Artur Lira dos Santos
Natanael Freitas Cabral

mmc(24,45) = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5 =

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

O mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números naturais é...

mdc(20,52,60) = 2 · 2 = 2^2 = 4

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

20, 50 | 2
10, 25 | 2
5, 25 | 5

Uma Sequência Didática para o Ensino de MMC e MDC
Produto Educacional

4 · 5 = 20

6 · 8 = 48

Dizemos que dois ou mais números naturais são primos entre si quando...

20 10

-0- 2

Belém/PA
2024

Artur Lira dos Santos

Uma Sequência Didática para o Ensino de MMC e MDC

Produto Educacional

Produto educacional apresentado como requisito parcial para obtenção de título de mestre em ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática vinculado à Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

ISBN: 978-65-5291-004-2

BELÉM/PA
2024

Secretaria Municipal de Educação de Ananindeua/PA
Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cândida Santos de Souza"
Av. Zacarias de Assunção, s/n - Centro, Ananindeua – CEP: 67030-180
INEP: 15034984

Escola Municipal de Ensino Fundamental Cândida Santos de Souza CSS Ananindeua-Pará

DECLARAÇÃO

Eu, Fernando Augusto Ribeiro Costa, diretor da Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cândida Santos de Souza", localizada na Av. Zacarias de Assunção, s/n - Centro, Ananindeua – CEP: 67030-180, venho por meio desta declarar que o mestrando Artur Lira dos Santos, vinculado ao curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), aplicou o Produto Educacional denominado "Uma Sequência Didática para o Ensino de MMC e MDC", nesta escola, sob a supervisão dos coordenadores pedagógicos Elane Cristina Ramos do Nascimento Burgos e Márcio Moreira de Sousa, na turma 7° Ano A, no turno da manhã (classe na qual estava efetivamente lotado como docente), no período de 18/10/2023 a 08/11/2023, para fins de comprovação junto ao referido Programa de Pós-Graduação. As atividades desenvolvidas na aplicação do referido Produto Educacional contribuíram de maneira positiva para a melhoria do ensino e aprendizagem na escola.

Ananindeua/PA, 06 de agosto de 2024.

Fernando Augusto Ribeiro Costa
Diretor

Fernando Augusto R. Costa
Gestor Escolar
Mat. 270059 / Port. 020/2022

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC"**

Mestrando: **ARTUR LIRA DOS SANTOS**

Data da avaliação: **03/10/2024**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

(X) Estudantes do Ensino Fundamental ( ) Estudantes do Ensino Médio

(X) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: pesquisadores em E.M e licenciandos em Matemática

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ____________

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: ____________

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: com alunos escolares – Ens. Fund.

( ) Não, justifique: __________

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: cursos de formação de Professores.

( ) Não, justifique: __________

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: alunos escolares – Piloto.

( ) Não, justifique: __________

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

(X) na escola, como um curso extra

( ) outro: __________

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

(X) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

(X) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como __________

( ) outros membros da comunidade, tais como __________

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Presidente)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Examinador 01)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias (Examinador 02)
Doutor em Humanidades e Arte – Ciências da Educação
IES de obtenção do título: Universidade Nacional de Rosário / Argentina

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional apresenta uma sequência didática para o ensino de mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc) elaborada na nossa pesquisa de mestrado com o objetivo de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos.

Desse modo, essa sequência foi construída em um formato em que os estudantes construam de forma gradual e reflexiva os conhecimentos vinculados, ocupando um papel ativo no processo de aprendizagem, ao invés, de serem meros receptores do conteúdo já consolidado ministrado pelo professor, como ocorre no modelo tradicional de ensino.

Essa sequência didática e sua aplicação teve como fundamentação a teoria Psicologia Histórico-Cultural de Vygotsky (1984) e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), e estruturada conforme Cabral (2017). Cada tópico dos conteúdos matemáticos escolares abordados está exposto em uma Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC).

Assim, este produto educacional apresenta a referida fundamentação teórica, os objetos matemáticos formais de mdc e mmc, a sequência didática, no modelo voltado para o docente e no modelo voltado para o discente, e, por fim, as orientações direcionadas ao professor e direcionadas ao estudante que fizer uso do material didático.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo elenca e discute as teorias e mecanismos metodológicos que embasaram a construção da sequência didática elaborada para favorecer a aprendizagem dos conteúdos mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc), quais sejam, a teoria Psicologia Histórico-Cultural de Vygotsky (1984), a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), o conceito de sequência didática, e a estrutura para esse procedimento estabelecida por Cabral (2017).

1.1 Psicologia Histórico-Cultural

A teoria Psicologia Histórico-Cultural foi estabelecida pelo soviético Lev Semyonovich Vygotsky (1896-1934), trazendo reflexões acerca do desenvolvimento e da aprendizagem dos indivíduos. Para esse pesquisador as interações sociais e o contexto cultural têm papel fundamental no processo de construção dos conhecimentos.

O conhecimento surge do coletivo para o individual segundo esse autor. É com a família, com amigos, com a comunidade na qual está inserida que se forma o intelecto de cada pessoa. A teoria supracitada é importante, ao nosso ver, pelos seguintes fatos: no exercício da atividade docente o professor se depara com alunos que possuem conhecimentos aprendidos fora da escola, pois são a esses conhecimentos que primeiramente os estudantes recorrem para solucionar as atividades da escola, e os mesmos podem ser usados como pontapé inicial para a aprendizagem dos conteúdos formais; é impossível fazer um bom trabalho educativo sem olhar para o contexto em que vive o grupo de alunos para o qual se ensina; é na interação com os colegas de classe que muitos alunos tiram dúvidas, resolvem problemas e evoluem em relação a Matemática.

Um conceito que podemos destacar na teoria de Vygotsky é o de "lei genética geral do desenvolvimento cultural", a qual pode ser explicada nos termos abaixo:

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização

> transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (Vygotsky, 1981, p. 163).

A BNCC do Ensino Fundamental também ressalta a pertinência das interações e do trabalho coletivo dos estudantes em sala de aula na 8ª competência específica de Matemática a ser adquirida pelos educandos durante essa etapa da Educação Básica. Vejamos:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 2018, p. 263).

Segundo Davis e Oliveira (2010) a teoria Psicologia Histórico-Cultural estabelece os conceitos de Zona de Desenvolvimento Real, que é aquela em que um indivíduo resolve uma atividade sem ajuda de um terceiro, de Zona de Desenvolvimento Potencial, correspondente àquela em que a pessoa necessita de outra mais experiente para resolver uma tarefa, e de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que está relacionada a transição entre as duas zonas já mencionadas, no processo de obtenção de autonomia diante de uma atividade a ser realizada.

O trabalho eficiente do professor tem que ser pautado pela criação de ZDPs nos estudantes, ou seja, etapas em que os mesmos caminharão para a consolidação da aprendizagem de conceitos e procedimentos. Essas ZDPs podem ser construídas com o auxílio das atividades escolares que privilegiem a interação entre os alunos, o levantamento de hipóteses, a busca conjunta pela solução de situações-problema e a argumentação dos educandos frente a própria tarefa.

Outro ponto importante da teoria que estamos discutindo é o papel da fala no desenvolvimento e na aprendizagem humana. A fala é responsável pela comunicação de conhecimentos que, posteriormente, serão internalizados pelas crianças e é o mecanismo pelo qual as próprias crianças irão demonstrar como conceberam um objeto de conhecimento, sendo fundamental o docente estar atento às falas dos estudantes durante o processo de ensino.

1.2 Teoria das Situações Didáticas

A partir da década de 1960 houve uma intensificação, principalmente em países francófonos, no movimento de pesquisadores preocupados com o ensino e a aprendizagem da Matemática. Esse movimento criou grupos de pesquisas, congressos e culminou por estabelecer as teorias da Didática da Matemática. Entre elas surge a Teoria das Situações Didáticas, estruturada pelo pesquisador francês Guy Brousseau em 1986. A partir de então a referida teoria começou a ser usada em pesquisas da Educação Matemática e a contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina escolar.

A Teoria da Situações Didáticas se debruça sobre o triângulo professor/ aluno/saber, refletindo sobre as relações entre esses componentes. Para Brousseau (2008) a aprendizagem se concretiza com as adaptações dos estudantes a um meio composto de contradições e desequilíbrios. Este meio é criado pelo professor, constituindo-se de uma atividade, um jogo etc. e as regras de interação com esse dispositivo. É na formulação de hipóteses, na argumentação com seus pares, na construção de modelos, na rejeição a soluções erradas que os alunos aprendem os conhecimentos matemáticos.

Outro conceito discutido na Teoria das Situações Didáticas é o de contrato didático.

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (Brousseau, 1986, *apud* Silva, 2008, p. 50).

Nesse contrato é importante o que Brousseau (2008) chama de devolução, que é quando o docente consegue que o discente se sinta responsável por uma situação de aprendizagem ou pela resolução de um problema.

A referida teoria estabelece que situação adidática é uma situação ou problema que foi escolhida pelo educador com o propósito de que o estudante construa um conhecimento novo. Esse problema ou situação o aluno não consegue resolver imediatamente. Durante a busca pela resolução o educando interagirá com o meio em uma atuação dinâmica, inclusive participando de um jogo de perguntas e respostas (“pingue-pongue”) conduzido pelo professor com o objetivo de que o próprio estudante “descubra” o conhecimento que o docente quer que ele aprenda. Esse processo mais amplo é chamado de situação didática.

O processo de ensino, no seio da Teoria da Situações Didáticas, é constituído de quatro fases, quais sejam:

Fase da ação: É o momento em que o docente propõe uma atividade ao discente, o qual se dedicará a resolvê-la.

Fase da formulação: É a etapa em que o aluno discutirá com seus pares sobre o que foi realizado na fase de ação, quais conclusões foram tiradas, qual visão cada um tem sobre a resolução da atividade.

Fase da validação: É o momento em que a resolução é compartilhada com os alunos que ainda não chegaram a ela. Em que é pedido aos estudantes que encontraram a solução as justificativas de que a referida solução é válida.

Fase da Institucionalização: É a etapa em que o professor formaliza e sistematiza os conhecimentos corretos construídos pelos alunos durante a atividade.

Cabe ressaltarmos que essas fases podem ocorrer de uma maneira não tão linear como a descrita aqui, devido ao caráter dinâmico e imprevisível que possui a atividade educacional.

Percebemos que a Teoria das Situações Didáticas propõe um tipo de ensino que rompe com o modelo tradicional, pois estabelece que o educando construa o seu próprio conhecimento a partir de suas reflexões e interações com seus pares, ao invés de ser logo exposto a ele de maneira consolidada.

1.3 Sequência Didática e UARC

O ensino da Matemática pode ser feito de variadas maneiras, usando diversos recursos e metodologias. Neste trabalho usaremos a sequência didática como procedimento para favorecer a aprendizagem dessa disciplina.

Existem várias definições para sequência didática. Esclarecemos, então, que aqui ela é concebida como um procedimento didático composto por várias atividades que objetivam com que o estudante que dela participa construa os conhecimentos, vinculados na mesma, de forma gradual e dinâmica, tornando-se protagonista do processo de aprendizagem.

Desse modo, para Zabala (1998, p. 18) sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

Assim, a sequência, como todo trabalho pedagógico, tem que ter um objetivo de aprendizagem bem definido, para o qual avançará o educando superando suas dificuldades com a ajuda de colegas de classe e do professor, que deverá intervir em momentos apropriados.

Também existem várias maneiras de estruturar esse procedimento didático. Nesta pesquisa adotamos a estrutura proposta por Cabral (2017), o qual introduz o conceito de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC). Fala-se de reconstrução porque o aluno vai aprender um conteúdo já sistematizado e elencado no currículo escolar. Cabral (2017) compara o objeto de conhecimento que o docente deseja ensinar a uma superfície S e cada UARC a uma unidade de medida unitária com a qual deseja-se medir essa superfície S, ou seja, cada UARC é um passo que o estudante deverá dar em direção à aprendizagem do conteúdo como um todo. Cada UARC está ligada a outra como num revestimento de piso. Assim, a escolha da primeira UARC, por parte do professor, influenciará a escolha das demais.

As UARCs se materializam por meio de diferentes tipos de intervenções, as quais passamos a descrever agora:

Intervenção Inicial (I_i): É o primeiro elemento do processo didático, em que o estudante será envolvido com o tema a ser trabalho e estimulado a perceber algumas ideias sobre o mesmo;

Intervenção Reflexiva (I_r): É o momento em que o aluno será questionado com relação a alguns aspectos do objeto de conhecimento que está sendo trabalhado. O objetivo é que o educando reflita sobre suas ações e construa hipóteses, verifique possibilidades etc.;

Intervenção Exploratória (I_e): É a etapa em que os alunos aprofundarão o seu olhar nas respostas dadas na etapa anterior. Essa intervenção se concretiza por meio de procedimentos que o docente pede para os alunos fazerem, como simulações, descrições, preenchimento de tabelas etc.;

Intervenção Formalizante (I_f): É o momento em que o professor enuncia de maneira formal, com o rigor próprio da Matemática, o que os alunos já construíram de forma empírica-intuitiva nas intervenções anteriores;

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): É a etapa em que se busca identificar as aprendizagens dos alunos em dois aspectos: “o que é o conceito trabalhado?” e “como se justificam e se operam os algoritmos desse objeto de conhecimento?”;

Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a): É o momento final do processo didático, em que os estudantes serão avaliados por meio da resolução de problemas aplicados do conteúdo estudado.

Além dessas intervenções que fazem parte do texto escrito da sequência didática, Cabral (2017) estabelece o conceito de Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO), a qual é a intervenção feita pelo professor no seu discurso, durante a aplicação de uma sequência, para orientar os estudantes na direção dos objetivos da mesma. Essa intervenção é útil também para o docente avaliar o texto da sequência e fazer modificações futuras que respondam às demandas percebidas nos alunos que se “afastam” dos objetivos de aprendizagem durante a aplicação.

É importante notarmos aqui que uma sequência didática estruturada conforme Cabral (2017) estará alinhada com a teoria Psicologia Histórico-Cultural e a Teoria das Situação Didáticas.

2. ASPECTOS CONCEITUAIS FORMAIS DE MDC E MMC

Neste capítulo abordaremos os aspectos conceituais formais de máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc) no conjunto dos números naturais. Optamos por delimitar a esse conjunto porque a sequência didática abordará esses conteúdos dentro do mesmo. Para entendermos melhor esses conceitos matemáticos, inicialmente discorreremos sobre múltiplos e divisores. Depois a definição dos objetos mdc e mmc são apresentadas, bem como os algoritmos que são usados para o seu cálculo e as justificativas formais desses processos práticos.

Este capítulo se destina, principalmente, a docentes de Matemática que queiram aprofundar seus conhecimentos sobre os referidos objetos, haja vista que o professor precisa conhecer o que ensina em um nível elevado.

2.1 Múltiplos e Divisores

Domingues (1991) apresenta a seguinte definição sobre múltiplos e divisores:

Definição 1: Dizemos que um número natural a divide um número natural b se $b = ac$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Neste caso dizemos também que a é divisor de b e que b é múltiplo de a. Ou ainda que b é divisível por a.

Indicamos por $a \mid b$ o fato de a dividir b; e se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.

Para ilustrarmos essa definição, apresentamos os seguintes exemplos:

$5 \mid 15$, pois $15 = 5 \cdot 3$; $8 \mid 32$, pois $32 = 8 \cdot 4$; e $4 \nmid 39$.

Sobre múltiplos e divisores, o mesmo autor ainda estabelece o exposto abaixo:

Teorema 1: Quaisquer que sejam os números a, b, c e d $\in \mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:

I) $a \mid a, \forall a \in \mathbb{N}$ (reflexiva).

II) $a \mid b$ e $b \mid a \Rightarrow a = b$ (anti-simétrica).

III) $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitiva).

IV) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy), \forall x, y \in \mathbb{N}$.

Em particular: $a \mid b \Rightarrow a \mid bx, \forall x \in \mathbb{N}$.

V) Se $c \mid a$, $c \mid b$ e $a \leq b$, então $c \mid (b - a)$.

VI) Seja $a = b + c$ e suponhamos $d \mid b$. Então $d \mid a \Leftrightarrow d \mid c$. $(c = a - b)$.

VII) Se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $a \leq b$.

Demonstração:

I) Podemos escrever que $a = a \cdot 1$, então $a \mid a$.

II) De fato, $b = ac$ e $a = bd$. Assim, $a = a(cd)$.

Se $a = 0$, como $b = ac$, então $b = 0$.

Se $a \neq 0$, então $cd = 1$ e portanto $c = d = 1$. Logo $a = b$ também neste caso.

III) Como $b = ar$ e $c = bs$, então $c = a(rs)$.

IV) Temos que $b = ar$ e $c = as$.

Daí decorre que $bx = arx$ e $cy = asy$.

Portanto, $bx + cy = arx + asy = a(rx + sy)$.

V) Temos que $a = cr$ e $b = cs$.

Fazendo $b = a + u$, então $cs = cr + u$.

Daí $u = cs - cr = c(s - r)$.

Portanto, $c \mid u$ e como $u = b - a$ a propriedade está provada.

VI) ($\Rightarrow$) é 5 e ($\Leftarrow$) é 4 para $x = y = 1$.

VII) Temos que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = aq$.

Como $q > 0$, então $1 = 0 + 1 \leq q$ e portanto $q = 1 + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$.

Assim, $b = aq = a(1 + u) = a + au$, o que implica $a \leq b$. ■

Indicaremos por D_x o conjunto dos divisores de $x \in \mathbb{N}$ e M_x o conjunto dos múltiplos de x.

Por exemplo, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ e $M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$.

2.2 Máximo Divisor Comum (MDC)

A respeito do máximo divisor comum, Domingues (1991) expõe a definição a seguir:

Definição 2: Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que um número $d \in \mathbb{N}$ é máximo divisor comum de a e b se

I) $d \mid a$ e $d \mid b$;

II) Se c é um número natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.

Com o objetivo de ilustrar essa definição, apresentamos o exemplo abaixo:

Sejam $a = 10$ e $b = 12$, então

$D_{10} = \{1, 2, 5\}$ e $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, do que segue $D_{10} \cap D_{12} = \{1, 2\}$.

Notemos que I) $2 \mid 10$ e $2 \mid 12$;

II) Se $c \mid 10$ e $c \mid 12$, então $c = 1$ ou $c = 2$ e, portanto, $c \mid 2$.

Assim, 2 é o máximo divisor comum de 10 e 12.

Usaremos a notação $d = \text{mdc}(a,b)$ para indicar o máximo divisor comum de a e b.

Da definição decorre que $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,a)$.

Mostraremos agora, de um modo geral, que existe somente um máximo divisor comum de a e b.

De fato, se d e d' satisfazem a definição 2, então $d' \mid d$, pois $d' \mid a$ e $d' \mid b$ e d é, por hipótese, máximo divisor comum de a e b, e do mesmo modo, $d \mid d'$, o que implica $d = d'$.

Quanto à existência de máximo divisor comum, examinaremos primeiro o caso $a = 0$ e b qualquer e mostraremos que $b = \text{mdc}(0,b)$.

De fato, $b \mid 0$ e $b \mid b$.

Se $c \mid 0$ e $c \mid b$, obviamente $c \mid b$.

Em particular $\text{mdc}(0,0) = 0$. Neste caso o máximo divisor comum não é o maior dos divisores comuns. Como $1 \mid 0$, $2 \mid 0$, $3 \mid 0$,... não há um maior divisor comum para 0 e 0.

Para $a \neq 0$ e $b \neq 0$ precisaremos das duas proposições a seguir elencadas por Domingues (1991).

Proposição 1: Se $a \mid b$, então $\text{mdc}(a,b) = a$.

Demonstração:

De fato, $a \mid a$ e $a \mid b$.

E se $c \mid a$ e $c \mid b$, obviamente $c \mid a$. ■

Proposição 2: Se $a = bq + r$ e $d = \text{mdc}(a,b)$, então $d = \text{mdc}(b,r)$. E se $d = \text{mdc}(b,r)$, então $d = \text{mdc}(a,b)$.

Demonstração da primeira afirmação:

Como $d = mdc(a,b)$, então $d \mid a$ e $d \mid b$. Desta última relação resulta que $d \mid bq$. Assim, $d \mid (a - bq)$, ou seja, $d \mid r$.

Por outro lado, se $c \mid b$ e $c \mid r$, então $c \mid bq + r$. Como $bq + r = a$, então $c \mid a$ e $c \mid b$, o que implica $c \mid d$, já que $d = mdc(a,b)$.

Demonstração da segunda afirmação:

Como $d = mdc(b,r)$, então $d \mid b$ e $d \mid r$. Daí resulta que $d \mid a$, pois $a = bq + r$.

Por outro lado, se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid bq$ e $c \mid (a - bq)$. Assim, $c \mid r$, pois $r = a - bq$. De $c \mid b$ e $c \mid r$ segue que $c \mid d$ já que $d = mdc(b,r)$. ■

Agora, para provar a existência de máximo divisor comum, aplicaremos sucessivamente, a partir de a e b, o algoritmo da divisão do seguinte modo:

$$a = bq_1 + r_1 \ (r_1 < b)$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \ (r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \ (r_3 < r_2)$$

$$\vdots$$

Se acontecer de r_1 ser nulo a proposição 1 nos garante que $b = mdc(a,b)$ e o processo é concluído na primeira etapa. Mas, de qualquer maneira, na sequência $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$ para algum índice n deverá ocorrer $r_{n+1} = 0$. De fato, se todos os r_i fossem não nulos, então $\{b, r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ seria um subconjunto dos naturais sem mínimo, o que é impossível. Portanto, para algum n:

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$$

Aplicando as proposições 1 e 2, obtemos o seguinte:

$r_n = mdc(r_{n-1}, r_n) = mdc(r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = mdc(b,r_1) = mdc(a,b)$

Ou seja:

$$r_n = mdc(a,b)$$ ■

O dispositivo prático que é usado para aplicar essa demonstração é conhecido como processo das divisões sucessivas.

Por exemplo, vamos encontrar o $\text{mdc}(16,38)$ por meio desse processo.

$$38 = 16 \cdot 2 + 6$$

$$16 = 6 \cdot 2 + 4$$

$$6 = 4 \cdot 1 + 2$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

Então o $\text{mdc}(16,38) = 2$.

Usualmente, esse processo é usado neste formato:

	2	2	1	2
38	16	6	4	2
6	4	2	0	

O primeiro número 2 da primeira linha do esquema é o quociente da divisão de 38 por 16 e o número 6 da última linha é o resto dessa divisão. O segundo número 2 da primeira linha é o quociente da divisão de 16 por 6 e o número 4 da última linha é o resto dessa divisão. O número 1 da primeira linha é o quociente da divisão de 6 por 4 e o número 2 da última linha é o resto dessa divisão. O último número 2 da primeira linha é o quociente da divisão de 4 por 2 e o zero da última linha é o resto dessa divisão.

Outro importante conceito que podemos destacar é o de números primos entre si. Sobre o mesmo, Domingues (1991) apresenta a definição a seguir:

Definição 3: Dizemos que dois números naturais a e b são primos entre si se $\text{mdc}(a,b) = 1$. Neste caso, dizemos também que a é primo com b ou vice-versa.

Para ilustrar a definição dada, expomos o seguinte exemplo:

15 e 28 são primos entre si.

	1	1	6	2
28	15	13	2	1
13	2	1	0	

$\text{mdc}(15,28) = 1$.

Ainda sobre o mdc, o mesmo autor estabelece a proposição e os corolários a seguir:

Proposição 3: Se $d = mdc(a,b)$, então $mdc(sa,sb) = sd$, para todo $s \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Multipliquemos por s cada uma das igualdades obtidas no processo das divisões sucessivas que leva a d, a partir de a e b:

$$sa = (sb)q_1 + sr_1$$
$$sb = (sr_1)q_2 + sr_2$$
$$sr_1 = (sr_2)q_3 + sr_3$$
$$\vdots$$
$$sr_{n-2} = (sr_{n-1}) \cdot q_n + sr_n$$
$$sr_{n-1} = (sr_n) \cdot q_{n+1}$$

Como consequência das proposições 1 e 2, temos que

$sd = sr_n = mdc(sr_{n-1}, sr_n) = mdc(sr_{n-2}, sr_{n-1}) = ... = mdc(sb,sr_1) = mdc(sa,sb)$. ■

Colorário 1: Se $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $d = mdc(a,b)$, então $mdc(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. Ou seja: $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são primos entre si.

Demonstração:

Como $d = mdc(a,b) = mdc\left(d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}\right) = d \cdot mdc(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ e $d \neq 0$, então $mdc(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. ■

Colorário 2: Se $a \mid bc$ e $mdc(a,b) = 1$, então $a \mid c$.

Demonstração:

De $mdc(a,b) = 1$ segue, pela proposição 3, que $mdc(ac,bc) = c$.

Como $a \mid bc$ por hipótese e obviamente $a \mid ac$, então $a \mid mdc(ac,bc)$. Ou seja, $a \mid c$. ■

Colorário 3: Se a e b são divisores de $c \neq 0$ e $mdc(a,b) = 1$, então $ab \mid c$.

Demonstração:

De $mdc(a,b) = 1$ decorre, pela proposição 3, que $mdc(ac,bc) = c$.

Também temos que $ab \mid ac$, pois $b \mid c$ e $ab \mid bc$ já que $a \mid c$.

Então, ab divide $mdc(ac,bc)$, isto é, $ab \mid c$. ■

Por exemplo, para que um número seja divisível por 12 é necessário e suficiente que seja divisível por 3 e por 4, pois $\text{mdc}(3,4) = 1$.

Generalização: a definição de máximo divisor comum pode ser estendida para três ou mais números. Para o cálculo do máximo divisor comum de três números, por exemplo, podemos usar o seguinte resultado:

$$\text{mdc}(a,b,c) = \text{mdc}(\text{mdc}(a,b),c) = \text{mdc}(a,\text{mdc}(b,c))$$

Provaremos a primeira dessas igualdades. Seja $d = \text{mdc}(a,b,c)$, então $d \mid a$, $d \mid b$ e $d \mid c$.

Das duas primeiras relações segue que $d \mid \text{mdc}(a,b)$. Logo, $d \mid \text{mdc}(a,b)$ e $d \mid c$.

Seja, agora, k um divisor de $d' = \text{mdc}(a,b)$ e de c. Como $d' \mid a$ e $d' \mid b$, pela transitividade temos que $k \mid a$, $k \mid b$ e $k \mid c$. Assim, $k \mid d$ pois $d = \text{mdc}(a,b,c)$.

Logo, $d = \text{mdc}(\text{mdc}(a,b),c)$.

Provaremos, agora, a segunda dessas igualdades. Seja $d = \text{mdc}(a,b,c)$, então $d \mid a$, $d \mid b$ e $d \mid c$.

Das duas últimas relações segue que $d \mid \text{mdc}(b,c)$. Portanto, $d \mid a$ e $d \mid \text{mdc}(b,c)$.

Seja, agora, k um divisor de $d' = \text{mdc}(b,c)$ e de a. Como $d' \mid b$ e $d' \mid c$, por transitividade temos que $k \mid b$, $k \mid c$ e $k \mid a$. Assim, $k \mid d$ pois $d = \text{mdc}(a,b,c)$.

Logo, $d = \text{mdc}(a,\text{mdc}(b,c))$. ■

Acharemos, por exemplo, $\text{mdc}(4,10,18)$ usando a primeira igualdade.

$10 = 4 \cdot 2 + 2$

$4 = 2 \cdot 2$

$\text{mdc}(4,10) = 2$

O $\text{mdc}(2,18) = 2$, pois 18 é múltiplo de 2. Portanto, $\text{mdc}(4,10,18) = 2$.

2.3 Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Passaremos agora a falar sobre o mínimo múltiplo comum. Sobre esse conceito, apresentamos a definição a seguir de Domingues (1991).

Definição 4: Dizemos que um número m é mínimo múltiplo comum de a e $b \in \mathbb{N}$ se:

I) $a \mid m$ e $b \mid m$ (m é múltiplo de a e de b);

II) $a \mid t$ e $b \mid t \Rightarrow m \mid t$ (todo múltiplo de a e b é também múltiplo de m).

Por exemplo, 15 é mínimo múltiplo comum de 3 e 5.

Usaremos a notação $m = mmc(a,b)$ para indicar o mínimo múltiplo comum de a e b.

Da definição decorre que $mmc(a,b) = mmc(b,a)$.

Mostraremos, nesse momento, que existe somente um mínimo múltiplo comum de a e b.

De fato, se m e m' satisfazem a definição 4, então $m \mid m'$, pois m' é múltiplo de a e b e, por hipótese, m é mínimo múltiplo comum de a e b, e do mesmo modo, $m' \mid m$, o que implica $m = m'$.

Para discutirmos a existência de mínimo múltiplo comum, consideraremos primeiramente o caso $a = 0$ e b qualquer e mostraremos que $mmc(0,b) = 0$.

De fato, $0 \mid 0$ e $b \mid 0$ (pois $0 = b \cdot 0$).

$0 \mid t$ e $b \mid t$ implica obviamente que $0 \mid t$.

Para os outros casos a garantia da existência é dada pela proposição abaixo, elencada por Domingues (1991).

Proposição 4: Para quaisquer a e $b \in \mathbb{N}^*$, se $d = mdc(a,b)$, então $m = \frac{ab}{d}$ é o mínimo múltiplo comum de a e b.

Demonstração:

Observemos inicialmente que $m \in \mathbb{N}$, pois como $d \mid a$ e $d \mid b$, segue que $d \mid (ab)$.

I) Como $a \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d} = m$, então $a \mid m$.

Também, como $b \cdot \frac{a}{d} = \frac{ab}{d} = m$, então $b \mid m$.

II) Seja t um múltiplo de a e de b e suponhamos $t = ar$ e $t = bs$.

Então $ar = bs$ e, portanto, $\frac{a}{d} \cdot r = \frac{b}{d} \cdot s$.

Assim, segue que $\frac{a}{d}$ divide $\frac{b}{d} \cdot s$ e, como $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, então $\frac{a}{d} \mid s$ (pelo corolário 2 da proposição 3).

Logo, $s = \frac{a}{d} \cdot v$ para algum $v \in \mathbb{N}$.

Como $t = bs$, obtemos $t = b \cdot \frac{a}{d} \cdot v = \frac{ab}{d} \cdot v = mv$, ou seja, $m \mid t$.

Portanto, $\frac{ab}{d} = \text{mmc}(a,b)$. ■

Corolário: Se a e b são primos entre si, então $\text{mmc}(a,b) = ab$.

Demonstração:

De fato, como $d = \text{mdc}(a,b) = 1$, então $\text{mmc}(a,b) = \frac{ab}{1} = ab$. ■

Notemos que para $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{ab}{d} = m > 0$. Mas 0 é múltiplo de a e múltiplo de b, então m não é o menor do múltiplos comuns de a e b. Neste caso, $m = \text{mmc}(a,b)$ é o menor dos múltiplos comuns não nulos de a e b.

Para ilustrar a proposição 4, vamos usar o que ela estabelece para encontrar o $\text{mmc}(12,30)$.

$30 = 12 \cdot 2 + 6$

$12 = 6 \cdot 2$

Então, o $\text{mdc}(12,30) = 6$ e o $\text{mmc}(12,30) = \frac{12 \cdot 30}{6} = \frac{360}{6} = 60$.

Domingues (1991) ainda apresenta a proposição a seguir sobre o mmc:

Proposição 5: Se $m = \text{mmc}(a,b)$, então $\text{mmc}(sa,sb) = sm$, para qualquer $s \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Quando $a = 0$ ou $b = 0$, então $m = 0$ e $s = 0$ ou $sb = 0$. Assim, $\text{mmc}(sa,sb) = 0 = sm$.

Se $s = 0$, teremos $\text{mmc}(0,0) = 0$, que também é verdadeira.

Suponhamos finalmente a, b e s não nulos. Pelas proposições 3 e 4,

$$\text{mmc}(sa,sb) = \frac{sa \cdot sb}{\text{mdc}(sa,sb)} = \frac{s^2 \cdot ab}{s \cdot \text{mdc}(a,b)} = s \cdot \frac{ab}{\text{mdc}(a,b)} = s \cdot \text{mmc}(a,b) = sm. \quad ■$$

Generalização: a definição de mínimo múltiplo comum para três ou mais números em $\mathbb{N}$ pode ser estendida naturalmente. No caso de três números, por exemplo, o cálculo pode ser feito usando a seguinte propriedade:

$$\text{mmc}(a,b,c) = \text{mmc}(\text{mmc}(a,b), c) = \text{mmc}(a,\text{mmc}(b,c))$$

Provaremos a primeira dessas igualdades. Seja $m = mmc(a,b,c)$, então $a \mid m$, $b \mid m$ e $c \mid m$.

Das duas primeiras relações segue que $mmc(a,b) \mid m$. Logo, $mmc(a,b) \mid m$ e $c \mid m$.

Seja, agora, v um múltiplo de $m' = mmc(a,b)$ e de c. Como $a \mid m'$ e $b \mid m'$, pela transitividade temos que $a \mid v$, $b \mid v$ e $c \mid v$. Assim, $m \mid v$ pois $m = mmc(a,b,c)$.

Logo, $m = mmc(mmc(a,b),c)$.

Provaremos, agora, a segunda dessas igualdades. Seja $m = mmc(a,b,c)$, então $a \mid m$, $b \mid m$ e $c \mid m$.

Das duas últimas relações segue que $mmc(b,c) \mid m$. Portanto, $a \mid m$ e $mmc(b,c) \mid m$.

Seja, agora, v um múltiplo de $m' = mmc(b,c)$ e de a. Como $b \mid m'$ e $c \mid m'$, por transitividade temos que $b \mid v$, $c \mid v$ e $a \mid v$. Assim, $m \mid v$ pois $m = mmc(a,b,c)$.

Logo, $m = mmc(a,mmc(b,c))$. ■

Por exemplo, acharemos $mmc(2,7,21)$ aplicando a primeira igualdade.

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$2 = 1 \cdot 2$

$mdc(2,7) = 1$

Assim, $mmc(2,7) = 2 \cdot 7 = 14$.

Então, $mmc(2,7,21) = mmc(14,21)$.

$21 = 14 \cdot 1 + 7$

$14 = 7 \cdot 2$

$mdc(14,21) = 7$

Portanto, $mmc(2,7,21) = mmc(14,21) = \frac{14 \cdot 21}{7} = 2 \cdot 21 = 42$.

2.4 Cálculo do MDC e MMC a partir de Fatoração

Para discutirmos o algoritmo de cálculo do mdc e mmc usando fatoração elencaremos primeiramente a definição de números primos, algumas proposições e o Teorema Fundamental da Aritmética.

Nascimento e Feitosa (2013) apresentam a seguinte definição para número primo:

Definição 5: Dizemos que um número $p \in \mathbb{N}$ é primo se $p > 1$ e os seus únicos divisores são 1 e p. Se $p > 1$ não é primo, dizemos que p é composto.

Exemplos de números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$.

Observemos que 0 e 1 não são primos nem compostos.

Se n é um número composto, então existem naturais a e b tais que $n = a \cdot b$, com $1 < a < n$ e $1 < b < n$, pois desde que n não é primo, então n possui um divisor positivo a, com $a \neq n$ e $a \neq 1$. Desse modo, $1 < a < n$, $n = a \cdot b$ e $1 < b < n$.

Sobre os números primos, é importante destacarmos a proposição a seguir exposta por Domingues (1991).

Proposição 6: Se p é primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Demonstração:

No caso em que $a = 0$ ou $b = 0$, claramente temos que $p \mid a$ ou $p \mid b$.

No caso em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, se $p \mid a$ não temos o que demonstrar. Se $p \nmid a$, temos que $mdc(a,p) = 1$. De fato, se $h \mid a$ e $h \mid p$, então $h = 1$ ou $h = p$ (pois p é primo), mas como $p \nmid a$, então $h = 1$ e $mdc(a,p) = 1$. Pelo corolário 2 da proposição 3 segue, portanto, que $p \mid b$. ■

Corolário: Se p é primo e $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_r)$, $r \geq 1$, então p divide algum dos a_i.

No caso em que algum $a_i = 0$, é claro que p o divide.

No caso em que não temos algum $a_i = 0$, de $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_r)$, se $p \mid a_1$ não há o que provar. Se $p \nmid a_1$, pela proposição 6, p divide o número resultante do produto $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_r$. Assim, de $p \mid a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_r$, se $p \mid a_2$ teremos a afirmação do corolário e não há o que demonstrar. Se $p \nmid a_2$, p divide o número resultante da multiplicação $a_3 \cdot \ldots \cdot a_r$ e podemos repetir esse raciocínio até que chegaremos em $p \mid a_{r-1} \cdot a_r$, e pela proposição 6, $p \mid a_{r-1}$ ou $p \mid a_r$. Portanto, p divide algum dos a_i. ■

A seguir vamos enunciar e provar o Teorema Fundamental da Aritmética. Para demonstra-lo usaremos o segundo princípio de indução, o qual escreveremos abaixo, sem sua respectiva prova.

Segundo princípio de indução: Dado $r \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é uma propriedade sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que:

I) $P(r)$ é verdadeira e

II) para todos $m, n \in \mathbb{N}$, com $r \leq m < n$, sempre que $P(m)$ é verdadeira tem-se que $P(n)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$.

Observamos que se $r = 0$ a propriedade é válida para todos os naturais.

O Teorema Fundamental da Aritmética é apresentado da seguinte maneira por Nascimento e Feitosa (2013):

Teorema 2: Todo número natural $n > 1$ pode ser representado como um produto $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ em que p_1, p_2, ..., p_r são números primos. Além disso, se considerarmos $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$, essa representação é única.

Demonstração da existência da representação:

Faremos a demonstração por indução sobre n.

Se $n = 2$, então $n = p_1$ e $p_1 = 2$.

Hipótese de indução: consideremos que se $m \in \mathbb{N}$ e é tal que $1 < m < n$, então m pode ser representado como um produto de primos.

Se n é primo, como no caso $n = 2$, temos $n = p_1$ e p_1 é primo. Agora, se n não é primo, já vimos que $n = a \cdot b$ com $a, b \in \mathbb{N}$ e $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Assim, pela hipótese de indução, a e b podem ser representados como produtos de primos e, portanto, $n = a \cdot b$ também tem uma representação como produto de primos.

Desse modo, pelo princípio de indução, mostramos a existência da representação. É claro que podemos sempre ordenar a representação $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$, de forma que $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$.

Demonstração da unicidade da representação:

Também faremos a demonstração por indução sobre n.

Se $n = 2 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$, como 2 é primo, então $p_1 = 2$ e $r = 1$.

Portanto, a unicidade vale, pois se $r \geq 2$ então $1 = p_2 \cdot \dots \cdot p_r$. Logo, $p_2 \mid 1$, então $p_2 \leq 1$, um absurdo.

Hipótese de indução: consideremos que a unicidade vale para todo $m \in \mathbb{N}$, tal que $1 < m < n$.

Se $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$, então $p_1 \mid q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$. Assim, pelo corolário da proposição 6, $p_1 \mid q_i$, para algum i, tal que $1 \leq i \leq s$ e como q_i é primo, então $p_1 = q_i$. Da mesma forma, $q_1 = p_j$ para algum j tal que $1 \leq j \leq r$. Considerando $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$ e $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_r$, como $p_1 = q_i \geq q_1 = p_j \geq p_1$, então $p_1 = q_1$. Se n é primo, então como no caso $n = 2$, $n = p_1 = q_1$ e $r = s = 1$. Caso contrário, $r > 1$ e $s > 1$ e cancelando p_1 ($= q_1$) na igualdade $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$, obtemos $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s < q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s = n$. Desse modo, pela hipótese de indução, a representação $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ é única, ou seja, $r = s$ e $p_i = q_i$, para todo i tal que $2 \leq i \leq r$, o que verifica a unicidade. ■

Uma fatoração em primos de um número natural $n > 1$ é uma representação de n como um produto de números primos ou como um produto de potências de números primos, ou seja, $n = {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k_r}$ em que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são números primos e cada $k_i \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, a fatoração de 90 é $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

O processo prático para decompor um número em fatores primos é baseado em fazer várias divisões levando em conta resultados anteriores. Vejamos esse processo para o número 90.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

A explicação é a seguinte: o menor divisor de 90, excluído o 1, é primo (no caso o 2); o menor divisor de 45, com exceção do 1, também é primo e é igualmente divisor de 90 (no caso o 3). Esse raciocínio leva, então, à decomposição de 90 em fatores primos no final do processo.

Vamos agora expor a proposição 7, apresentada por Nascimento e Feitosa (2013), a qual nos será útil para a demonstração do teorema 3.

Proposição 7: Seja $a = {p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n}$ em que $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ são números primos e cada r_i é um número natural. Se d é também um número natural, então $d \mid a$ se, e somente se, $d = {p_1}^{w_1} \cdot {p_2}^{w_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{w_n}$ em que, para cada i, $0 \leq w_i \leq r_i$.

Demonstração:

Se $d \mid a$, então $a = d \cdot c$, para algum natural c. Assim, $d \mid a$ e $c \mid a$. Portanto, se p é um primo que divide c ou divide d, então $p \mid a$. Logo, $p = p_i$ para algum i.

Desse modo, podemos tomar as fatorações de c e d nas formas $c = p_1^{z_1} \cdot p_2^{z_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{z_n}$ e $d = p_1^{w_1} \cdot p_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{w_n}$, em que cada z_i e cada w_i é um número natural.

Segue de $a = d \cdot c$ que temos

$p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n} = (p_1^{w_1} \cdot p_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{w_n}) \cdot (p_1^{z_1} \cdot p_2^{z_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{z_n}) = p_1^{w_1+z_1} \cdot p_2^{w_2+z_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{w_n+z_n}$.

Portanto, pelo teorema 2, $r_i = w_i + z_i \geq 0$.

Por outro lado, se $d = p_1^{w_1} \cdot p_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{w_n}$, em que para cada i, $0 \leq w_i \leq r_i$, então existem números naturais z_i tais que $r_i = w_i + z_i$. Assim, $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n} = p_1^{w_1+z_1} \cdot p_2^{w_2+z_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{w_n+z_n} = (p_1^{w_1} \cdot p_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{w_n}) \cdot (p_1^{z_1} \cdot p_2^{z_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{z_n}) = d \cdot (p_1^{z_1} \cdot p_2^{z_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{z_n})$. Portanto, $d \mid a$. ■

Para ilustrar esse resultado, apresentamos os exemplos abaixo:

$18 \mid 54$, pois $18 = 2 \cdot 3^2$ e $54 = 2 \cdot 3^3$.

$4 \mid 84$, pois $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e $4 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^0$.

Nascimento e Feitosa (2013) também elencam o teorema a seguir:

Teorema 3: Sejam a e b números naturais, $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ e $b = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$, em que $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, são números primos e para todo i, tem-se $r_i, s_i \in \mathbb{N}$, então $\text{mdc}(a,b) = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n}$ e $\text{mmc}(a,b) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$ de modo que para cada i, $u_i = \min\{r_i, s_i\}$ e $t_i = \max\{r_i, s_i\}$.

Demonstração:

Consideremos $d = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n}$, com $u_i = \min\{r_i, s_i\}$. Pela proposição 7, $d \mid a$ e $d \mid b$. Se c é um natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, novamente pela mesma proposição, podemos tomar a fatoração de c na forma $c = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{v_n}$, em que para cada i, $v_i \leq r_i$, $v_i \leq s_i$ e, portanto, $v_i \leq \min\{r_i, s_i\} = u_i$. Logo, também pela proposição 7, $c \mid d$ e, então, $d = \text{mdc}(a,b)$.

Temos também que, pela proposição 4, $\text{mmc}(a,b) \cdot \text{mdc}(a,b) = a \cdot b = (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}) \cdot (p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}) = p_1^{r_1+s_1} \cdot p_2^{r_2+s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n+s_n}$. Assim, como $\text{mdc}(a,b) = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n}$, em que $u_i = \min\{r_i, s_i\}$, resulta que $\text{mmc}(a,b) = m = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$, em que $t_i = \max\{r_i, s_i\}$, pois $r_i + s_i = \max\{r_i, s_i\} + \min\{r_i, s_i\} = t_i + u_i$. ■

Para ilustrar esse teorema, expomos o exemplo a seguir:

Como $24 = 2^3 \cdot 3$ e $45 = 3^2 \cdot 5$, podemos escrever $24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^0$ e $45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5$. Desse modo, $\min\{3, 0\} = 0$, $\min\{1, 2\} = 1$ e $\min\{0, 1\} = 0$ e $\mathrm{mdc}(24{,}45) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$. Ainda, $\max\{3, 0\} = 3$, $\max\{1, 2\} = 2$ e $\max\{0, 1\} = 1$ e $\mathrm{mmc}(24{,}45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$.

O teorema 3 fundamenta um processo prático para a determinação dos valores de mmc e mdc entre dois ou mais números. Esse algoritmo consiste em fatorar simultaneamente os números usando fatores primos e multiplicar os fatores comuns deles para determinar o mdc, bem como multiplicar todos os fatores usados nessa atividade para determinar o mmc. Vejamos esse processo para os mesmos números do exemplo acima.

$$
\begin{array}{r|l}
24, 45 & 2 \\
12, 45 & 2 \\
6, 45 & 2 \\
3, 45 & 3 \\
1, 15 & 3 \\
1, 5 & 5 \\
1, 1 &
\end{array}
$$

$\mathrm{mdc}(24{,}45) = 3$, $\mathrm{mmc}(24{,}45) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Percebamos que nesse dispositivo para fatorar obtemos $24 = 2^3 \cdot 3$ e $45 = 3^2 \cdot 5$.

Agora, executaremos esse algoritmo para os números 20, 52 e 60.

$$
\begin{array}{r|l}
20, 52, 60 & 2 \\
10, 26, 30 & 2 \\
5, 13, 15 & 3 \\
5, 13, 5 & 5 \\
1, 13, 1 & 13 \\
1, 1, 1 &
\end{array}
$$

$\mathrm{mdc}(20{,}52{,}60) = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$;

$\mathrm{mmc}(20{,}52{,}60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 780$.

Percebamos que nesse processo para fatorar obtemos $20 = 2^2 \cdot 5$, $52 = 2^2 \cdot 13$ e $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC

Este capítulo apresenta a sequência didática elaborada. Seu formato é baseado em Cabral (2017), sendo composta de 7 UARCs, que abordam os conceitos de mmc e mdc, processos práticos para o cálculo do valor desses objetos matemáticos, o conceito de números primos entre si, e uma importante propriedade do mmc e do mdc.

Apresentamos aqui a sequência didática no modelo direcionado ao estudante e no modelo direcionado ao professor. O termo UARC é usado somente no material do docente. No material do aluno é usada a palavra atividade, bem como são omitidos os objetivos de cada UARC, algumas partes das questões e as Intervenções Formalizantes (I_fs), para que o processo de reflexão e estabelecimento de conjecturas pelos alunos não seja prejudicado. Essas partes serão escritas pelos próprios alunos, com a orientação do professor, nos momentos em que o educador achar mais conveniente durante a aplicação. No material do professor há a resolução das questões de todas as UARCs.

Esclarecemos que a questão 6 da UARC 1 foi adaptada de Dante (2015) e a questão 7 de Gay e Silva (2018). A questão 5 da UARC 2 foi adaptada de Gay e Silva (2018). As questões 1 e 6 da UARC 3 foram adaptadas de Dante (2015) e a questão 7 foi adaptada de Gay e Silva (2018). A questões 4 e 6 da UARC 4 foram adaptadas de Giovanni Júnior e Castrucci (2018) e a questão 5 foi adaptada de Andrini e Vasconcellos (2015). E a questão 5 da UARC 5 foi adaptada de Gay e Silva (2018).

3.1 Material do Estudante

Escola

Professor:

Aluno: Turma:

Disciplina:

Data:

<u>Sequência Didática</u>

Atividade 1: Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Pedro e Sandro são amigos e viajam a trabalho. Os dois saem de Belém. Pedro faz viagem para Barcarena de 5 em 5 dias e Sandro para Salinópolis de 4 em 4 dias. Responda:

a) Considerando que Pedro e Sandro tenham viajado no dia 1º de outubro, depois de quantos dias ele viajarão no mesmo dia pela segunda vez?

b) Quantos dias depois da viagem do dia 1º de outubro eles viajarão no mesmo dia pela terceira vez?

c) Quantos dias depois da viagem do dia 1º de outubro eles viajarão no mesmo dia pela quarta vez?

2) Qual conteúdo da Matemática está sendo abordado na questão 1?

3) Podemos dizer que os números ___, ___ *e* ___ são ____________________ de 4 e 5?

4) Qual é o menor múltiplo comum de 4 e 5, diferente de 0?

5) Preencha os quadros abaixo:

Múltiplos de 3:
Múltiplos de 4:
Múltiplos comuns de 3 e 4:
Menor múltiplo comum de 3 e 4, diferente de 0:

Múltiplos de 6:
Múltiplos de 8:
Múltiplos comuns de 6 e 8:
Menor múltiplo comum de 6 e 8, diferente de 0:

Múltiplos de 3:
Múltiplos de 6:
Múltiplos de 9:
Múltiplos comuns de 3, 6 e 9:
Menor múltiplo comum de 3, 6 e 9, diferente de 0:

Exemplos: $\mathrm{mmc}(4,5) =$

$\mathrm{mmc}(3,4) =$

$\mathrm{mmc}(6,8) =$

$\mathrm{mmc}(3,6,9) =$

6) Os planetas Júpiter e Saturno completam uma volta em torno do Sol em aproximadamente 12 e 30 anos terrestres, respectivamente. Supondo que em certo momento eles estejam alinhados, depois de quantos anos terrestres eles voltarão a ficar desse modo?

7) Três corredoras largaram juntas em uma prova cujo percurso é circular. Elas correm com velocidade constante. Bruna leva 3 minutos para completar cada volta, Paula leva 5 minutos e Daniela, 6 minutos. Dada a largada, depois de quantos minutos as três passarão juntas pela primeira vez a linha de largada?

Escola

Professor:

Aluno: Turma:

Disciplina:

Data:

Atividade 2: Cálculo do Mínimo Múltiplo Comum por meio de Fatoração

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Observe a fatoração dos números 4 e 5 por números primos de forma separada abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Observe agora a fatoração dos mesmos números feita de forma simultânea:

$$\begin{array}{r|l} 4,5 & 2 \\ 2,5 & 2 \\ 1,5 & 5 \\ 1,1 & \end{array}$$

a) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 3 e 4.

b) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 6 e 8.

c) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 3, 6 e 9.

2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números Fatorados	Números Primos da Fatoração Simultânea	Resultado da Multiplicação dos Fatores Primos
$4, 5$		
$3, 4$		
$6, 8$		
$3, 6, 9$		

3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mmc obtidos na atividade 1 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

____

____

____

Resolva as questões 4, 5 e 6 usando o dispositivo prático, estudado agora, para o cálculo do mmc.

4) O ônibus “Distrito Industrial - Ver-o-Peso” parte de 50 em 50 minutos do ponto de saída dos veículos e o ônibus “Distrito Industrial – Pátio Belém” parte de 60 em 60 minutos. Sabendo que esses dois ônibus partiram juntos nesse momento do local de saída, daqui a quantas horas eles partirão juntos novamente?

5) Em uma estrada há um posto de combustível a cada intervalo de 30 quilômetros, uma torre de telefonia a cada 8 quilômetros e um posto da polícia rodoviária a cada 20 quilômetros. No início da estrada os três elementos estão juntos. Quantos quilômetros é preciso percorrer do início da estrada para encontrá-los juntos novamente?

6) Uma loja vende broches de cabelo em embalagens com 15 unidades e pulseiras em embalagens com 35 unidades cada uma. Uma pessoa que deseja comprar para revenda a mesma quantidade de broches e de pulseiras deverá comprar, no mínimo, quantas embalagens de cada produto?

Escola

Professor:

Aluno: Turma:

Disciplina:

Data:

Atividade 3: Máximo Divisor Comum (MDC)

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Em um jogo para duas ou mais pessoas, há 20 cartões amarelos e 50 cartões laranjas para serem distribuídos igualmente entre os participantes. Nenhum cartão pode sobrar. Responda:

a) Quais as opções para as quantidades de pessoas que podem participar desse jogo?

b) Esse jogo pode ser realizado por 4 pessoas? Por quê?

c) Qual é o número máximo de participantes que esse jogo pode ter?

2) Que conteúdo da Matemática está sendo abordado na questão 1?

3) Podemos dizer que os números ____, ____ *e* ____ são ____________________ de 20 e 50?

4) Qual é o maior divisor comum de 20 e 50?

5) Preencha os quadros abaixo:

Divisores de 9:
Divisores de 18:
Divisores comuns de 9 e 18:
Maior divisor comum de 9 e 18:

Divisores de 24:
Divisores de 40:
Divisores comuns de 24 e 40:
Maior divisor comum de 24 e 40:

Divisores de 27:	
Divisores de 32:	
Divisores comuns de 27 e 32:	
Maior divisor comum de 27 e 32:	

Divisores de 24:	
Divisores de 36:	
Divisores de 60:	
Divisores comuns de 24, 36 e 60:	
Maior divisor comum de 24, 36 e 60:	

____

____

Exemplos: $\mathrm{mdc}(20{,}50) =$

$\mathrm{mdc}(9{,}18) =$

$\mathrm{mdc}(24{,}40) =$

$\mathrm{mdc}(27{,}32) =$

$\mathrm{mdc}(24{,}36{,}60) =$

6) Marcela tem $28\ \mathrm{m}$ de fita azul e $20\ \mathrm{m}$ de fita vermelha para decorar camisas para uma apresentação teatral. Ela quer cortar essas fitas de modo que os pedaços tenham o mesmo tamanho, que seja o maior possível e que não haja sobras de fita. Quantos metros deve ter cada pedaço de fita?

7) Vitor tem 15 livros de ficção científica, 25 de suspense e 30 de aventura. Ele quer organizá-los em gavetas sem misturar os gêneros, ocupando a menor quantidade de gavetas e de forma que em cada uma tenha o mesmo número de livros. Quantos livros Vitor deverá colocar em cada gaveta?

Escola

Professor:

Aluno: Turma:

Disciplina:

Data:

Atividade 4: Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio de Fatoração

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Observe a fatoração dos números 20 e 50 por números primos de forma separada abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Observamos que os fatores primos comuns nas duas decomposições são 2 e 5.

Observe agora a fatoração dos mesmos números feita de forma simultânea e que o fator comum 2 divide os números 20 e 50, e o fator 5 divide 5 e 25.

$$\begin{array}{r|l} 20, 50 & 2 \rightarrow \text{divide } 20 \text{ e divide } 50. \\ 10, 25 & 2 \rightarrow \text{divide somente o } 10. \\ 5, 25 & 5 \rightarrow \text{divide } 5 \text{ e divide } 25. \\ 1, 5 & 5 \rightarrow \text{divide somente o } 5. \\ 1, 1 & \end{array}$$

a) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 9 e 18, circulando os fatores comuns.

b) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 24 e 40, circulando os fatores comuns.

c) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 24, 36 e 60, circulando os fatores comuns.

2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números Fatorados	Fatores Primos Comuns da Decomposição	Resultado da Multiplicação dos Fatores Primos Comuns
$20, 50$		
$9, 18$		
$24, 40$		
$24, 36, 60$		

3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mdc obtidos na atividade 3 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

____

____

____

Resolva as questões 4, 5 e 6 usando o dispositivo prático, estudado nesse momento, para o cálculo do mdc.

4) Para fazer um trabalho, o marceneiro Igor deve cortar duas tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço, se toda a madeira deve ser aproveitada?

5) Todos os alunos dos sextos, sétimos e oitavos anos da escola Cândida Santos de Souza participarão de uma gincana. Cada equipe deve ser formada por estudantes de um mesmo ano e com o mesmo número de participantes. A distribuição de alunos por ano é da seguinte forma: 6º ano: 120, 7º ano: 108 e 8º ano: 100. Qual é o número máximo de alunos por equipe?

6) Débora coleciona moedas e em sua coleção há 165 moedas douradas, 220 moedas prateadas e 275 moedas bronzeadas. Ela quer organizar essa coleção em caixas que tenham o mesmo número de moedas e de tal modo que cada caixa contenha o maior número possível de moedas de um só tipo. Nessas condições, quantas moedas Débora deve colocar em cada caixa?

Escola

Professor:

Aluno: Turma:

Disciplina:

Data:

Atividade 5: Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio do Algoritmo de Euclides

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Observe a divisão do número 50 pelo número 20 abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 20 \\ \cline{2-2} -10 & 2 \end{array}$$

Observe agora a divisão do número 20 pelo número 10 abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \cline{2-2} -0 & 2 \end{array}$$

Paramos o processo, pois obtivemos resto zero, e circulamos o divisor da última divisão.

a) Faça esse processo de divisões com os números 18 e 9 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

b) Faça esse processo de divisões com os números 40 e 24 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

c) Faça esse processo de divisões com os números 32 e 27 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números do Início do Processo de Divisões	Divisor Circulado do Processo
$20, 50$	
$9, 18$	
$24, 40$	
$27, 32$	

3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mdc obtidos na atividade 3 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

____

____

____

____

____

____

Um Pouco de História

Euclides de Alexandria viveu por volta de 325 a.C. a 265 a.C. Foi um notável matemático grego autor de várias obras. A mais conhecida obra dele foi Os Elementos, que é composto por treze livros, onde Euclides organizou logicamente muitos resultados matemáticos. Os Elementos é uma das obras mais reproduzidas e estudadas da História. O algoritmo estudado nessa atividade já existia antes de Euclides, mas foi abordado no Livro VII de Os Elementos e leva o nome do matemático.

Fonte: ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Resolva as questões 4 e 5 usando o dispositivo prático, estudado agora, para o cálculo do mdc.

4) Um terreno retangular mede 75 m por 45 m e vai ser dividido em lotes quadrados do maior tamanho possível para construção de casas e futura comercialização. Quantos metros terá cada lado do lote?

5) Dois livros, um com 176 páginas e outro com 240 páginas, serão divididos em fascículos para venda semanal na internet. Os fascículos serão montados com o maior número de páginas possível e terão o mesmo número de páginas. Em quantas semanas uma pessoa terá os dois livros completos, considerando que ela compre todos os fascículos e que um livro será vendido após o outro?

Escola

Professor:

Aluno: Turma:

Disciplina:

Data:

Atividade 6: Números Primos entre Si

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Calcule:

a) $\mathrm{mdc}(18,25)$;

b) $\mathrm{mdc}(23,42)$.

2) O que os $\mathrm{mdc}(18, 25)$ e $\mathrm{mdc}(23,42)$ têm em comum?

3) Procure na atividade 3 um par de números que possui a característica que os pares de números da questão 1 têm.

4) Dê um exemplo de par de números, não estudado durante as atividades feitas até aqui, que ____.

____

____

5) Verifique se os números abaixo são primos entre si.

a) 7 e 22;

b) 14 e 35;

c) 18 e 44;

d) 28 e 39;

e) 33 e 48;

f) 27, 46 e 55.

Escola

Professor:

Aluno: Turma:

Disciplina:

Data:

Atividade 7: O Produto do MMC pelo MDC de Dois Números Naturais

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Calcule o valor do mmc entre os números abaixo.

a) 20 e 50;

b) 9 e 18;

c) 24 e 40;

d) 27 e 32;

e) 15 e 20.

2) Calcule o valor do mdc entre os números abaixo.

a) 4 e 5;

b) 3 e 4;

c) 6 e 8;

d) 15 e 20.

3) Usando as informações das questões 1 e 2 acima e informações de atividades anteriores, complete o quadro abaixo.

Números	MMC entre os Números	MDC entre os Números	Multiplicação do MMC pelo MDC
$4, 5$			
$3, 4$			
$6, 8$			
$20, 50$			
$9, 18$			
$24, 40$			
$27, 32$			
$15, 20$			

4) Efetue as seguintes multiplicações:

a) $4 \cdot 5$;

b) $3 \cdot 4$;

c) $6 \cdot 8$;

d) $20 \cdot 50$;

e) $9 \cdot 18$;

f) $24 \cdot 40$;

g) $27 \cdot 32$;

h) $15 \cdot 20$.

5) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão 3 com os valores obtidos na questão 4. O que você percebeu?

____

____

6) Determine:

a) o mmc entre 8 e 36 sabendo que o mdc entre eles é 4;

b) o mdc entre 18 e 30 sabendo que o mmc entre eles é 90;

c) o mmc entre 21 e 56 sabendo que o mdc entre eles é 7;

d) o mdc entre 48 e 64 sabendo que o mmc entre eles é 192;

e) o mmc entre 55 e 70 sabendo que o mdc entre eles é 5;

f) o mdc entre 80 e 90 sabendo que o mmc entre eles é 720.

3.2 Material do Professor

<u>Sequência Didática</u>

UARC 1: Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Objetivo: Compreender o conceito de mínimo múltiplo comum (mmc) a partir de uma situação-problema.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Pedro e Sandro são amigos e viajam a trabalho. Os dois saem de Belém. Pedro faz viagem para Barcarena de 5 em 5 dias e Sandro para Salinópolis de 4 em 4 dias. Responda:

a) Considerando que Pedro e Sandro tenham viajado no dia 1º de outubro, depois de quantos dias eles viajarão no mesmo dia pela segunda vez?

$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, \ldots$

$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, \ldots$

20 dias.

b) Quantos dias depois da viagem do dia 1º de outubro eles viajarão no mesmo dia pela terceira vez?

40 dias.

c) Quantos dias depois da viagem do dia 1º de outubro eles viajarão no mesmo dia pela quarta vez?

60 dias.

2) Qual conteúdo da Matemática está sendo abordado na questão 1?

Múltiplos de números naturais.

3) Podemos dizer que os números 20, 40 e 60 são *múltiplos comuns* de 4 e 5?

Sim.

4) Qual é o menor múltiplo comum de 4 e 5, diferente de 0?

20.

5) Preencha os quadros abaixo:

Múltiplos de 3: $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, \ldots$
Múltiplos de 4: $0, 4, 8,12,16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \ldots$
Múltiplos comuns de 3 e 4: $0, 12, 24, 36, \ldots$
Menor múltiplo comum de 3 e 4, diferente de 0: 12.

Múltiplos de 6: $0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \ldots$
Múltiplos de 8: $0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \ldots$
Múltiplos comuns de 6 e 8: $0, 24, 48, \ldots$
Menor múltiplo comum de 6 e 8, diferente de 0: 24.

Múltiplos de 3: $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, \ldots$
Múltiplos de 6: $0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots$
Múltiplos de 9: $0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, \ldots$
Múltiplos comuns de 3, 6 e 9: $0, 18, 36, \ldots$
Menor múltiplo comum de 3, 6 e 9, diferente de 0: 18.

[If] *O mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números naturais é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo comum desses números.*

Exemplos: $\mathrm{mmc}(4,5) = 20$.

$\mathrm{mmc}(3,4) = 12$.

$\mathrm{mmc}(6,8) = 24$.

$\mathrm{mmc}(3,6,9) = 18$.

6) Os planetas Júpiter e Saturno completam uma volta em torno do Sol em aproximadamente 12 e 30 anos terrestres, respectivamente. Supondo que em certo momento eles estejam alinhados, depois de quantos anos terrestres eles voltarão a ficar desse modo?

$0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots$

$0, 30, 60, 90, \ldots$

$\mathrm{mmc}(12,30) = 60$

Eles voltarão a ficar alinhados depois de 60 anos terrestres.

7) Três corredoras largaram juntas em uma prova cujo percurso é circular. Elas correm com velocidade constante. Bruna leva 3 minutos para completar cada volta, Paula leva 5 minutos e Daniela, 6 minutos. Dada a largada, depois de quantos minutos as três passarão juntas pela primeira vez a linha de largada?

$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, \ldots$

$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots$

$0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots$

$\mathrm{mmc}(3,5,6) = 30$

Elas passarão juntas pela primeira vez a linha de largada depois de 30 minutos.

UARC 2: Cálculo do Mínimo Múltiplo Comum por meio de Fatoração

Objetivo: Compreender o processo prático para calcular o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números por meio da fatoração por números primos.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Observe a fatoração dos números 4 e 5 por números primos de forma separada abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Observe agora a fatoração dos mesmos números feita de forma simultânea:

$$\begin{array}{r|l} 4,5 & 2 \\ 2,5 & 2 \\ 1,5 & 5 \\ 1,1 & \end{array}$$

a) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 3 e 4.

$$\begin{array}{r|l} 3,4 & 2 \\ 3,2 & 2 \\ 3,1 & 3 \\ 1,1 & \end{array}$$

b) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 6 e 8.

$$\begin{array}{l|l} 6,8 & 2 \\ 3,4 & 2 \\ 3,2 & 2 \\ 3,1 & 3 \\ 1,1 & \end{array}$$

c) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 3, 6 e 9.

$$\begin{array}{l|l} 3,6,9 & 2 \\ 3,3,9 & 3 \\ 1,1,3 & 3 \\ 1,1,1 & \end{array}$$

2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números Fatorados	Números Primos da Fatoração Simultânea	Resultado da Multiplicação dos Fatores Primos
$4,\ 5$	$2,\ 2,\ 5$	$2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$
$3,\ 4$	$2,\ 2,\ 3$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
$6,\ 8$	$2,\ 2,\ 2,\ 3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$
$3,\ 6,\ 9$	$2,\ 3,\ 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mmc obtidos na atividade 1 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os valores da última coluna são os valores de mmc dos números da primeira coluna.

[I_f] *Para encontrar o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números naturais basta multiplicar todos os fatores primos da fatoração simultânea desses números.*

Resolva as questões 4, 5 e 6 usando o dispositivo prático, estudado agora, para o cálculo do mmc.

4) O ônibus “Distrito Industrial - Ver-o-Peso” parte de 50 em 50 minutos do ponto de saída dos veículos e o ônibus “Distrito Industrial – Pátio Belém” parte de 60 em 60 minutos. Sabendo que esses dois ônibus partiram juntos nesse momento do local de saída, daqui a quantas horas eles partirão juntos novamente?

$$\begin{array}{r|l} 50, 60 & 2 \\ 25, 30 & 2 \\ 25, 15 & 3 \\ 25, 5 & 5 \\ 5, 1 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$\text{mmc}(50,60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300$

$300 : 60 = 5$

Eles partirão juntos novamente daqui a 5 horas.

5) Em uma estrada há um posto de combustível a cada intervalo de 30 quilômetros, uma torre de telefonia a cada 8 quilômetros e um posto da polícia rodoviária a cada 20 quilômetros. No início da estrada os três elementos estão juntos. Quantos quilômetros é preciso percorrer do início da estrada para encontrá-los juntos novamente?

$$\begin{array}{r|l} 8, 20, 30 & 2 \\ 4, 10, 15 & 2 \\ 2, 5, 15 & 2 \\ 1, 5, 15 & 3 \\ 1, 5, 5 & 5 \\ 1, 1, 1 & \end{array}$$

$\text{mmc}(8,20,30) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

É preciso percorrer 120 quilômetros para encontrar os três elementos juntos novamente.

6) Uma loja vende broches de cabelo em embalagens com 15 unidades e pulseiras em embalagens com 35 unidades cada uma. Uma pessoa que deseja comprar para revenda a mesma quantidade de broches e de pulseiras deverá comprar, no mínimo, quantas embalagens de cada produto?

$$\begin{array}{r|l} 15, 35 & 3 \\ 5, 35 & 5 \\ 1, 7 & 7 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$\text{mmc}(15,35) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

$105 : 15 = 7$

$105 : 35 = 3$

Ela deverá comprar 7 pacotes de broches e 3 pacotes de pulseiras.

UARC 3: Máximo Divisor Comum (MDC)

Objetivo: Compreender o conceito de máximo divisor comum (mdc) a partir de uma situação-problema.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Em um jogo para duas ou mais pessoas, há 20 cartões amarelos e 50 cartões laranjas para serem distribuídos igualmente entre os participantes. Nenhum cartão pode sobrar. Responda:

a) Quais as opções para as quantidades de pessoas que podem participar desse jogo?

$\text{d}(20) = 1, 2, 4, 5, 10, 20.$

$\text{d}(50) = 1, 2, 5, 10, 25, 50.$

As opções são 2, 5 ou 10 pessoas.

b) Esse jogo pode ser realizado por 4 pessoas? Por quê?

Não, porque não é possível dividir igualmente os cartões laranjas para 4 pessoas.

c) Qual é o número máximo de participantes que esse jogo pode ter?

$10.$

2) Que conteúdo da Matemática está sendo abordado na questão 1?

Divisores de números naturais.

3) Podemos dizer que os números *2, 5* e *10* são *divisores comuns* de 20 e 50?

Sim.

4) Qual é o maior divisor comum de 20 e 50?

10.

5) Preencha os quadros abaixo:

Divisores de 9: 1, 3, 9.
Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Divisores comuns de 9 e 18: 1, 3, 9.
Maior divisor comum de 9 e 18: 9.

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
Divisores de 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.
Divisores comuns de 24 e 40: 1, 2, 4, 8.
Maior divisor comum de 24 e 40: 8.

Divisores de 27: 1, 3, 9, 27.
Divisores de 32: 1, 2, 4, 8, 16, 32.
Divisores comuns de 27 e 32: 1.
Maior divisor comum de 27 e 32: 1.

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
Divisores de 36: 1, 2, 3, 6, 12, 18, 36.
Divisores de 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
Divisores comuns de 24, 36 e 60: 1, 2, 3, 6, 12.
Maior divisor comum de 24, 36 e 60: 12.

[I_f] *O máximo divisor comum (mdc) de dois ou mais números naturais é o maior dos divisores comuns desses números.*

Exemplos: $\mathrm{mdc}(20,50) = 10.$

$\mathrm{mdc}(9,18) = 9.$

$\mathrm{mdc}(24,40) = 8.$

$\mathrm{mdc}(27,32) = 1.$

$\mathrm{mdc}(24,36,60) = 12.$

6) Marcela tem $28\ \mathrm{m}$ de fita azul e $20\ \mathrm{m}$ de fita vermelha para decorar camisas para uma apresentação teatral. Ela quer cortar essas fitas de modo que os pedaços tenham o mesmo tamanho, que seja o maior possível e que não haja sobras de fita. Quantos metros deve ter cada pedaço de fita?

$\mathrm{d}(20) = 1, 2, 4, 5, 10, 20.$

$\mathrm{d}(28) = 1, 2, 4, 7, 14, 28.$

$\mathrm{mdc}(20{,}28) = 4.$

Cada pedaço de fita deve ter 4 metros.

7) Vitor tem 15 livros de ficção científica, 25 de suspense e 30 de aventura. Ele quer organizá-los em gavetas sem misturar os gêneros, ocupando a menor quantidade de gavetas e de forma que em cada uma tenha o mesmo número de livros. Quantos livros Vitor deverá colocar em cada gaveta?

$\mathrm{d}(15) = 1, 3, 5, 15.$

$\mathrm{d}(25) = 1, 5, 25.$

$\mathrm{d}(30) = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$

$\mathrm{mdc}(15{,}25{,}30) = 5.$

Ele deverá colocar 5 livros em cada gaveta.

UARC 4: Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio de Fatoração

Objetivo: Compreender o processo prático para calcular o máximo divisor comum (mdc) de dois ou mais números por meio da fatoração por números primos.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Observe a fatoração dos números 20 e 50 por números primos de forma separada abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Observamos que os fatores primos comuns nas duas decomposições são 2 e 5.

Observe agora a fatoração dos mesmos números feita de forma simultânea e que o fator comum 2 divide os números 20 e 50, e o fator 5 divide 5 e 25.

$$\begin{array}{r|l} 20, 50 & 2 \rightarrow \text{divide } 20 \text{ e divide } 50. \\ 10, 25 & 2 \rightarrow \text{divide somente o } 10. \\ 5, 25 & 5 \rightarrow \text{divide } 5 \text{ e divide } 25. \\ 1, 5 & 5 \rightarrow \text{divide somente o } 5. \\ 1, 1 & \end{array}$$

a) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 9 e 18, circulando os fatores comuns.

$$\begin{array}{r|l} 9, 18 & 2 \\ 9, 9 & 3 \\ 3, 3 & 3 \\ 1, 1 & \end{array}$$

b) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 24 e 40, circulando os fatores comuns.

$$\begin{array}{r|l} 24, 40 & 2 \\ 12, 20 & 2 \\ 6, 10 & 2 \\ 3, 5 & 3 \\ 1, 5 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

c) Faça a fatoração por números primos simultânea dos números 24, 36 e 60, circulando os fatores comuns.

$$\begin{array}{r|l} 24, 36, 60 & 2 \\ 12, 18, 30 & 2 \\ 6, 9, 15 & 2 \\ 3, 9, 15 & 3 \\ 1, 3, 5 & 3 \\ 1, 1, 5 & 5 \\ 1, 1, 1 & \end{array}$$

2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números Fatorados	Fatores Primos Comuns da Decomposição	Resultado da Multiplicação dos Fatores Primos Comuns
$20, 50$	$2, 5$	$2 \cdot 5 = 10$
$9, 18$	$3, 3$	$3 \cdot 3 = 9$
$24, 40$	$2, 2, 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$24, 36, 60$	$2, 2, 3$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mdc obtidos na atividade 3 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os valores da última coluna são os valores de mdc dos números da primeira coluna.

[If] *Para encontrar o máximo divisor comum* (mdc) *de dois ou mais números naturais basta multiplicar todos os fatores primos comuns da fatoração desses números.*

Resolva as questões 4, 5 e 6 usando o dispositivo prático, estudado nesse momento, para o cálculo do mdc.

4) Para fazer um trabalho, o marceneiro Igor deve cortar duas tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço, se toda a madeira deve ser aproveitada?

$$
\begin{array}{r|l}
90, 126 & 2 \\
45, 63 & 3 \\
15, 21 & 3 \\
5, 7 & 5 \\
1, 7 & 7 \\
1, 1 &
\end{array}
$$

$\mathrm{mdc}(90,126) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

Cada pedaço deve ter 18 centímetros.

5) Todos os alunos dos sextos, sétimos e oitavos anos da escola Cândida Santos de Souza participarão de uma gincana. Cada equipe deve ser formada por estudantes de um mesmo ano e com o mesmo número de participantes. A distribuição de alunos por ano é da seguinte forma: 6º ano: 120, 7º ano: 108 e 8º ano: 100. Qual é o número máximo de alunos por equipe?

$$\begin{array}{r|l}
100,\ 108,\ 120 & 2 \\
50,\ 54,\ 60 & 2 \\
25,\ 27,\ 30 & 2 \\
25,\ 27,\ 15 & 3 \\
25,\ 9,\ 5 & 3 \\
25,\ 3,\ 5 & 3 \\
25,\ 1,\ 5 & 5 \\
5,\ 1,\ 1 & 5 \\
1,\ 1,\ 1 &
\end{array}$$

$$\mathrm{mdc}(100{,}108{,}120) = 2 \cdot 2 = 4$$

O número máximo de alunos por equipe é 4.

6) Débora coleciona moedas e em sua coleção há 165 moedas douradas, 220 moedas prateadas e 275 moedas bronzeadas. Ela quer organizar essa coleção em caixas que tenham o mesmo número de moedas e de tal modo que cada caixa contenha o maior número possível de moedas de um só tipo. Nessas condições, quantas moedas Débora deve colocar em cada caixa?

$$\begin{array}{r|l}
165,\ 220,\ 275 & 2 \\
165,\ 110,\ 275 & 2 \\
165,\ 55,\ 275 & 3 \\
55,\ 55,\ 275 & 5 \\
11{,}11,\ 55 & 5 \\
11{,}11,\ 11 & 11 \\
1,\ 1,\ 1 &
\end{array}$$

$$\mathrm{mdc}(165{,}220{,}275) = 5 \cdot 11 = 55$$

Ela deve colocar 55 moedas em cada caixa.

UARC 5: Cálculo do Máximo Divisor Comum por meio do Algoritmo de Euclides

Objetivo: Compreender o processo para calcular o máximo divisor comum (mdc) de dois números naturais por meio do algoritmo de Euclides.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Observe a divisão do número 50 pelo número 20 abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 20 \\ \hline -10- & 2 \end{array}$$

Observe agora a divisão do número 20 pelo número 10 abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \hline -0- & 2 \end{array}$$

Paramos o processo, pois obtivemos resto zero, e circulamos o divisor da última divisão.

a) Faça esse processo de divisões com os números 18 e 9 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 9 \\ \hline -0- & 2 \end{array}$$

b) Faça esse processo de divisões com os números 40 e 24 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 24 \\ \hline -16- & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 16 \\ \hline -8- & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 8 \\ \hline -0- & 2 \end{array}$$

c) Faça esse processo de divisões com os números 32 e 27 até obter resto zero e circule o divisor da última divisão.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 27 \\ \hline -5- & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \hline -2- & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline -1- & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline -0- & 2 \end{array}$$

2) Complete o quadro abaixo com as informações obtidas na questão 1.

Números do Início do Processo de Divisões	Divisor Circulado do Processo
20, 50	10
9, 18	9
24, 40	8
27, 32	1

3) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão anterior com os valores de mdc obtidos na atividade 3 (principalmente na questão 5). O que você percebeu?

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os valores da última coluna são os valores de mdc dos números da primeira coluna.

[If] *Para calcular o mdc de dois números naturais podemos dividir o maior pelo menor, o menor pelo primeiro resto, o primeiro resto pelo segundo etc. Quando chegarmos a algum resto que divida o anterior de forma exata, ele será o mdc. Esse processo de divisões é chamado de algoritmo de Euclides.*

Um Pouco de História

Euclides de Alexandria viveu por volta de 325 a.C. a 265 a.C. Foi um notável matemático grego autor de várias obras. A mais conhecida obra dele foi Os Elementos, que é composto por treze livros, onde Euclides organizou logicamente muitos resultados matemáticos. Os Elementos é uma das obras mais reproduzidas e estudadas da História. O algoritmo estudado nessa atividade já existia antes de Euclides, mas foi abordado no Livro VII de Os Elementos e leva o nome do matemático.

Fonte: ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Resolva as questões 4 e 5 usando o dispositivo prático, estudado agora, para o cálculo do mdc.

4) Um terreno retangular mede 75 m por 45 m e vai ser dividido em lotes quadrados do maior tamanho possível para construção de casas e futura comercialização. Quantos metros terá cada lado do lote?

$$\begin{array}{r|l} 75 & 45 \\ \hline -30- & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 30 \\ \hline -15- & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 15 \\ \hline -0- & 2 \end{array}$$

$\text{mdc}(75{,}45) = 15$

Cada lado do lote terá 15 metros.

5) Dois livros, um com 176 páginas e outro com 240 páginas, serão divididos em fascículos para venda semanal na internet. Os fascículos serão montados com o maior número de páginas possível e terão o mesmo número de páginas. Em quantas semanas uma pessoa terá os dois livros completos, considerando que ela compre todos os fascículos e que um livro será vendido após o outro?

$$\begin{array}{r|l} 240 & 176 \\ \hline \text{-}64\text{-} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 176 & 64 \\ \hline \text{-}48\text{-} & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & 48 \\ \hline \text{-}16\text{-} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 16 \\ \hline \text{-}0\text{-} & 3 \end{array}$$

$\mathrm{mdc}(240{,}176) = 16$

$$\begin{array}{r|l} 240 & 16 \\ \hline 80 & 15 \\ \text{-}0\text{-} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 176 & 16 \\ \hline 16 & 11 \\ \text{-}0\text{-} & \end{array}$$

$15 + 11 = 26$

Ela terá os dois livros completos em 26 semanas.

UARC 6: Números Primos entre Si

Objetivo: Compreender o conceito de números primos entre si.
Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Calcule:

a) $\mathrm{mdc}(18{,}25)$;

$\mathrm{d}(18) = 1, 2, 3, 6, 9, 18.$

$\mathrm{d}(25) = 1, 5, 25.$

$\mathrm{mdc}(18{,}25) = 1.$

b) $\mathrm{mdc}(23{,}42)$.

$\mathrm{d}(23) = 1, 23.$

$\mathrm{d}(42) = 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.$

$\mathrm{mdc}(23{,}42) = 1.$

2) O que os $\mathrm{mdc}(18{,}25)$ e $\mathrm{mdc}(23{,}42)$ têm em comum?

Os valores são iguais a 1.

3) Procure na atividade 3 um par de números que possui a característica que os pares de números da questão 1 têm.

27 e 32.

4) Dê um exemplo de par de números, não estudado durante as atividades feitas até aqui, *que tenham máximo divisor comum igual a* 1.

Resposta pessoal.

[If] *Dizemos que dois ou mais números naturais são primos entre si quando o máximo divisor comum (mdc) entre eles é igual a* 1.

5) Verifique se os números abaixo são primos entre si.

a) 7 e 22;

$\mathrm{d}(7) = 1, 7.$

$\mathrm{d}(22) = 1, 2, 11, 22.$

$\mathrm{mdc}(7,22) = 1.$

São primos entre si.

b) 14 e 35;

$\mathrm{d}(14) = 1, 2, 7, 14.$

$\mathrm{d}(35) = 1, 5, 7, 35.$

$\mathrm{mdc}(14,35) = 7.$

Não são primos entre si.

c) 18 e 44;

$\mathrm{d}(18) = 1, 2, 3, 6, 9, 18.$

$\mathrm{d}(44) = 1, 2, 4, 11, 22, 44.$

$\mathrm{mdc}(18,44) = 2.$

Não são primos entre si.

d) 28 e 39;

$\mathrm{d}(28) = 1, 2, 4, 7, 14, 28.$

$\mathrm{d}(39) = 1, 3, 13, 39.$

$\mathrm{mdc}(28,39) = 1.$

São primos entre si.

e) 33 e 48;

$d(33) = 1, 3, 11, 33.$

$d(48) = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.$

$mdc(33{,}48) = 3.$

Não são primos entre si.

f) 27, 46 e 55.

$d(27) = 1, 3, 9, 27.$

$d(46) = 1, 2, 23, 46.$

$d(55) = 1, 5, 11, 55.$

$mdc(27{,}46{,}55) = 1.$

São primos entre si.

UARC 7: O Produto do MMC pelo MDC de Dois Números Naturais

Objetivo: Compreender a propriedade que diz que o produto do mmc pelo mdc de dois números naturais é igual ao produto desses números.

Materiais necessários: Atividade impressa, caderno, lápis ou caneta e borracha.

1) Calcule o valor do mmc entre os números abaixo.

a) 20 e 50;

$$\begin{array}{r|l} 20, 50 & 2 \\ 10, 25 & 2 \\ 5, 25 & 5 \\ 1, 5 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$mmc(20{,}50) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

b) 9 e 18;

$m(9) = 0, 9, 18, 27, \ldots$

$m(18) = 0, 18, 36, \ldots$

$mmc(9{,}18) = 18$

c) 24 e 40;

$$\begin{array}{r|l} 24, 40 & 2 \\ 12, 20 & 2 \\ 6, 10 & 2 \\ 3, 5 & 3 \\ 1, 5 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$$\mathrm{mmc}(24{,}40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

d) 27 e 32;

$$\begin{array}{r|l} 27, 32 & 2 \\ 27, 16 & 2 \\ 27, 8 & 2 \\ 27, 4 & 2 \\ 27, 2 & 2 \\ 27, 1 & 3 \\ 9, 1 & 3 \\ 3, 1 & 3 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$$\mathrm{mmc}(27{,}32) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 864$$

e) 15 e 20.

$$\begin{array}{r|l} 15, 20 & 2 \\ 15, 10 & 2 \\ 15, 5 & 3 \\ 5, 5 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$$\mathrm{mmc}(15{,}20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

2) Calcule o valor do mdc entre os números abaixo.

a) 4 e 5;

$\mathrm{d}(4) = 1, 2, 4.$

$\mathrm{d}(5) = 1, 5.$

$\mathrm{mdc}(4{,}5) = 1$

b) 3 e 4;

$d(3) = 1, 3.$

$d(4) = 1, 2, 4.$

$mdc(3,4) = 1$

c) 6 e 8;

$d(6) = 1, 2, 3, 6.$

$d(8) = 1, 2, 4, 8.$

$mdc(6,8) = 2$

d) 15 e 20.

$$\begin{array}{r|l} 15, 20 & 2 \\ 15, 10 & 2 \\ 15, 5 & 3 \\ 5, 5 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$mdc(15,20) = 5$

3) Usando as informações das questões 1 e 2 acima e informações de atividades anteriores, complete o quadro abaixo.

Números	MMC entre os Números	MDC entre os Números	Multiplicação do MMC pelo MDC
4, 5	20	1	20
3, 4	12	1	12
6, 8	24	2	48
20, 50	100	10	1 000
9, 18	18	9	162
24, 40	120	8	960
27, 32	864	1	864
15, 20	60	5	300

4) Efetue as seguintes multiplicações:

a) $4 \cdot 5$;

$4 \cdot 5 = 20$

b) $3 \cdot 4$;

$3 \cdot 4 = 12$

c) $6 \cdot 8$;

$6 \cdot 8 = 48$

d) $20 \cdot 50$;

$20 \cdot 50 = 1\,000$

e) $9 \cdot 18$;

$9 \cdot 18 = 162$

f) $24 \cdot 40$;

$24 \cdot 40 = 960$

g) $27 \cdot 32$;

$27 \cdot 32 = 864$

h) $15 \cdot 20$.

$15 \cdot 20 = 300$

5) Compare os valores obtidos na última coluna do quadro da questão 3 com os valores obtidos na questão 4. O que você percebeu?

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que o valor da multiplicação entre o mmc e o mdc de dois números naturais é igual ao valor da multiplicação entre os próprios números.

[If] *O produto do mmc pelo mdc de dois números naturais é igual ao produto desses números.*

6) Determine:

a) o mmc entre 8 e 36 sabendo que o mdc entre eles é 4;

$$\text{mmc}(8,36) \cdot \text{mdc}(8,36) = 8 \cdot 36$$

$$\text{mmc}(8,36) \cdot 4 = 8 \cdot 36$$

$$\text{mmc}(8,36) = \frac{8 \cdot 36}{4} =$$

$$2 \cdot 36 = 72$$

b) o mdc entre 18 e 30 sabendo que o mmc entre eles é 90;

$$\text{mmc}(18,30) \cdot \text{mdc}(18,30) = 18 \cdot 30$$

$$90 \cdot \text{mdc}(18,30) = 18 \cdot 30$$

$$\text{mdc}(18,30) = \frac{18 \cdot 30}{90} =$$

$$\frac{18 \cdot 1}{3} = 6$$

c) o mmc entre 21 e 56 sabendo que o mdc entre eles é 7;

$$\mathrm{mmc}(21,56) \cdot \mathrm{mdc}(21,56) = 21 \cdot 56$$

$$\mathrm{mmc}(21,56) \cdot 7 = 21 \cdot 56$$

$$\mathrm{mmc}(21,56) = \frac{21 \cdot 56}{7} =$$

$$3 \cdot 56 = 168$$

d) o mdc entre 48 e 64 sabendo que o mmc entre eles é 192;

$$\mathrm{mmc}(48,64) \cdot \mathrm{mdc}(48,64) = 48 \cdot 64$$

$$192 \cdot \mathrm{mdc}(48,64) = 48 \cdot 64$$

$$\mathrm{mdc}(48,64) = \frac{48 \cdot 64}{192} =$$

$$\frac{48 \cdot 1}{3} = 16$$

e) o mmc entre 55 e 70 sabendo que o mdc entre eles é 5;

$$\mathrm{mmc}(55,70) \cdot \mathrm{mdc}(55,70) = 55 \cdot 70$$

$$\mathrm{mmc}(55,70) \cdot 5 = 55 \cdot 70$$

$$\mathrm{mmc}(55,70) = \frac{55 \cdot 70}{5} =$$

$$11 \cdot 70 = 770$$

f) o mdc entre 80 e 90 sabendo que o mmc entre eles é 720.

$$\mathrm{mmc}(80,90) \cdot \mathrm{mdc}(80,90) = 80 \cdot 90$$

$$720 \cdot \mathrm{mdc}(80,90) = 80 \cdot 90$$

$$\mathrm{mdc}(80,90) = \frac{80 \cdot 90}{720} =$$

$$\frac{1 \cdot 90}{9} = 10$$

4. ORIENTAÇÕES SOBRE O USO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 Aos Estudantes

Caro estudante que fará uso da sequência didática deste trabalho, ela foi construída para ajudar você a aprender conceitos e procedimentos matemáticos escolares importantes. Você deve empenhar-se para resolver as atividades por mais que surjam dificuldades. O seu professor pode ser consultado e o ajudará diante dos obstáculos.

É importante que você tenha em mente que o formato das atividades tem como objetivo incentiva-lo a fazer reflexões e estabelecer hipóteses, bem como discutir e trocar ideias com os seus colegas e ajudarem-se mutuamente. É nesse ambiente de interações que o seu aprendizado e dos seus colegas vai ocorrer. Nesse processo você poderá errar, tentar novamente e isso não pode ser visto como algo negativo, pois você está em uma caminhada para alcançar a aprendizagem.

Por fim, esclarecemos que algumas questões e os espaços limitados por retângulos nas atividades serão completados pelo seu professor durante a aplicação da sequência didática.

4.2 Aos Professores

Caro professor, a aplicação da sequência didática deste trabalho deve ser feita na ordem em que se encontra neste material, devido estar estruturada de maneira lógica. Também o aconselhamos que entregue aos estudantes uma atividade por vez para evitar que eles prejudiquem o percurso que deverá ser realizado.

Para resolver as atividades os alunos precisam ter aprendido razoavelmente os conceitos e procedimentos dos conteúdos divisão com números naturais, múltiplos, divisores, números primos e compostos e decomposição de um número natural em fatores primos. Caso ainda não tenham visto ou aprendido esses conteúdos, eles devem ser trabalhados antes da aplicação da sequência didática.

Ao fazer uso do material, como em qualquer trabalho pedagógico, você deve estar atento aos objetivos de cada atividade, os quais estão elencados no subcapítulo 3.2.

Indicamos que os educandos sejam separados em grupos de três para resolverem as atividades para que sejam favorecidas as trocas de ideias, discussões, argumentações e ajuda mútua.

O levantamento de hipóteses, trocas de ideias e reflexões devem ser valorizados durante a aplicação da sequência, para isso o aconselhamos a não se apressar em dar respostas prontas aos alunos quando for perguntado sobre algo, ao invés, tente sempre fazer o discente pensar mais um pouco, tentar novamente fazer uma conta ou procedimento ou chegar a uma conclusão correta.

No material do educando, nas atividades 1, 3 e 6 algumas questões devem ter o comando completado por você no momento em que for mais conveniente. Essa omissão de algumas palavras foi feita para que não haja um prejuízo nas ações de reflexão, discussão e estabelecimento de hipóteses pelos estudantes.

É importante estar atento, por exemplo, que na primeira atividade da sequência didática o processo prático para o cálculo do mmc não é abordado, pois o objetivo nesse momento é trabalhar o conceito e o cálculo sem o uso de algoritmos, mas alguns alunos, que já tenham aprendido em anos escolares anteriores o processo prático, podem querer usá-lo, então você deve orientar esses estudantes a não o usarem nessa etapa. Cremos que se isso acontecer, será com poucos alunos. Essa situação deve ser observada em todas as atividades.

Na questão 6 da última atividade da sequência didática os discentes devem usar a propriedade abordada no momento para calcular o valor do mmc ou do mdc nos itens. Pode acontecer deles não a usarem e calcularem com outros métodos, então você deve orientá-los a fazer uso da propriedade.

As Intervenções Formalizantes devem ser escritas no quadro branco por você depois que os estudantes tiverem discutido e tentado fazer as primeiras questões de cada atividade e, principalmente, terem conjecturado a respeito de um padrão matemático que está ocorrendo nos resultados.

É importante também o trabalho junto aos alunos com as questões que vem após o estabelecimento das Intervenções Formalizantes e não somente a exigência da execução delas por parte dos discentes.

Por fim, ressaltamos que você também pode adaptar as atividades deste material para atender às demandas da sua turma de estudantes, conforme achar necessário.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. 4. ed. ren. São Paulo/SP: Editora do Brasil, 2015. 6 v.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenobla, vol. 7, nº 2, págs. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**. Tradução: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Belém/PA: SBEM/PA, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: Matemática, 6º ano. 2. ed. São Paulo/SP: Ática, 2015.

DAVIS, Claudia; OLIVEIRA, Zilma de Moraes Ramos de. **Psicologia na Educação**. 3ª edição. São Paulo: Editora Cortez, 2010.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual. 1991.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael. **Araribá Mais**: Matemática, 7º ano. 1. ed. São Paulo/SP: Moderna, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 7º ano. 4. ed. São Paulo/SP: FTD, 2018.

NASCIMENTO, Mauri Cunha do; FEITOSA, Hércules de Araújo. **Elementos da Teoria dos Números**. [S. l.], 2013.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SILVA, Benedito Antonio. Contrato Didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática – Uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2008, págs. 49-75.

VYGOTSKY, Lev Semyonovich. **Formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, Lev Semyonovich. The genesis of higher mental functions. In: WERTSCH, James V. (org.). **The concepto of activity in sovietic psychology**. Nova York: M.E. Sharpe, 1981, págs.144-188.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto alegre: Artmed, 1998.

SOBRE OS AUTORES

Artur Lira dos Santos – Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA (2015). É estudante do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA). É professor efetivo de Matemática da Secretaria Municipal de Educação de Ananindeua/PA (SEMED/Ananindeua) e da Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC/PA).
E-mail: arturlira93@gmail.com

Natanael Freitas Cabral - Licenciado em Ciências pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1985), licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1988), bacharel em Teologia pelo Seminário Teológico Batista Equatorial – STBE (1994), e mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará – UFPA (2004). Doutor em Ciências Humanas - Educação Brasileira pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio (2010). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Matemática. Foi professor da Educação Básica durante 36 anos na escola pública e Escola Tenente Rêgo Barros. Atuou no ensino superior por mais de 15 anos. Foi professor do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática dessa universidade (PPGEM/UEPA).
E-mail: natanfc61@yahoo.com.br

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem