^{s_1} \cdot {p_2}^{s_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{s_n}$, em que $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, são números primos e para todo i, tem-se r_i, $s_i \in \mathbb{N}$, então $\mathrm{mdc}(a,b) = {p_1}^{u_1} \cdot {p_2}^{u_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{u_n}$ e $\mathrm{mmc}(a,b) = {p_1}^{t_1} \cdot {p_2}^{t_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{t_n}$ de modo que para cada i, $u_i = \min\{r_i, s_i\}$ e $t_i = \max\{r_i, s_i\}$.

Demonstração:

Consideremos $d = {p_1}^{u_1} \cdot {p_2}^{u_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{u_n}$, com $u_i = \min\{r_i, s_i\}$. Pela proposição 7, $d \mid a$ e $d \mid b$. Se c é um natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, novamente pela mesma proposição, podemos tomar a fatoração de c na forma $c = {p_1}^{v_1} \cdot {p_2}^{v_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{v_n}$, em que para cada i, $v_i \leq r_i$, $v_i \leq s_i$ e, portanto, $v_i \leq \min\{r_i, s_i\} = u_i$. Logo, também pela proposição 7, $c \mid d$ e, então, $d = \mathrm{mdc}(a,b)$.

Temos também que, pela proposição 4, $\mathrm{mmc}(a,b) \cdot \mathrm{mdc}(a,b) = a \cdot b = ({p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n}) \cdot ({p_1}^{s_1} \cdot {p_2}^{s_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{s_n}) = {p_1}^{r_1+s_1} \cdot {p_2}^{r_2+s_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n+s_n}$. Assim, como $\mathrm{mdc}(a,b) = {p_1}^{u_1} \cdot {p_2}^{u_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{u_n}$, em que $u_i = \min\{r_i, s_i\}$, resulta que $\mathrm{mmc}(a,b) = m = {p_1}^{t_1} \cdot {p_2}^{t_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{t_n}$, em que $t_i = \max\{r_i, s_i\}$, pois $r_i + s_i = \max\{r_i, s_i\} + \min\{r_i, s_i\} = t_i + u_i$. ■

Para ilustrar esse teorema, expomos o exemplo a seguir:

Como $24 = 2^3 \cdot 3$ e $45 = 3^2 \cdot 5$, podemos escrever $24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^0$ e $45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5$. Desse modo, $\min\{3,\ 0\} = 0$, $\min\{1,\ 2\} = 1$ e $\min\{0,\ 1\} = 0$ e $\mathrm{mdc}(24{,}45) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$. Ainda, $\max\{3,\ 0\} = 3$, $\max\{1,\ 2\} = 2$ e $\max\{0,\ 1\} = 1$ e $\mathrm{mmc}(24{,}45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$.

O teorema 3 fundamenta um processo prático para a determinação dos valores de mmc e mdc entre dois ou mais números. Esse algoritmo consiste em fatorar simultaneamente os números usando fatores primos e multiplicar os fatores comuns deles para determinar o mdc, bem como multiplicar todos os fatores usados nessa atividade para determinar o mmc. Vejamos esse processo para os mesmos números do exemplo acima.

$$\begin{array}{r|l} 24,\ 45 & 2 \\ 12,\ 45 & 2 \\ 6,\ 45 & 2 \\ 3,\ 45 & 3 \\ 1,\ 15 & 3 \\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

$\mathrm{mdc}(24{,}45) = 3$, $\mathrm{mmc}(24{,}45) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot\ 3^2 \cdot 5 = 360$.

Percebamos que nesse dispositivo para fatorar obtemos $24 = 2^3 \cdot 3$ e $45 = 3^2 \cdot 5$.

Agora, executaremos esse algoritmo para os números 20, 52 e 60.

$$\begin{array}{r|l} 20,\ 52,\ 60 & 2 \\ 10,\ 26,\ 30 & 2 \\ 5,\ 13,\ 15 & 3 \\ 5,\ 13,\ 5 & 5 \\ 1,\ 13,\ 1 & 13 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

$\mathrm{mdc}(20{,}52{,}60) = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$;

$\mathrm{mmc}(20{,}52{,}60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 780$.

Percebamos que nesse processo para fatorar obtemos $20 = 2^2 \cdot 5$, $52 = 2^2 \cdot 13$ e $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo apresenta a sequência didática desta pesquisa. Seu formato é baseado em Cabral (2017), sendo composta de 7 UARCs, que abordam os conceitos de mmc e mdc, processos práticos para o cálculo do valor desses objetos matemáticos escolares, o conceito de números primos entre si, e uma importante propriedade do mmc e do mdc. Nas UARCs vem sinalizado o que se caracteriza como Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f), Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r) ou Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a).

Ressaltamos que como essa sequência será utilizada em sala de aula, separada do restante do texto desta pesquisa, ela não contém as numerações de quadros e formatações do restante do texto.

Também destacamos que a sequência didática exposta aqui possui uma aparência um pouco diferente da que será apresentada aos estudantes, pois na que será levada para a sala de aula serão excluídos alguns aspectos próprios da pesquisa que não são familiares aos alunos e os objetivos de cada UARC, bem como serão omitidas algumas partes das questões e as Intervenções Formalizantes, para que o processo de reflexão e estabelecimento de conjecturas pelos alunos não seja prejudicado. Essas partes estão em itálico nesta seção e serão escritas pelos próprios alunos, com a nossa orientação, nos momentos que acharmos mais convenientes durante a aplicação.

Esclarecemos que a questão 6 da UARC 1 foi adaptada de Dante (2015) e a questão 7 de Gay e Silva (2018b). A questão 5 da UARC 2 foi adaptada de Gay e Silva (2018b). As questões 1 e 6 da UARC 3 foram adaptadas de Dante (2015) e a questão 7 foi adaptada de Gay e Silva (2018b). A questões 4 e 6 da UARC 4 foram adaptadas de Giovanni Júnior e Castrucci (2018) e a questão 5 foi adaptada de Andrini e Vasconcellos (2015). E a questão 5 da UARC 5 foi adaptada de Gay e Silva (2018b).

O quadro 4 a seguir elenca número, título e objetivo de cada UARC.

Quadro 4 – Títulos e objetivos das UARCs

UARC	Título	Objetivo
1	Mínimo Múltiplo Comum (MMC)	Compreender o conceito de mínimo múltiplo comum (mmc) a partir de uma situação-problema.
2	Cálculo do Mínimo Múltiplo Comum por meio de Fatoração	Compreender o processo prático para calcular o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números por meio da fatoração por números primos.
3	Máximo Divisor Comum (MDC)	Compreender o conceito de máximo divisor comum (mdc) a partir de uma situação-problema.
4	Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio de Fatoração	Compreender o processo prático para calcular o máximo divisor comum (mdc) de dois ou mais números por meio da fatoração por números primos.
5	Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio do Algoritmo de Euclides	Compreender o processo para calcular o máximo divisor comum (mdc) de dois números naturais por meio do algoritmo de Euclides.
6	Números Primos entre Si	Compreender o conceito de números primos entre si.
7	O Produto do MMC pelo MDC de Dois Números Naturais	Compreender a propriedade que diz que o produto do mmc pelo mdc de dois números naturais é igual ao produto desses números.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.1 UARC 1: Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Objetivo: Compreender o conceito de mínimo múltiplo comum (mmc) a partir de uma situação-problema.
Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

[I_i] 1) Pedro e Sandro são amigos e viajam a trabalho. Os dois saem de Belém. Pedro faz viagem para Barcarena de 5 em 5 dias e Sandro para Salinópolis de 4 em 4 dias. Responda:
[I_r] a) Considerando que Pedro e Sandro tenham viajado no dia 1º de outubro, depois de quantos dias eles viajarão no mesmo dia pela segunda vez?

[I_r] b) Quantos dias depois da viagem do dia 1º de outubro eles viajarão no mesmo dia pela terceira vez?

[I_r] c) Quantos dias depois da viagem do dia 1º de outubro eles viajarão no mesmo dia pela quarta vez?

[I_r] 2) Qual conteúdo da Matemática está sendo abordado na questão 1?

[I_r] 3) Podemos dizer que os números *20, 40 e 60* são *múltiplos comuns* de 4 e 5?

[I_r] 4) Qual é o menor múltiplo comum de 4 e 5, diferente de 0?

[I_e] 5) Preencha os quadros abaixo:

Múltiplos de 3:
Múltiplos de 4:
Múltiplos comuns de 3 e 4:
Menor múltiplo comum de 3 e 4, diferente de 0:

Múltiplos de 6:
Múltiplos de 8:
Múltiplos comuns de 6 e 8:
Menor múltiplo comum de 6 e 8, diferente de 0:

Múltiplos de 3:
Múltiplos de 6:
Múltiplos de 9:
Múltiplos comuns de 3, 6 e 9:
Menor múltiplo comum de 3, 6 e 9, diferente de 0:

[I_f] *O mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números naturais é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo comum desses números.*

Exemplos: $\mathrm{mmc}(4,5) =$

$\mathrm{mmc}(3,4) =$

$\mathrm{mmc}(6,8) =$

$\mathrm{mmc}(3,6,9) =$

[I_{a_a}] 6) Os planetas Júpiter e Saturno completam uma volta em torno do Sol em aproximadamente 12 e 30 anos terrestres, respectivamente. Supondo que em certo momento eles estejam alinhados, depois de quantos anos terrestres eles voltarão a ficar desse modo?

[Ia$_{a}$] 7) Três corredoras largaram juntas em uma prova cujo percurso é circular. Elas correm com velocidade constante. Bruna leva 3 minutos para completar cada volta, Paula leva 5 minutos e Daniela, 6 minutos. Dada a largada, depois de quantos minutos as três passarão juntas pela primeira vez a linha de largada?

4.2 UARC 2: Cálculo do Mínimo Múltiplo Comum por meio de Fatoração

Objetivo: Compreender o processo prático para calcular o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números por meio da fatoração por números primos.
Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

[I$_{i}$] 1) Observe a fatoração dos números 4 e 5 por números primos de forma separada abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Observe agora a fatoração dos mesmos números feita de forma simultânea:

$$\begin{array}{r|l} 4,\ 5 & 2 \\ 2,\ 5 & 2 \\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

[I$_{e}$] a) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 3 e 4.

[I$_{e}$] b) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 6 e 8.

[I$_{e}$] c) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 3, 6 e 9.

[I$_{e}$] 2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números Fatorados	Números Primos da Fatoração Simultânea	Resultado da Multiplicação dos Fatores Primos
$4,\ 5$		
$3,\ 4$		
$6,\ 8$		
$3,\ 6,\ 9$		

[I_r] 3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mmc obtidos na atividade 1 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

[I_f] *Para encontrar o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números naturais basta multiplicar todos os fatores primos da fatoração simultânea desses números.*

Resolva as questões 4, 5 e 6 usando o dispositivo prático, estudado agora, para o cálculo do mmc.

[IA_a] 4) O ônibus “Distrito Industrial - Ver-o-Peso” parte de 50 em 50 minutos do ponto de saída dos veículos e o ônibus “Distrito Industrial – Pátio Belém” parte de 60 em 60 minutos. Sabendo que esses dois ônibus partiram juntos nesse momento do local de saída, daqui a quantas horas eles partirão juntos novamente?

[IA_a] 5) Em uma estrada há um posto de combustível a cada intervalo de 30 quilômetros, uma torre de telefonia a cada 8 quilômetros e um posto da polícia rodoviária a cada 20 quilômetros. No início da estrada os três elementos estão juntos. Quantos quilômetros é preciso percorrer do início da estrada para encontrá-los juntos novamente?

[IA_a] 6) Uma loja vende broches de cabelo em embalagens com 15 unidades e pulseiras em embalagens com 35 unidades cada uma. Uma pessoa que deseja comprar para revenda a mesma quantidade de broches e de pulseiras deverá comprar, no mínimo, quantas embalagens de cada produto?

4.3 UARC 3: Máximo Divisor Comum (MDC)

Objetivo: Compreender o conceito de máximo divisor comum (mdc) a partir de uma situação-problema.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

[I_i] 1) Em um jogo para duas ou mais pessoas, há 20 cartões amarelos e 50 cartões laranjas para serem distribuídos igualmente entre os participantes. Nenhum cartão pode sobrar. Responda:

[I_r] a) Quais as opções para as quantidades de pessoas que podem participar desse jogo?

[I_r] b) Esse jogo pode ser realizado por 4 pessoas? Por quê?

[I_r] c) Qual é o número máximo de participantes que esse jogo pode ter?

[I_r] 2) Que conteúdo da Matemática está sendo abordado na questão 1?

[I_r] 3) Podemos dizer que os números *2, 5* e *10* são *divisores comuns* de 20 e 50?

[I_r] 4) Qual é o maior divisor comum de 20 e 50?

[I_e] 5) Preencha os quadros abaixo:

Divisores de 9:
Divisores de 18:
Divisores comuns de 9 e 18:
Maior divisor comum de 9 e 18:

Divisores de 24:
Divisores de 40:
Divisores comuns de 24 e 40:
Maior divisor comum de 24 e 40:

Divisores de 27:
Divisores de 32:
Divisores comuns de 27 e 32:
Maior divisor comum de 27 e 32:

Divisores de 24:
Divisores de 36:
Divisores de 60:
Divisores comuns de 24, 36 e 60:
Maior divisor comum de 24, 36 e 60:

[I_f] *O máximo divisor comum (mdc) de dois ou mais números naturais é o maior dos divisores comuns desses números.*

Exemplos: $\mathrm{mdc}(20,50) =$

$\mathrm{mdc}(9,18) =$

$\mathrm{mdc}(24,40) =$

$\mathrm{mdc}(27,32) =$

$\mathrm{mdc}(24,36,60) =$

[IA_a] 6) Marcela tem 28 m de fita azul e 20 m de fita vermelha para decorar camisas para uma apresentação teatral. Ela quer cortar essas fitas de modo que os pedaços tenham o mesmo tamanho, que seja o maior possível e que não haja sobras de fita. Quantos metros deve ter cada pedaço de fita?

[IA_a] 7) Vitor tem 15 livros de ficção científica, 25 de suspense e 30 de aventura. Ele quer organizá-los em gavetas sem misturar os gêneros, ocupando a menor quantidade de gavetas e de forma que em cada uma tenha o mesmo número de livros. Quantos livros Vitor deverá colocar em cada gaveta?

4.4 UARC 4: Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio de Fatoração

Objetivo: Compreender o processo prático para calcular o máximo divisor comum (mdc) de dois ou mais números por meio da fatoração por números primos.
Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

[I_i] 1) Observe a fatoração dos números 20 e 50 por números primos de forma separada abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Observamos que os fatores primos comuns nas duas decomposições são 2 e 5.

Observe agora a fatoração dos mesmos números feita de forma simultânea e que o fator comum 2 divide os números 20 e 50, e o fator 5 divide 5 e 25.

$20, 50$	2	$\rightarrow$ divide 20 e divide 50.
$10, 25$	2	$\rightarrow$ divide somente o 10.
$5, 25$	5	$\rightarrow$ divide 5 e divide 25.
$1, 5$	5	$\rightarrow$ divide somente o 5.
$1, 1$		

[I_e] a) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 9 e 18, circulando os fatores comuns.

[I_e] b) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 24 e 40, circulando os fatores comuns.

[I_e] c) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 24, 36 e 60, circulando os fatores comuns.

[I_e] 2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números Fatorados	Fatores Primos Comuns da Decomposição	Resultado da Multiplicação dos Fatores Primos Comuns
$20, 50$		
$9, 18$		
$24, 40$		
$24, 36, 60$		

[I_r] 3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mdc obtidos na atividade 3 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

[I_f] *Para encontrar o máximo divisor comum (mdc) de dois ou mais números naturais basta multiplicar todos os fatores primos comuns da fatoração desses números.*

Resolva as questões 4, 5 e 6 usando o dispositivo prático, estudado nesse momento, para o cálculo do mdc.

[IA_a] 4) Para fazer um trabalho, o marceneiro Igor deve cortar duas tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço, se toda a madeira deve ser aproveitada?

[IA_a] 5) Todos os alunos dos sextos, sétimos e oitavos anos da escola Cândida Santos de Souza participarão de uma gincana. Cada equipe deve ser formada por estudantes de um mesmo ano e com o mesmo número de participantes. A distribuição de alunos por ano é da seguinte forma: 6º ano: 120, 7º ano: 108 e 8º ano: 100. Qual é o número máximo de alunos por equipe?

[IA_a] 6) Débora coleciona moedas e em sua coleção há 165 moedas douradas, 220 moedas prateadas e 275 moedas bronzeadas. Ela quer organizar essa coleção em caixas que tenham o mesmo número de moedas e de tal modo que cada caixa contenha o maior número possível de moedas de um só tipo. Nessas condições, quantas moedas Débora deve colocar em cada caixa?

4.5 UARC 5: Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio do Algoritmo de Euclides

Objetivo: Compreender o processo para calcular o máximo divisor comum (mdc) de dois números naturais por meio do algoritmo de Euclides.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

[I_i] 1) Observe a divisão do número 50 pelo número 20 abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 20 \\ \cline{2-2} -10- & 2 \end{array}$$

Observe agora a divisão do número 20 pelo número 10 abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \cline{2-2} -0- & 2 \end{array}$$

Paramos o processo, pois obtivemos resto zero, e circulamos o divisor da última divisão.

[I_e] a) Faça esse processo de divisões com os números 18 e 9 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

[I_e] b) Faça esse processo de divisões com os números 40 e 24 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

[I_e] c) Faça esse processo de divisões com os números 32 e 27 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

[I_e] 2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números do Início do Processo de Divisões	Divisor Circulado do Processo
$20, 50$	
$9, 18$	
$24, 40$	
$27, 32$	

[I_r] 3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mdc obtidos na atividade 3 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

[I_f] *Para calcular o mdc de dois números naturais podemos dividir o maior pelo menor, o menor pelo primeiro resto, o primeiro resto pelo segundo etc. Quando chegarmos a algum resto que divida o anterior de forma exata, ele será o mdc. Esse processo de divisões é chamado de algoritmo de Euclides.*

Um Pouco de História

Euclides de Alexandria viveu por volta de 325 a.C. a 265 a.C. Foi um notável matemático grego autor de várias obras. A mais conhecida obra dele foi Os Elementos, que é composto por treze livros, onde Euclides organizou logicamente muitos resultados matemáticos. Os Elementos é uma das obras mais reproduzidas e estudadas da História. O algoritmo estudado nessa atividade já existia antes de Euclides, mas foi abordado no Livro VII de Os Elementos e leva o nome do matemático.

Fonte: ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Resolva as questões 4 e 5 usando o dispositivo prático, estudado agora, para o cálculo do mdc.

[IA_a] 4) Um terreno retangular mede 75 m por 45 m e vai ser dividido em lotes quadrados do maior tamanho possível para construção de casas e futura comercialização. Quantos metros terá cada lado do lote?

[IA_a] 5) Dois livros, um com 176 páginas e outro com 240 páginas, serão divididos em fascículos para venda semanal na internet. Os fascículos serão montados com o maior número de páginas possível e terão o mesmo número de páginas. Em quantas semanas uma pessoa terá os dois livros completos, considerando que ela compre todos os fascículos e que um livro será vendido após o outro?

4.6 UARC 6: Números Primos entre Si

Objetivo: Compreender o conceito de números primos entre si.
Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

[I_i] 1) Calcule:

a) $\mathrm{mdc}(18,25)$;

b) $\mathrm{mdc}(23,42)$.

[I_r] 2) O que os $\mathrm{mdc}(18,25)$ e $\mathrm{mdc}(23,42)$ têm em comum?

[I_e] 3) Procure na atividade 3 um par de números que possui a característica que os pares de números da questão 1 têm.

[I_e] 4) Dê um exemplo de par de números, não estudado durante as atividades feitas até aqui, *que tenham máximo divisor comum igual a* 1.

[I_f] *Dizemos que dois ou mais números naturais são primos entre si quando o máximo divisor comum (mdc) entre eles é igual a* 1.

[IA_r] 5) Verifique se os números abaixo são primos entre si.

a) 7 e 22;

b) 14 e 35;

c) 18 e 44;

d) 28 e 39;

e) 33 e 48;

f) 27, 46 e 55.

4.7 UARC 7: O Produto do MMC pelo MDC de Dois Números Naturais

Objetivo: Compreender a propriedade que diz que o produto do mmc pelo mdc de dois números naturais é igual ao produto desses números.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

[I_i] 1) Calcule o valor do mmc entre os números abaixo.

a) 20 e 50;

b) 9 e 18;

c) 24 e 40;

d) 27 e 32;

e) 15 e 20.

[I_i] 2) Calcule o valor do mdc entre os números abaixo.

a) 4 e 5;

b) 3 e 4;

c) 6 e 8;

d) 15 e 20.

[I_e] 3) Usando as informações das questões 1 e 2 acima e informações de atividades anteriores, complete o quadro abaixo.

Números	MMC entre os Números	MDC entre os Números	Multiplicação do MMC pelo MDC
$4, 5$			
$3, 4$			
$6, 8$			
$20, 50$			
$9, 18$			
$24, 40$			
$27, 32$			
$15, 20$			

[I_e] 4) Efetue as seguintes multiplicações:

a) $4 \cdot 5$;

b) $3 \cdot 4$;

c) $6 \cdot 8$;

d) $20 \cdot 50$;

e) $9 \cdot 18$;

f) $24 \cdot 40$;

g) $27 \cdot 32$;

h) $15 \cdot 20$.

[I_r] 5) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão 3 com os valores obtidos na questão 4. O que você percebeu?

[I_f] *O produto do mmc pelo mdc de dois números naturais é igual ao produto desses números.*

[IA_r] 6) Determine:

a) o mmc entre 8 e 36 sabendo que o mdc entre eles é 4;

b) o mdc entre 18 e 30 sabendo que o mmc entre eles é 90;

c) o mmc entre 21 e 56 sabendo que o mdc entre eles é 7;

d) o mdc entre 48 e 64 sabendo que o mmc entre eles é 192;

e) o mmc entre 55 e 70 sabendo que o mdc entre eles é 5;

f) o mdc entre 80 e 90 sabendo que o mmc entre eles é 720.

5. APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

No presente capítulo deste trabalho iremos abordar os aspectos da aplicação da sequência didática que construímos. Descreveremos o tipo de escola em que foi aplicada, em que período, quantos alunos participaram da pesquisa, como eles foram agrupados etc. Também discorreremos sobre o modo da análise e avaliação dessa experiência, tentando apurar os pontos positivos e negativos da aplicação.

5.1 Procedimentos da Aplicação

A sequência didática desta dissertação foi aplicada com uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Ananindeua/PA, localizada no Bairro Distrito Industrial, no período de 18/10/2023 a 08/11/2023. Essa turma fazia parte da nossa lotação profissional desde o começo do ano letivo, então conhecíamos os alunos. Antes da aplicação conversamos com a turma para explicar sobre a aplicação e que isso faria parte de uma pesquisa de mestrado, lemos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e falamos que eles deveriam conversar com o seu responsável e quem quisesse fazer parte da mesma deveria assinar o termo, bem como o respectivo responsável. O TCLE está no Anexo C desta dissertação.

É pertinente esclarecer que as atividades da sequência foram aplicadas a todos os alunos da turma e fizeram parte do 4º bimestre letivo, entretanto, somente colhemos os dados para a pesquisa dos alunos que optaram por participar dela.

Apenas dez alunos dos 34 que compunham a turma resolveram participar da pesquisa. Antes de começar a aplicação da sequência didática, fizemos uma oficina de conhecimentos prévios com a turma, tendo como objetivo ensinar conhecimentos básicos pertinentes para que os estudantes compreendessem os conteúdos do conjunto de atividades. Decidimos passar direto para a oficina sem fazer testes para apurar como estava o nível de conhecimento dos alunos, por que estávamos exercendo nossas atividades laborais com a turma desde o início do ano letivo e sabíamos que a maior parte dos alunos apresentava bastantes dificuldades em Matemática.

A oficina de conhecimentos prévios foi realizada nos dias 11/10/2023 e 17/10/2023. As aulas da mesma ocorreram no formato expositivo/dialogado e foram aplicadas duas atividades, as quais estão no apêndice A deste trabalho. A oficina abordou os assuntos divisão com números naturais, múltiplos, divisores, números primos e compostos e decomposição de um número natural em fatores primos. Esclarecemos que as questões 4 e 5 da atividade 1 da oficina de conhecimentos prévios foram extraídas de Gay e Silva (2018a). E a questão 1 da atividade 2 foi adaptada de Dante (2015) e as questões 2, 3 e 5 foram adaptadas de Gay e Silva (2018a).

No dia seguinte iniciamos a aplicação da sequência didática, sempre desenvolvendo as atividades nos dias regulares das aulas de Matemática. As datas e o tempo em que cada UARC foi trabalhada estão no quadro 5.

Quadro 5 - Etapas da aplicação

Etapa	Data	Tempo
UARC 1	18/10/2023	2h15min
UARC 2	24/10/2023	1h30min
UARC 3	25/10/2023	2h15min
UARC 4	31/10/2023	1h30min
UARC 5	01/11/2023	2h15min
UARC 6	07/11/2023	1h30min
UARC 7	08/11/2023	2h15min

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

As questões das UARCs que compõem a sequência didática foram resolvidas em grupo para favorecer a troca de ideias e a ajuda mútua entre os estudantes, ou seja, nos baseamos na Psicologia Histórico-Cultural. Pedimos que os grupos formados tivessem três ou quatro pessoas e que os alunos que decidiram participar da pesquisa fizessem grupo com outros que também tinham tomado a mesma decisão, assim como os que não quiseram fazer parte da pesquisa foram orientados a formarem grupos entre eles. Solicitamos que eles se mantivessem no grupo de origem durante toda a aplicação da sequência, mas isso nem sempre foi atendido.

Figura 1 – Estudantes resolvendo atividade – 1ª foto

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2023.

Figura 2 – Estudantes resolvendo atividade – 2ª foto

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2023.

Figura 3 – Estudantes resolvendo atividade – 3ª foto

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2023.

Figura 4 – Estudantes resolvendo atividade – 4ª foto

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2023.

Para analisar a aplicação das atividades utilizamos a Análise Microgenética e a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002), diante de áudios colhidos durante a experiência em sala de aula. Nosso objetivo é olhar para o processo de aplicação e constatar se houve indícios de aprendizagem. Essa etapa da pesquisa está descrita no próximo subcapítulo.

5.2 Análise Microgenética e Análise do Discurso Referente a Aplicação

Com o objetivo de manter os educandos no anonimato, chamaremos os grupos formados para a pesquisa de A, composto pelos estudantes A1, A2, A3 e A4; B, composto pelos estudantes B1, B2 e B3; e C, composto pelos estudantes C1, C2 e C3. São desses estudantes que analisaremos as falas e os comportamentos.

As falas foram coletadas com gravador de voz de aparelho celular e a transcrição foi realizada por nós. Para produzir a Análise do Discurso, consideraremos por “turno” cada fala de um aluno ou do professor, por “segmento” um conjunto de turnos relacionados a um objetivo didático-pedagógico e por "episódio" um conjunto de segmentos pertencentes a uma UARC.

Devido à grande quantidade de falas nas gravações, optamos por numerar somente as que são apresentadas e analisadas aqui, e fizemos a numeração em ordem crescente e sem "saltos", não significando que um segmento ocorreu logo após o outro, sem intervalos nos quais as aulas estavam em pleno andamento. O quadro 6 expõe a organização dos episódios com os segmentos que lhe pertencem e os turnos de cada segmento.

Quadro 6 - Episódios, segmentos e turnos

Episódio/UARC	**Segmentos**	**Turnos**
1	1	1 – 6
	2	7 – 17
	3	18 – 24
2	1	25 – 39
3	1	40 – 53
	2	54 – 63
	3	64 – 72
	4	73 – 85
4	1	86 – 106
5	1	107 – 118
	2	119 – 124
6	1	125 – 128
7	1	129 – 136

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Episódio 1

Segmento 1: Turnos 1 – 6

Neste momento o professor já havia deixado os grupos de alunos tentarem resolver a atividade, já tinha esclarecido dúvidas e foi ao quadro branco resolver algumas questões junto com os alunos. Ele estava resolvendo a questão 4 da UARC 1 no momento do diálogo.

(1) Professor: [...] Antes de ir para a 5, vamos ver a 4 aí ó. Qual é o menor múltiplo comum de 4 e 5 diferente de zero?
Ninguém responde.
(2) Professor: [...] *Qual* foram os múltiplos comuns que vocês encontraram na primeira questão? Do 4 e do 5? Os múltiplos comuns da primeira questão? Do 4 e do 5?
(3) B2: 20, 40 e 60.
(4) Professor: 20, 40 e 60. Qual é o menor deles diferente de zero?
(5) B2: 20.
(6) Professor: 20. Pronto. [...]

Nesse segmento ocorreu o discurso interativo/de autoridade e o padrão de interação I-R-A. Depois do turno 1, falado pelo professor, nenhum aluno responde ao questionamento. O docente então tenta impulsionar a participação discente, esclarecendo um pouco mais a pergunta no turno 2. Desse modo, a intenção do professor, nesse momento, foi desenvolver a “estória científica”. Assim, no turno 3 o aluno B2 percebe que os números 20, 40 e 60 da primeira questão são múltiplos comuns de 4 e 5. No turno 4 o professor faz mais uma pergunta para que o referido aluno e a turma cheguem à resposta da questão 4, o que acontece no turno 5. Assim, o docente confirma, no turno 6, a resposta dada pelo discente, ou seja, guia os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização. Cremos que houveram intervenções do professor para dar forma aos significados e para compartilhar significados de um aluno com a turma toda, pois o diálogo com B2 é feito com o intuito de que a turma alcance o aprendizado.

Quadro 7 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 1 do episódio 1

Intenções do professor	Desenvolver a “estória científica”; e guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdos	Múltiplos comuns de dois números e mmc.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-A.
Formas de intervenção	Dar forma aos significados; e compartilhar significados de um estudante com a turma toda.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Segmento 2: Turnos 7 - 17

Neste momento um grupo de alunos estava completando o primeiro quadro da questão 5 da UARC 1. O professor percebe que o grupo cometeu um erro e inicia um diálogo.

(7) Professor: O 1 está entre os múltiplos de 4?

(8) A4: Foi ela que botou (referindo-se a A2).

(9) Professor: Por que o 1 é múltiplo de 4?

(10) A4: É, por que o 1 é múltiplo de 4? Por que tu *botou* o 1 múltiplo de 4? (novamente, referindo-se a A2).

[...]

(11) Professor: O que a gente faz para descobrir os múltiplos de 4?

(12) A4: Só somar assim 4 mais 4.

[...]

(13) Professor: [...] Pensa junto comigo, pode ser 1? Pode ser 1? (pergunta a A4).

(14) A2: Pode ser 1? Sim ou não? (pergunta a A4).

(15) A4: Não, não pode.

[...]

(16) A2: Não pode? Ele (o colega A4) falou que não pode.

(17) Professor: Não, não pode.

Nesse segmento houve o discurso interativo/de autoridade, sendo o padrão de interação predominante I-R-A. O professor interviu para checar o entendimento dos estudantes. O objetivo do educador foi que os alunos percebessem o erro que cometeram e entendessem melhor o conceito de múltiplos. No recorte, percebemos que o aluno A4 tentou dizer que o erro foi cometido pelo colega A2, entretanto, cremos, até mesmo pelo diálogo que se desenvolveu, que A4 também cometeu o equívoco e só entendeu completamente que se tratava de uma resposta errada no turno 15. Acreditamos também que a participação de A2 no diálogo trouxe benefícios para o seu entendimento, embora ainda aparentasse ter dúvidas. Concebemos que as intenções do professor nesse segmento foram explorar a visão dos estudantes e guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.

Quadro 8 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 2 do episódio 1

Intenções do professor	Explorar a visão dos estudantes; e guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Múltiplos de números naturais.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-A.
Forma de intervenção	Checar o entendimento dos estudantes.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Segmento 3: Turnos 18 – 24

Neste segmento o professor havia feito a intervenção formalizante da UARC 1 e dialogou com os alunos para que eles completassem os exemplos que vem depois dessa intervenção. Embora, tenham sido colocados como exemplos, a atividade propõe para os alunos completarem com os valores, com o objetivo de que eles relacionem o que foi feito nas questões anteriores com o conceito formalizado no momento.

(18) Professor: E aí o mmc de 3 e 4? Quem foi que vocês encontraram?
(19) B2: 12.
(20) Professor: 12. Onde é que *tá*, B2?
(21) B2: É... *tá*...*tá*...
(22) Professor: Em que questão que *tá*?
(23) B2: *Tá* na 5.
(24) Professor: *Tá* na questão 5, gente. Vocês fizeram. Na questão 5.

Nesse recorte houve o discurso interativo/de autoridade, com padrão de interação I-R-A e I-R-P-R-A. Assim, vemos que o educador guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização. Notamos que apesar do aluno ter respondido corretamente, no turno 19, o que o professor perguntou, o docente tentou confirmar se ele estava fazendo a relação com o que havia sido trabalhado nas questões anteriores e mostrar para a turma o que tinha que ser feito com a pergunta do turno 20, ou seja, aconteceram intervenções do professor para checar o entendimento dos estudantes, dar forma aos significados e compartilhar significados de um estudante com a classe toda. No turno 23 o professor percebe que o entendimento do aluno é sólido e no 24 esclarece para toda a turma onde estão os valores de mmc pedidos.

Quadro 9 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 3 do episódio 1

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Mmc.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrões de interação	I-R-A e I-R-P-R-A.
Formas de intervenção	Checar o entendimento dos estudantes; dar forma aos significados; e compartilhar significados de um estudante com a classe toda.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Episódio 2

Segmento 1: Turnos 25 – 39

Neste momento o professor se aproximou de um grupo que estava fazendo a atividade para conferir o andamento da mesma. Assim, alunos e professor discutiram a questão 3 da UARC 2.

(25) Professor: [...] O que está escrito aqui? (aponta para a atividade de um estudante).

[...]

(26) B1: [...] Os resultados são diferentes, mas os números são iguais.

(27) Professor: Não era isso que eu queria não... Olha aqui. [...] Olha aqui, *cadê* a atividade 1? Bota lá na questão 5. Aqui ó, B1, vocês multiplicaram os fatores primos, *né*? E *chegou* em 20, 12, 24 e 18, *né*? Aí olha só, compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior, que é isso daqui, com os valores de mmc obtidos na atividade 1, principalmente na questão 5. O que você percebeu? Quais são os mmcs, os valores de mmc aqui da questão 5? O mmc não é o menor múltiplo comum? Olha só, o menor múltiplo comum de 3 e 4 diferente de 0: 12 (aponta para a questão 5 da atividade 1). Não tem um 12 aqui? (aponta para a questão 2 da atividade 2).

(28) B1: Sim.

(29) Professor: [...] Aqui, o menor múltiplo comum de 6 e 8 diferente de 0: 24 (aponta para a questão 5 da atividade 1). Não tem um 24 aqui? (aponta para a questão 2 da atividade 2).

(30) B1: Sim.

(31) Professor: Menor múltiplo comum de 3, 6 e 9, diferente de 0: 18 (aponta para a questão 5 da atividade 1). Não tem um 18 aqui? (aponta para a questão 2 da atividade 2).

(32) B1: Sim.

(33) Professor: Então, o que vocês percebem? [...] E do 4 e do 5 *tá* aqui ó. Qual é o menor múltiplo comum de 4 e 5, diferente de 0? 20 (aponta para a questão 4 da atividade 1). Não tem um 20 aqui? (aponta para a questão 2 da atividade 2). E aí, o que vocês perceberam?

(34) B2: São múltiplos comuns de... desses números.

(35) Professor: São múltiplos comuns? Que esses aqui (é isso?) são os mmcs desses caras aqui, *né*? (aponta para a última e para a primeira coluna do quadro da questão 2).

(36) B2: Sim.

(37) Professor: Olha só, esses daqui são os mmc desses daqui ó (aponta para a última e para a primeira coluna do quadro da questão 2). Não é?

(38) B1: É.

(39) B2: Os resultados da última coluna é... são os mmc da primeira coluna.

Nesse recorte, percebemos que o docente guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização; e que houve o discurso interativo/de autoridade, com padrão de interação I-R-A e I-R-F-R. O professor não entendeu a resposta da questão 3 do aluno B1 e perguntou o que estava escrito, ou seja, interviu para checar o entendimento dos estudantes do grupo. A resposta de B1 mostrou que ele não percebeu o que o professor queria. Na verdade, o que B1 constatou foi que nas três últimas linhas do quadro da segunda questão os números primos da fatoração são o 2 e o 3, mas o resultado da multiplicação deles, na última coluna, são diferentes, pois em cada linha o 2 e o 3 aparecem em quantidades diferentes. Desse modo, do turno 27 ao 33 o professor construiu um diálogo para que os alunos do grupo conseguissem chegar à conclusão pertinente da atividade, fato que aconteceu no turno 34. Embora o aluno B2 não tenha usado a expressão “mínimo múltiplo comum”, acreditamos que ele tenha chegado a referida conclusão. No turno 35 o professor tentou esclarecer mais o raciocínio de B2 e no turno 37 tentou checar se B1 também chegou ao entendimento, o que é confirmado no turno 38. No turno 39 mais uma vez é confirmado que B2 alcançou o raciocínio correto. Houve um trabalho do docente nessa discussão com o intuito de dar forma aos significados e marcar significados chaves.

Quadro 10 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 1 do episódio 2

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Cálculo do mmc por meio de fatoração.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrões de interação	I-R-A e I-R-F-R.
Formas de intervenção	Checar o entendimento dos estudantes; dar forma aos significados; e marcar significados chaves.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Episódio 3

Segmento 1: Turnos 40 – 53

Neste intervalo de tempo o professor estava passando pelos grupos que estavam fazendo a atividade para tirar dúvidas. Desse modo, um aluno fez um questionamento sobre o item “b” da primeira questão da UARC 3.

(40) A2: A “b” *tá* certa? “Sim”.

[...]

(41) Professor: Primeiro tu *tem* que resolver a primeira (refere-se a letra “a”) para tu poder responder a “b”.

(42) A2: Mas *tá* certa sim ou não, tio?

[...]

(43) Professor: Não.

(44) A2: Poderia, porque o 20 ia ser 5 *pra* cada e do 50, 15 *pra* cada.

[...]

(45) Professor: É, mas não divide. *Tá* dividindo errado. 50 não divide *pra* 4. Faz aí de novo, 50 dividido *pra* 4, se dá certo.

(46) A4: 4, 8; 9, 10, 11, 12; 13, 14, 15, 16; 17, 18, 19, 20. O 4.

(47) A2: É, eu fiz do meu jeito e deu certo.

(48) Professor: Sim, o 20 divide por 4.

(49) A4: E o 50? *Peraí* (tenta fazer a divisão).

(50) Professor: E o 50 divide por 4?

(51) A2: Não. Vai sobrar 2.

(52) Professor: Vai sobrar 2, *né*? Então, não pode. Entendeu?

(53) A2: Entendi.

Nesse segmento, percebemos que o docente guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização; e que houve o discurso interativo/de autoridade, com padrão de interação I-R-A. O aluno A2 respondeu o item “b” da primeira questão de forma afirmativa, porque acreditou que 4 pode ser divisor de 50. Ao perceber isso, o professor pediu para que ele fizesse novamente a divisão de 50 por 4, intervindo para checar o entendimento dos estudantes da equipe. Assim, no turno 46 o colega A4 do aluno A2 fez a divisão de 20 por 4 e confirmou a resposta incorreta de A2, mas o próprio A4 indaga sobre a divisão de 50 por 4 no turno 49. No turno 51 o estudante A2 entendeu que na divisão de 50 por 4 vai sobrar 2, então no turno 52 o professor esclareceu que o jogo não pode ser realizado por 4 pessoas e perguntou se o educando entendeu, ao que o aluno responde de forma afirmativa no turno 53. Posteriormente, nesta aula, em um diálogo não retratado aqui, o educador percebeu que os alunos mencionados ainda possuíam dúvidas sobre se era possível o jogo ser aplicado com 4 participantes, entretanto, cremos que no presente recorte, A2 e A4 também esclareceram dúvidas ao interagir. Notamos, no segmento, um processo do professor para dar forma aos significados e marcar significados chaves.

Quadro 11 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 1 do episódio 3

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Divisores de números naturais.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-A.
Formas de intervenção	Checar o entendimento dos estudantes; dar forma aos significados; e marcar significados chaves.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Segmento 2: Turnos 54 – 63

Nesta etapa da aula, o professor foi ao quadro branco resolver algumas questões da atividade. Ao interagir com a turma sobre o item “a” da primeira questão da UARC 3 e vê que a classe havia chegado à conclusão que 2 e 10 são quantidades de pessoas que podem participar do jogo, tenta provocar os alunos para discutir sobre a terceira opção de quantidade de pessoas.

(54) Professor: [...] O que que eu *tô* procurando aqui quando eu encontrei o 2 e o 10? Eu *tô* procurando um número que... divida, divida o 20 e o 50, *tá*? Ainda tem mais uma opção. Mais uma opção aí.

A2 fala algo, mas o professor não entende.

(55) Professor: Qual, A2?

(56) A2: 5.

(57) Professor: Por que 5?

(58) A2: Porque 5 divide.

(59) Professor: Porque 5 divide o 20 e o 50. Vocês concordam com o A2? Quem é ruim de conta... ah, isso é fácil, 20 *pra* 5, quanto é que dá?

(60) B2: 4.

(61) Professor: 4. 50 *pra* 5?

(62) A3: 50 *pra* 5? 10.

(63) Professor: 10. Então pode também. 5 pessoas...

Nesse diálogo houve o discurso interativo/de autoridade, com padrão de interação I-R-F-R-A e I-R-A. Percebemos que o docente guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização. Nesse recorte o professor tentou impulsionar a participação e reflexão dos alunos. Assim, no turno 57 foi pedido que A2 justificasse sua resposta, o que aconteceu no turno 58, ou seja, o educador checou o entendimento do estudante. No turno 59 o docente perguntou se os outros alunos pesquisados concordavam com o raciocínio de A2, novamente tentando checar o entendimento dos escolares. Nos turnos 60 e 62 vemos a participação de mais dois educandos e no turno 63 o professor confirmou que do jogo podiam participar 5 pessoas também, conclusão à qual os alunos chegaram. Concebemos que do turno 59 ao 63 aconteceram ainda intervenções do professor para marcar significados chaves e compartilhar significados de um estudante com toda a classe.

Quadro 12 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 2 do episódio 3

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Divisores comuns de dois números naturais.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrões de interação	I-R-F-R-A e I-R-A.
Formas de intervenção	Checar o entendimento dos estudantes; marcar significados chaves; e compartilhar significados de um estudante com toda a classe.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Segmento 3: Turnos 64 – 72

Neste momento o professor foi resolver a questão 5 da UARC 3 no quadro branco depois de dar um tempo para os grupos resolverem. Especificamente, estava comentando o segundo quadro da questão.

(64) Professor: Olha lá, divisores de 24. Quem *é*?

Os alunos falam alguns divisores.

[...]

O professor escreve no quadro alguns divisores falados, mas esquece do 6.

(65) A2: Tem o 6 aí! O 6!

[...]

O professor completa os divisores citados pelos alunos, mas ainda falta um divisor.

(66) Professor: Ainda *tá* faltando alguém.

(67) A4: 10.

(68) Professor: 10 não divide.

[...]

(69) B1: 3.

(70) Professor: O 3?

(71) B1: Sim.

(72) Professor: O 3, *né*?

Nesse recorte, marcado por uma grande interação entre professor e alunos, notamos que o docente guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização. Assim, houve o discurso interativo/de autoridade, com padrão de interação I-R-A e I-R-F-R-A. Quando o docente esqueceu um dos divisores do 24 falados pelos alunos, o aluno A2 notou e comentou o que ficou faltando. Entretanto, os estudantes não lembraram de um dos divisores, então o professor esclareceu que algo estava faltando. Assim, o discente A4 tentou responder no turno 67, mas não acertou. No turno 69 o aluno B1 finalmente respondeu sinalizando o divisor esquecido anteriormente. No turno 70 o educador fez uma pergunta para que B1 confirmasse sua resposta. No último turno do segmento o professor sinalizou que a resposta estava correta, apesar de o fazer com uma pergunta. Essa sinalização não foi só para B1, mas para toda a turma. Desse modo, cremos que nesse segmento ocorreram intervenções do professor para checar o entendimento dos estudantes, dar forma aos significados e compartilhar significados de um estudante com toda a classe.

Quadro 13 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 3 do episódio 3

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Divisores de números naturais.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrões de interação	I-R-A e I-R-F-R-A.
Formas de intervenção	Checar o entendimento dos estudantes; dar forma aos significados; e compartilhar significados de um estudante com toda a classe.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Segmento 4: Turnos 73 – 85

Neste momento da aula o professor estava no quadro branco completando o segundo quadro da questão 5 da UARC 3 junto com os alunos.

(73) Professor: Divisores comuns de 24 e 40:

(74) A3: 1, 2, 3, 4. 1, 2, 4, 8 e 12.

[...]

(75) Professor: Não. Mas o 12 não divide os dois.

[...]

(76) A2: Mas, professor, o 12 mais 12 dá 24.

(77) Professor: Sim, divide o 24. Não divide o 40. *Tá* certo, divide o 24. Não divide o 40. *Tá*, A2? Sim, aqui, divisores comuns de 24 e 40. Termina aqui? (aponta para o quadro branco, onde escreveu “1, 2, 4, 8”).

(78) A3: 8... 8.

(79) Professor: Então termina aqui?

(80) A3: É.

(81) Professor: Sim ou não?

(82) A3: É.

(83) Professor: Maior divisor comum de 24 e 40:

(84) B2: 8.

(85) Professor: O 8, então, *né*, B2?

No diálogo acima houve o discurso interativo/de autoridade, com padrão de interação I-R-A. Concebemos que o educador guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização, e que ele tentou desenvolver a “estória científica”. Percebemos, ainda, que nesse momento retratado também houve uma interação intensa entre docente e alunos. Observamos no turno 74 desse recorte que o aluno A3 inicialmente incluiu o 3 nos divisores comuns do 24 e do 40, mas logo depois retificou sua fala o tirando e inserindo o 8 e o 12, ao que o professor argumentou que o 12 não podia está na resposta. Depois, no turno 76, o estudante A2 argumentou que 12 é divisor de 24, ao que o educador respondeu que o raciocínio estava correto, mas que 12 não divide o 40, e perguntou à turma se os divisores comuns discutidos terminavam no 8. No turno 82 percebemos que A3 entendeu que 1, 2, 4 e 8 eram os divisores comuns procurados. Assim, no turno seguinte, o docente continuou impulsionando a turma para completar o quadro da questão. No turno 84 o discente B2 argumentou corretamente o que completaria o quadro, demonstrando ter entendido a questão. Desse modo, no último turno do segmento o professor confirmou a resposta de B2. Ao nosso ver, no segmento, ocorreram intervenções do professor para checar o entendimento dos estudantes e para dar forma aos significados.

Quadro 14 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 4 do episódio 3

Intenções do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização; e desenvolver a "estória científica".
Conteúdo	Divisores comuns de dois números.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-A.
Formas de intervenção	Checar o entendimento dos estudantes; e dar forma aos significados.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Episódio 4

Segmento 1: Turnos 86 – 106

Neste momento da aula o professor estava passando entre os grupos para tirar dúvidas. O diálogo a seguir diz respeito ao item "b" da questão 1 da UARC 4.

(86) Professor: Sim, A2, qual é que tu *vai* circular, aí?

(87) A2: O 2.

(88) Professor: Só o 2?

(89) A2: Na minha conta que eu *tava* dividindo, eu *tava* dividindo só com *os* 2.

(90) Professor: Só o 2? Quem é que a gente circula?

(91) A2: O 2.

(92) Professor: Não, quem é que a gente circula nessa questão aí? Quem é... fator comum, *né*? Quem divide os dois. Quem está dividindo os dois números aí?

(93) A2: O 2.

(94) Professor: Só ele?

[...]

(95) Professor: Então circula aí.

A2 faz o que o professor pediu.

(96) Professor: Só esse que divide os dois?

(97) A2: Eu só fiz com 2.

(98) Professor: Esse outro 2 aí, ele não está dividindo dois números?

(99) A2: Sim.

(100) Professor: Então.

(101) A2: Ah, sim.

(102) Professor: Quem mais? E o 3?

(103) A2: O 3 divide só o 3...

[...]

(104) Professor: E o 5?

(105) A2: O 5 só divide 5.

(106) Professor: *Tá*. É isso!

Nesse segmento houve o discurso interativo/de autoridade, sendo o padrão de interação I-R-A e I-R-F-R-F-R-F-R-F-A. Concebemos que o professor guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização. Ao ver que o aluno A2 estava equivocado na sua forma de pensar, o educador foi fazendo questionamentos para que o próprio educando alcançasse o entendimento, até que no turno 101 o estudante sinalizou que percebeu o próprio equívoco. Vemos, então, um processo realizado para dar forma aos significados. Nos cinco últimos turnos percebemos um diálogo no qual o objetivo do professor foi checar o entendimento de A2, o qual demonstrou ter internalizado a maneira correta de se fazer o procedimento matemático discutido.

Quadro 15 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 1 do episódio 4

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Cálculo do mdc por meio de fatoração.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrões de interação	I-R-A e I-R-F-R-F-R-F-R-F-A.
Formas de intervenção	Dar forma aos significados; e checar o entendimento do estudante.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Episódio 5

Segmento 1: Turnos 107 – 118

Neste momento da aula o professor foi chamado pelo grupo C, para que ele verificasse a resposta dada por um integrante do grupo ao item “b” da questão 1 da UARC 5.

(107) Professor: O que é C1? Se *tá* certo?
O professor olha a atividade.
(108) Professor: Isso.
C1 comemora.
(109) C2: Que isso, C1? (essa fala é de admiração).
(110) Professor: Aí circula o quê?
(111) C2: O resultado, C1.
(112) C1: O 24.
(113) Professor: Não.
(114) C1: 8.
(115) Professor: Quem que eu circulei aqui? (aponta para o comando da primeira questão).
(116) C1: 10.
(117) Professor: Quem que tu *vai* circular aqui? (aponta para o item “b” da primeira questão).
(118) C1: O 8.

Nesse recorte houve o discurso interativo/de autoridade, sendo o padrão de interação I-R-A. Cremos que o professor guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização. O estudante C1 havia feito de maneira correta o processo do algoritmo de Euclides, mas não tinha circulado o divisor da última divisão. Então, o educador indagou sobre o que seria circulado. Assim, o aluno C2 respondeu de maneira equivocada sobre o que deveria ser circulado e o próprio C1 também respondeu de maneira incorreta. No turno 114, C1 respondeu corretamente, porém, como o professor não sentiu segurança na resposta iniciou um diálogo para que C1 respondesse com mais firmeza, o que aconteceu no turno 118. Acreditamos que C2 também esclareceu dúvidas ao presenciar o diálogo entre C1 e o docente. Concebemos que nesse segmento houveram intervenções do professor para checar o entendimento do estudante e para dar forma aos significados.

Quadro 16 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 1 do episódio 5

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Algoritmo de Euclides.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-A.
Formas de intervenção	Dar forma aos significados; e checar o entendimento do estudante.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Segmento 2: Turnos 119 – 124

Neste momento da aplicação da UARC 5 o professor estava resolvendo algumas questões no quadro branco. O diálogo a seguir diz respeito a questão 3 da referida UARC.

(119) Professor: Olha só, o primeiro quadro, o primeiro quadro da atividade 5, a última linha, observem lá, maior divisor comum de 9 e 18, quem é? [...] É o 9, né? Olha o segundo, maior divisor comum de 24 e 40. Olha o terceiro, maior divisor comum de 27 e 32. E esses números tão aqui, né? (aponta para o quadro branco, onde resolveu a segunda questão) Então, o que que a gente conclui? O que que a gente conclui? [...] E aí, quem concluiu alguma coisa? O que foi que tu *concluiu*, B2?

(120) B2: Que os números da última coluna são os mdc dos números da quinta questão.

(121) Professor: Isso. Ou pode dizer que são o mdc daqui ó, desses caras daqui da primeira coluna.

[...]

(122) Professor: Esse 10 aqui, que também é o mdc, ele aparece lá na primeira questão que a gente fez, né?

(123) B2: Sim.

(124) Professor: Olha só, lá na quarta questão. Na primeira e na quarta, né? Qual é o maior divisor comum de 20 e 50? O 10. Tá? Então o 10 também é o mdc do 20 e do 50. Então, os valores da última coluna são os valores de mdc dos números da primeira coluna. Tá? Essa é a conclusão. [...]

Nesse segmento ocorreu o discurso interativo/de autoridade, sendo o padrão de interação I-R-A. Cremos que nesse momento do processo de ensino e aprendizagem o professor guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização. Diante da dificuldade dos alunos de responderem a questão 3, o docente mostrou valores que apareceram tanto na UARC 3 quanto na UARC 5. Desse modo, o estudante B2 alcançou a conclusão pertinente, e no turno 121 o professor tentou melhorar a resposta de B2, ainda que ele tenha percebido que no turno anterior o aluno já havia chegado à conclusão correta. Nos turnos 122 e 124 o educador fez comentários sobre um valor de mdc que ele não havia comentado antes e, por fim, esclareceu para toda a turma a conclusão exigida na questão 3. Cremos que no diálogo retratado houve intervenção do professor para dar forma aos significados.

Quadro 17 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 2 do episódio 5

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Cálculo do mdc por meio do algoritmo de Euclides.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-A.
Forma de intervenção	Dar forma aos significados.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Episódio 6

Segmento 1: Turnos 125 – 128

Neste momento do processo de ensino e aprendizagem os estudantes estavam resolvendo a questão 4 da UARC 6 e o professor comentando no quadro branco.

(125) Professor: [...] Então vocês vão procurar dois números aí que *tenha* o máximo divisor comum igual a 1, que não *tá* nas atividades.

[...]

(126) Professor: Olha, o B1 achou um aqui ó. [...] Mdc... Olha só, ele fez mdc de 23 e 7. Olha só, qual é o número primo que... Vamos fazer assim por fatoração, *tá*? Se tiver mdc igual a 1, se tiver mdc igual a 1 eu não vou encontrar nenhum número primo que divida os dois, *né* isso que acontece? [...] Qual é o número primo que eu divido ou o 7 ou o 23? [...] Eu posso dividir ele por 2? Algum deles? Posso por 3? [...] É o 7. 7 dividido *pra* 7, 1, aí eu boto bem aqui ó (escreve no quadro branco), *tá*? E 23 eu não consigo dividir por 7, *né*? Abaixa o 23. E agora?

(127) A3: 23.

(128) Professor: Pelo próprio 23? O 23, ele é primo, então eu só consigo dividir por ele mesmo, *tá*? Abaixa o 1. 23 dividido *pra* 23, 1. Teve algum número que dividiu os dois? Não. Então o mdc deles (vou botar logo aqui, *né*?) é igual a 1. Pronto, já dei um exemplo.

Nesse recorte ocorreu o discurso interativo/de autoridade, sendo o padrão de interação I-R-A. Acreditamos que aqui o professor guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização, e que ele tentou desenvolver a “estória científica”. Depois do turno 125 o educador esperou os alunos encontrarem o exemplo pedido na questão. O aluno B1 encontrou um exemplo e nos turnos seguintes o docente calculou o mdc para verificar se o exemplo estava correto diante da turma e com a participação dela. Cremos que foi importante o uso do exemplo do próprio aluno, pois isso mostrou a consideração do professor ao que o educando fez, e que as falas do professor durante esse momento retratado trouxeram mais clareza sobre o conteúdo para os alunos participantes da aula. Concebemos que nesse segmento houveram intervenções do professor para dar forma aos significados e para compartilhar significados de um estudante com toda a classe.

Quadro 18 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 1 do episódio 6

Intenções do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização; e desenvolver a “estória científica”
Conteúdo	Números primos entre si.

Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-A.
Formas de intervenção	Dar forma aos significados; e compartilhar significados de um estudante com toda a classe.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Episódio 7

Segmento 1: Turnos 129 – 136

Neste momento o professor estava atendendo os grupos que estavam tentando fazer a atividade e questionou um estudante sobre a resposta dada para a questão 5 da UARC 7.

(129) Professor: Alguns resultados ou todos? [...] Todos, *né*, B2?

(130) B2: Todos.

(131) Professor: Então, posso afirmar o quê?

(132) B2: [...] A multiplicação *dos* mmc com o mdc dos números da primeira coluna.

(133) Professor: Então, se eu multiplicar o mmc com o mdc, é a mesma coisa que...

(134) B2: Que a multiplicação dos números.

(135) Professor: [...] Se eu multiplicar o mmc com o mdc é a mesma coisa que eu multiplicar os números aqui? (aponta para a atividade).

(136) B2: É.

Nesse segmento ocorreu o discurso interativo/de autoridade, sendo o padrão de interação I-R-F-R-P-R-F-R. Cremos que, nesse momento, o professor guiou os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e deu suporte ao processo de internalização. O professor tentou esclarecer um equívoco do estudante no turno 129 e no turno seguinte há o entendimento do aluno. Partindo da primeira observação do educando o professor tentou fazer com que o aluno chegasse ao entendimento da propriedade matemática, o que era o objetivo da atividade. Ocorreu o aprendizado pelo estudante no diálogo que se desenvolveu até o último turno. Concebemos que nesse recorte houveram intervenções do professor para dar forma aos significados, checar o entendimento do estudante, e marcar significados chaves.

Quadro 19 - Resumo da Análise do Discurso do segmento 1 do episódio 7

Intenção do professor	Guiar os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dar suporte ao processo de internalização.
Conteúdo	Propriedade: O produto do mmc pelo mdc de dois números naturais é igual ao produto desses números.
Abordagem comunicativa	Interativo/de autoridade.
Padrão de interação	I-R-F-R-P-R-F-R.
Formas de intervenção	Dar forma aos significados; checar o entendimento do estudante; e marcar significados chaves.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

5.3 Considerações sobre a Aplicação da Sequência Didática

Na aplicação da sequência didática com estrutura baseada em Cabral (2017) constatamos que esse procedimento possibilita que o próprio educando construa seu conhecimento a partir de “descobertas”, o que é significativo para ele e torna o processo de ensino mais dinâmico. Para que esse processo ocorresse dessa forma foi fundamental a presença de situações adidáticas conforme propõe Brousseau (2008), bem como do sistema de interações do qual o estudante participa.

Desse modo, foi bastante pertinente as atividades serem resolvidas em equipes de alunos, o que tornou, por vezes, o ambiente da sala de aula um local de discussões e ajuda mútua, que contribuíram para manter o dinamismo e para a aprendizagem dos escolares.

Também ressaltamos que o trabalho pedagógico desenvolvido com a sequência didática favoreceu a criação de zonas de desenvolvimento proximais, as quais são fatores significativos para a aprendizagem dos estudantes.

Entretanto, percebemos muita falta de interesse em uma parcela dos estudantes mesmo diante de um procedimento didático mais dinâmico e diferente do habitual e do fato de receberem atividades impressas, que excluía a necessidade de copiar bastante do quadro branco. O mesmo desinteresse pelos estudos também foi constatado nos resultados da aplicação do questionário para estudantes egressos do 7º ano, quando 83,4% dos discentes relataram que não costumam estudar

Matemática quando não estão na escola ou estudam a disciplina somente no período de prova. Concebemos que a atitude do aluno diante das atividades é fundamental para o desempenho satisfatório dele.

Percebemos também grande dificuldade da maioria dos alunos para entender o que cada questão exigia. Essa dificuldade acontecia porque os estudantes não tinham uma habilidade razoável de leitura e interpretação.

Notamos grande dificuldade dos alunos para perceberem por si sós um padrão de resultados, ou seja, o que estava acontecendo matematicamente em várias situações semelhantes. Isso, ao nosso ver, decorre da dificuldade em interpretação e em procedimentos e conceitos matemáticos. A falta de conhecimento em conteúdos que eram pré-requisitos para se entender os assuntos da sequência didática e o desinteresse de parte dos pesquisados fizeram com que a dificuldade para aprender ficasse evidente. Até mesmo a prática de “pingue-pongue” entre nós e os alunos para que eles mesmos alcançassem o aprendizado de certo conteúdo ficou, por vezes, prejudicada, devido vários estudantes estarem em um nível muito baixo de conhecimento. Nesse caso, o docente acaba tendo que partir para uma fala mais objetiva que explique o referido assunto.

Concebemos também que algo que contribuiu para as dificuldades dos estudantes na aplicação das tarefas da sequência didática foi o curto período da oficina de conhecimentos prévios realizada, sendo necessário ela ser trabalhada um pouco mais.

Diante das dificuldades dos educandos teve um importante papel as Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMOs) realizadas por nós durante o processo de ensino e aprendizagem, esclarecendo situações e fazendo os estudantes avançarem em direção à aprendizagem dos conceitos e procedimentos. Porém, percebemos que mesmo depois da aplicação da sequência didática alguns alunos não mostraram que tinham alcançado uma sólida aprendizagem dos conteúdos.

Mesmo diante das dificuldades dos alunos relatadas aqui, percebemos que houve aprendizado por parte dos pesquisados, o que a Análise Microgenética e a Análise do Discurso realizada no subcapítulo anterior evidenciaram. Desse modo, cremos que foi validada a sequência didática construída e que a mesma poderá contribuir para a aprendizagem dos conteúdos quando usada por outros professores, mas não deixamos de vista que cada turma e cada contexto é único e tem suas demandas próprias.

Notamos que é importante também o trabalho com as questões da IA_r e IA_a após o estabelecimento das Intervenções Formalizantes e não somente a exigência da execução delas por parte dos escolares.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propôs apresentar uma pesquisa sobre a aplicação de uma sequência didática sobre mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Estabelecemos como Problema Científico a ser respondido “que contribuições a utilização de uma sequência didática, elaborada segundo o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARCs), traz para o processo de ensino e aprendizagem de mmc e mdc realizado com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental?”. Assim, o objetivo geral do trabalho foi analisar as contribuições para o ensino e a aprendizagem de mmc e mdc resultantes do uso de uma sequência didática baseada em Cabral (2017).

Para subsidiar a elaboração da sequência fizemos uma pesquisa bibliográfica sobre ensino de mmc e mdc, onde percebemos que trabalhos nesse tema são escassos e aumentamos o campo de pesquisa para ensino de divisibilidade. Os trabalhos, em geral, mostraram novas formas de ensinar os conteúdos e os resultados do uso delas, que foram o maior envolvimento dos alunos e maior aprendizagem.

Realizamos também uma pesquisa com professores de Matemática que atuam em escolas públicas no Pará, a qual mostrou que os professores ainda trabalham de maneira muito tradicional, e que os alunos, na concepção dos docentes, têm uma baixa aprendizagem desses conteúdos quando eles ministram suas aulas.

Por outro lado, aplicamos questionários com estudantes egressos do 7º ano, ou seja, que estavam cursando o 8º ano no momento da pesquisa realizada. Os resultados mostraram que os alunos, na maioria dos casos, relataram que durante as aulas dos conteúdos mmc e mdc seu professor usou uma metodologia tradicional de ensino, que uma parte considerável dos educandos não gostava ou gostava somente um pouco de Matemática e que pouquíssimos discentes tinham hábito de estudar essa disciplina quando estavam fora da escola e ajuda de alguém para resolver as atividades escolares de Matemática.

Diante desses resultados reforçamos a concepção que possuíamos de que o cenário é desafiador para professores em geral e de Matemática e que a construção de metodologias diferenciadas é pertinente como tentativa de melhorar essa realidade.

Construímos a sequência didática e aplicamos em uma escola da Rede Municipal de Ananindeua/PA, em uma turma em que estávamos lotados desde o início do ano letivo. Nessa etapa da pesquisa colhemos dados de 10 estudantes e do professor. Os procedimentos de pesquisa neste momento foram a Análise Microgenética e a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002). Esses dispositivos focam no processo e não no produto resultante de uma atividade realizada. Desse modo, por meio deles, foram notados indícios de aprendizagem durante o processo de aplicação.

Percebemos que a sequência feita segundo o modelo das UARCs contribuiu para a construção de reflexões e hipóteses, que como consequência, fizeram os educandos construírem conhecimentos matemáticos escolares, ocupando papel ativo no processo de aprendizagem. Também notamos que a relação professor/aluno/saber foi enriquecida, pois houve um aumento do dinamismo, já que a aula começava com uma atividade, e por conta das interações e ajuda mútua entre os estudantes. Percebemos, ainda, que houve a intensificação da criação de zonas de desenvolvimento proximais nos alunos.

Assim, consideramos validada a sequência didática como instrumento que contribui para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos mmc e mdc, podendo ser reaplicada por outros professores. Porém, estamos certos de que cada contexto e turma possui suas demandas específicas.

Cabe ressaltarmos o considerável crescimento profissional que este trabalho nos trouxe no que tange ao nosso conhecimento dos objetos matemáticos mmc e mdc, dado que para construir o capítulo 3 desta pesquisa estudamos de forma profunda esses conteúdos, e por nos debruçarmos em trabalhos acadêmicos que tratavam do processo de ensino deles.

O crescimento profissional também ocorreu por meio dos estudos para estabelecer o referencial teórico do trabalho, das pesquisas de campo, que nos explicitaram mais ainda a realidade enfrentada nas escolas públicas do Pará, e da elaboração, aplicação e avaliação do procedimento sequência didática, voltada para o ensino de mmc e mdc, que nos aproximaram de um formato diferenciado de processo de ensino e aprendizagem. Assim, houve um aumento nos nossos conhecimentos voltados para a atuação docente, o que implica em um melhor exercício profissional.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 7, n. 2, dezembro/2012.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. 4. ed. ren. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. 6 v.

ASSESSORIA DE COMUNICAÇÃO SOCIAL DO INEP. **Divulgados os resultados do Pisa 2022**. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022. Acesso em 08/01/2024.

BARBOZA, Daiani; ZANELLA, Andréa Vieira. Integrando análise de conteúdo e análise microgenética em pesquisas no campo psi: a constituição do sujeito como foco. **PSICO**, Porto Alegre, PUCRS, v. 36, n. 2, p. 189-196, maio-ago. 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental)**: Matemática. Brasília, 1998.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenobla, vol. 7, nº 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**. Tradução: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas; Dias, Gustavo Nogueira; LOBATO JÚNIOR, José Maria dos Santos. (2019). O Ensino de Razão e Proporção por meio de Atividades. **Ensino da Matemática em Debate**. São Paulo/SP, v. 6, nº 3, p. 174–206, 2019.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM/PA, 2017.

CASTRO, Sandro Benício Goulart. **O ensino de divisibilidade de números naturais por atividades**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). UEPA, Belém, 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: Matemática, 6º ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DAVIS, Claudia; OLIVEIRA, Zilma de Moraes Ramos de. **Psicologia na Educação**. 3. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2010.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual. 1991.

FIORELLI, Juliana de Oliveira. **Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum Generalizados Aplicados no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UNICAMP, Campinas, 2017.

GAMA, Paulo Ferreira da. **Uma sequência didática para o ensino da função seno**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). UEPA, Belém, 2020.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael. **Araribá Mais**: Matemática, 6º ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018a.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael. **Araribá Mais**: Matemática, 7º ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018b.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas S.A., 2008.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 7º ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GÓES, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos Cedes**. Campinas, Ano 20, nº 50, p. 09-25, abril/2000.

KELMAN, Celeste Azulay; BRANCO, Angela Uchoa. Análise microgenética em pesquisa com alunos surdos. **Rev. Bras. Ed. Esp**. Marília, v. 10, nº 1, p. 93-106, jan.-abr., 2004.

LOPES, Yale de Ângelis. **Geogebra como Ferramenta Auxiliar no Processo de Aprendizagem de Números Primos na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UFTM, Uberaba, 2017.

MORTIMER, Eduardo F.; SCOTT, Phil. Atividade Discursiva nas Salas de Aula de Ciências: Uma Ferramenta Sociocultural para Analisar e Planejar o Ensino. **Investigações em Ensino de Ciências**. Porto Alegre, v. 7, nº 3, p. 283-306, 2002.

MOTA, Natanael de Oliveira. **Aprendizagem de Progressões Aritméticas e suas Aplicações por meio de Sequência Didática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). UEPA, Belém, 2019.

NASCIMENTO, Mauri Cunha do; FEITOSA, Hércules de Araújo. **Elementos da Teoria dos Números**. [S. l.], 2013.

NUNES, Roberto da Silva. **Números primos e a constituição do MMC e MDC**. Dissertação (Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas). UFPA, Belém, 2017.

PACHECO, Mirian Cazarotti. Contribuições da análise microgenética às pesquisas em neurolinguística. **Estudos Linguísticos**. São Paulo, v. 45, nº 2, p. 582-594, 2016.

PRIEBE, Débora Danielle Alves Moraes. **Tópicos de Aritmética para as séries finais do Ensino Fundamental**: Uma proposta focada na Resolução de Problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UFG, Goiânia, 2016.

RICKENMANN, R. **Modèle de structure de la séquence didactique**. 1998. Disponível em: http://www.unige.ch/fapse/SSE/teaching/uf713/mise-oeuvre.html.

RIPOLL, Cydara C.; RIPOLL, Jaime B.; SANT'ANA, Alveri A. O mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum generalizados. **Revista Matemática Universitária**. Nº 40, p. 59–74, junho/2006.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SECCO, Luiz Carlos Marques; CABRAL, Natanael Freitas; CHAQUIAM, Miguel; DIAS, Gustavo Nogueira; PAMPLONA, Vanessa Mayara Souza; REIS, Cássio Pinho dos; COSTA, Edith Gonçalves; PINTO, Gerson Pompeu. O ensino de juros compostos por meio de sequências didáticas. **Research, Society and Development**. V. 9, nº 12, e17691211068, 2020.

SILVA, Benedito Antonio. Contrato Didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática – Uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2008, p. 49-75.

SILVA, Bruno França Marques da. **Múltiplos e Divisores**: Importantes Ferramentas no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UENF, Campos dos Goytacazes, 2014.

SILVA, Jefson Glowascki da. **Divisibilidade no Ensino Fundamental**: uma proposta de abordagem usando questões da OBMEP. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UFAL, Maceió, 2020.

SÓ 5% terminam ensino médio público com aprendizado adequado em matemática, aponta estudo. G1, 2022. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2022/11/30/so-5percent-terminam-ensino-medio-publico-com-aprendizado-adequado-em-matematica-aponta-estudo.ghtml. Acesso em 07/01/2024.

SOUZA, Gladys Maria Bezerra de. **Os Conteúdos de Divisibilidade nos Livros Didáticos de Matemática do 6º Ano e Documentos Curriculares do Ensino Fundamental Anos Finais**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática – Rede Amazônica). UFRR, Belém, 2018.

VALENTIM, Erivan Sousa. **A Divisibilidade no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UEPB, Campina Grande, 2017.

VYGOTSKY, Lev Semyonovich. **Formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, Lev Semyonovich. The genesis of higher mental functions. In: WERTSCH, James V. (org.). **The concepto of activity in sovietic psychology**. Nova York: M.E. Sharpe, 1981, p.144-188.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – ATIVIDADES DA OFICINA DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Atividade 1

1) Efetue:

a) $52 : 3$;

b) $96 : 7$;

c) $345 : 5$;

d) $67 : 14$;

e) $483 : 32$;

f) $936 : 72$;

g) $326 : 103$;

h) $3\,510 : 126$;

i) $7\,396 : 205$.

2) Escreva a sequência dos múltiplos naturais de:

a) 7;

b) 11;

c) 20;

d) 35.

3) Determine os divisores naturais de:

a) 16;

b) 26;

c) 45;

d) 68.

4) Para responder a algumas perguntas sobre um congestionamento de 400 metros de extensão, Janaína anotou, no quadro abaixo, o comprimento aproximado de alguns veículos mais a distância de segurança.

Tipo de Veículo	Comprimento Aproximado do Veículo Mais Distância de Segurança (em Metro)
Carro popular	5
Van	8
Ônibus	10

Determine o número aproximado de veículos se o congestionamento tiver apenas:

a) carros;

b) vans;

c) ônibus.

• Os números 5, 8 e 10 são divisores de 400? Por quê?

5) Observando por um tempo um semáforo para pedestres, Fernando percebeu que ele ficava verde de 5 em 5 minutos. Se, às 10 horas, o semáforo mudou para verde, às 11 horas ficou verde ou vermelho? Justifique.

Atividade 2

1) Os números primos sempre instigaram a curiosidade dos matemáticos ao longo do tempo. O matemático Christian Goldbach (1690-1764), em 1 742, conjecturou que “todo número par maior do que 2 é igual à soma de dois números primos”. Escreva os números pares de 4 a 30, cada um deles como soma de dois números primos.

2) As idades de Vinícius e Helena são representadas por números primos e consecutivos cuja soma é 42. Descubra a idade de cada um, sabendo que ambos têm mais de 15 anos e que Helena é mais velha que Vinícius.

3) Decomponha os números abaixo em fatores primos.

a) 20 e) 168

b) 32 f) 286

c) 75 g) 420

d) 90

4) Calcule o número que está decomposto em fatores primos em cada item abaixo.

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 11$

b) $2^2 \cdot 3 \cdot 29$

c) $3^2 \cdot 5 \cdot 13$

d) $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

5) Sérgio gosta muito de Matemática. Quando perguntaram sua idade e a de seus irmãos, ele respondeu que a idade de cada um era um número primo e que o produto das idades era 385.

a) Quantos irmãos Sérgio tem?

b) Sérgio é o mais velho dos irmãos. Qual é a idade dele?

ANEXO A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES

Prezados(as) professores(as)
Sou estudante do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Estou desenvolvendo uma pesquisa, a fim de gerar dados acerca dos docentes de Matemática que ATUAM NAS REDES PÚBLICAS ESTADUAL E MUNICIPAIS DO PARÁ com a finalidade de futuramente elaborar produtos educacionais que possam ajudar no ensino mais dinâmico de Matemática na Educação Básica.
Para a efetivação da referida pesquisa, é importante sua participação ao responder às questões a seguir. Peço que por mais que você atue em alguma rede particular ou na Rede Federal, RESPONDA BASEADO(A) NA SUA EXPERIÊNCIA NA REDE ESTADUAL E/OU MUNICIPAL. Quando for necessário levar em consideração as outras redes de ensino que você, eventualmente, trabalhe ou já tenha trabalhado, SERÁ SINALIZADO. Peço também que respondam com base no ensino de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC) realizado considerando APENAS O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS. Ressalto que sua identificação será preservada e que as informações serão utilizadas para fins acadêmicos.

1) Qual seu sexo?
( ) Masculino.
( ) Feminino.

2) Qual sua faixa etária?
( ) Menos de 21 anos.
( ) 21-25 anos.
( ) 26-30 anos.
( ) 31-35 anos.
( ) 36-40 anos.
( ) 41-45 anos.
( ) 46-50 anos.
( ) 51-55 anos.
( ) 56–60 anos.
( ) Mais de 60 anos.

3) Em que você possui graduação? (Caso selecione a opção “Outro”, informe o curso de graduação).
( ) Licenciatura em Matemática.
( ) Outro: ____________________________________

4) Qual sua maior titulação acadêmica?
( ) Graduação.
( ) Especialização.

( ) Mestrado.

( ) Doutorado.

5) Em que tipo de escola você trabalha? (Nessa questão você deve levar em consideração todas as redes de ensino em que trabalha. Você pode marcar mais de uma opção).

( ) Pública municipal.

( ) Pública estadual.

( ) Pública federal.

( ) Privada.

6) Em quantas escolas você trabalha? (Nessa questão você deve levar em consideração todas as redes de ensino em que trabalha).

( ) 1.

( ) 2.

( ) 3.

( ) Mais de 3.

7) Quanto tempo de serviço você tem como professor de Matemática? (Nessa questão você deve levar em consideração todas as redes de ensino em que trabalhou ou trabalha).

( ) Menos de um ano.

( ) 1-5 anos.

( ) 6-10 anos.

( ) 11-15 anos.

( ) 16-20 anos.

( ) 21-25 anos.

( ) 26-30 anos.

( ) Mais de 30 anos.

8) A(s) rede(s) de ensino onde você atua oferece(m) formação continuada?

( ) Não oferece(m).

( ) Oferece(m) raramente.

( ) Oferece(m) frequentemente.

( ) Oferece(m) sempre.

9) Quando a(s) rede(s) de ensino onde você trabalha, ou ainda outras instituições, ofertam curso de formação continuada, você:

( ) Não participa.

( ) Participa poucas vezes.

( ) Participa muitas vezes.

( ) Participa sempre.

10) Como você costuma iniciar suas aulas de Matemática? (Caso selecione a opção "Outro", informe como você inicia suas aulas).

( ) Pelo conceito seguido de exemplos e exercícios.

( ) Com uma situação problema para depois introduzir o assunto.

( ) Com a criação de um modelo para uma situação e em seguida analisando o modelo.

( ) Com jogos para depois sistematizar os conceitos.

( ) Outro: ____

11) Do que você mais sente falta quando ministra suas aulas de Matemática? (Caso selecione a opção "Outro", informe o que você mais sente falta).

( ) Formação inicial sólida.

( ) Domínio de classe.

( ) Compreensão dos conceitos matemáticos.

( ) Formação continuada.

( ) Metodologias diferenciadas de ensino.

( ) Recursos didáticos e pedagógicos.

( ) Outro: ____

12) Você seleciona os conteúdos de Matemática a partir do quê? (Marque mais de uma opção, se necessário, e caso selecione a opção "Outro", informe a partir do que você escolhe os conteúdos).

( ) Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

( ) Livro didático.

( ) Caderno de orientações da rede de ensino.

( ) Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

( ) Outro: ____

13) Quais as principais formas de avaliação que você costuma aplicar/utilizar? (Marque mais de uma opção, se necessário, e caso selecione a opção "Outro", informe a forma de avaliar).

( ) Prova oral.

( ) Prova escrita.

( ) Autoavaliação.

( ) Trabalhos individuais.

( ) Trabalhos em grupo.

( ) Produções no caderno.

( ) Outro: ____

14) Para fixar o conteúdo ministrado, você costuma: (Caso selecione a opção "Outro", informe o que você costuma fazer).

( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos.

( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto.

( ) Mandar resolver os exercícios do livro didático.

( ) Não propor questões de fixação.

( ) Propor a resolução de questões por meio de softwares.

( ) Outro: ____

15) Você conhece o procedimento "sequência didática"?

( ) Sim.

( ) Não.

16) Você já usou o procedimento "sequência didática" em suas aulas?

( ) Sim.

( ) Não.

17) Você considera a Matemática uma disciplina difícil de ser ensinada?

( ) Sim.

( ) Não.

18) Seus alunos gostam de Matemática?

( ) Todos.

( ) A maioria.

( ) A minoria.

( ) Nenhum.

19) Qual a maior dificuldade dos seus alunos nas aulas de Matemática? (Caso selecione a opção "Outro", informe qual a maior dificuldade).

( ) Compreensão dos conceitos/ideias.

( ) Compreensão das regras.

( ) Resolução das situações-problema.

( ) Realizar cálculo.

( ) Outro: ____

20) Sobre o conteúdo mínimo múltiplo comum (mmc), quais itens dos listados abaixo você costuma ensinar? (Marque mais de uma opção, se necessário, e caso selecione a opção "Outro", informe o item que costuma ensinar).

( ) Conceito de mmc.

( ) Cálculo do mmc entre dois ou mais números sem processo prático.

( ) Processo prático para o cálculo do mmc entre dois ou mais números.

( ) Resolução de situações-problema.

( ) Outro: ____

21) Com base na sua experiência como professor, sobre o conteúdo mmc, qual o grau de dificuldade dos alunos na aprendizagem dos itens listados abaixo?

	Fácil	Médio	Difícil	Muito Difícil
Conceito de mmc.				
Cálculo do mmc entre dois ou mais números sem processo prático.				
Processo prático para o cálculo do mmc entre dois ou mais números.				
Resolução de situações-problema.				

22) Sobre o conteúdo máximo divisor comum (mdc), quais itens dos listados abaixo você costuma ensinar? (Marque mais de uma opção, se necessário, e caso selecione a opção "Outro", informe o item que costuma ensinar).

( ) Conceito de mdc.

( ) Cálculo do mdc entre dois ou mais números sem processo prático.

( ) Processo prático para o cálculo do mdc entre dois ou mais números.

( ) Números primos entre si.

( ) Resolução de situações-problema.

( ) Outro: ____

23) Com base na sua experiência como professor, sobre o conteúdo mdc, qual o grau de dificuldade dos alunos na aprendizagem dos itens listados abaixo?

	Fácil	Médio	Difícil	Muito Difícil
Conceito de mdc.				
Cálculo do mdc entre dois ou mais números sem processo prático.				
Processo prático para o cálculo do mdc entre dois ou mais números.				
Números primos entre si.				
Resolução de situações-problema.				

24) Quando você ministra os conteúdos mmc e mdc de que maneira você costuma iniciar a apresentação desses conteúdos? (Caso selecione a opção "Outro", informe a maneira).

( ) Exponho a definição e exemplos.

( ) Apresento uma situação-problema e logo depois passo para a definição e os exemplos.

( ) Apresento uma atividade introdutória para que os alunos comecem a construir esses conceitos.

( ) Outro: ____

25) Com base na sua experiência como professor, os estudantes apresentam falta de conhecimento ou pouco conhecimento em qual desses assuntos, dificultando o aprendizado dos conteúdos mmc e mdc? (Marque mais de uma opção, se necessário, e caso selecione a opção "Outro", informe o assunto).

( ) Multiplicação com números naturais.

( ) Divisão com números naturais.

( ) Conceito de múltiplos.

( ) Conceito de divisores.

( ) Critérios de divisibilidade.

( ) Números primos.

( ) Decomposição de um número natural em fatores primos.

( ) Outro: ____

26) Com base nas suas experiências lecionando os conteúdos mmc e mdc, numa escala de 0 a 10, em que 0 significa que a maioria dos alunos não tem aprendizado nenhum e 10 significa que eles obtêm um aprendizado excelente, como você avalia o aprendizado da maioria dos alunos sobre esses conteúdos depois que você os ministra?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

27 - Na sua opinião, qual o fator principal para que os estudantes tenham esse nível de aprendizado sobre os conteúdos mmc e mdc que foi respondido na questão anterior?

____

ANEXO B - QUESTIONÁRIO APLICADO AOS EGRESSOS DO 7º ANO

Prezado(a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1) Qual sua idade?

2) Qual seu sexo?
( ) Masculino. ( ) Feminino.

3) Qual o tipo de escola em que você estuda?
( ) Pública municipal. ( ) Pública estadual.

4) Quem é seu responsável masculino?
( ) Pai. ( ) Avô. ( ) Tio. ( ) Não possuo. ( ) Outro. Quem?_____________.

5) Qual a escolaridade do seu responsável masculino?
( ) Não estudou.
( ) Ensino Fundamental incompleto.
( ) Ensino Fundamental completo.
( ) Ensino Médio completo.
( ) Ensino Superior completo.

6) Seu responsável masculino trabalha?
( ) Sim. ( ) Não.

7) Quem é sua responsável feminina?
( ) Mãe. ( ) Avó. ( ) Tia. ( ) Não possuo. ( ) Outra. Quem?_____________.

8) Qual a escolaridade da sua responsável feminina?

( ) Não estudou.

( ) Ensino Fundamental incompleto.

( ) Ensino Fundamental completo.

( ) Ensino Médio completo.

( ) Ensino Superior completo.

9) Sua responsável feminina trabalha?

( ) Sim. ( ) Não.

10) Você trabalha para ajudar a família ou gastar dinheiro com você mesmo?

( ) Sim. ( ) Não.

11) Você já ficou reprovado na escola?

( ) Não. ( ) Sim, uma vez. ( ) Sim, duas vezes. ( ) Sim, mais de duas vezes.

12) Você já ficou em dependência em Matemática?

( ) Não. ( ) Sim, uma vez. ( ) Sim, duas vezes. ( ) Sim, mais de duas vezes.

13) Você gosta de Matemática?

( ) Não gosto. ( ) Gosto um pouco. ( ) Gosto muito.

14) Com que frequência você costuma estudar Matemática fora da escola?

( ) Não costumo estudar fora da escola.

( ) Só no período de prova.

( ) Três vezes ou menos por semana.

( ) Mais de três vezes por semana.

( ) Todos os dias.

15) Quem mais lhe ajuda nas tarefas de Matemática?

( ) Professor particular.

( ) Pai ou responsável masculino.

( ) Mãe ou responsável feminina.

( ) Meu irmão / Minha irmã.

( ) Meu/minha colega de turma.

( ) Ninguém.

( ) Outro. Quem?_________________.

16) Seu professor de Matemática demonstra ter um bom nível de conhecimento e segurança ao trabalhar os conteúdos?

( ) Sim. ( ) Não.

17) Com que frequência você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?

( ) Nunca compreendo. ( ) Poucas vezes. ( ) Quase sempre. ( ) Sempre.

18) Como você se sente quando está diante de uma avaliação em Matemática? (Marque mais de uma opção, se necessário).

( ) Entusiasmado.

( ) Tranquilo.

( ) Preocupado.

( ) Com medo.

( ) Com raiva.

( ) Outro. Qual?____________.

19) Preencha o quadro abaixo sinalizando se você já estudou os conteúdos matemáticos citados.

Conteúdo	Situação		
	Estudei	Não Estudei	Não Lembro se Estudei
Múltiplos			
Divisores			
Critérios de divisibilidade			
Números primos			
Decomposição de um número natural em fatores primos			
Mínimo múltiplo comum (mmc)			
Máximo divisor comum (mdc)			

20) Preencha o quadro abaixo sinalizando o grau de dificuldade que você teve durante a aprendizagem dos conteúdos matemáticos citados.

Conteúdo	Grau de Dificuldade			
	Fácil	Médio	Difícil	Muito Difícil
Múltiplos				
Divisores				
Critérios de divisibilidade				
Números primos				
Decomposição de um número natural em fatores primos.				
Mínimo múltiplo comum (mmc)				
Máximo divisor comum (mdc)				

21) Quando você estudou “mínimo múltiplo comum (mmc)” e “máximo divisor comum (mdc)”, a maioria das aulas:

( ) Iniciavam pela definição seguido de exemplos e exercícios.

( ) Iniciavam com uma situação-problema para logo depois serem dadas a definição e os exemplos.

( ) Iniciavam construindo um modelo para uma situação e em seguida analisando o modelo.

( ) Iniciavam com jogos para depois serem sistematizados os conceitos.

( ) Iniciavam com uma atividade introdutória para que nós (os alunos) começássemos a construir esses conceitos.

( ) Outra maneira. Qual?

22) Quando você estudou “mínimo múltiplo comum (mmc)” e “máximo divisor comum (mdc)”, para fixar esses conteúdos, o seu professor:

( ) Apresentou uma lista de exercícios para serem resolvidos.

( ) Apresentou jogos envolvendo o assunto.

( ) Solicitou que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático.

( ) Não propôs questões de fixação.

( ) Propôs a resolução de questões por meio de softwares.

( ) Outra maneira. Qual?

ANEXO C - TCLE DIRECIONADO AOS ESTUDANTES

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) aluno(a),

Você está sendo convidado(a) para participar da pesquisa intitulada "UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC", sob a responsabilidade dos pesquisadores Natanael Freitas Cabral (Orientador) e Artur Lira dos Santos (Orientando), vinculados ao curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA).

O objetivo desta pesquisa é propor alternativas metodológicas de ensino que venham minimizar as dificuldades de aprendizagem em Matemática. A sua colaboração será em participar das tarefas que iremos propor a você. Essas tarefas serão gravadas em vídeos. Os áudios destes vídeos serão fielmente transcritos para a análise de nossa pesquisa. Não haverá, em hipótese alguma, divulgação dos referidos vídeos em nenhum canal de divulgação. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua imagem será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Também não haverá nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico, objetivando melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura e a de seu responsável.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: NATANAEL FREITAS CABRAL (natanfc61@yahoo.com.br) e ARTUR LIRA DOS SANTOS (arturlira93@gmail.com). Poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telégrafo. Belém-Pará - CEP: 66113-010.

Ananindeua/PA, ____ de ________________ de 2023.

____

Natanael Freitas Cabral

____

Artur Lira dos Santos

Eu,____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

______________________________ Assinatura do aluno(a)

______________________________ Assinatura do responsável pelo aluno(a)

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem