PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA - PPGECM

UFMT

PPGECM

CLAUDIA MARIA MORO
EBERSON PAULO TREVISAN

EXPLORANDO O OLHAR INVENTOR EM ATIVIDADE DE GEOMETRIA

UMA PROPOSTA DE MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO AO PROFESSOR

SINOP – MATO GROSSO
2023

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA - PPGECM

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PPGECM

EXPLORANDO O OLHAR INVENTOR EM ATIVIDADE DE GEOMETRIA

UMA PROPOSTA DE MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO AO PROFESSOR

CLAUDIA MARIA MORO
EBERSON PAULO TREVISAN

SINOP – MATO GROSSO
2023

CLAUDIA MARIA MORO
EBERSON PAULO TREVISAN

EXPLORANDO O OLHAR INVENTOR EM ATIVIDADE DE GEOMETRIA

CADERNO DO PROFESSOR

SINOP – MT
2023

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) Professor(a),

Esse Produto Educacional é caracterizado como um Material de Apoio Pedagógico (MAP), vinculado à dissertação de Mestrado desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM), da Universidade Federal de Mato Grosso, campus de Sinop, intitulada: “Olhar Inventor em atividades Geométricas: uma análise de Material Didático do 7º ano do Ensino Fundamental”.

O objetivo deste material é contribuir para a ampliação dos processos de ensino e de aprendizagem de geometria, com a possibilidade de ser inserido junto aos materiais didáticos do professor, visando possibilitar a construção do conhecimento de forma significativa; e contribuindo com o professor ao planejar suas aulas, de modo a oferecer uma prática educativa embasada em princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) no Ensino de Geometria.

O MAP é apresentado em dois cadernos, sendo o caderno 1 destinado ao uso pedagógico do professor, e o caderno 2 destinado ao uso pedagógico do aluno.

O MAP é constituído por atividades em Sequências Didáticas e com sugestões de encaminhamento para resolução delas. As Sequências Didáticas foram elaboradas tendo como ponto de partida atividades de geometria que requeiram a exploração do Olhar Inventor para suas resoluções, mapeadas do Material Didático (Zattoni; Carvalho, 2021; Brasil, 2019) adotado pela Secretaria Estadual de Educação de Mato Grosso (SEDUC/MT) para toda a rede estadual de ensino estadual, denominado “Material Estruturado”. Elaboramos também uma seção complementar que apresenta o Tangram como possibilidade de introdução e exploração do Olhar Inventor e sua potencialidade na resolução de atividades geométricas, propiciando uma relação entre TRRS e o Tangram.

Pensamos na proposição de construção do Tangram intencionando associar a imagem dos quebra-cabeças com a teoria cognitiva pertinente à teoria defendida por Duval; ao compreendermos o papel semiótico dos materiais manipulativos, percebemos que eles contribuem não apenas como representações auxiliares, mas também oferecem uma possibilidade semiótica para representar o conceito. É crucial entender que os objetos cognitivos matemáticos não devem ser confundidos com a representação que fazemos deles, conforme alerta Duval (2012, p. 9). A utilização das diferentes representações semióticas, incluindo as auxiliares, deve ocorrer de forma integrada, consciente de que o foco da aprendizagem é o objeto mental (cognitivo) e não os objetos ostensivos.

Trazemos, ainda, neste material, atividades complementares com a intencionalidade de suprir a ausência de atividade que explorem o Olhar Inventor no Material Estruturado e contemple os objetos de conhecimento propostos na Unidade Temática de Geometria para o 7º ano do Ensino Fundamental. ”

Ao voltar o olhar para o Material Estruturado (Zattoni; Carvalho, 2021; Brasil, 2019), em relação às possibilidades de aprendizagem em geometria, espera-se que o Material de Apoio Pedagógico produzido possibilite estimular o desenvolvimento de atividades cognitivas, seguindo a Teoria de Duval relativa à geometria, com a utilização do Olhar Inventor.

Aproveitamos para desejar-lhe bom uso do material e, caso necessite de suporte ou tenha dúvidas, estamos à disposição pelo seguinte e-mail: claudiamoro33@gmail.com, ou Scaneie o QrCode.

Claudia Maria Moro
Eberson Paulo Trevisan

SUMÁRIO

ORGANIZAÇÃO DAS SEÇÕES

Seção I: Aborda os elementos teóricos com princípios na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para o Ensino e Aprendizagem de Geometria, de modo a contribuir com o trabalho pedagógico do professor, possibilitando conhecer sobre a teoria e até mesmo indicando referências para se aprofundar em seu estudo.

Seção II: Apresenta, com a construção do Tangram, a partir de uma sequência de passo a passo, uma abordagem dos elementos com princípios na TRRS para o Ensino e Aprendizagem da Geometria, como uma possibilidade de explorar o Olhar Inventor em atividades geométricas, proposta em uma sequência de atividades.

Seção III: Contempla a sequência de atividades geométricas mapeadas do Material Estruturado (Zattoni; Carvalho, 2021; Brasil, 2019) que se faz necessário ou tem a possibilidade de explorar o Olhar Inventor. Buscamos detalhar possíveis respostas em cada atividade, apontando a maneira como o Olhar Inventor foi explorado nas resoluções.

Seção IV: Indica uma sequência de atividades geométricas complementares, com variação entre os objetos de conhecimento que exploram ou têm a possibilidade de explorar o Olhar Inventor. Na resolução de cada atividade buscamos detalhar possíveis respostas, apontando a maneira como foi explorado o Olhar Inventor.

SEÇÃO I

Olhar Inventor como articulador dos elementos transversais para o Ensino e Aprendizagem de Geometria

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Ela busca apresentar uma abordagem cognitiva que analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da matemática, enfatizando a importância da linguagem e do uso de mais de um registro de representações em atividades. Moretti (2020) ressalta que a aprendizagem da geometria considera necessário um ponto de vista cognitivo do processo de aquisição dos conhecimentos matemáticos, pois a geometria exige do aluno a atividade cognitiva complexa, requerendo a conexão entre o gesto, a linguagem e o olhar.

A aprendizagem da geometria, segundo Durval (2005), passa pela condução e pelo desenvolvimento de um olhar próprio, possibilitando ao aluno visualizar os elementos significativos na figura e relacionar com o discurso em língua natural. A transição entre o discurso e o figural pode ser visto como uma operação cognitiva sobre as figuras geométricas, a articulação entre elementos transversais, a saber: os olhares, as apreensões e a desconstrução dimensional, favorecem o processo de aprendizagem da geometria, buscando facilitar as maneiras de raciocinar em geometria (Hillesheim; Moretti, 2020); assim, esses elementos podem mediar a autonomia intelectual do aluno. A seguir, destacamos a articulação desses elementos.

Duval (2012) destaca que há quatro maneiras diferentes de se fazer as apreensões de uma figura, as quais chama de: apreensão perceptiva, apreensão operatória, apreensão discursiva e apreensão sequencial. O reconhecimento visual imediato da forma figural se dá pela apreensão perceptiva; quando temos a possibilidade de operar e modificar a figura ou sua reconfiguração, se destaca a apreensão operatória; informações contidas no enunciado e na forma figural se dá pela apreensão perceptiva; quando temos a possibilidade de operar e modificar a figura ou sua reconfiguração, se destaca a apreensão operatória; informações contidas no enunciado e na figura da atividade, bem como a relação entre eles, é evidenciada por meio da apreensão discursiva; e indicações, instruções para construir uma figura caracteriza a apreensão sequencial. Nesse prisma, é possível a passagem de uma apreensão para outra na resolução de uma atividade, mesmo sendo elas independentes entre si.

A ação cognitiva que uma figura é capaz de despertar condiciona as diversas maneiras de olhar as figuras conforme as apreensões em geometria são exigidas, podendo ir, conforme Duval (2005), do olhar icônico (botanista e agrimensor) ao olhar não icônico (construtor e Inventor), mantendo suas formas estáveis ou permitindo sua desconstrução visual. Quando a visualização da figura permanece inalterada dentro de seu perímetro, se faz presente o olhar botanista ou o olhar agrimensor; já a desconstrução da figura preservando seu contorno refina os olhares, caracterizando o olhar construtor ou o Olhar Inventor.

De acordo com Duval (2005), cada tipo de olhar apresenta uma particularidade diferente, o olhar botanista possibilita reconhecer o contorno de formas, por exemplo, identificar um polígono pelo número de lados, ou diferenciar um quadrilátero de uma figura circular, sem estabelecer relações métricas, propiciando a preparação do observador para uma possível evolução no desenvolvimento dos demais olhares. O olhar agrimensor é acionado ao mobilizar as propriedades geométrica para fins de medida, propiciando a preparação do observador para uma possível evolução no desenvolvimento dos demais olhares, e registrar, no plano de um papel, como medir um terreno e representar sua planta baixa em um papel, sem recorrer ao uso de instrumentos de medidas como réguas, papel milimétricos e outros, mobilizando as propriedades geométricas para fins de medições. Na tentativa de elucidar melhor, apresentamos a seguir um exemplo de exploração dos olhares botanista e agrimensor.

Figura 1

Acionando a exploração do olhar botanista, tem-se a possibilidade de reconhecer que a Figura 1 apresenta um quadrilátero. Ao reconhecer que o comprimento é maior que a largura, foi acionado o olhar agrimensor.

O olhar construtor é requisitado quando são utilizados instrumentos de medidas graduados, como compasso, régua ou *softwares* geométricos. O Olhar Inventor é explorado quando é modificada a figura, por exemplo, adicionando um traço. A modificação provoca a desconstrução figural, fazendo surgir outras figuras e propriedades não observadas de imediato anteriormente. Com o surgimento de novas figuras e propriedades, manifestam-se possibilidades diferentes de resolução de atividades, possibilitando também articular os demais olhares e apreensões. Intencionando ilustrar a exploração do olhar construtor e do olhar inventor, apresentamos um exemplo. Exemplo 2:

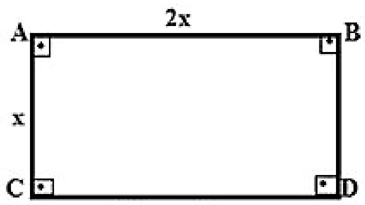


Figura 2

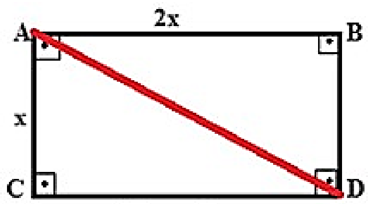
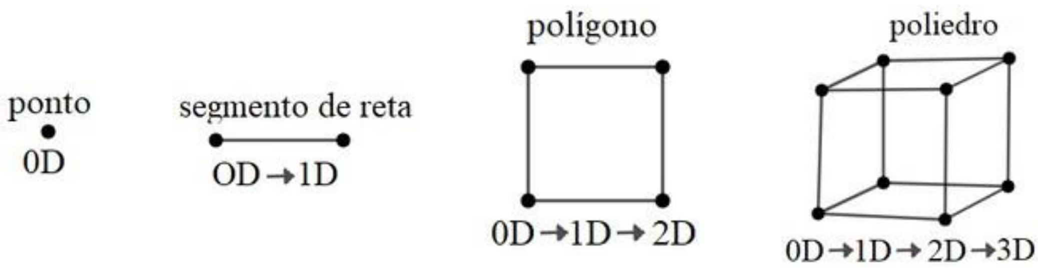


Figura 3

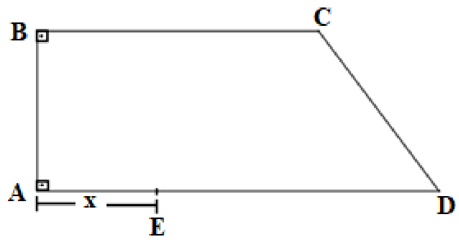
Construir o retângulo ABCD (Figura 2), utilizando uma régua milimetrada, com o comprimento medindo o dobro da medida da largura, se deu ao explorar o olhar construtor. A exploração do olhar inventor foi acionada ao traçar a diagonal $\overline{AD}$, ocasionando o surgimento dos triângulos retângulos escalenos equivalentes ABD e ACD (Figura 3) e suas propriedades.

Em conformidade com Hillesheim e Moretti (2020), a visualização não icônica possibilita que a forma figural seja desconstruída visualmente, ampliando os olhares e percebendo mudanças dimensionais das formas reconhecidas e seus elementos dimensionais, tais como ponto, seguimentos de retas, polígonos e poliedros. Um segmento de reta unidimensional 1D é a ligação entre dois pontos adimensional 0D. O segmento pode representar o lado de um polígono bidimensional 2D. Um quadrado pode representar a face de um poliedro tridimensional 3D. Nesse contexto, temos um ponto 0D, um segmento de reta 0D →1D, um polígono 0D →1D → 2D e um poliedro 0D →1D → 2D →3D.

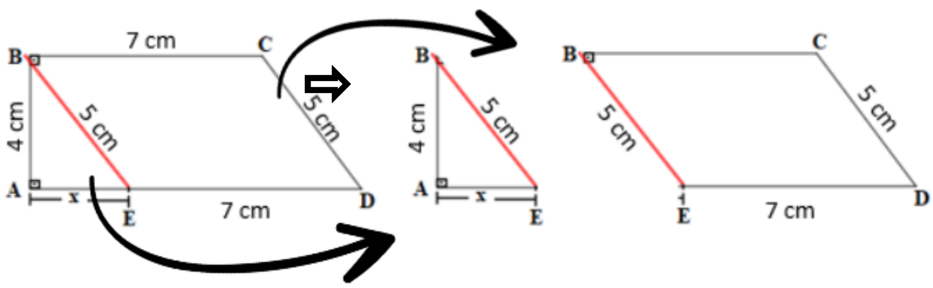


O enfoque do nosso Produto Educacional é destacar como o Olhar Inventor pode ser explorado em atividades de geometria plana, inserindo traços (ou modificações pertinentes) que ocasionam a possibilidade de visualizar, a partir deles, figuras e propriedades antes não percebidas. As figuras e propriedades que surgem com o traço que caracteriza a exploração do Olhar Inventor, em muitos casos, é fundamental para solucionar a atividade. Destacamos, a seguir, um exemplo de atividade que contempla nossa pesquisa.

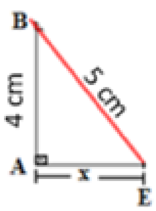
Exemplo 3: Determine a medida do perímetro do trapézio retângulo ABCD mostrado na figura abaixo. Considere $\overline{AB} = 4\ cm$, $\overline{CD} = 5\ cm$ e $\overline{DE} = 7\ cm$.



Para calcular a medida do perímetro desse polígono são necessárias as medidas de comprimento de seus lados. Nessa situação precisamos determinar a medida do comprimento do lado $\overline{AD}$, calculando o valor de x que representa parcialmente o comprimento $\overline{AD}$. Para tal, podemos acionar e explorar o Olhar Inventor traçando o segmento $\overline{BE}$, como mostrado na figura abaixo.

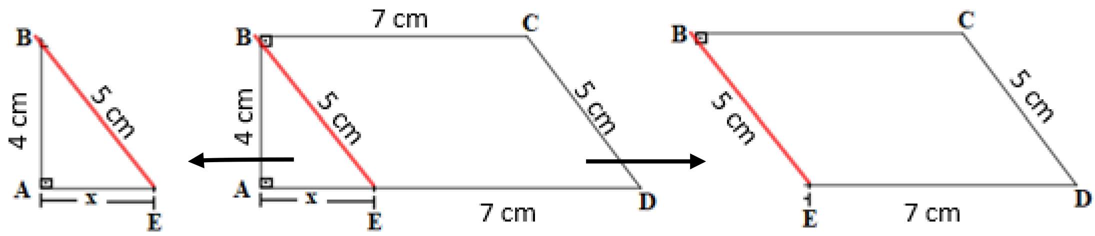


O traço $\overline{BE}$ fez surgir o paralelogramo BCDE e o triângulo retângulo ABE, não percebidos antes do traço que caracteriza a exploração do Olhar Inventor. A inclusão do traço possibilitou a desconstrução do trapézio, sem modificar seu contorno, surgindo os dois polígonos acima citados. Com o triângulo ΔABE, surgiu a possibilidade de considerar as medidas de seus lados como um terno pitagórico 3, 4 e 5. Podendo ser validado com aplicação do Teorema de Pitágoras, fazendo:



$$x^2 = 5^2 - 4^2$$
$$x = \sqrt{(25 - 16)}$$
$$x = 3$$

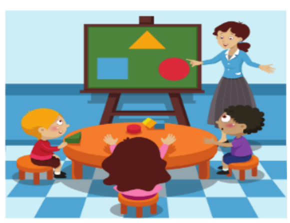
Para visualizar o triângulo retângulo de dimensão 2D, partindo do trapézio em 2D, foi necessário mudarmos o olhar para 0D, localizando os pontos B e E, avançar para 1D para traçarmos o segmento de reta $\overline{BE}$, surgindo, desse modo, o triângulo retângulo ΔABE na dimensão 2D. A utilização do Olhar Inventor possibilitou iniciarmos a resolução, visualizando os pontos A e E em 0D e determinar a medida do segmento $\overline{BE}$ em 1D. Para calcular o perímetro (1D) do trapézio (2D), partimos da identificação dos vértices A, B, C, D (0D), note que assim estamos transitando entre diferentes dimensões, a saber, cognitivamente, estamos operando a desconstrução dimensional figural: 2D →1D → 0D →1D → 2D →1D.



Duval (2011) enfatiza que a exploração do Olhar Inventor requer treinamento, indo ao encontro do reconhecimento perceptual das formas. Ao olhar uma figura em um primeiro momento, muitas vezes, se sobressai um olhar não aprimorado, as dimensões não são levadas em conta mesmo sendo elas importantes e necessárias para reconhecer outras unidades figurais que não são de fácil visualização.

Assim, com base no que expomos anteriormente, apresentamos uma sequência didática com atividades geométricas que devem ou têm potencial de explorar o Olhar Inventor em suas resoluções. A sequência didática está organizada em dois cadernos, sendo caderno 1, na versão do professor, que apresenta as atividades resolvidas e comentadas a partir da exploração do Olhar Inventor, com abordagem dos elementos transversais para a aprendizagem de geometria. O caderno 2 é a versão para os alunos, com as atividades que poderão ser resolvidas no próprio material.

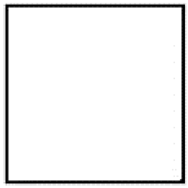
A seguir, apresentamos uma introdução de como pode ser explorado o Olhar Inventor de forma simples na modificação de figuras planas conhecidas, com o objetivo de familiarizar ainda mais o leitor com o significado dessa ação/expressão.



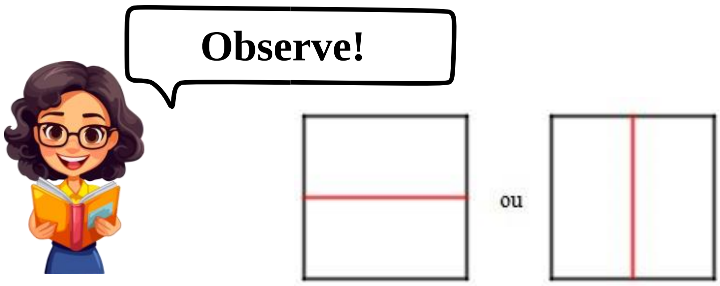
Dividindo Figuras

Quando atribuímos traços em uma figura, temos a possibilidade de visualizar outras figuras.

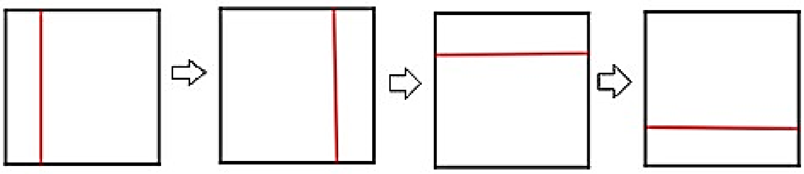
Na figura abaixo temos um quadrado.



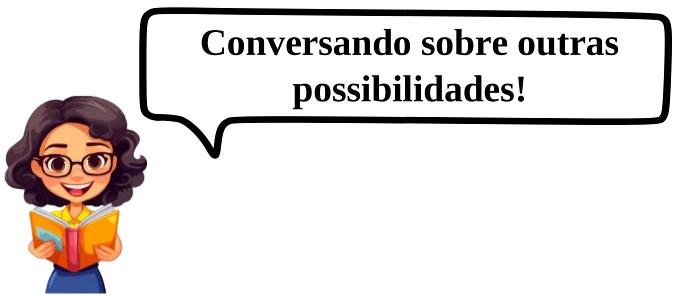
Ao desenhar um simples traço, por exemplo, o que representa o segmento de reta que une os pontos médios dos lados opostos do quadrado, nos permite a oportunidade de visualizar outras figuras, com outras propriedades, aqui em especial dois retângulos congruentes.



Se o traço desenhado for paralelo a dois lados do quadrado, não unindo os pontos médios dos lados opostos, temos a possibilidade de visualizar dois retângulos não congruentes.



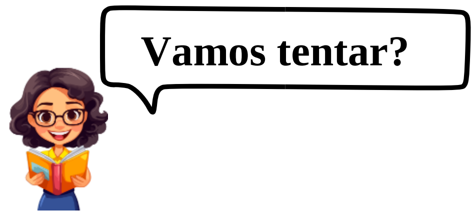
Note que ao desenhar um traço no quadrado percebemos que é possível visualizar retângulos congruentes e retângulos não congruentes, na posição horizontal e na posição vertical.



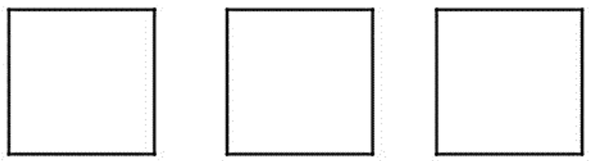
Percebemos que, ao explorar o Olhar Inventor, atribuindo um traço no quadrado, surgiram outras figuras e com elas novas propriedades, que podem nos ajudar a resolver certos

problemas. Há outras formas de traçar um segmento de reta em um quadrado e surgir outras figuras.

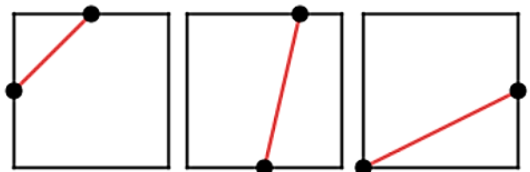
Na primeira possibilidade temos Q1 que, ao explorar o Olhar Inventor, traçamos o segmento de reta ligando os pontos médio dos lados subsequentes do quadrado, tornando possível visualizar um triângulo isósceles e um pentágono irregular e suas propriedades.



Utilize as figuras abaixo para fazer a representação do traço.



Como resolução temos algumas possibilidades, tais como:

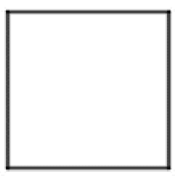


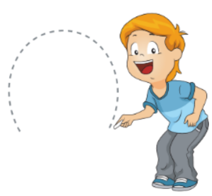
Na primeira possibilidade, temos Q1, que, ao explorar o Olhar Inventor, traçamos o segmento de reta ligando os pontos médios dos lados subsequentes do quadrado, tornando possível visualizar um triângulo isósceles e um pentágono irregular, tais como suas propriedades.

Para Q2, ao explorar o Olhar Inventor, traçamos o ponto médio com um quarto do lado oposto do quadrado, permitindo visualizar dois trapézios retângulos e suas propriedades.

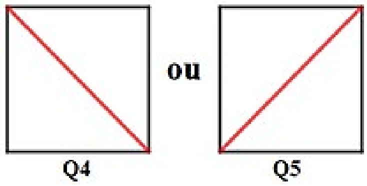
Em Q3, ao explorar o Olhar Inventor, traçamos o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto, fazendo surgir duas figuras e suas propriedades, sendo um triângulo retângulo escaleno e um trapézio retângulo.

Agora, explore o Olhar Inventor no quadrado abaixo de maneira a visualizar dois triângulos congruentes. Caso seja necessário desenhe outros quadrados para outras possíveis representações.



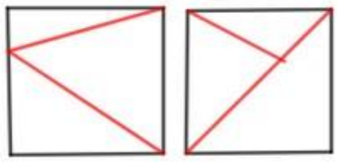


Na resolução dessa atividade se faz necessário traçar uma das diagonais do quadrado, que representa a exploração do Olhar Inventor, ao traçar uma das diagonais do quadrado surgem dois triângulos retângulos congruentes, ou seja, novas figuras e novas propriedades, conforme mostrado em Q4 ou Q5.



Atribua dois traços no quadrado a seguir, oportunizando surgir triângulos não congruentes e suas propriedades.

Possibilidades:

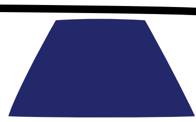


Professor, espera-se que os alunos consigam apresentar estratégias diferentes, sendo algumas adequadas à intencionalidade e, possivelmente, algumas que não contemplem, formando figuras não triangulares.

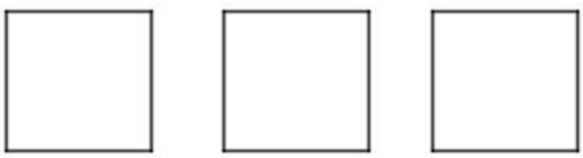
É possível atribuir um único traço no quadrado fazendo surgir triângulos não congruentes?

Caro professor, espera-se que o aluno faça algumas tentativas de traços na busca de contemplar a atividade proposta, porém, terá insucesso pela impossibilidade de apenas um traço fazer surgir as figuras e as propriedades solicitadas na atividade.

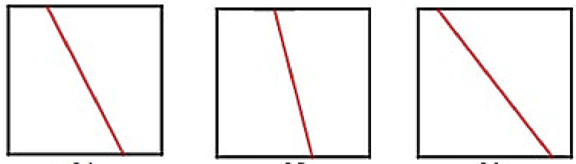
E os trapézios?



Explore o Olhar Inventor afim de visualizar trapézios congruentes ao desenhar um traço nos quadrados.

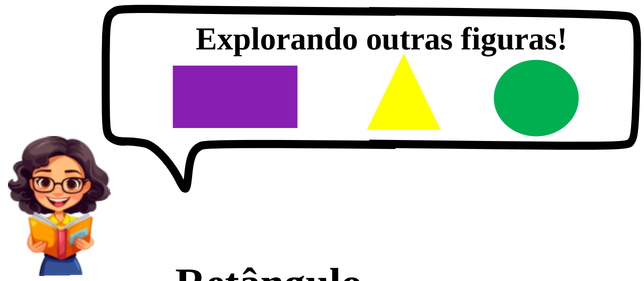


Na resolução da atividade podemos explorar o Olhar Inventor adicionando um traço entre dois pontos de lados opostos entre os vértices de um quadrado, com exceção aos pontos médios. Observe os quadrados Q6, Q7 e Q8.



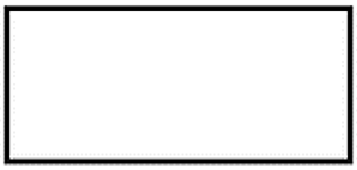
Q6 Q7 Q8

Com a adição do traço foi possível fazer surgir dois trapézios congruentes de forma que as somas das medidas dos dois menores lados do trapézio sejam iguais à medida de comprimento do lado do quadrado.

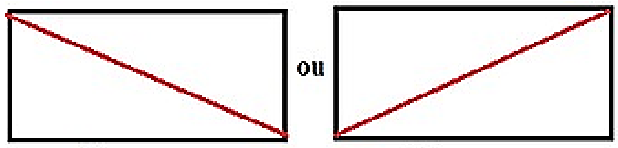


Retângulo

1 – Ao traçar a diagonal de um retângulo, o que podemos observar?

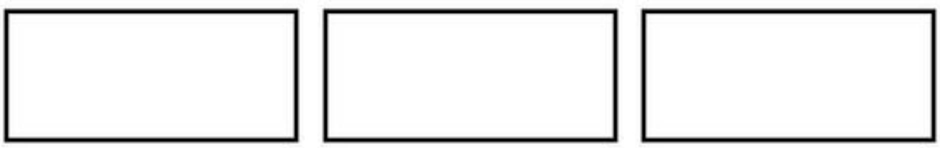


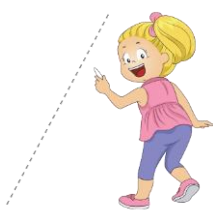
Estimado professor, observe que, ao explorar o Olhar Inventor, traçando a diagonal do retângulo, como mostrado em R1 ou R2, surgiram dois triângulos retângulos escalenos congruentes e suas propriedades.



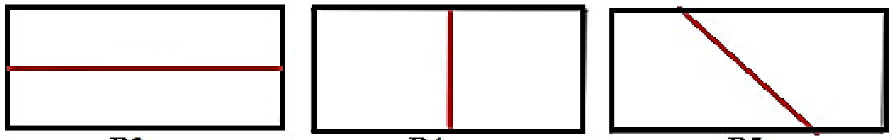
R1 R2

2 – Dada as figuras de um retângulo, desenhe um traço para obter duas figuras congruentes. Escreva o que foi possível ser visualizado a partir desse traço.





Nessa resolução, ao explorar o Olhar Inventor, atribuímos um traço como mostra os retângulos R3, R4 e R5.



R3 R4 R5

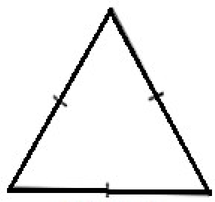
No retângulo R3, o traço horizontal ligando os pontos médios da largura do retângulo oportunizaram visualizar dois novos retângulos congruentes e suas propriedades. Em R4 o traço vertical ligando os pontos médio do comprimento do retângulo permitiram surgir dois retângulos congruentes e suas propriedades.

Para o retângulo R5, o traço ligando dois pontos pertencentes ao comprimento do retângulo oportunizou surgir dois trapézios retângulos congruentes e suas propriedades.

Triângulos

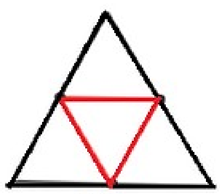
Ao explorar o Olhar Inventor na figura de um triângulo, podemos fazer surgir figuras congruentes e não congruentes.

Em um triângulo equilátero ligue os pontos médios de seus lados de modo a surgir outras figuras congruentes. Surgiram dois triângulos retângulos escalenos congruentes e suas propriedades.



Equilátero

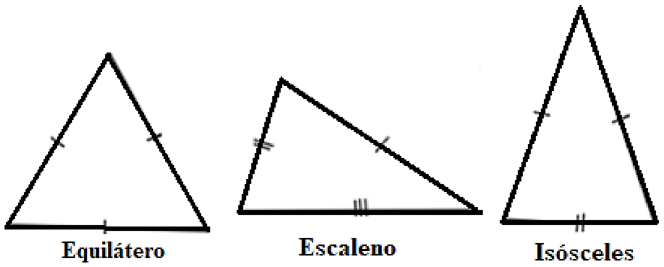
Ao ligar os pontos médios dos lados do triângulo estamos explorando o Olhar Inventor, como apresentado no triângulo T1.



T1

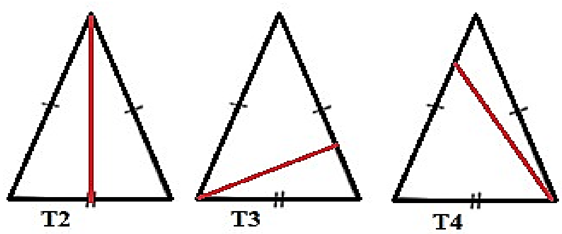
O traço evidenciou o surgimento de quatro triângulos equiláteros congruentes e suas propriedades.

Explore o Olhar Inventor nos triângulos a seguir, atribuindo um traço de modo a surgir dois outros triângulos quaisquer.

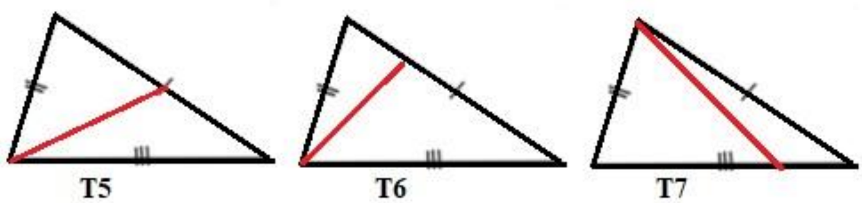


Como resolução podemos explorar o Olhar Inventor ao traçar um segmento de reta unindo um dos vértices do triângulo a um ponto qualquer do lado oposto, como mostrado nas figuras abaixo.

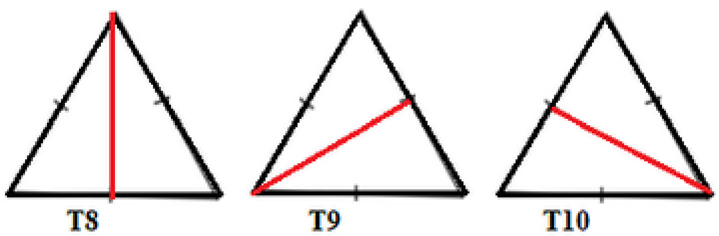
Triângulo isósceles:



Triângulo escaleno:

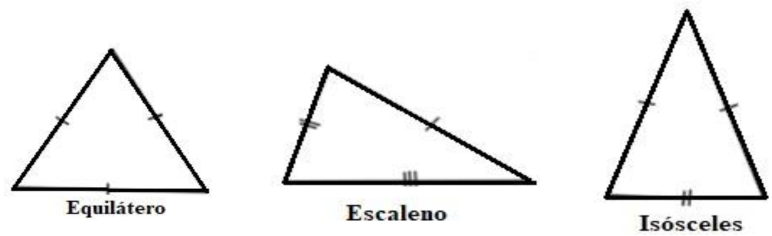


Triângulo equilátero:



Ao explorar o Olhar Inventor no triângulo equilátero, traçando um segmento de reta entre qualquer vértice ao ponto médio do lado oposto, faz surgir dois triângulos retângulos congruentes e suas propriedades. No triângulo isósceles, o mesmo ocorre somente quando ligamos o vértice adjacente ao ângulo diferente ao ponto médio do lado oposto, como mostrado na figura T2. Para o triângulo escaleno não há possibilidades de explorar o Olhar Inventor de modo a surgir dois triângulos congruentes.

Agora atribua um traço nos triângulos abaixo de modo que surjam outras figuras quaisquer.

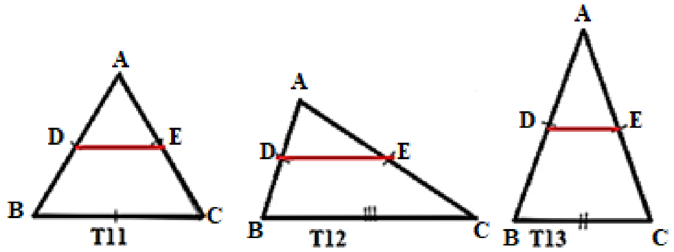


Com a resolução desta atividade, temos várias alternativas. Em uma delas podemos explorar o Olhar Inventor ao traçar um segmento de reta no triângulo, unindo os pontos médios de dois de seus lados, como mostrado abaixo.

<u>Teorema da base média do triângulo</u>

A medida da base média de um triângulo é igual à metade da medida do lado paralelo, ou seja:

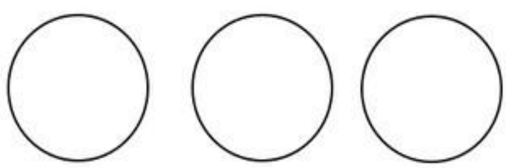
DE = BC/2



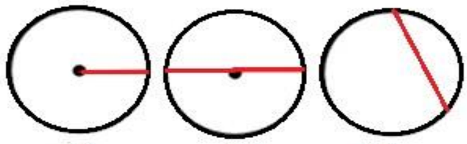
Observamos que, ao traçar o segmento que uniu os pontos médios de dois lados em ambos os triângulos, fez surgir duas figuras diferentes. Esse traço faz surgir várias propriedades, reunidas no chamado teorema da base média de um triângulo. As figuras formadas serão um triângulo e um trapézio com suas propriedades, no triângulo isósceles surgiu um triângulo isósceles e um trapézio isósceles, no triângulo escaleno surgiu um triângulo escaleno e um trapézio escaleno e no triângulo equilátero, um triângulo equilátero e um trapézio isósceles.

Círculo

Ao explorar o Olhar Inventor no círculo, temos a chance de representar os elementos do círculo (diâmetro, raio e corda). Em cada figura abaixo explore o Olhar Inventor de modo que seja visível um desses elementos.



Com a resolução dessa atividade, podemos explorar o Olhar Inventor ao traçar um segmento de reta de modo a modificar a figura e surgir novas propriedades. Na figura C1 temos o traço que representa o raio do círculo, nesse caso em especial, não houve mudança figural, apenas destaque ao raio. Para C2 e C3, ao traçarmos um segmento de reta que une dois pontos distintos da circunferência, que delimita o círculo, fez surgir dois semicírculos, sendo em C2 dois semicírculos congruentes, como mostrado abaixo.

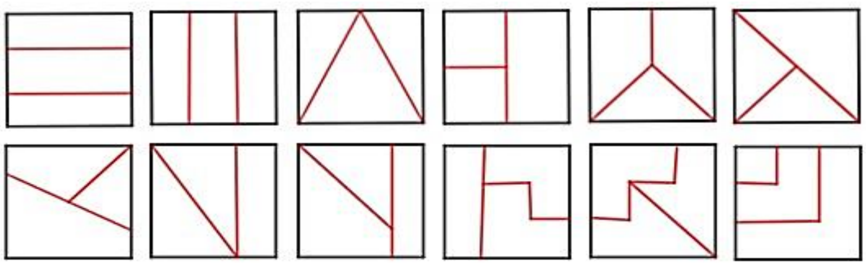


C1 C2 C3

Vamos dividir uma figura em três partes.

Explorando o Olhar Inventor, inserindo traços em um quadrado pode-se surgir três figuras não vistas ou percebidas antes.

A divisão da figura em três partes pode ocorrer quando desenhamos dois ou mais traços na figura dada. Apresentamos a seguir algumas possibilidades.



Nesse exemplo, a exploração do Olhar Inventor ocorre duas ou mais vezes ao dividir a figura em subfiguras. A cada traço atribuído à figura, surge uma nova figura e suas propriedades, oportunizando uma nova exploração do Olhar Inventor.

Observe as figuras apresentadas anteriormente e responda:

a) Quando desenhamos dois traços no quadrado, o que podemos observar?

____

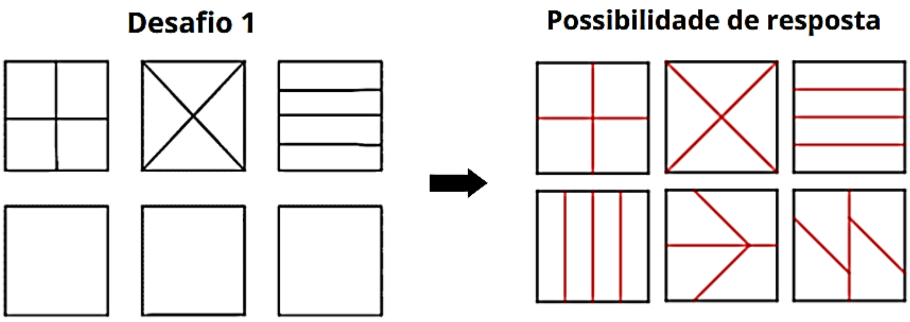
b) Podemos observar que ao traçar dois traços no quadrado exploramos por duas vezes o Olhar Inventor, surgindo três figuras congruentes, ou não, e suas propriedades. Quais figuras geométricas são visualizadas ao desenhar dois traços no quadrado?

____

c) Podem ser visualizados retângulo, triângulo, quadrado e trapézio. E quando desenhamos três ou mais traços no quadrado, dividindo-o em três partes, o que podemos observar?

____

Vamos ao desafio?
Divida um dos quadrados em quatro partes iguais de uma forma diferente das mostradas na figura.



Na tentativa de resolver esse desafio, faz-se necessário a exploração do Olhar Inventor em mais de uma vez. Para o primeiro quadrado traçamos segmentos de reta que une dois pontos do lado oposto, fazendo surgir quatro retângulos congruentes na posição vertical. No segundo e terceiro quadrado, a exploração do Olhar Inventor possibilitou surgir quatro trapézios congruentes e suas propriedades.

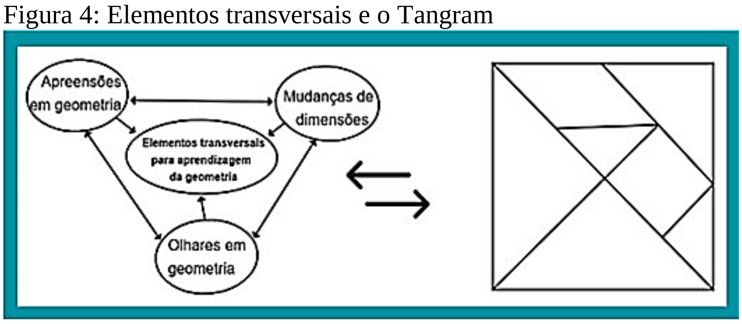
Chegamos ao final da Seção I.
Esperamos que tenha gostado!

SEÇÃO II

Tangram: Recurso para Aprendizagem de Geometria com base em princípios da TRRS

Nesta seção, faremos uma abordagem com destaque aos elementos transversais para Aprendizagem da Geometria sintetizada por Hillesheim e Moretti (2020), que exploram elementos da teoria de Raymond Duval, a saber: os olhares, as apreensões e as mudança de dimensões. Buscamos mostrar que, mesmo esse material concreto muito conhecido e utilizado nas escolas envolvendo geometria, o Tangram percorre esses elementos tidos na teoria como essenciais para a aprendizagem da geometria.

Figura 4: Elementos transversais e o Tangram



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

A transversalidade desses elementos é entendida, por Hillesheim e Moretti (2020), como a necessidade de se percorrer por esses elementos no processo de aprendizagem, buscando assim organizar o trabalho didático-pedagógico da aprendizagem da geometria; tomando como direcionamento dessa atividade as representações semióticas e os processos cognitivos presentes em todas as mudanças dimensionais.

Ver geometricamente uma figura exige bastante treinamento, pode facilitar a compreensão do problema, considerando que uma mesma figura pode ser usada em atividades diferentes, devendo mobilizar outras possibilidades de ver as figuras, não somente a percepção imediata e automática. A exploração do Olhar Inventor pode privilegiar a visualização de outras

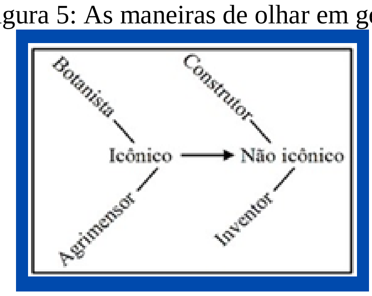
formas de exploração, não vistas antes, dando um novo sentido para a figura ao trazer às claras propriedades e figuras não implícitas no enunciado e na própria representação figural.

Segundo Moretti (2013), propriedades heurísticas podem ser exploradas a partir da visualização das figuras dadas e as que surgem em sua construção ou reconstrução. Considerando uma figura do ponto de vista matemático, o Tangram, como recurso didático, pode trazer possibilidades para emergirem diferentes olhares e apreensões, podendo atribuir significados para algumas propriedades e conceitos matemáticos.

Duval (2004) defende que as atividades geométricas, envolvendo figuras, devem considerar a visualização com prioridade, para assim articular as apreensões e também os olhares. A mobilização de diferentes olhares e apreensões pode ser propiciada ao explorar o Tangram, indo ao encontro da proposta de Duval para o ensino de geometria.

O Olhar Inventor, quando explorado, possibilita articular os demais olhares, mobilizando as apreensões e dimensões, que podem ser propiciadas na construção do Tangram, que de início recorre aos olhares não icônicos (botanista e agrimensor) para reconhecer a figura geradora de suas peças e suas propriedades; passando para os olhares icônicos (construtor e Inventor), sendo estes mais elaborados. O olhar construtor, que utiliza a régua para medir e traçar os lados do quadrado, e o Olhar Inventor, com traços necessários para o surgimento das subfiguras que compõem o quebra-cabeças.

Figura 5: As maneiras de olhar em geometria



Fonte: Hillesheim e Moretti (2020, p.10).

Tentaremos aqui ilustrar a abordagem dos olhares, das apreensões e da desconstrução de dimensões a partir do Tangram, um quebra-cabeça chinês que traz em sua história algumas lendas. Uma delas reza que

> Um sábio chinês deveria levar ao Imperador uma placa de jade, mas no meio do caminho, o sábio tropeçou e deixou cair a placa que se partiu em sete pedaços geometricamente perfeitos. Eis que o sábio tentou remendar e, a cada tentativa surgia

uma nova figura. Depois de muito tentar, ele, finalmente, conseguiu formar novamente o quadrado e levou ao seu Imperador. Os sete pedaços representariam as sete virtudes chinesas, onde uma delas, com certeza, seria a paciência. O sábio mostrou aos seus amigos as figuras que havia conseguido montar e cada um construiu o seu Tangram (www.mestredosaber.com.br. Acesso em: 20 set. 2023).

De olho no vídeo!
Para saber mais histórias do Tangram,
Scaneie o QrCode.

O Tangram é formado por um quadrado, cinco triângulos retângulos isósceles e

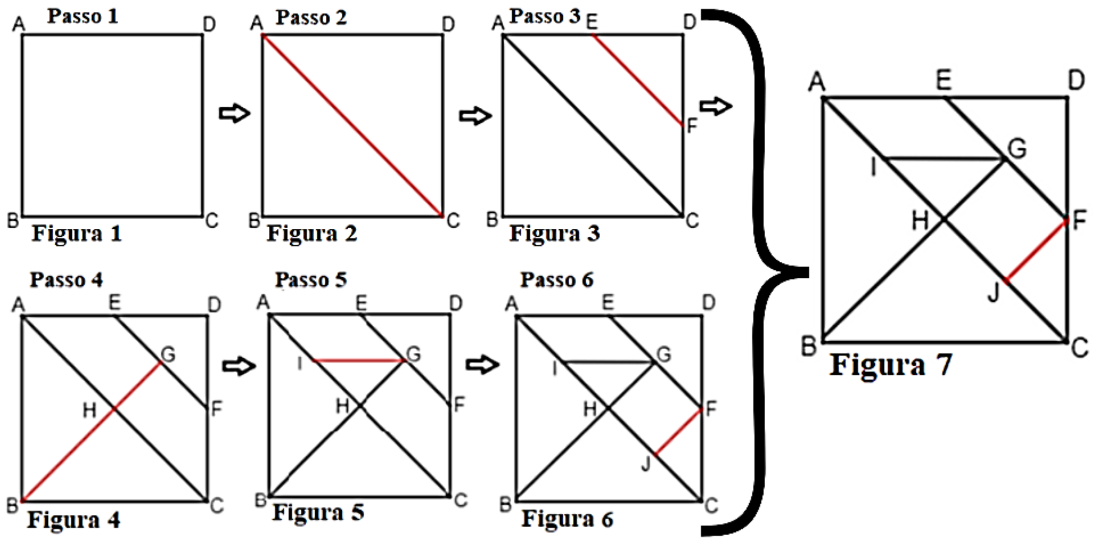
Com papel, lápis e régua vamos construir um Tangram, seguindo o passo a passo:

- 1° passo: Construir um quadrado ABCD de lado medindo 10 cm;
- 2º passo: Trace $\overline{AC}$, diagonal do quadrado ABCD;
- 3º passo: Represente os pontos E e F como sendo pontos médios $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, desenhe um segmento $\overline{EF}$, unindo os pontos E e F;

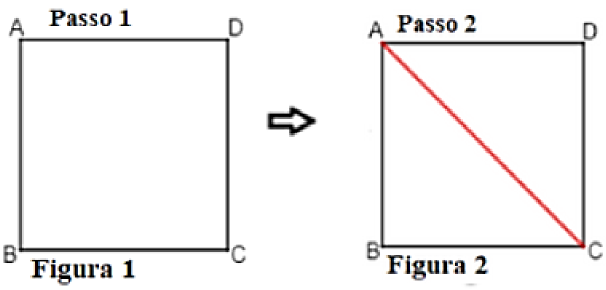
um paralelogramo, que surgem de um quadrado. Para exemplificar, construiremos um seguindo o passo a passo:

- 4º passo: Marque os pontos G e H como ponto médio $\overline{EF}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, trace $\overline{BG}$ passando por H e unindo ponto B ao ponto G;
- 5° passo: Marque o ponto I como ponto médio $\overline{AH}$ e trace segmento $\overline{GI}$, unindo os pontos G e I;
- 6° passo: Marque o ponto J como ponto médio $\overline{CH}$ e trace o segmento $\overline{FJ}$, unindo os pontos F e J.

Executando os passos temos as figuras a seguir:

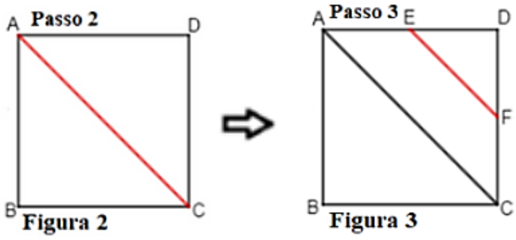


Ao construir um quadrado ABCD de lado medindo 10 cm, como na Figura 1, exploramos o olhar construtor que recorre ao uso de instrumento de medidas para a construção da figura; o que possibilitou articular os olhares botanista e agrimensor, botanista ao identificar a figura como um quadrilátero ABCD, e agrimensor ao comparar as medidas $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.

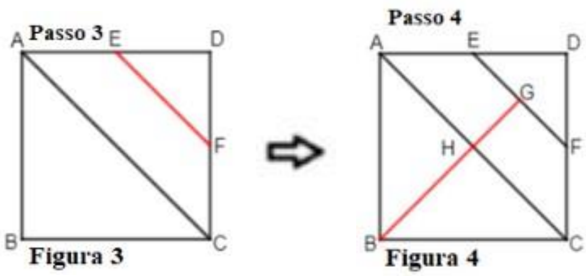


No Passo 2, o traço $\overline{AC}$ representa a exploração do Olhar Inventor, que fez surgir propriedades na figura que inicialmente não estavam notáveis, tínhamos um quadrado e passamos a ter dois triângulos retângulos isósceles ΔABC e ΔACD. Os triângulos e suas propriedades surgem a partir da exploração do Olhar Inventor, articulando os olhares botanista, agrimensor e construtor.

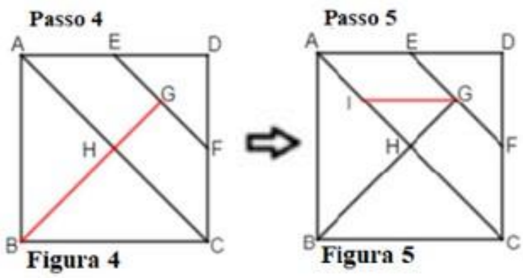
O Olhar Inventor também pode ser evidenciado na Figura 3 ao traçar o $\overline{EF}$ no ΔACD, fazendo surgir um triângulo retângulo isósceles ΔEDF e um trapézio isósceles AEFC, que antes do traço $\overline{EF}$ não era possível ser visualizado.



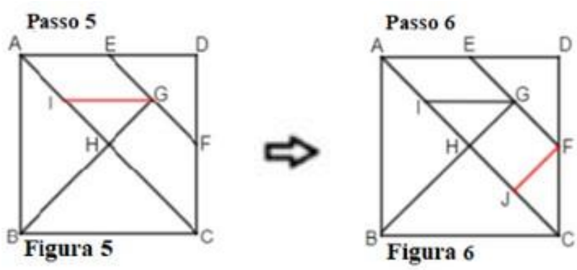
Temos, ainda, sua representação no traço $\overline{BG}$, que faz surgir a Figura 4.



Sendo possível visualizar três triângulos retângulos isósceles ΔABH, ΔBCH e ΔEFD, e dois trapézios retângulos AHGE e CFGH.



Na Figura 5, o Olhar Inventor é explorado ao traçar $\overline{GI}$, modificando o trapézio retângulo AHGE em um triângulo retângulo isósceles ΔGHI e um paralelogramo AEGI. No Passo 6, temos a exploração do Olhar Inventor ao traçar $\overline{FJ}$, que modifica o trapézio retângulo CFGH, fazendo surgir um triângulo retângulo isósceles ΔCFJ e um quadrado FGHJ.



Em cada passo, ao ser construído, ocorreu a exploração do Olhar Inventor, havendo articulação entre os olhares botanista, agrimensor e construtor, para reconhecer as figuras formadas que surgiram após a exploração do Olhar Inventor.

Ressaltamos a importância do Olhar Inventor ao executar o passo a passo da construção do Tangram (apreensão sequencial em ação), pois como tentamos evidenciar ao leitor, na atividade foi possível "adicionar traços na figura dada, operar sobre a figura e a modificá-la para descobrir procedimentos de resolução" (Moretti, 2013, p. 294).

Quanto às apreensões, temos que foram exploradas as quatro diferentes apreensões (perceptiva, discursiva, operatória e sequencial). Segundo Moretti (2013), as apreensões são independentes umas das outras, mas na resolução de um problema é exigida a passagem de um tipo a outro, o que pode ser evidenciado ao seguir o passo a passo na construção do Tangram.

A apreensão perceptiva, que pode ser caracterizada pelo reconhecimento visual e imediato da figura, é explorada quando ocorre o reconhecimento da figura como um quadrado, bem como, a cada passo executado, possibilita reconhecer as figuras que surgem com a exploração do Olhar Inventor. A apreensão discursiva, que pode ser caracterizada pela relação entre o enunciado e a figura, que na construção do passo a passo do Tangram pode ser exemplificada no Passo 2 ao solicitar o traço do segmento $\overline{AC}$, estabelece uma relação entre o enunciado e a figura dada. A apreensão operatória foi explorada na construção da figura, que pode ser caracterizada pela possibilidade de operar sobre a figura, reconfigurando a de um quadrado ABCD em dois triângulos ΔABC e ΔACD e demais figuras, esta apreensão é mobilizada quando é explorado o Olhar Inventor que atribui traço na figura dada para que possa surgir outras figuras e propriedades não vistas em um primeiro momento. A apreensão sequencial foi mobilizada na construção do Tangram quando apresentado o passo a passo de sua construção, considerando que essa apreensão pode ser caracterizada pela necessidade de seguir indicações, ordens ou passos para construir ou descrever uma figura.

Ao explorar o Olhar Inventor, na construção do Tangram, houve a articulação entre as apreensões, surgindo a necessidade da desconstrução figural. No Passo 1, percorremos as dimensões 0D →1D → 2D, observamos que ao traçarmos os pontos A, B, C e D estamos em 0D. Para os lados da figura $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ estão na dimensão 1D, ao construir o polígono, denominado de quadrado ABCD, temos uma figura na dimensão 2D.

A partir da construção do Passo 2 até o Passo 6, percorremos uma desconstrução figural, passando pelas dimensões 2D →1D → 0D →1D → 2D. No Passo 2, partimos de um polígono denominado quadrado ABCD em 2D para traçar $\overline{AC}$ em 1D, ressaltamos que A e C estão em 0D, ao traçarmos $\overline{AC}$ em 1D temos um lado em comum (hipotenusa) dos triângulos ΔABC e

ΔACD formados. No Passo 3, partimos de um polígono denominado ΔACD em 2D, traçamos $\overline{EF}$ em 1D, os pontos E e F em 0D. Ao traçarmos $\overline{EF}$ em 1D temos um lado em comum: a base do triângulo ΔEDF e a base menor do trapézio AEFC.

No Passo 4, partimos de um triângulo retângulo isósceles ΔABC e um trapézio isósceles ACEF em 2D, ao traçarmos $\overline{BG}$ em 1D, passando pelo ponto H em 0D, fez surgir quatro polígonos em 2D, sendo dois triângulos retângulos isósceles ΔABH e ΔBCH, dois trapézios retângulos AHGE e CFGH, representados na Figura 4. No Passo 5, partimos do trapézio retângulo AHGE em 2D, e traçamos $\overline{GI}$ em 1D, temos os pontos G e I em 0D, obtivemos um triângulo retângulo ΔHGI e um paralelogramo AEGI, ambos em 2D. No Passo 6, partimos do trapézio retângulo CFGH em 2D, traçamos $\overline{FJ}$ em 1D, os pontos E e J ambos em 0D, surgiu um quadrado FGHJ e um triângulo ΔCFJ, ambos em 2D.

A construção do Tangram possibilitou, como argumentamos, percorrer os Elementos Transversais, evidenciando suas articulações e assim se apresentando como um elemento favorecedor da aprendizagem da geometria, explorando de maneira significativa o Olhar Inventor, que direcionou os olhares para ver as setes peças do Tangram como uma única figura: o quadrado.

Nesse contexto, apresentamos uma sequência de atividades que abordem o Tangram e têm a possibilidade de explorar o Olhar Inventor.

Atividades com o Tangram

1 – Usando régua, lápis e papel, construa o Tangram seguindo o passo a passo.

1º passo: Construir um quadrado ABCD de lado medindo 10 cm;

2º passo: Trace o segmento $\overline{AC}$, diagonal do quadrado ABCD;

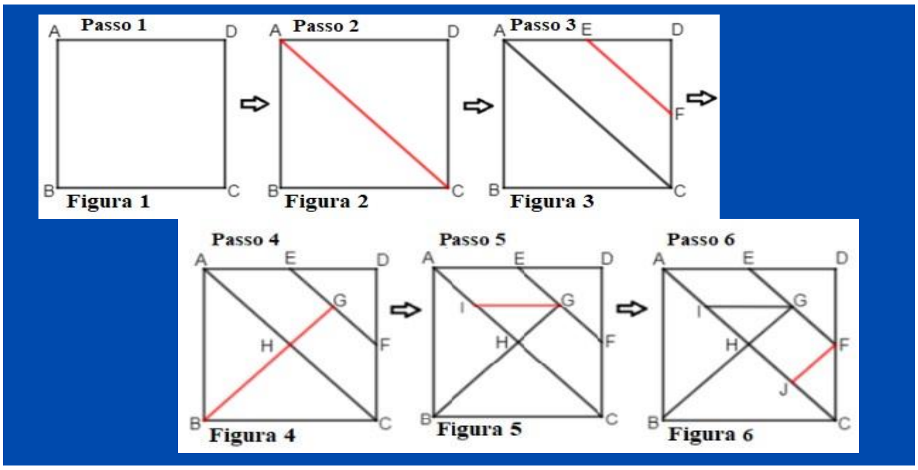
3º passo: Represente os pontos E e F como pontos médios dos lados ou dos segmentos, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente, desenhe um segmento $\overline{EF}$ unindo os pontos E e F;

4º passo: Marque os pontos G e H como pontos médios dos lados $\overline{EF}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, trace $\overline{BG}$ passando por H e unindo ponto B ao ponto G;

5º passo: Marque o ponto I como ponto médio do segmento $\overline{AH}$ e trace o segmento $\overline{GI}$ unindo os pontos G e I;

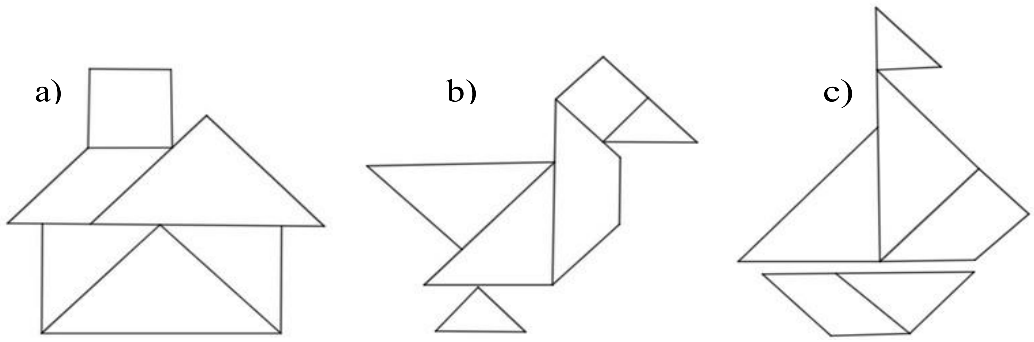
6º passo: Marque o ponto J como ponto médio do segmento $\overline{CH}$, e trace o segmento $\overline{FJ}$ unindo os pontos F e J.

Na resolução dessa atividade, será explorado o Olhar Inventor do segundo ao sexto passo. O aluno terá que identificar os pontos que unirá ao inserir o traço, propiciando, com ele, o surgimento de novas figuras e suas propriedades, como mostra a figura abaixo:

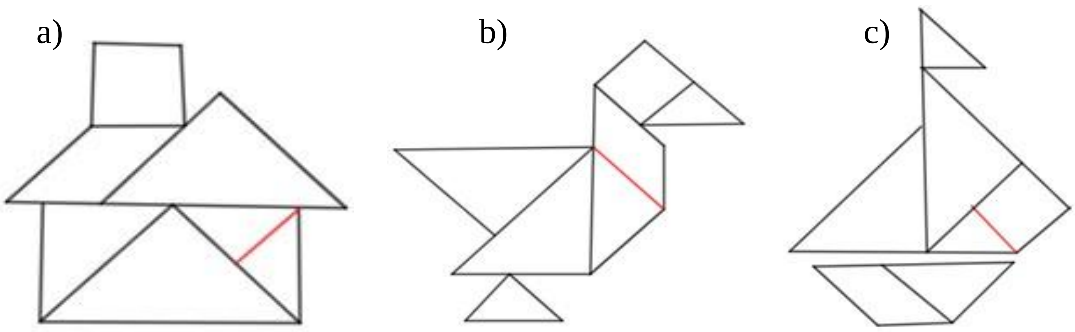


Para contemplar a desconstrução do quadrado 2D, é necessário acionar a exploração do Olhar Inventor articulando os demais olhares para efetivar todos os passos orientados no enunciado, articulando as apreensões (perceptiva, discursiva, operatória e sequencial) e a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, permitindo êxito nas tentativas de fazer surgir as peças do Tangram.

2 – As figuras a seguir serão construídas recorrendo às 7 (sete) peças do Tangram, desenhe as peças que faltam serem representadas em cada figura (O uso do material concreto pode ajudar).



A resolução dessa atividade requer a exploração do Olhar Inventor ao traçar o segmento de reta que falta em cada figura para tornar visível as sete peças do Tangram. Observe as figuras abaixo:



Na figura da casa, o traço que representa a exploração do Olhar Inventor deverá ser feito em um dos triângulos isósceles menores, tornando realizável visualizar dois triângulos retângulos congruentes e tendo um lado em comum que se refere ao traço atribuído na figura, para completar a figura da casa.

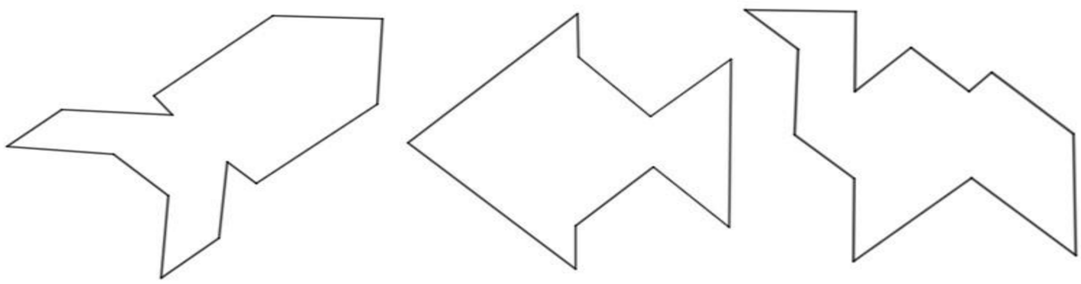
Na figura da casa, o traço que representa a exploração do Olhar Inventor deverá ser feito em um dos triângulos isósceles menores, permitindo visualizar dois triângulos retângulos congruentes e tendo um lado em comum que se refere ao traço atribuído na figura, para completar a figura da casa.

Para a figura do barco, o traço que identifica a exploração do Olhar Inventor deverá ser atribuído no trapézio retângulo, de modo a surgir duas figuras com uma das medidas dos lados em comum, sendo o quadrado e um triângulo retângulo.

Já para a figura do pato, o traço que evidência a exploração do Olhar Inventor deverá ser adicionado no trapézio isósceles para que torne viável a visualização de um paralelogramo e um triângulo isósceles com a medida de um de seus lados em comum. Nessa atividade, se faz necessário a exploração do Olhar Inventor para destacar as peças que faltam na figura proposta da atividade. O Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória para modificar as figuras, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D.

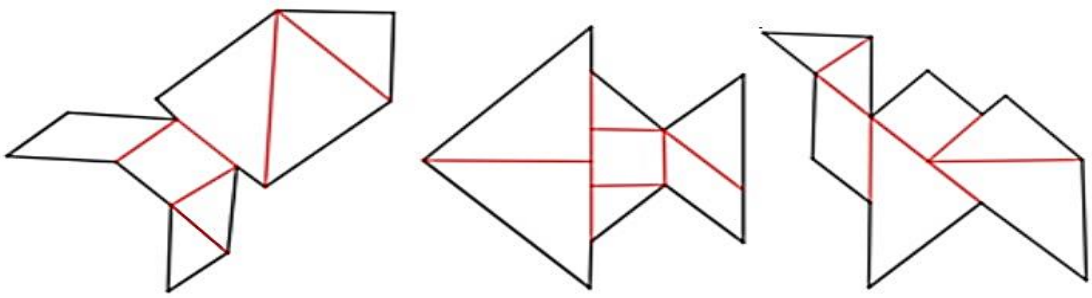
3 – De que maneira podemos destacar as 7 (sete) peças do Tangram nas figuras abaixo?

a) b) c)



Com essa atividade temos que, necessariamente, recorrer à exploração do Olhar Inventor, que articula os demais olhares ao atribuir os traços nas figuras, de modo a modificá-las pelo tratamento figural de reconstrução, mobilizando e articulando as apreensões perceptiva, discursiva e operatória; além disso, transitando entre a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, de modo a visualizar as setes peças do Tangram organizadas na construção das figuras dadas, como representado nas figuras abaixo:

a) b) c)



4 – Observe as figuras construídas a partir do Tangram e responda:

a) Qual a área de cada figura?

b) Escolha uma entre as três figuras e descreva de que maneira você determinou a área.

Para a resolução dessa atividade destacamos que:

Na atividade 1, os alunos foram desafiados a desmembrar um quadrado de lado 10 cm em sete peças distintas do Tangram, cada uma delas com uma forma única. Agora, espera-se que os estudantes percebam a fascinante relação geométrica entre as sete peças formadoras e o quadrado original. Ao reconstruir as figuras do cisne, da borboleta e do cavalo, utilizando as peças do Tangram, os alunos devem compreender que, quando combinadas, essas peças formam exatamente o quadrado de 100 cm². Essa percepção não apenas destaca a versatilidade das peças do Tangram, mas também reforça conceitos fundamentais de geometria, proporcionando aos alunos uma compreensão prática da equivalência de áreas e incentivando a aplicação criativa de suas habilidades matemáticas.

A abordagem do Olhar Inventor revela-se crucial ao desbravar a desconstrução das figuras dadas, de 2D →1D → 0D →1D → 2D, articulando as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, possibilitando verificar que, com as peças do Tangram que formam as figuras (cisne, borboleta e cavalo), é possível reconstruir o quadrado inicial que originou o Tangram, concluindo que todas as figuras possuem a mesma área. O Olhar Inventor, nesse contexto, proporciona uma perspectiva única que transcende as dimensões tradicionais, enriquecendo a compreensão dos alunos sobre a geometria e a relação intrínseca entre as formas apresentadas.

Chegamos ao final da Seção II.
Brincadeiras e jogos fizeram parte da aula de matemática, se você gostou, Scaneie o QrCode para mais desafios.

Explorando o Olhar Inventor a partir de atividades presentes no "Material Estruturado"

Ponderando a presença do Material Didático junto às escolas em Mato Grosso, por meio de suas variadas interpretações e usos que se tem dado, influenciando na organização do currículo e na realização da prática docente, realizamos uma pesquisa vinculada à dissertação de Mestrado, desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM), da Universidade Federal de Mato Grosso, Campus de Sinop, intitulada: “Olhar Inventor em atividades Geométricas: uma análise de Material Didático do 7º ano do Ensino Fundamental”. Que consiste, em parte, na investigação das especificidades do Olhar Inventor contemplado no Material Estruturado de Matemática (Zattoni; Carvalho, 2021; Brasil, 2019) do 7º ano do Ensino Fundamental, adotado na rede estadual de ensino para o ano letivo de 2023, voltada para processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria, com embasamento em princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (2005, 2011, 2012, 2022).

De Olho no material online!

Para conhecer o Material Estruturado

Scaneie o QrCode[1]

Ao fazermos uma leitura prévia dos quatro cadernos que compõem o Material Estruturado de Matemática para o 7º ano, nos deparamos com um número expressivo de atividades para serem analisadas uma a uma, o que certamente exigiria uma longa demanda de tempo. Por essa razão, delimitamos o caderno de número três, referente ao terceiro bimestre, como objeto de análise de nossa pesquisa.

A análise do Material Estruturado foi realizada com a intencionalidade de responder à pergunta de pesquisa: como o Olhar Inventor é explorado na resolução de atividades geométricas de Material Didático de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental?

[1]Acesso permitido apenas com e-mail institucional Seduc/MT.

Averiguamos as propostas de atividades de geometria contidas no material, analisado que totalizaram 115 (cento e quinze) atividades, sendo filtradas com embasamento nos Elementos Transversais para a Aprendizagem de Geometria (Hillesheim; Moretti, 2020); restaram apenas 9 (nove) atividades que contemplam ou possibilitam a exploração do Olhar Inventor em suas resoluções.

No processo de investigação, identificamos que das 9 (nove) atividades apenas 2 (duas) delas exigem a exploração do Olhar Inventor, e as outras 7 (sete) atividades apresentam a possibilidade de explorar o Olhar Inventor como uma das opções de resolução.

Dentre as atividades analisadas, 4 (quatro) atividades estão relacionadas com o objeto de conhecimento: relação entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal; 2 (duas) atividades relacionadas à soma dos ângulos internos de um polígono; 1 (uma) atividade relacionada às diagonais de um polígono; 1 (uma) atividade relacionada ao diâmetro de um círculo; e 1 (uma) atividade relacionada à simetria.

A seguir, apresentamos o copilado de atividades extraídos do material analisado, com resoluções e possíveis abordagens de resoluções que explorem o Olhar Inventor.

Sequência de Atividades

1 – Determine as medidas x e y em cada figura a seguir, sabendo que r//s.

a)

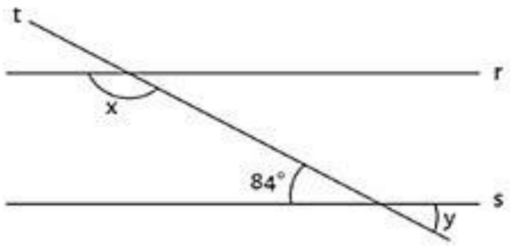


Figura 1a

b)

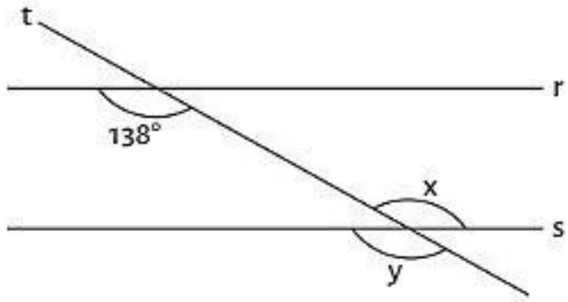


Figura 1b

Com essa atividade, ao solicitar o valor da medida de x e y, temos a alternativa de explorar o Olhar Inventor em sua resolução. Podemos, em ambas as figuras, traçar uma reta u perpendicular (⊥) às retas r e s paralelas (r//s), [u ⊥ (r//s)]. Essa modificação na figura, torna possível visualizar um quadrilátero ABCD, representado na Figura 1a; e o quadrilátero A\`B\`C\`D\`, representado na Figura 1b, como apresentado abaixo:

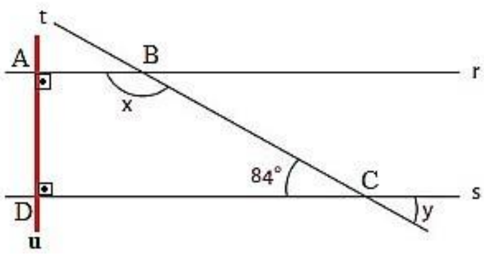


Figura 1a

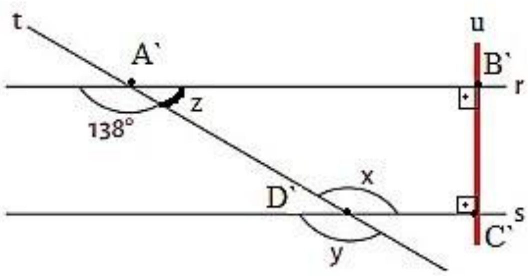


Figura 1b

Note que essa modificação traz a oportunidade de o aluno explorar novas propriedades que não estavam presentes na figura original, o que caracteriza o emprego do Olhar Inventor.

Com a visualização desses quadriláteros podemos calcular o valor das medidas solicitadas na atividade pela propriedade da soma dos ângulos internos de um quadrilátero, a qual garante que essa soma vale 360°, assim, dizemos que:

No quadrilátero ABCD, representado na Figura 1ª, temos:

$A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}A + D\hat{A}B = 360°$

$x + 84° + 90° + 90° = 360°$

$x = 360° - 264° = 96°$

como temos:

$y = D\hat{C}B = 84°$ (ângulo oposto pelo vértice)

No quadrilátero A`B`C`D`, representado na Figura 1b, temos:

$D`\hat{A}`B` = 180°$

$138° + z = 180°$

$z = 180° - 138° = 42°$

$A`\hat{B}`C` + B`\hat{C}`D` + C`\hat{D}`A` + D`\hat{A}`B` = 360°$

$90° + 90° + x + z = 360°$

$90° + 90° + x + 42° = 360°$

$x = 360° - 222° = 138°$

Como temos x = y (O.P.V.)

Logo y = 138°

Observamos que explorar o Olhar Inventor, nessa resolução, contribuiu satisfatoriamente para traçar a reta u que inicialmente não constava no enunciado, acrescentando possíveis soluções antes não visualizadas na figura inicial.

2 – Na Figura 2, a seguir, sendo r//s, calcule os valores de x, a e b.

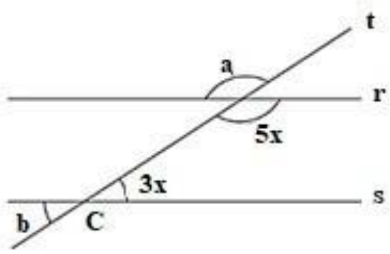


Figura 2

Essa atividade se assemelha com a atividade anterior ao solicitar o valor da medida do ângulo a ($r\hat{a}t$) e a medida do ângulo b ($s\hat{b}t$), que ocasiona explorar o Olhar Inventor em sua resolução, pois temos a oportunidade de traçar uma reta perpendicular às retas paralelas r e s, apresentado abaixo, na Figura 2, como figura original do Material Estruturado; e na Figura 2a temos a figura com traço da reta u.

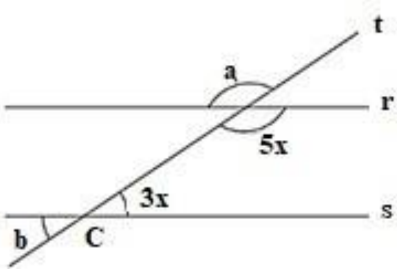


Figura 2

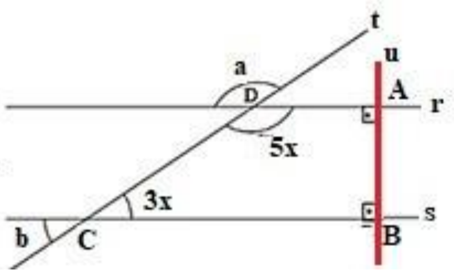


Figura 2a

Pontuamos que, ao traçar a reta u perpendicular (⊥), as retas r e s paralelas (r//s), [u ⊥ (r//s)], exploramos o Olhar Inventor para fazer surgir propriedades na figura que, inicialmente, não eram visíveis, proporcionando o surgimento de um quadrilátero ABCD, quadrilátero esse em formato de um trapézio retângulo. Ao surgir essa nova figura, representada na Figura 2a acima, surgiu também a possibilidade de explorar a propriedade da soma dos ângulos internos de um quadrilátero. Usando tal propriedade, temos:

$A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}A + D\hat{A}B = 360°$
$90° + 3x + 5x + 90° = 360°$
$8x = 360° - 180° = 22{,}5°$

$a = 5x$ (ângulo oposto pelo vértice)
$a = 5.\ 22{,}5° = 112{,}5°$

$b = 3x$ (ângulo oposto pelo vértice)
$b = 3\ .\ 22{,}5° = 67{,}5°$

3 – Em cada figura, determine as medidas desconhecidas.

a)

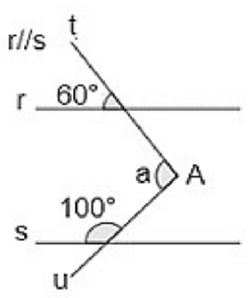


Figura 3a

b)

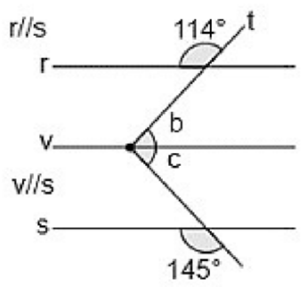


Figura 3b

c)

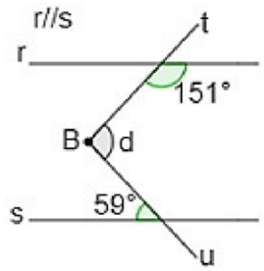


Figura 3c

Para essa atividade se faz necessário explorar o Olhar Inventor na resolução das atividades 3a e 3c, e temos a eventualidade de explorar o Olhar Inventor na atividade 3b.

A resolução da atividade 3a e 3c só é possível com a exploração do Olhar Inventor em ambas as figuras, ao traçarmos o prolongamento da reta u de s passando por r. O traço faz surgir o triângulo ABC, representado na Figura 3a.1, e o triângulo A\`B\`C\`, representado na Figura 3c.1. Ao surgir a figura do triângulo, temos a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, e a expectativa da resolução da atividade ao realizar um tratamento figural representado, como mostrado a seguir:

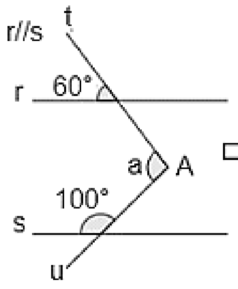


Figura 3a

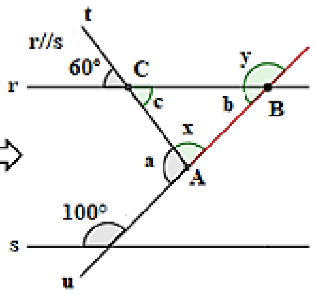


Figura 3a.$_1$

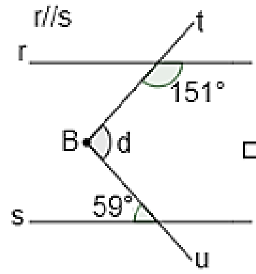


Figura 3c

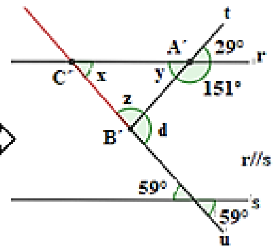


Figura 3c.$_1$

A partir do triângulo ABC, representado na figura 3a.$_1$, temos:

$y = 100°$ (ângulos correspondentes)

$c = 60°$ (O.P.V.)

$b + y = 180°$ (ângulos suplementares)

$b = 180° - 100° = 80°$

$x + c + b = 180°$ (ângulos internos do triângulo ABC)

$x = 180° - 80° - 60° = 40°$

$a + x = 180°$ (ângulos suplementares)

$a = 180° - 40° = 140°$

A partir do triângulo A´B´C´, representado na Figura 3c.$_1$, temos:

$x = 59°$ (ângulos alternos internos)

$y = 29°$ (ângulo oposto pelo vértice)

$z + x + z = 180°$ (ângulos internos do triângulo A`B`C`)

$z = 180° - 59° - 29° = 92°$

$d + z = 180°$ (ângulos suplementares)

$d = 180° - 92° = 88$

Outra resolução é sugerida no Material Estruturado (Zattoni; Carvalho, 2021), em que requer a exploração do Olhar Inventor ao traçar uma reta v paralela às retas r e s (v // s // r) em ambas as Figuras 3a e 3c, que oportuniza explorar a relação entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal, apresentada a seguir na Figura 3a.2 e na Figura 3c.2.

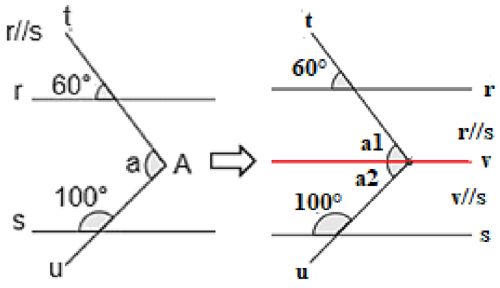


Figura 3a   Figura 3a.2

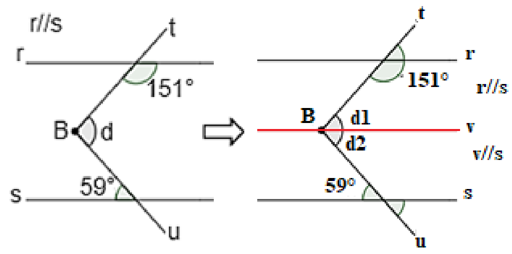


Figura 3c   Figura 3c.2

Na resolução, partindo da Figura 3a. 2, temos: que o ângulo "a" foi dividido em a_1 e a_2 pela reta v. Então:

$a = a_1 + a_2 \quad \rightarrow \quad a_1 = 60°$ (ângulos correspondentes)

$x = 100°$ (ângulos alternos internos)

$a_2 + x = 180°$ (ângulos suplementares) $\rightarrow a_2 = 180° - 100° = 80°$

Sendo $a = a_1 + a_2 \quad \rightarrow a = 60° + 80° = 140°$

Para a resolução, partindo da Figura 4c. 2, temos que o ângulo d foi divido em d1 e d2 pela reta v. Então:

$d = d_1 + d_2$

$d_1 = b$ (ângulos correspondentes) $\rightarrow b = 180° - 151° = 29°$

$d_2 = a$ (ângulos correspondentes) $\rightarrow \quad a = 59°$

Sendo $d = d_1 + d_2 \quad \rightarrow \quad d = 29° + 59° = 88°$

Destacamos que, para a resolução dessa atividade, é exigida a exploração do Olhar Inventor, modificando a figura e fazendo surgir novas figuras, e, com elas, propriedades não apresentadas inicialmente no enunciado da atividade ou na representação da figural inicial. Para a Figura 3a.1 e a Figura 3c.1, explorar o Olhar Inventor permitiu prorrogar a reta u do ponto A e do ponto B, passando pela reta r em ambas as figuras, surgindo, assim, o triângulo ABC e o triângulo A`B`C`; e, com isso, pudemos fazer uso da propriedade das somas dos ângulos internos do triângulo. Já para a Figura 3a.2 e a Figura 3c.2, a exploração do Olhar Inventor permitiu traçar uma reta v paralela às retas r//s; em ambas as figuras foi proporcionado a exploração da propriedade das retas paralelas cortadas por transversais.

Uma característica importante dessa atividade é que ela exige um certo grau de abstração para modificar a figura inicialmente dada pelo enunciado, podendo ser resolvida apenas recorrendo à exploração do Olhar Inventor sobre a figura dada. Na alternativa b dessa atividade, pode-se explorar o Olhar Inventor ao prorrogar a reta t de v, passando por s, surgindo o triângulo DEF, ocasionando recorrer à propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo para calcular a medida dos ângulos solicitados na atividade 3b, como ilustrado na Figura 3b.1.

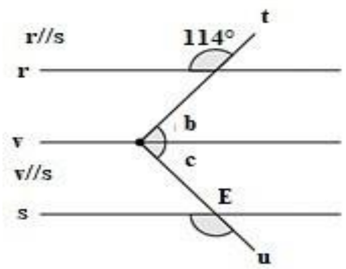


Figura 3b

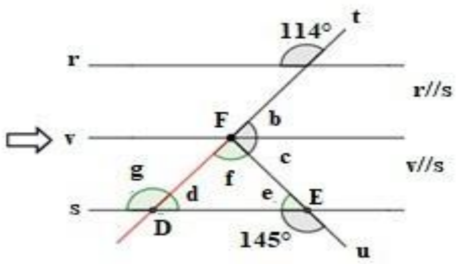


Figura 3b.1

$g = 114°$ (ângulos correspondentes)

$d + g = 180°$ (ângulos suplementares)

$d = 180° - 114° = 66°$

$b = d$ (ângulos correspondentes)

$b = 66°$

$e + 145° = 180°$ (ângulos suplementares)

$e = 180° - 145° = 35°$

$d + e + f = 180°$ (ângulos internos do triângulo)

$f = 180° - (66° + 35°) = 79°$

$(b + f) + c = 180°$ (ângulos suplementares)

$c = 180° - (66° + 79°) = 35°$

Usando a correspondência entre os ângulos formados entre as retas paralelas cortadas por uma transversal e a soma dos ângulos internos de um triângulo, potencializado pela exploração do Olhar Inventor ao traçar o prolongamento da reta t, encontramos o valor da medida do ângulo b e do ângulo c, sendo b = 66° e c = 35°, que inicialmente não era apresentado na atividade.

4 – Dadas as retas paralelas r e s, calcule o valor da expressão $z + x - y$.

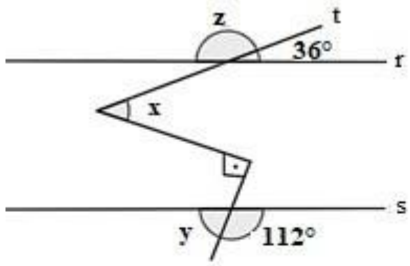


Figura 4

Entendemos que para possibilitar o cálculo das medidas de x, y e z, para responder à questão dada, há a necessidade de explorar o Olhar Inventor, acrescentando um traço e permitindo aplicar a propriedade da soma dos ângulos internos e/ou relações entre ângulos formados por retas paralelas e retas transversais.

Inicialmente, temos a Figura 4 após prolongamento da reta t passando pela reta s, no ponto B, surgindo um quadrilátero ABCD mostrado abaixo na Figura 4a.

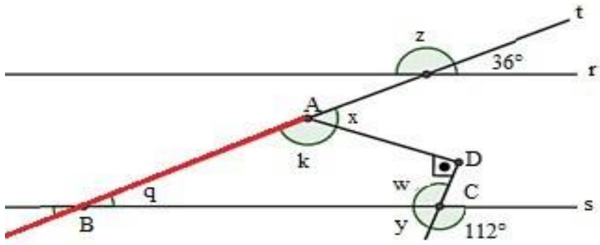


Figura 4a

Usando a relação entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e a soma dos ângulos internos (Si) do quadrilátero ABCD, podemos encontrar as medidas, em graus, dos ângulos x, y e z, solicitado inicialmente na atividade.

$q = 36°$ (ângulos correspondentes)
$w = 112°$ (ângulos opostos pelo vértice)

$k + q + w + 90° = 360°$ (soma dos ângulos internos)
$k = 360° - w - q - 90°$ (Si)
$k = 360° - 112° - 36° - 90° = 122°$

$x + k = 180°$ (ângulos suplementares)
$x = 180° - 122° = 58°$

$y + w = 180°$ (ângulos suplementares)
$y = 180° - 112° = 68°$

$z + 36° = 180°$ (ângulos suplementares)
$z = 180° - 36° = 144°$

Destacamos a importância da exploração do Olhar Inventor para determinar o valor da medida dos ângulos x, y e z, solicitado inicialmente na atividade, pois não havia propriedades suficientes para a resolução. Desse modo, foi necessário utilizar o prolongamento da reta t passando pela reta s, fazendo surgir um quadrilátero ABCD; e a condição de uso da propriedade da soma dos ângulos internos de um quadrilátero, o que permitiu determinar os valores das medidas dos ângulos solicitados na questão.

Outra alternativa de resolução é sugerida pelo Material Estruturado (Zattoni; Carvalho, 2021), em que requer a exploração do Olhar Inventor ao traçar as retas u e v paralelas r//s, como mostrado na Figura 4 e na Figura 4c.

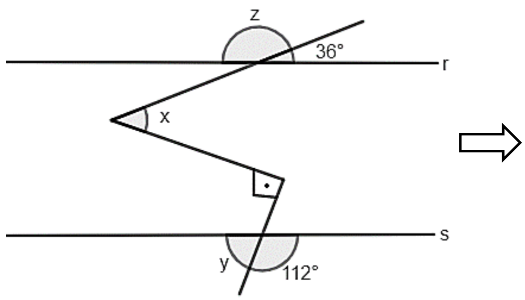


Figura 4

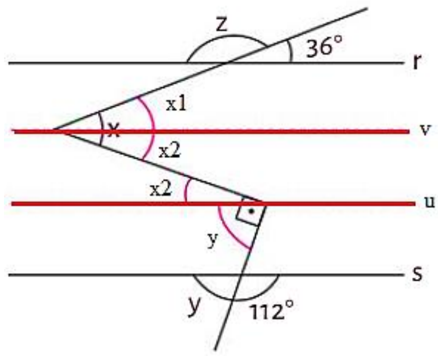


Figura 4c

Como sugestão de resolução apresentada no Material Estruturado Livro 1 (Zattoni; Carvalho, 2021), podemos traçar duas retas paralelas às retas r e s (s//r) na Figura 4, que possibilita fazer a relação entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal.

Na Figura 4c temos que o ângulo x foi dividido em x_1 e x_2 pela reta v, e o ângulo de 90° foi dividido em x_2 e y pelo traço da reta u.

Então:

$x = x_1 + x_2$

$x_1 = 36°$ (ângulos correspondentes)

$y + x_2 = 90°$ (ângulos complementares)

$x_2 = 90° - 68° = 22°$

$y + 112° = 180°$ (ângulos suplementares)

$y = 68°$

Sendo $x = x_1 + x_2$

$x = 36° + 22° = 58°$

$z + 36° = 180°$ (ângulos suplementares)

$z = 180° - 36° = 144$

5 – A medida do raio de um disco de vinil é de 15 cm. Para colocá-lo em uma capa de forma quadrada, qual a medida mínima do lado da capa, de modo que o disco de vinil fique guardado nela?

Figura 5

A Figura 5 representa um disco de vinil no formato circular, com destaque para seu raio representado pelo segmento de reta de A até B, que pode remeter à ideia de um setor circular como apresentado abaixo. Temos também a Figura 5ª, que representa a exploração do Olhar Inventor ao traçar o diâmetro da figura como sendo o segmento de reta B até C.

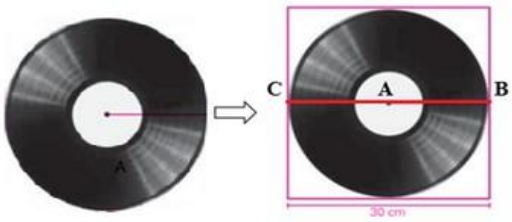
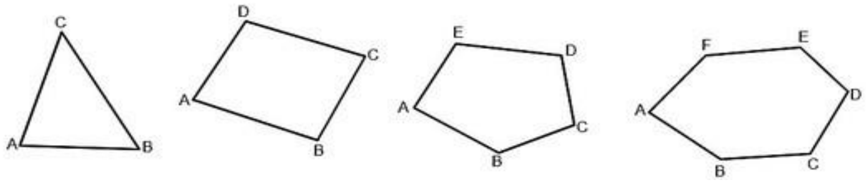


Figura 5 Figura 5a

Para construir a caixa é necessário ter a medida do comprimento do diâmetro do disco de vinil. A exploração do Olhar Inventor acontece ao traçar o raio AC, formando o diâmetro BC. Sendo o raio AB do disco de medida 15 cm, temos que o diâmetro BC medirá 30 cm. A caixa quadrada terá lados congruentes ligeiramente maiores que 30 cm. Pontuamos que essa atividade parte da representação de um objeto real (disco) tridimensional (3D) representado sobre o plano do papel bidimensional (2D), sendo possível visualizar uma das faces do objeto real (2D); assim temos, para a resolução dessa atividade, apenas a possibilidade de recorrer ao Olhar Inventor.

6 – A seguir temos um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e um hexágono.



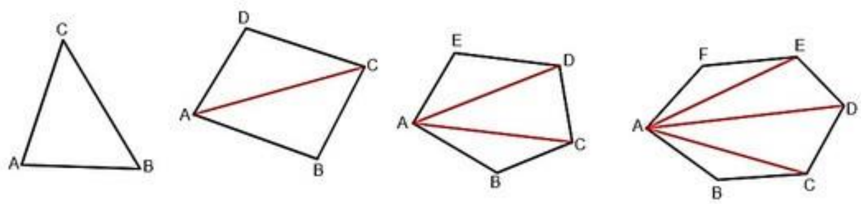
a) Trace todas as diagonais que partem do vértice A de cada um dos polígonos.

b) Complete a tabela a seguir com essas quantidades.

Polígono	**Quantidade de lados (n)**	**Quantidade de diagonais que partem de um único vértice**
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Polígono qualquer		

Como resposta para essa atividade, temos:

Na alternativa 6a visualizamos a potencialidade de explorar o Olhar Inventor ao traçar a(s) diagonal(is) que partem do vértice A aos vértices subsequentes de cada polígono, ressaltamos que o triângulo não possui diagonal, o que não possibilitou utilizar o Olhar Inventor. Para os demais polígonos apresentamos a figura a seguir, em que é apresentado a exploração do Olhar Inventor e a sua potencialidade em tornar possível visualizar figuras e propriedades não visíveis antes de sua exploração.



Para responder a alternativa 6b, recorremos à resposta da alternativa 6a, como alternativa de resposta, por acreditar que a representação figural favorece a aprendizagem em geometria.

Polígono	**Quantidade de lados (n)**	**Quantidade de diagonais que partem de um único vértice**
Triângulo	3	0
Quadrilátero	4	1
Pentágono	5	2
Hexágono	6	3
Polígono qualquer	n	n - 3

Ao explorarmos o Olhar Inventor na resolução dessa atividade, espera-se que o executor perceba que o número de diagonais são três unidades inferior ao número de lados do polígono, e o número de triângulo duas vezes inferior ao número de lados.

7 – A logomarca da empresa Versátil é representada por um polígono com a inicial da empresa fazendo parte dele. Os triângulos de cores azuis são congruentes, e o triângulo verde é equilátero. Determine as medidas dos ângulos indicados por x e y na logomarca.

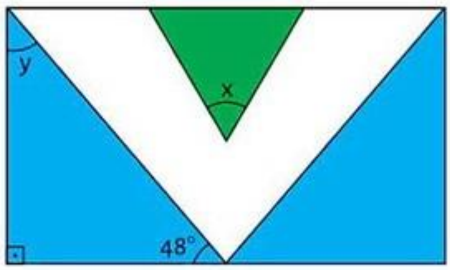


Figura 7

Essa atividade pode ser resolvida usando a soma dos ângulos internos para encontrar o valor de y e x, ângulos de um triângulo equilátero 3x = 180° logo x = 60°. Podemos também recorrer à exploração do Olhar Inventor, uma vez que, ao prolongar os lados do retângulo e a hipotenusa do triângulo retângulo, podemos verificar a correspondência entre ângulos formados por duas retas paralelas (comprimento do retângulo) cortadas por uma reta transversal (hipotenusa do triângulo). Propriedades essas não nítidas antes da aplicação do Olhar Inventor, provocando uma mudança figural conforme mostrado na Figura 7a abaixo.

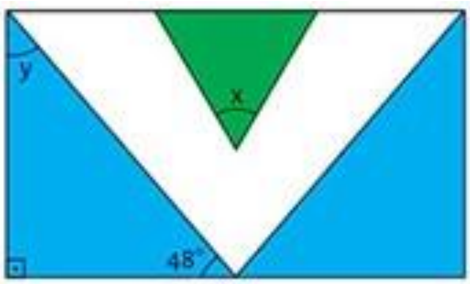


Figura 7

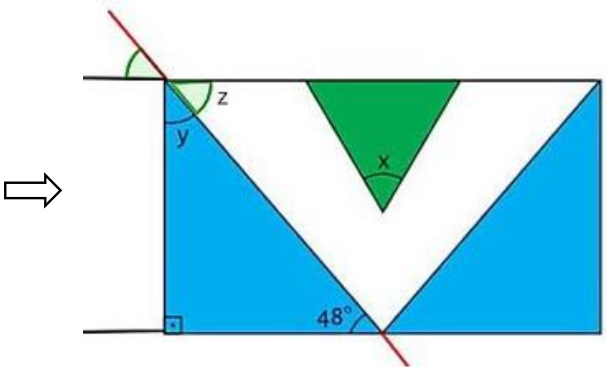


Figura 7a

Assim, podemos determinar o valor da medida dos ângulos.

Z = 48° (ângulos alternos internos)

z + y = 90° (ângulos complementares)

y = 90° - 48°= 42°

Para encontrar a medida do ângulo x, consideramos que o triângulo equilátero tem seus três ângulos internos de mesma medida, ou seja, 3x = 180°, logo x = 60°.

8 – Observe o quadrilátero a seguir e as medidas de seus ângulos internos.

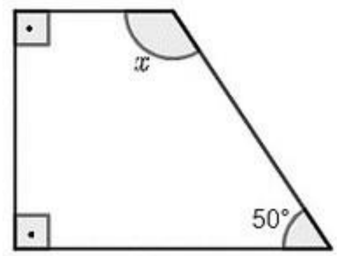


Figura 8

Qual é o valor de x no quadrilátero?

A atividade pede para calcular a medida do ângulo x de um trapézio retângulo. Existe a perspectiva de explorar o Olhar Inventor traçando o segmento $\overline{BE}$ perpendicular ao segmento $\overline{CE}$, surgindo o retângulo ABCE e o triângulo ΔCDE, como ilustrado na Figura 8a.

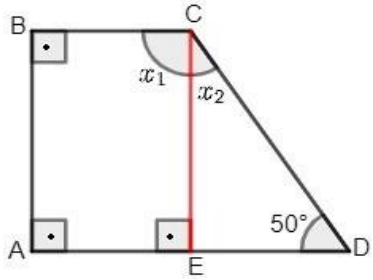


Figura 8a

O traço adicionado no polígono dividiu o ângulo x em x_1 e x_2. Com o surgimento do triângulo retângulo, podemos articular as propriedades matemáticas não percebidas antes do traço e determinar a medida do ângulo x_2 ao fazer a soma dos ângulos internos do triângulo.

x_2 + 50° + 90°= 180°

x_2 = 40°

Para contemplar o enunciado, a medida do ângulo $x = x_1 + x_2$, logo $x = 130°$.

9 – Uma folha com a forma de um paralelogramo foi dividida ao meio, obtendo-se os 2 triângulos a seguir.

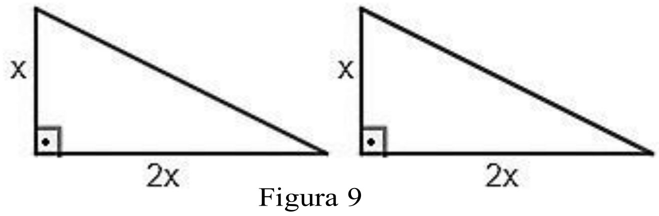


Figura 9

Represente, no espaço a seguir, o paralelogramo que foi dividido ao meio.

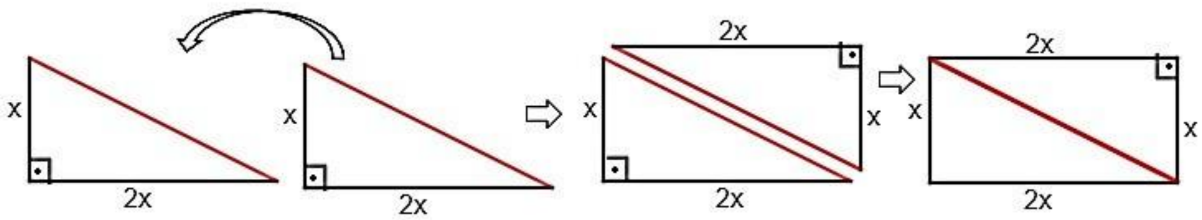
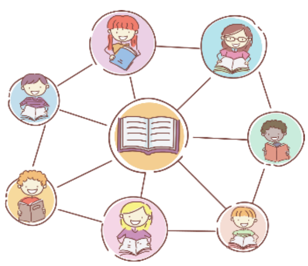


Figura 9 Figura 9a

Os dois triângulos retângulos têm ângulos internos de mesmas medidas e dois de seus lados dados como de mesma medida, logo, são triângulos congruentes pelo caso de congruência Lado-Ângulo-Lado (LAL). A atividade requer unir os dois triângulos, fazendo coincidentes as duas hipotenusas, formando um retângulo. Nesse caso, a exploração do Olhar Inventor nos leva a perceber que os triângulos retângulos são congruentes, consequentemente, suas hipotenusas são congruentes, quando sobrepostos se tornam uma diagonal do retângulo. Para sobrepor as hipotenusas é necessário rotacionar em 180° um dos triângulos; após rotação, transladar um dos triângulos até que as hipotenusas sejam coincidentes.



Para encerrar a Seção III, trazemos curiosidades sobre diagonais de uma figura plana, Scaneie o QrCode.

SEÇÃO IV

Atividades Complementares: Exploração e Desenvolvimento do Olhar Inventor

O Material Didático desempenha um importante papel na educação, por ser um dos principais norteadores do trabalho pedagógico, envolve abordagens e teorias para o ensino de matemática. Na análise realizada do Material Estruturado (Zattoni; Carvalho, 2021; Brasil, 2019) caderno 3, encontramos poucas atividades geométricas que possibilitam o desenvolvimento cognitivo na aprendizagem em geometria defendida por Duval (2005, 2011, 2012). Nesse contexto, propusemos a elaboração dessa seção de atividades complementares, com a intencionalidade de auxiliar o professor na preparação das aulas e no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, apresentando atividades complementares às encontradas e permeando diferentes conteúdos e contextos, na esperança de ajudar o professor a levar atividades que possibilitem explorar essa forma própria de olhar as figuras: o Olhar Inventor.

As atividades complementares tentam percorrer os objetos de conhecimentos previstos no currículo a ser desenvolvido com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, para o ensino de geometria, de acordo com os documentos: Documento de Referência Curricular para Mato Grosso (DRC/MT) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que propõe:

> Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem. Simetrias de translação, rotação e reflexão. A circunferência como lugar geométrico. Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal. Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero (BNCC, 2018, p. 310).

A esses objetos de conhecimento nos propomos a identificar e compreender a possibilidade de como pode ser explorado o Olhar Inventor na resolução das atividades complementares, articulando os Elementos Transversais para a aprendizagem de geometria. Assim como na seção anterior, apresentamos as atividades e suas resoluções, evidenciando a potencialidade do Olhar Inventor.

A seguir, apresentamos as atividades complementares.

Triângulos

Possíveis habilidades (EF07MA24; EF07MA25; EF07MA26)

Enfatizamos que as atividades de número 1 e 2, dessa seção, podem ser encontrados em outros materiais didáticos, mas, como são ricas pela possibilidade de explorar o Olhar Inventor, estamos trazendo nessa seção, para também ilustrar a presença dessa ação do Olhar Inventor.

1 – Para obter a soma dos ângulos internos de um triângulo sem utilizar o transferidor, siga as orientações abaixo.

Passo 1 – Desenhe um triângulo ABC qualquer, e pinte os ângulos internos;

Passo 2 – Recorte o triângulo em três partes, de modo que cada parte contenha um ângulo;

Passo 3 – Junte os ângulos um do lado do outro.

Observe a figura que você desenhou utilizando os três passos acima e responda:

a) O que podemos concluir sobre os ângulos internos de um triângulo?

b) Qual é a denominação do ângulo formado na figura pela junção dos três ângulos?

Ao executar o Passo 2 na resolução dessa atividade, temos a oportunidade de exploração do Olhar Inventor ao dividir o triângulo em três partes. No Passo 3 também ocorre a exploração do Olhar Inventor ao rotacionar as figuras de maneira que os ângulos fiquem consecutivos e, juntos, formem um ângulo raso, possibilitando visualizar as propriedades da soma dos ângulos internos de um triângulo, conforme apresentado na figura abaixo.

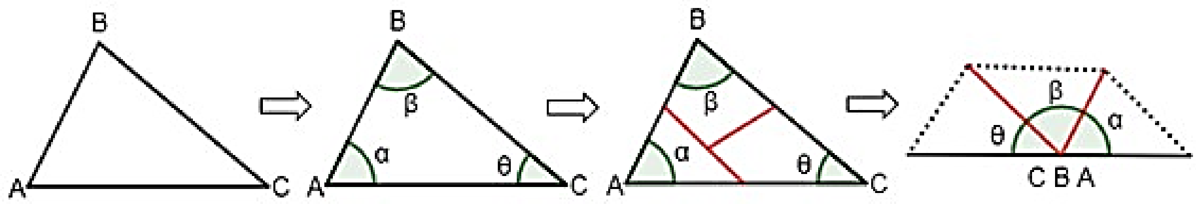


Figura 1

$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°, denominado de ângulo raso. Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial para modificar as figuras, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D.

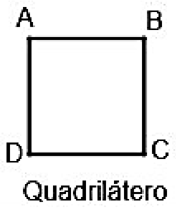
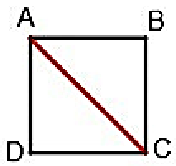
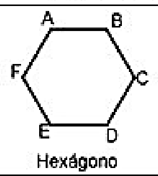
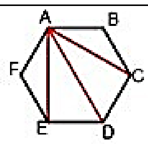
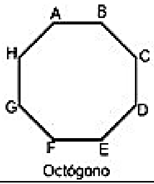
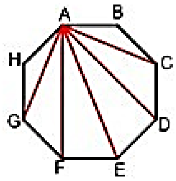
Caro Professor,
Espera-se que o aluno utilize as propriedades exploradas na atividade 1 para resolver as atividades 2 e 3.

2 – Divida cada polígono regular em triângulos com segmentos, partindo de um único vértice. Depois, descubra a medida da soma de ângulos internos e a medida de cada ângulo interno do polígono. Os triângulos formados têm alguma relação com a soma dos ângulos internos dos polígonos?

Polígono	Número de triângulos formados	Soma dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno (a_i)
A B C D Quadrilátero	A B C D Quadrilátero		
A B C D E F Hexágono	A B C D E F Hexágono		
A B C D E F G H Octógono	A B C D E F G H Octógono		

A intenção dessa atividade é que o aluno calcule a soma dos ângulos internos do polígono, multiplicando o número de triângulos formados por 180°; e divida a soma dos ângulos pelo número de ângulos internos do polígono. O número de traço é antecessor ao número de triângulos formados. Os traços no polígono acionam necessariamente a exploração do Olhar Inventor, mobilizando as apreensões perceptiva, discursiva e operatória e articulando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, ocasionando visualizar e contar os triângulos formados. Espera-se que os alunos percebam que o número de triângulos visíveis após a exploração do Olhar Inventor são validadores do cálculo, bastando multiplicá-los por 180°. Observe a sugestão de resolução abaixo.

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180º:

Polígono	Número de triângulos formados	Soma dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno (a_i)
		2 . 180° = 360°	360° / 4 = 90°
		4 . 180° = 720°	720° / 6 = 120°
		6 . 180° = 1080°	1080° / 8 = 135°

3 – A primeira versão da moeda brasileira real, no valor de R$ 0,25, que usamos atualmente, tinha um heptágono regular em suas faces, conforme ilustração abaixo.

Moeda da 1ª família (1994 - 1997)

Moeda da 2ª família (1998 - atualmente)

Divida a figura do heptágono em triângulos com base em único vértice e determine a soma dos ângulos internos.

Essa atividade traz a figura de um objeto real, contextualiza a presença de figuras geométricas e seus elementos em nossa volta. Para solucionar a questão é necessário recorrer à exploração do Olhar Inventor, atribuindo traços com origem em um único vértice para os vértices não subsequentes do heptágono gravado na moeda, como mostrado na figura abaixo.

Moeda da 1ª família (1994 - 1997)

O Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória para modificar as figuras, transitando entre a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D. Isso possibilitou visualizar que o polígono heptágono pode ser decomposto em cinco triângulos que, ao multiplicar por 180º (soma dos ângulos internos de um triângulo), será possível determinar a soma dos ângulos internos do heptágono, ou seja 5 x 180° = 900°.

4 – O triângulo ABC, a seguir, tem, como medida do perímetro, 36 cm. Determine a sua área sabendo que $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} = 10cm$.

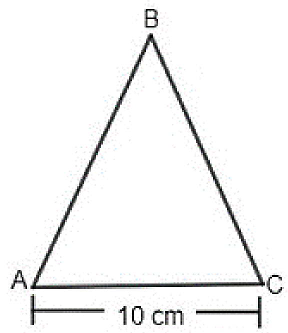


Figura 4

Para calcular a área do triângulo ABC pode-se recorrer à exploração do Olhar Inventor, atribuindo um traço $\overline{BC}$ perpendicular ao lado $\overline{AC}$, que representa a altura do triângulo ABC, conforme apresentado a seguir:

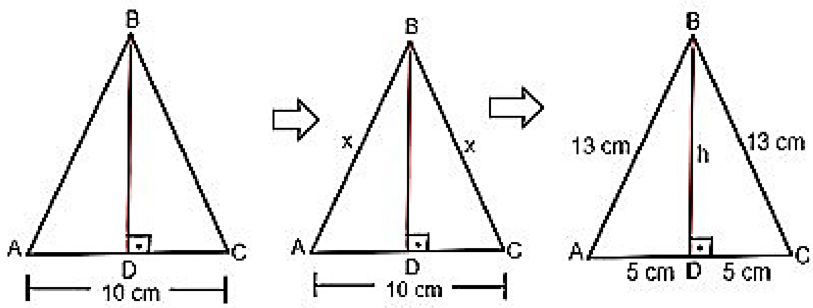


Figura 4a

Sendo $\overline{AB} = \overline{BC} = x$, temos que x + x + 10 = 36 → x = 13 cm.

Ao explorar o Olhar Inventor foi possível surgir dois triângulos congruentes $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$. Possibilitando o uso da propriedade (Teorema de Pitágoras), temos

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{BD})^2$$

$$(\overline{BD})^2 = 13^2 - 5^2$$

$$\overline{BD} = \sqrt{169 - 25}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{144}$$

$$\overline{BD} = 12 \text{ cm}$$

Conhecendo a medida da altura, pode-se calcular a área do triângulo utilizando a equação (base x altura)/2:

$$A = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{\mathbf{10\,.\,12}}{2} = 60\ cm^2$$

Outra resolução em que temos a oportunidade de exploração do Olhar Inventor é visualizar os dois triângulos retângulos congruentes $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$ a partir do segmento de reta $\overline{BD}$, que representa a altura do triângulo ABC. Posto isso, temos $\overline{AB} = \overline{BC}$, que se torna a diagonal do retângulo BACD ao rotacionar o triângulo ΔABC. Pela articulação entre as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, houve tratamento figural, modificando a figura em suas dimensões de 2D →1D → 0D →1D → 2D, surgindo novas propriedades; com elas, temos a alternativa de determinar a área do triângulo ΔABC pela área do retângulo ABCD, que é possível visualizar ao rotacionar o triângulo ΔABD. Observe a figura abaixo:

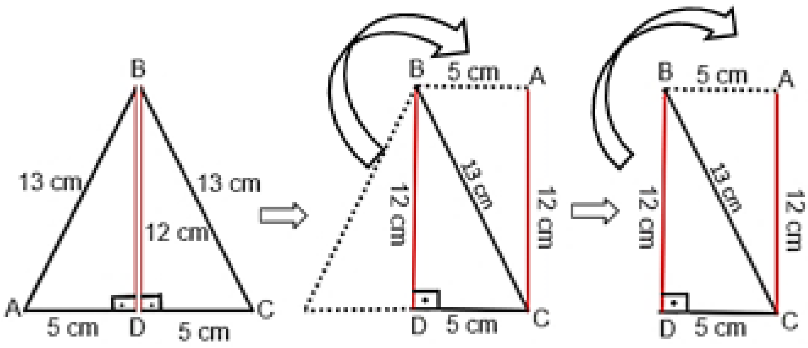


Figura 4b

Pela área do retângulo podemos calcular a área do triângulo ABC, fazendo:

A= b . h

A= 5 . 12

A= 60 cm^2

Polígonos

Possíveis habilidades (EF07MA27; EF07MA28)

5 – Em um trapézio retângulo ABCD, o lado AD mede 8 cm, conforme mostra a figura abaixo.

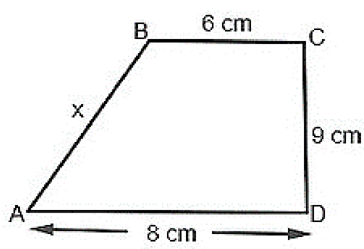


Figura 5

Determine a medida de x nesse trapézio isósceles, sabendo que x é a medida do lado AB.

Para a resolução dessa atividade, temos um trapézio retângulo ABCD que, ao exploramos necessariamente o Olhar Inventor, atribuindo um traço $\overline{BE}$ perpendicular ao lado $\overline{AD}$, articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D. Isso possibilitou visualizar um triângulo retângulo e suas propriedades, a hipotenusa corresponde à medida do lado do trapézio ao qual se deseja determinar o seu valor, podendo ser resolvido pelo Teorema de Pitágoras, como apresentado na figura abaixo:

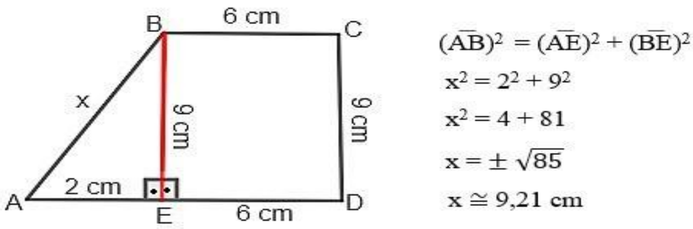


Figura 5a

6 – Dado o trapézio isósceles a seguir, divida a figura de modo que seja visível seis triângulos equiláteros.

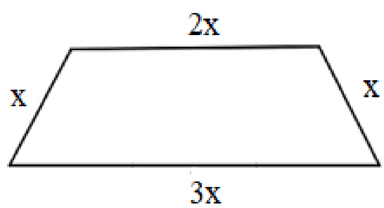


Figura 6

Essa atividade requer necessariamente a exploração do Olhar Inventor para atribuir traços no trapézio isósceles, que poderá ter sua base menor dividida em duas partes iguais e sua base maior dividida em três partes iguais, como na figura abaixo:

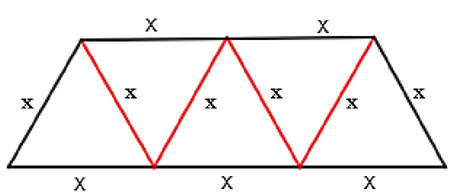


Figura 6a

Ao traçar os segmentos de reta que unem a divisão das duas bases, torna-se visível os seis triângulos equiláteros e suas propriedades, em que todos os lados possuem a mesma medida, nesse caso, a medida dos lados mede x e, consequentemente, todos os três ângulos medem 60º. O Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D para modificar a figura inicialmente dada e suas propriedades, fazendo surgir novas figuras com suas propriedades e assim tornar possível a resolução dessa atividade.

7 – Decomponha um quadrado em duas partes iguais e, com as partes obtidas, componha um triângulo.

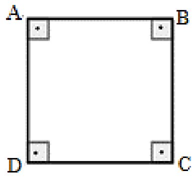


Figura 7

Para a resolução dessa atividade, temos um quadrado ABCD que requer a exploração do Olhar Inventor para atribuirmos um traço $\overline{AC}$ que representa a diagonal do quadrado, tal fato facilitou visualizar dois triângulos retângulos congruentes ΔABC e ΔADC e suas propriedades. A hipotenusa corresponde à medida do lado comum entre os triângulos, como apresentado na figura abaixo:

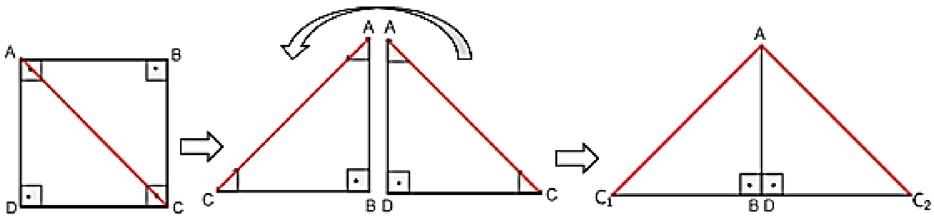


Figura 7a

Ao rotacionar o triângulo ABC e unindo-o ao triângulo ADC, de modo que o lado que representa a hipotenusa passa a ser os lados de um triângulo isósceles, e tendo como medida de lado comum o segmento AD, que representa a altura do triângulo AC_1C_2, temos a solução dessa atividade. Tal solução foi possível ao explorarmos o Olhar Inventor que articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D.

8 – Com um retângulo, cujas medidas são 6 cm e 10 cm, de que maneira é possível transformar essa figura em dois losangos de mesma área?

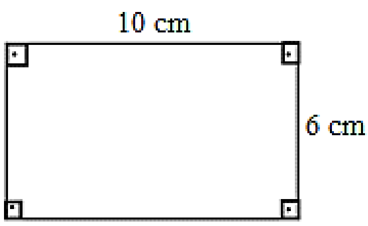


Figura 8

Ao explorarmos, necessariamente, o Olhar Inventor para resolver essa atividade, traçamos um segmento de reta para unir os pontos médios dos lados do retângulo. O Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, para modificar a figura e suas propriedades. Isso tornou possível visualizar um losango cuja diagonal maior é igual ao comprimento do retângulo medindo 10 cm, e a diagonal menor é igual à largura do retângulo medindo 6 cm, que, inicialmente, não estava visível na figura do retângulo. Com a exploração do Olhar Inventor é possível visualizar ainda quatro triângulos retângulos congruentes, cujas medidas dos lados medem, respectivamente, 5 cm e 3 cm; e a hipotenusa é coincidente com o lado do losango 1.

Para o losango 2, temos a junção dos quatros triângulos retângulos pelos lados congruentes. Observe a figura:

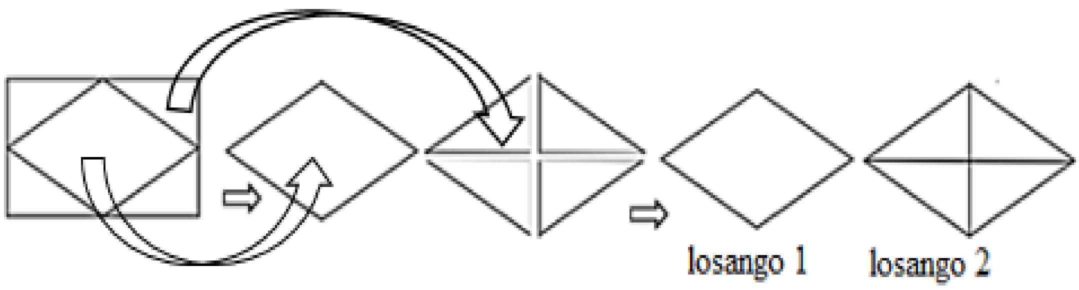


Figura 8a

Ângulos e Retas

Possível habilidade (EF07MA23)

9 – A figura abaixo mostra um polígono irregular ABCDE. Determine a medida, em graus, do ângulo x.

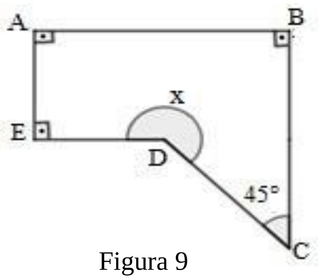


Figura 9

A resolução dessa atividade pode ser realizada partindo da soma dos ângulos internos de um polígono. Para simplificar a resolução, podemos recorrer à possibilidade de exploração do Olhar Inventor, adicionando um traço que representa o prolongamento do segmento $\overline{DE}$ até o lado $\overline{BC}$.

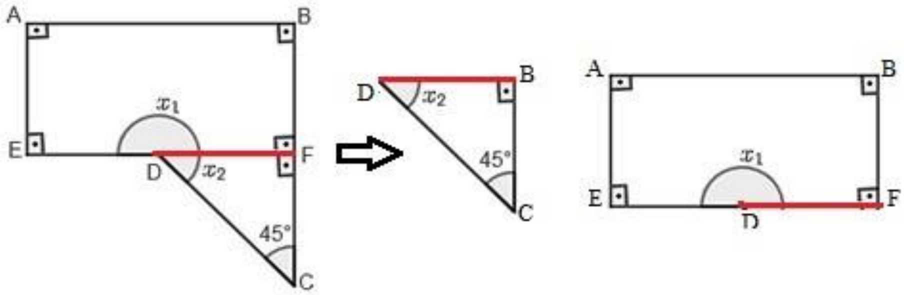


Figura 9a

A exploração do Olhar Inventor, prorrogando o segmento $\overline{ED}$, surgindo o segmento $\overline{DF}$, oportunizou visualizar o segmento $\overline{EF}$ com um lado do retângulo ABFE e um triângulo retângulo FCD, o traço que uniu os pontos D e F dividiu o ângulo x em x_1 e x_2. Para determinar a medida do ângulo x_2, recorremos à propriedade do triângulo, fazendo a soma dos ângulos internos $x_2 = 180° - 90° - 45°$ logo $x_2 = 45°$. O ângulo x_1 é um ângulo raso, pois as semirretas que o formam coincidem com a mesma reta, então $x_1 = 180°$. Assim, fazemos $x = x_1 + x_2 = 180° + 45° = 225°$.

O Olhar Inventor, ao ser explorado na resolução dessa atividade, mobilizou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, articulando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D.

10 – Determine a medida do ângulo x do polígono abaixo:

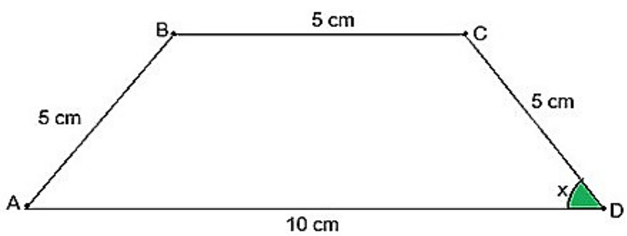


Figura 10

Adicionando, necessariamente, a exploração do Olhar Inventor, foi traçado o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo ao segmento $\overline{AB}$, conforme ilustrado na figura abaixo.

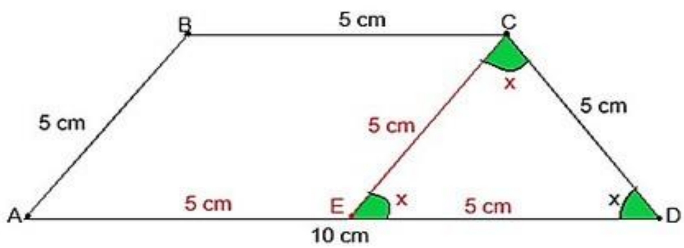


Figura 10a

O segmento $\overline{CE}$ fez advir o triângulo equilátero CDE, não percebido antes do traço. As medidas dos ângulos internos de um triângulo equilátero são equivalentes, medindo 60º cada um. Logo, podemos determinar que x= 60º.

11 – A figura abaixo mostra um trapézio retângulo ABCD.

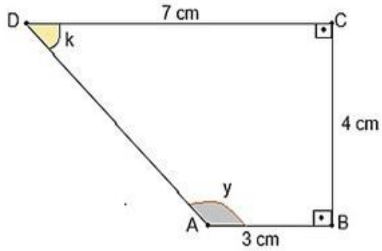


Figura 11

Qual a medida, em graus, do ângulo k?

Na resolução dessa atividade, faz-se necessário recorrer à exploração do Olhar Inventor, para adicionar um traço correspondente com o segmento de reta $\overline{AE}$, mostrado na Figura 11a.

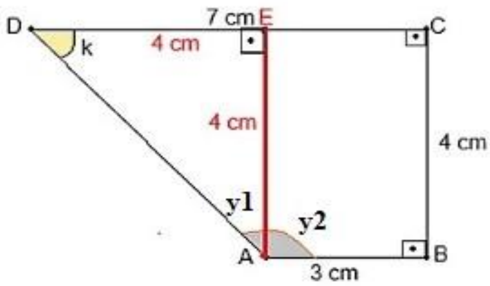
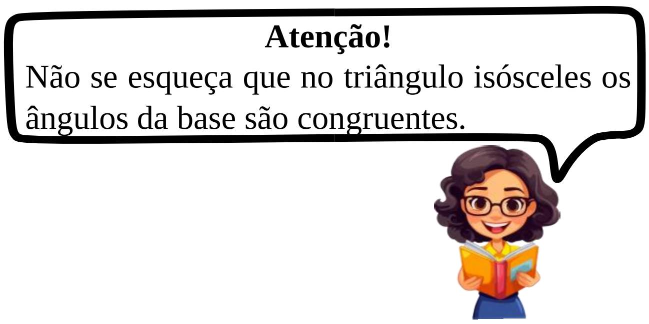


Figura 11a



O segmento de reta $\overline{AE}$, paralelo ao segmento de reta $\overline{BC}$, dividiu o ângulo y em y_1 e y_2, fez surgir ainda o triângulo retângulo isósceles ADE, cujos lados AE=DE formam AÊD= 90°, temos k = y_1 = 45°, ângulos congruentes (ângulos da base do triângulo isósceles). O tratamento figural ocorreu pela exploração do Olhar Inventor que articulou as apreensões (perceptiva, discursiva e operatória) e desconstrução dimensional (2D →1D → 0D →1D → 2D), propiciando a resolução da atividade.

12 – Analisando o polígono ABCDE abaixo, o que podemos afirmar sobre as medidas dos ângulos x e y?

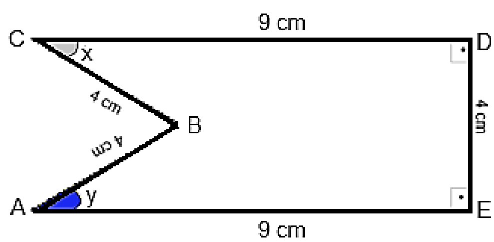


Figura 12

A resolução dessa atividade requer a exploração do Olhar Inventor para traçar o segmento $\overline{AC}$, como apresentado na Figura12a.

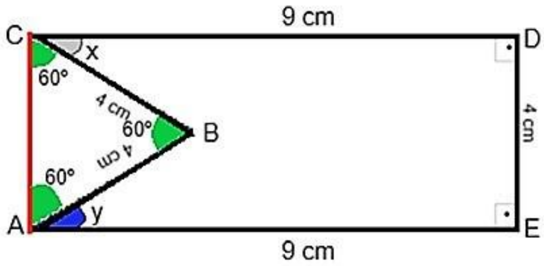


Figura 12a

O segmento de reta AC facilitou visualizar o triângulo equilátero ABC não percebido antes do traço. Temos $AB = BC = CA$, também $A\hat{B}C = B\hat{C}E = B\hat{A}C$, logo, x e y são complementares aos ângulos internos consecutivos do triângulo. Temos:

x +60° = 90° x = y = 30°

x = 90° - 60°

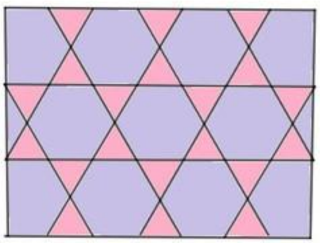
x = 30°

Podemos afirmar que os ângulos x e y são congruentes, de medida 30º.

Transformações Geométricas

Possíveis habilidades (EF07MA19; EF07MA20; EF07MA21:)

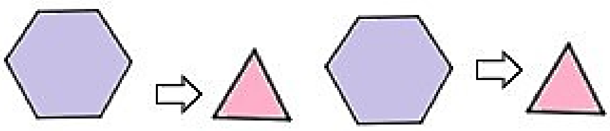
13 – Para o ladrilhamento de uma parede foram utilizadas cerâmicas para a construção do mosaico, que é composto por alguns polígonos representados na figura abaixo.


Fonte: adaptado de Dante (2015, p. 88).

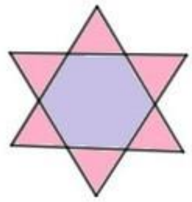
a) Observe as figuras do mosaico e desenhe o que podemos ver.

b) Quais são as figuras geométricas utilizadas no padrão para a construção desse mosaico?

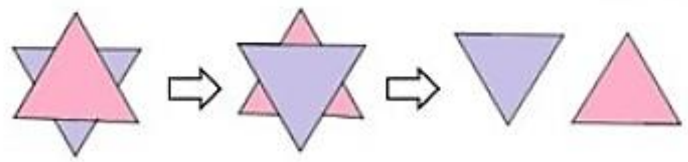
Espera-se que, com essa atividade, os alunos apresentem várias possibilidades de respostas, tais como:



Temos a possibilidade de ser visto em um primeiro momento hexágonos na cor roxa e triângulos na cor rosa.



Ou ainda uma estrela de seis pontas na cor roxa e rosa:

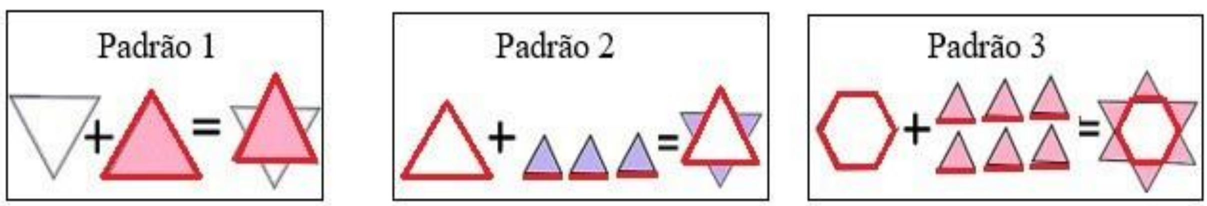


Ao explorar o Olhar Inventor, que articula as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, temos a oportunidade de visualizar parte do segmento do hexágono regular como lado do triângulo equilátero congruente. Tal fator, desse modo, faz surgir novas propriedades associadas às figuras que só foram possíveis de serem visualizadas após a exploração do Olhar Inventor.

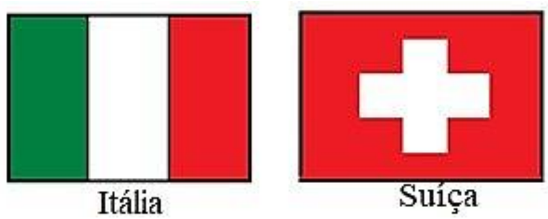
Ao observarmos mais atentamente a figura, visualizamos que ela pode ser composta por sobreposição de dois triângulos equiláteros, e suas propriedades como lado e ângulos congruentes.

Com a visualização da sobreposição dos triângulos equiláteros, temos, ainda, a chance de visualizar seis triângulos equiláteros congruentes e um hexágono regular.

Destacamos a importância do Olhar Inventor nas resoluções dessa atividade, possibilitando que ela possa ser visualizada de várias formas e padrões.

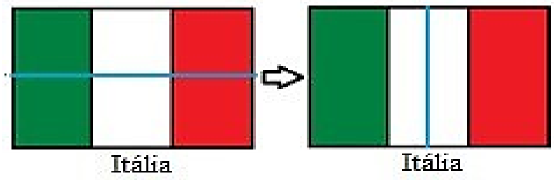


14 – Observe as bandeiras dos países: Itália e Suíça.

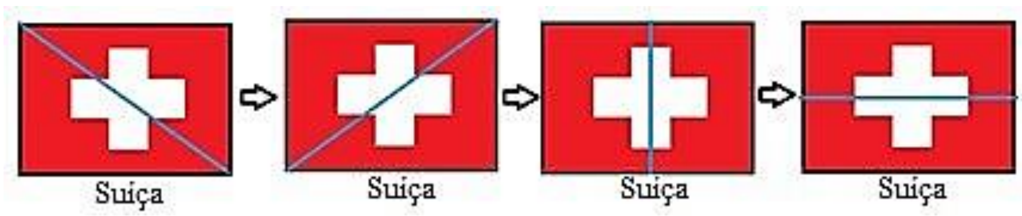


Determine quantos eixos de simetria tem cada uma das bandeiras.

A exploração do Olhar Inventor se faz necessária, nessa atividade, para determinar a quantidade de eixos de simetria de objeto real representado sobre o papel, no caso, a bandeira de dois países no formato de uma figura retangular 2D. Para o retângulo 2D, que representa a bandeira da Itália, podemos traçar apenas dois segmentos de reta 1D, unindo os pontos médios 0D dos lados opostos da figura, facilitando visualizar dois retângulos 2D, como mostra a figura a seguir.



Dois eixos de simetria, pelo ponto médio 0D dos lados 1D. Já para a figura que representa a bandeira da Suíça, podemos explorar o Olhar Inventor atribuindo quatro traços 1D na figura, sendo eles dois pela diagonal do retângulo (2D). Isso propicia a visualização de dois triângulos retângulos congruentes (2D), e os traços (1D) podem ser feitos pela união dos pontos médios (0D) dos lados opostos do retângulo (1D), possibilitando visualizar, a cada traço, dois retângulos congruentes, como apresentado na figura abaixo.



Quatro eixos de simetria (dois eixos pela diagonal e dois eixos pelo ponto médio dos lados). Destacamos que, nessa atividade, a exploração do Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D para determinar o número de diagonais de cada figura dada no enunciado da atividade.

15 – Trace apenas 3 linhas retas sobre a figura abaixo de modo a obter o maior número possível de triângulos.

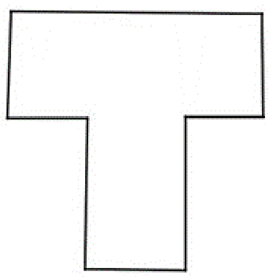


Figura 15

Essa atividade requer a exploração do Olhar Inventor para traçarmos três seguimentos de reta 1D na figura dada, que representa um polígono irregular 2D. Articula as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, modificando a figura e suas propriedades, facilitando visualizar oito triângulos 2D, sendo: dois pares de triângulos retângulos 2D, dois triângulos retângulo congruente 2D, mais dois pares de triângulos retângulos congruentes 2D, tendo a medida de um de seus catetos 1D em comum, e um par de triângulo isósceles congruentes 2D, opostos pelo vértice, como mostra a figura a seguir.

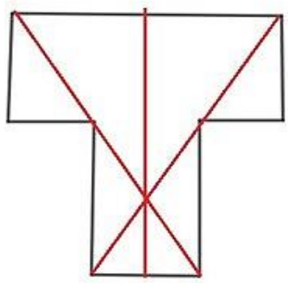
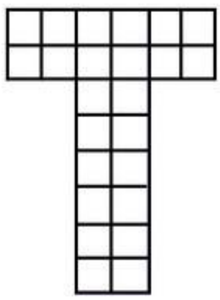


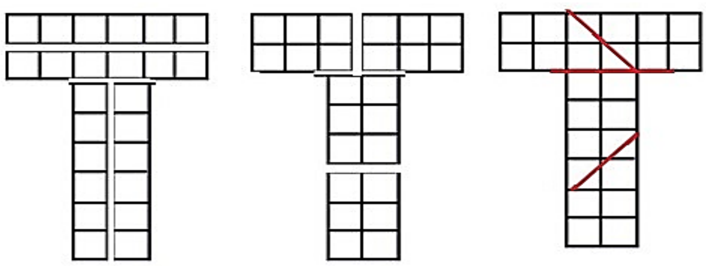
Figura 15a

16 – Considere a figura abaixo e decomponha-a em quatro partes iguais.



Fonte: Duval (1999, p 157).

Nessa atividade, temos a possibilidade de explorar o Olhar Inventor ao atribuir traços na figura que representa um polígono irregular. Articula as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, modificando a figura e suas propriedades. Ao desenhar os traços, temos a expectativa de visualizar figuras regulares como quatro retângulos, dois na horizontal e dois na vertical; na segunda opção, temos quatro retângulos, sendo de dois em dois com medidas congruentes; e, na terceira opção, temos a alternativa de visualizar quatro trapézios retângulos congruentes e suas propriedades. A seguir, algumas das possibilidades de resolução:



Considerando que a figura está dividida em quadradinhos que poderão ser utilizados como unidade de medida para determinar a área das figuras solicitadas, basta dividir esses 24 quadradinhos em 4 partes iguais, cada uma deverá ter 6 quadradinhos de unidade de área.

Circunferência

Possível habilidade (EF07MA22)

17 – A figura abaixo mostra um círculo de centro em C de corda $\overline{BD}$, e um losango ABCD. Nessas condições, o que podemos afirmar sobre a diagonal menor do losango?

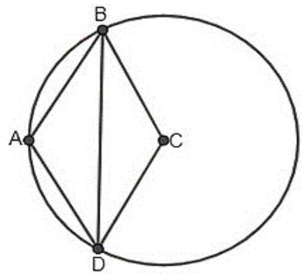


Figura 17

Espera-se que o aluno perceba que a diagonal menor do losango é equivalente ao raio do círculo, como apresentado na figura abaixo:

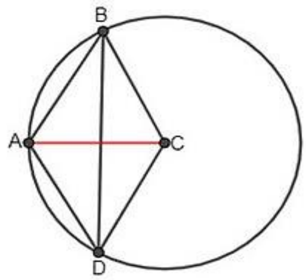


Figura 17a

Nesse caso, se faz necessário explorar o Olhar Inventor para traçar o segmento $\overline{AC}$, priorizando os olhares sobre o raio e a diagonal menor do losango não percebido antes do traço, permitindo o uso de novas propriedades não nítidas no enunciado.

18 – No círculo abaixo de raio r, o arco AB, formado pelo ângulo X, é três vezes menor que o arco formado pelo ângulo Y. Qual é a menor distância entre os pontos A e B?

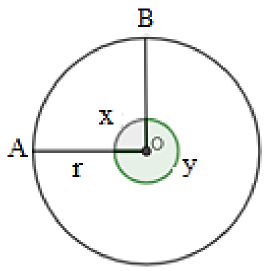


Figura 18

Na resolução, espera-se que o aluno perceba que a menor distância entre dois pontos se dá em linha reta.

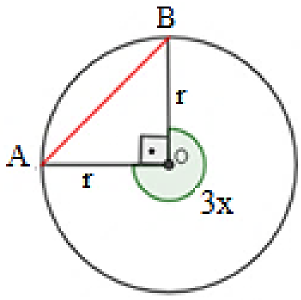


Figura 18a

Recorrendo à exploração do Olhar Inventor para traçar o segmento $\overline{AB}$, provoca-se uma desconstrução figural que ocasiona no surgimento de um triângulo retângulo isósceles. Com as propriedades do triângulo ABC, pode-se determinar a menor distância entre A e B pela relação (Teorema de Pitágoras): $(AB)^2 = r^2 + r^2$.

O Olhar Inventor tornou possível articular as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizar a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D, modificando a figura e suas propriedades.

19 – No desenho abaixo, estão representadas três circunferências que têm, duas a duas, apenas um ponto em comum.

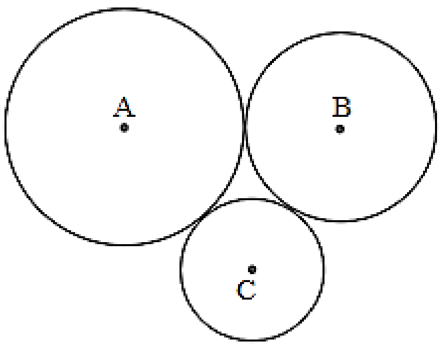


Figura 19

Considerando que os raios das circunferências de centro A, B e C, respectivamente, medem 5 cm, 4 cm e 3 cm, que figura podemos observar ao ligar os pontos A, B e C e quais são as medidas de seus lados?

A resolução dessa atividade requer a exploração do Olhar Inventor ao traçar os raios das três circunferências. Ao considerar que as circunferências 2D são tangentes, duas a duas, podemos visualizar que a união de dois raios 1D ocorre com o traço do Olhar Inventor, possibilitando, também, visualizar como um segmento de reta 1D. Neste caso, temos três segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, que juntos formam um triângulo escaleno 2D, cujos lados 1D podem ser calculados a partir dos raios traçados 1D. Observe a figura abaixo.

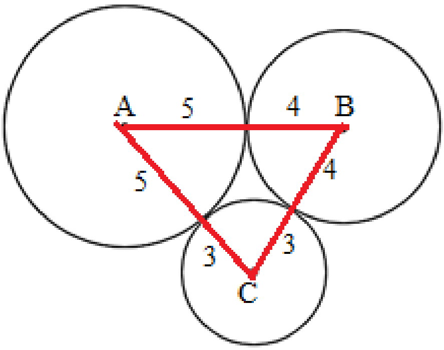
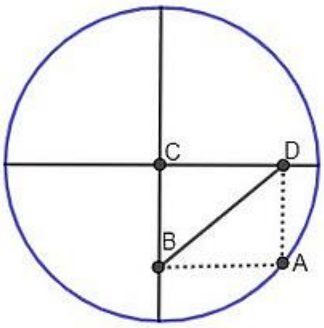


Figura 19a

Temos que os lados 1D medem $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 7$ e $\overline{AC} = 8$.

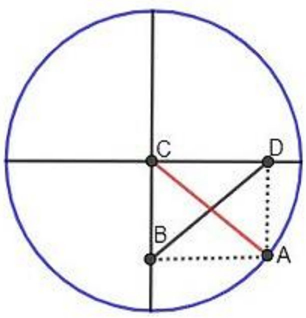
O Olhar Inventor oportunizou articular as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D. Parte do círculo 2D, passando pelo raio 1D até o centro do círculo 0D; partindo do centro do círculo 0D, como vértice do triângulo, e passando pela junção de dois raios 1D, como lado do triângulo ABC em 2D, que surge com a união dos pontos ABC.

20 – Na figura abaixo, consideramos um círculo de raio conhecido e um retângulo ABCD. Nessas condições, o que podemos afirmar sobre a medida do segmento BD?



Fonte: Trevisan (2016, p. 135).

As diagonais do retângulo são equivalentes ao raio da circunferência.

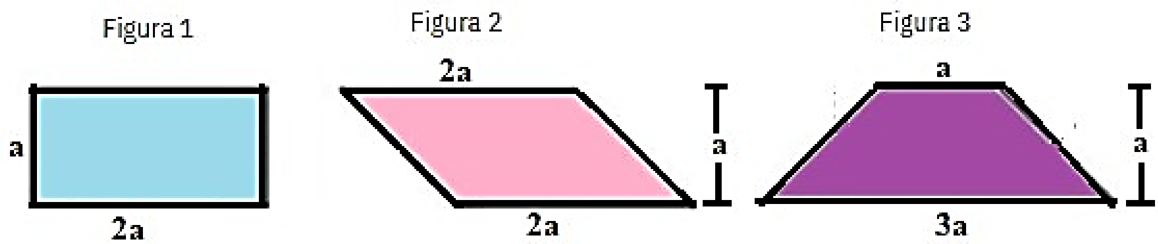


Nesse caso, traçar o segmento $\overline{AC}$ em 1D como estratégia caracteriza, necessariamente, a exploração do Olhar Inventor de Raymond Duval. Note que isso exige modificar a figura, o segmento AC não é dado a ver de imediato na imagem. A exploração do Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D. Com a modificação da figura e de suas propriedades, tornou-se possível visualizar que a diagonal do retângulo ABCD, representada pelo segmento de reta $\overline{AC}$, é equivalente ao raio do círculo.

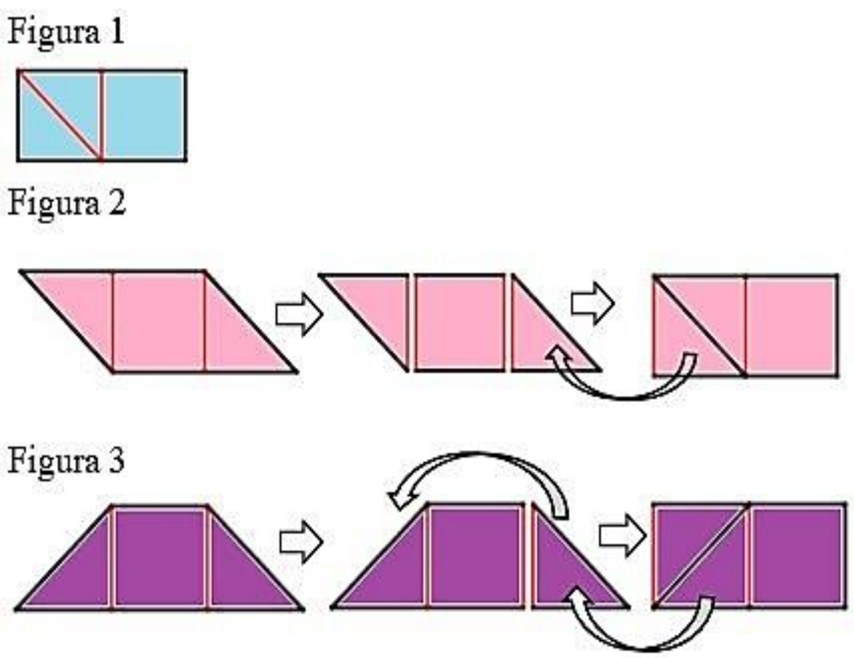
Área

Possíveis habilidades (EF07MA29; EF07MA30; EF07MA31 e EF07MA32)

21 – Os quadriláteros, representados pelas figuras abaixo, possuem a mesma altura. Quais possuem a mesma área? Justifique sua resposta representando por meio de figuras.



Nessa atividade, é esperado que os alunos percebam que todas as figuras são equivalentes porque possuem a mesma área, propriedade essa destacada ao ser explorado o Olhar Inventor que possibilitou atribuir traços na figura dada, surgindo, desse modo, outras figuras e suas propriedades. Observe:



A linha vermelha, nas figuras acima, representa a chance de exploração do Olhar Inventor, que torna possível reconstruir as figuras de modo a visualizar que todas possuem a mesma forma retangular e, logo, a mesma área.

Os traços atribuídos na Figura 2 e na Figura 3 remetem à possibilidade da exploração do Olhar Inventor, propiciando surgir, em ambas as figuras, dois triângulos retângulos congruentes e um quadrado. Inicialmente, na Figura 2 temos um paralelogramo e na Figura 4 um trapézio isósceles, articulando as propriedades que surgiram com o traço, temos a alternativa de fazer a reconstrução figural, unindo os dois triângulos ao tornar coincidentes suas hipotenusas e tornando-as diagonais do quadrilátero formado, que junto com o quadrado formam um retângulo idêntico ao da Figura 1.

Em ambas as figuras a exploração do Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D. Essa visualização tornou-se possível com a modificação da figura e de suas propriedades.

22 – A área da figura destacada em roxo é 35 cm², e seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Determine a área do quadrado.

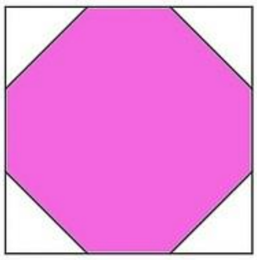
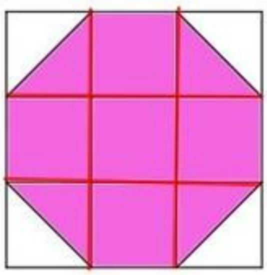


Figura 22

Para solucionar essa atividade, recorremos à exploração do Olhar Inventor e adicionamos dois traços verticais e dois traços horizontais, dividindo o quadrado em 9 quadrados congruentes, conforme mostra a figura abaixo:



Dos 9 quadrados que surgiram após efetuarmos os traços, 4 deles, um em cada canto, tem metade de sua área não colorida. Se considerarmos que cada quadrado colorido formado tem o dobro da área de um triângulo visualizado com a exploração do Olhar Inventor, podemos considerar que a área colorida é composta por 14 triângulos retângulos congruentes, como mostrado na figura abaixo:

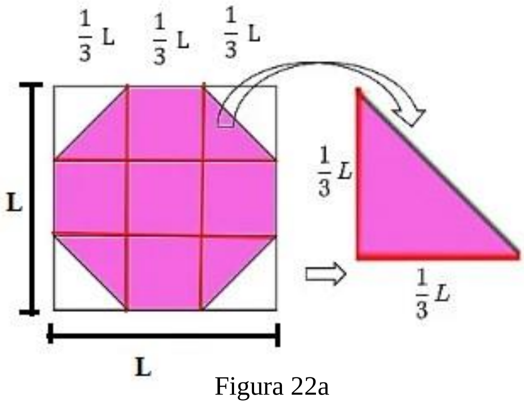


Figura 22a

Usando as propriedades dos triângulos que surgiram após os traços que caracterizam a exploração do Olhar Inventor, calculamos a medida da área A do quadrado maior:

$$\left(\frac{1}{3}\,L\,.\,\frac{1}{3}\,L\right)\frac{1}{2}\,.14 = 35$$

$$\frac{1}{9}\,L^2\,.7 = 35$$

$$L^2 = \frac{35\,.9}{7} \qquad A = L\,.L = L^2$$

$$A = L^2$$

$$L^2 = 45 \qquad A = 45\ cm^2$$

23 – Na figura abaixo temos um quadrado ABCD de centro em O e área medindo 64 cm^2, M é o ponto médio do lado CD. Determine a área da região sombreada.

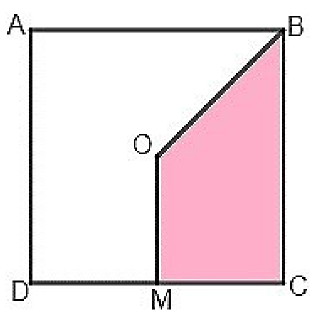


Figura 23

O enunciado relata que o quadrado ABCD tem 64 cm² de área, concluímos que seus lados medem 8 cm pela propriedade da área do quadrado. Para facilitar a resolução dessa atividade, temos a possibilidade da exploração do Olhar Inventor ao traçar dois segmentos de reta ligando os pontos médios dos lados do quadrado, de acordo com a figura abaixo:

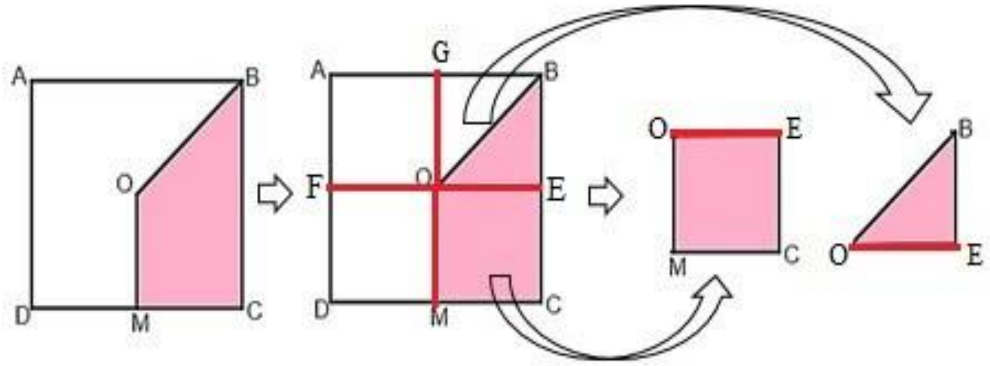


Figura 23a

Os traços que caracterizam a exploração do Olhar Inventor fizeram surgir um quadrado sombreado de lado medindo 4 cm e um triângulo retângulo isósceles sombreado com lados congruentes medindo 4 cm, juntos formam a região sombreada da figura original, a qual temos que calcular sua área para solucionar essa atividade. Assim, usamos as propriedades das figuras não percebidas antes dos traços e calculamos a área da região sombreada:

Área do quadrado OECM:

$A = L_1 . L_1$

$A = 4 . 4 = 16 \text{ cm}^2$

Área do triângulo OBE:

$A = (L_1 . L_1) / 2$

$A = (4 . 4) / 2 = 8 \text{ cm}^2$

Temos que a área da figura sombreada é

$A_{\text{total}} = A_{\text{quadrado}} + A_{\text{triângulo}}$

$A_{\text{total}} = 16 + 8 = 24 \text{ cm}^2$

Ressaltamos que a exploração do Olhar Inventor facilita a resolução dessa atividade por articular as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D. Com a modificação da figura e suas propriedades, é possível visualizar um quadrado e um triângulo retângulo isósceles, potencializando a resolução da atividade mesmo não sendo a única possibilidade. De outra maneira, poderíamos chegar à solução calculando a área do trapézio retângulo, fazendo: $A = \frac{(B+b)h}{2}$.

24 – Analise o quadrado EFGH, representado na Figura 24, e calcule sua área. Considere que E, F, G, H são pontos médios do lado do quadrado ABCD.

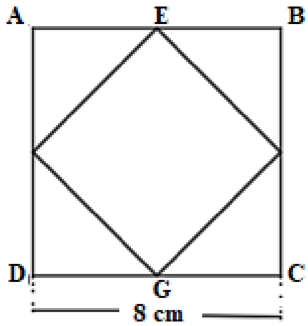


Figura 24

Com essa atividade temos a possibilidade de explorar o Olhar Inventor ao unir os pontos médios H e F do lado do quadrado, temos a possibilidade, também, de visualizar dois triângulos congruentes ΔEFH e ΔFGH. Os dois triângulos têm em comum o segmento $\overline{HF}$, que representa a base dos triângulos, ao traçarmos a altura de um dos triângulos, como exemplo, o triângulo EFH, unindo o ponto médio da base até o ponto E, é possível visualizar que a figura do triângulo isósceles se transformou em dois triângulos retângulos cujos catetos possuem, como medida, 4 cm, como mostra a figura abaixo:

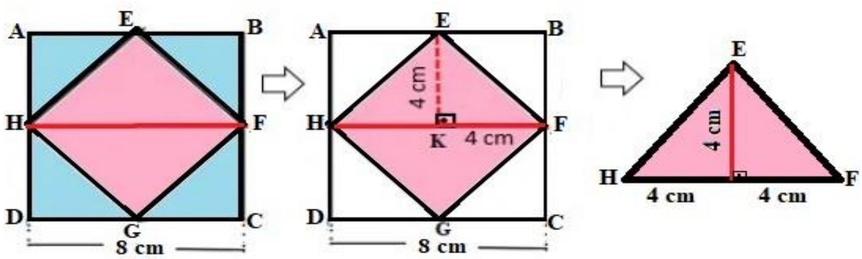


Figura 24a

Considera-se, nesse momento, para o cálculo de área, o ΔHEF, cuja altura é representada por $\overline{EK}$ igual a metade da medida $\overline{AD}$. Então temos: altura = $\overline{EK}$ = 4 cm e base = $\overline{HF}$ = 8 cm.

$$A_{\Delta} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{8.4}{2} = \frac{32}{2} = 16\,m^2$$

→ área (ΔHEF + ΔHGF) = área do quadrado EFGH temos que:

ΔHEF = ΔHGF logo a área ΔHEF + ΔHGF = 16 + 16 = 32 m².

$$\therefore A_{EFGH} = 32\,m^2$$

A exploração do Olhar Inventor articulou as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, mobilizando a desconstrução dimensional de 2D →1D → 0D →1D → 2D. Isso tornou possível visualizar os dois quadrados ao modificar em triângulos e, assim, surgir novas propriedades como mecanismo facilitador da resolução dessa atividade.

Gostaríamos de convidá-lo a contribuir com sua experiência na avaliação do nosso Material Didático. Acreditamos que, a sua perspectiva como educador, é fundamental para garantir a qualidade e a eficácia do conteúdo que desenvolvemos.

Para participar da avaliação acesse o QrCode.

Chegamos ao final de nosso trabalho, ao encerrar a Seção IV.

Parabéns!
Continue assim: estudando, pesquisando e aprendendo. Nós acreditamos em você!

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Aprova Brasil**: Matemática, Ensino fundamental: anos finais, organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora executiva Virginia Aoki – 3 ed. – São Paulo: Moderna, 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC 2020. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 15 out. 2023.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática: Ensino Fundamental II. 2.ed. São Paulo: Ática, 2015. 88 p.

DUVAL, R. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D A. **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. Les conditions conitives de l'aprentissage de La geometrie: développement de La visualisation, différenciation dês raisonnements et coordination de leus fonctionnements. **Annales de Didactique e de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 24, n.1, p. 582-610, 2022. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/55409/39459. Acesso em: 27 jun. 2022.

HILLESHEIM, S. F.; MORETTI, M. T. Elementos transversais para a aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta de currículo possível. Revista Eletrônica de Educação Matemática. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 15, n. 1, p. 1-20, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e70277/42917. Acesso em: 17 jun. 2022.

TREVISAN, E. P. **Um estudo sobre a Articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de Geometria com professores da rede pública**. 2016. 257 p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2016.

ZATTONI, R.; CARVALHO, T. D. **Maxi**: 7º ano. Ensino fundamental, anos finais: caderno 3. Matemática. 1ª ed. São Paulo: Obá Editorial, 2021.

CLAUDIA MARIA MORO
EBERSON PAULO TREVISAN

EXPLORANDO O OLHAR INVENTOR EM ATIVIDADE DE GEOMETRIA

CADERNO DO ALUNO

SINOP/MT
2023

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) aluno(a),

Esse caderno de atividades de geometria, que tem a possibilidade ou requer a exploração do Olhar Inventor na resolução das atividades, é destinado a você. O seu objetivo é contribuir para a ampliação do processo de aprendizagem de geometria, visando possibilitar a construção do conhecimento de forma significativa ao oferecer uma prática educativa embasada em princípios da TRRS no Ensino de Geometria.

As Sequências Didáticas foram elaboradas tendo como ponto de partida atividades de geometria mapeadas do Material Estruturado (Zattoni; Carvalho, 2021; Brasil, 2019). Este caderno está organizado em quatro seções, sendo elas: como explorar o Olhar Inventor, o Tangram como possibilidade de exploração do Olhar Inventor e sua potencialidade, atividade mapeada do Material Estruturado e atividades complementares de geometria, visando permear os vários objetos de conhecimento previstos para ensino de geometria na BNCC (Brasil, 2017) e DRC/MT (Mato Grosso, 2018).

As atividades têm a possibilidade de serem respondidas no próprio material.

Esperamos motivá-los aos estudos.

Vamos começar?

Para resolver cada atividade você deverá seguir essas orientações:

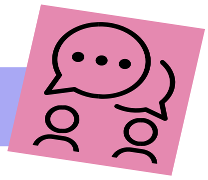
1. Compreender a atividade

. Realize uma leitura completa da atividade.
. Leia novamente, para compreender o que está sendo proposto e solicitado na atividade.

 # Dica:

. Destacar os dados que nos são fornecidos.
. Quais são as condições ou restrições?
. As informações fornecidas são suficientes?

2. Elaborar um plano



. Alguma vez resolveu essa atividade ou semelhante?
. Que estratégias são possíveis na resolução dessa atividade.

 # Dica:

. Desenhe uma figura ou esquema.
. Separe os dados em partes, tente responder a pergunta da atividade.

3. Executar o plano

. Coloque teu plano em ação, verificando sempre os passos executados.

 # Dica:

. Seja paciente e cuidadoso.

4.Verificar os resultados

. Momento de revisar a solução encontrada.

 # Dica:

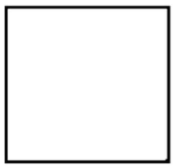
. Faça uma retrospectiva de todos os seus passos.

ÍNDICE DE ATIVIDADE

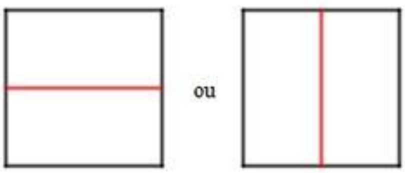
Olá, alunos! Vamos iniciar nossas atividades?
Nosso tema é como explorar o Olhar Inventor em atividades de geometria.
Você sabe o que significa?

Quando atribuímos traços em uma figura, temos a possibilidade de visualizar outras figuras, observe.

Na figura abaixo temos um quadrado.



Que ao desenhar um simples traço, por exemplo, o que representa o segmento de reta que une os pontos médios dos lados opostos do quadrado, nos permite a possibilidade de visualizar outras figuras com outras propriedades, aqui em especial dois retângulos congruentes.



Se traçarmos a diagonal do quadrado?

Teremos dois triângulos retângulos.

Isso mesmo, teremos dois triângulos retângulos.

Vamos tentar?

Utilize as figuras abaixo para fazer a representação do traço.

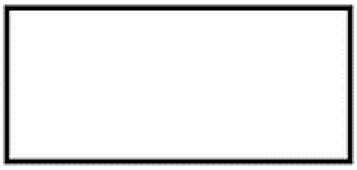
Agora, explore o Olhar Inventor no quadrado abaixo de maneira a visualizar dois triângulos congruentes. Caso seja necessário desenhe outros quadrados para outras possíveis representações.

Atribua dois traços no quadrado a seguir, oportunizando surgir triângulos não congruentes e suas propriedades.

E os trapézios?

Explore o Olhar Inventor afim de visualizar trapézios congruentes ao desenhar um traço nos quadrados.

1 – Ao traçar a diagonal de um retângulo, o que podemos observar?

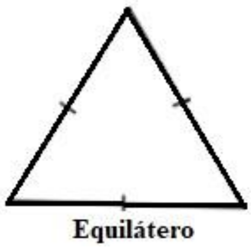


2 – Dada as figuras de um retângulo, desenhe um traço para obter duas figuras congruentes. Escreva o que foi possível ser visualizado a partir desse traço.

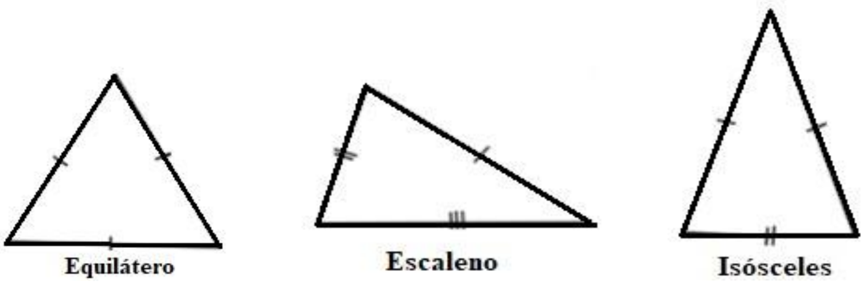
Triângulos

Ao explorar o Olhar Inventor na figura de um triângulo, podemos fazer surgir figuras congruentes e não congruentes.

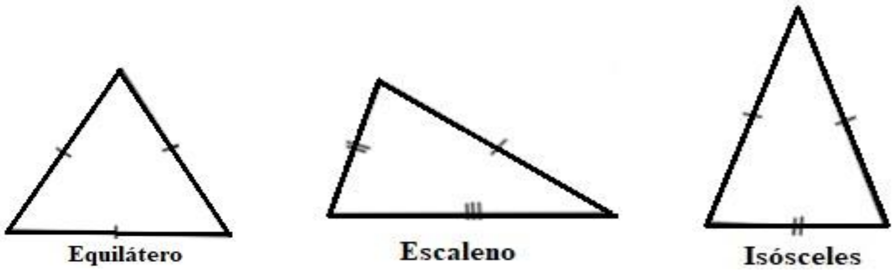
Em um triângulo equilátero ligue os pontos médios de seus lados de modo a surgir outras figuras congruentes. Surgirão dois triângulos retângulos escalenos congruentes e suas propriedades.



Explore o Olhar Inventor nos triângulos a seguir, atribuindo um traço de modo a surgir dois outros triângulos quaisquer.

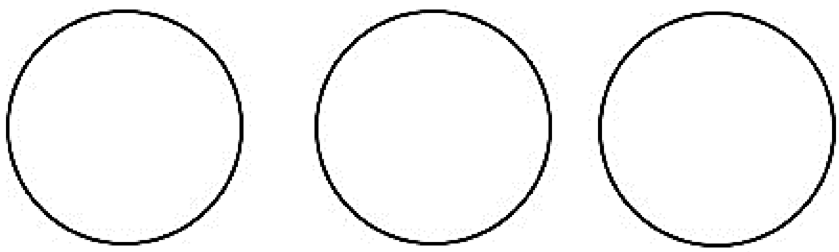


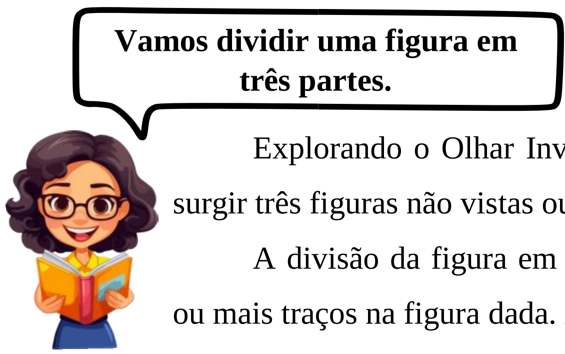
Agora atribua um traço nos triângulos abaixo de modo que surjam outras figuras quaisquer.



Círculo

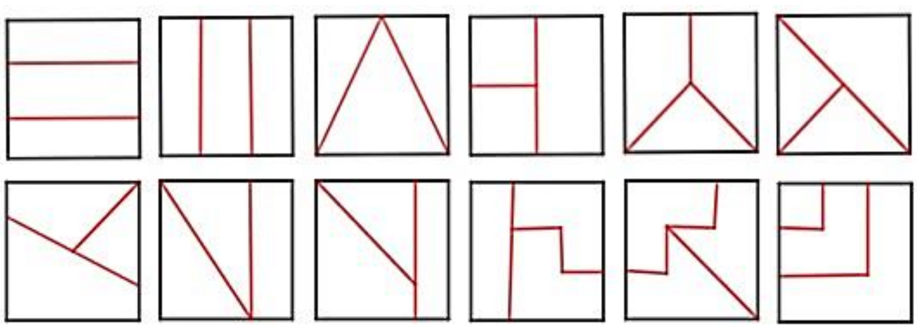
Ao explorar o Olhar Inventor no círculo, temos a chance de representar os elementos do círculo (diâmetro, raio e corda). Em cada figura abaixo, explore o Olhar Inventor de modo que seja visível um desses elementos.





Explorando o Olhar Inventor, inserindo traços em um quadrado, pode-se surgir três figuras não vistas ou percebidas antes.

A divisão da figura em três partes pode ocorrer quando desenhamos dois ou mais traços na figura dada. Apresentamos a seguir algumas possibilidades:



Nesse exemplo, a exploração do Olhar Inventor ocorre duas ou mais vezes ao dividir a figura em subfiguras. A cada traço atribuído à figura, surge uma nova figura e suas propriedades, oportunizando uma nova exploração do Olhar Inventor.

Observe as figuras apresentadas anteriormente e responda:

a) Quando desenhamos dois traços no quadrado, o que podemos observar?

____

b) Quais figuras geométricas são visualizadas ao desenhar dois traços no quadrado?

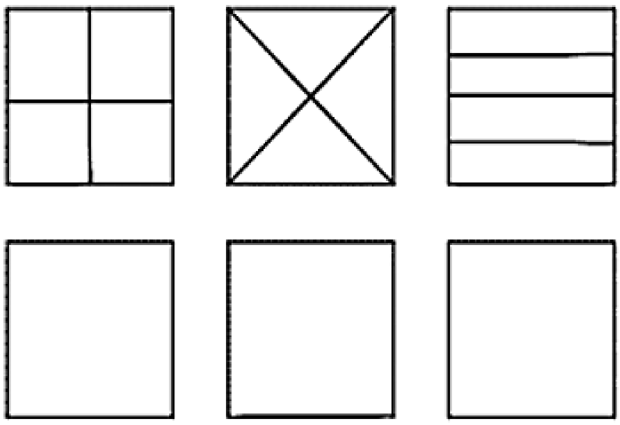
____

c) E quando desenhamos três ou mais traços no quadrado, dividindo-o em três partes, o que podemos observar?

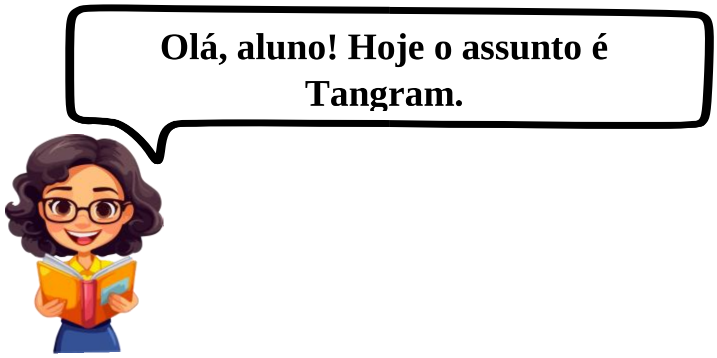
____

Vamos ao desafio?
Divida cada um dos quadrados em quatro partes iguais de uma forma diferente das mostradas na figura.

Desafio 1



Chegamos ao final da Seção I.
Esperamos que tenham gostado!



Atividades com o Tangram

1 – Usando régua, lápis e papel, construa o Tangram seguindo o passo a passo.

1º passo: Construir um quadrado ABCD de lado medindo 10 cm;

2º passo: Trace o segmento $\overline{AC}$, diagonal do quadrado ABCD;

3º passo: Represente os pontos E e F como pontos médios dos lados ou dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente. Desenhe um segmento $\overline{EF}$ unindo os pontos E e F;

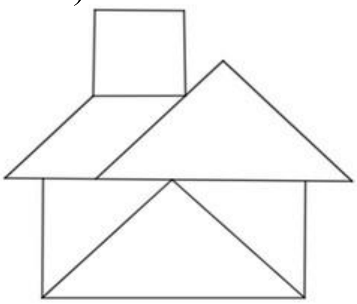
4º passo: Marque os pontos G e H como pontos médios dos lados $\overline{EF}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Trace $\overline{BG}$ passando por H e unindo o ponto B ao ponto G;

5° passo: Marque o ponto I como ponto médio do segmento $\overline{AH}$ e trace o segmento $\overline{GI}$ unindo os pontos G e I;

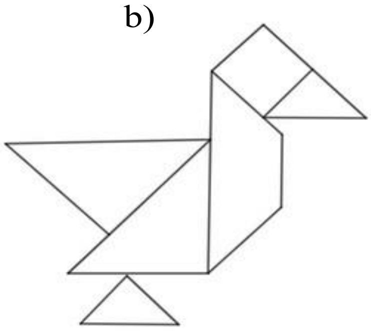
6° passo: Marque o ponto J como ponto médio do segmento $\overline{CH}$e trace o segmento $\overline{FJ}$ unindo os pontos F e J.

2 – As figuras a seguir serão construídas recorrendo às 7 (sete) peças do Tangram, desenhe as peças que faltam ser representadas em cada figura (O uso do material concreto pode ajudar).

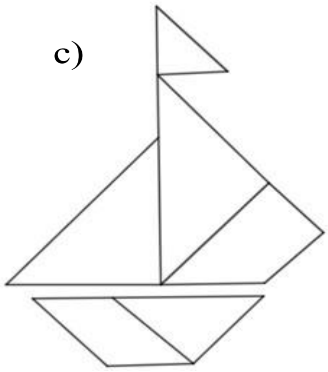
a)



b)

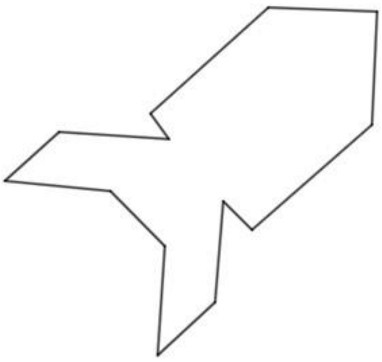


c)

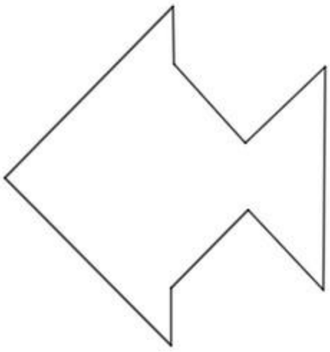


3 – De que maneira podemos destacar as 7 (sete) peças do Tangram nas figuras abaixo?

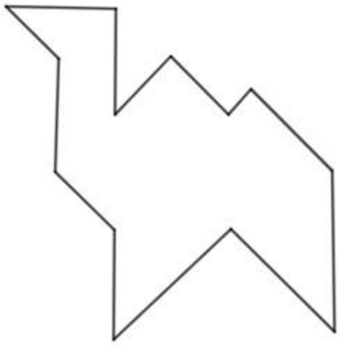
a)



b)



c)



4 – Observe as figuras construídas a partir do Tangram e responda:

a) Qual a área de cada figura?

b) Escolha uma entre as três figuras e descreva de que maneira você determinou a área.

Sequência de Atividades

1 – Determine as medidas x e y em cada figura a seguir, sabendo que r//s.

a)

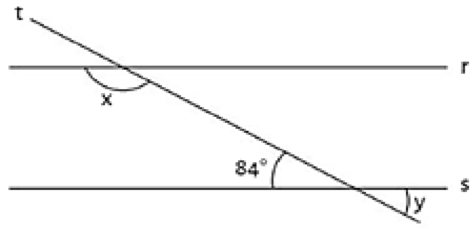


Figura 1a

b)

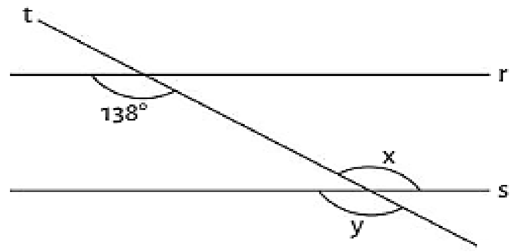


Figura 1b

2 – Na Figura 2 a seguir, sendo r//s, calcule os valores de x, a e b.

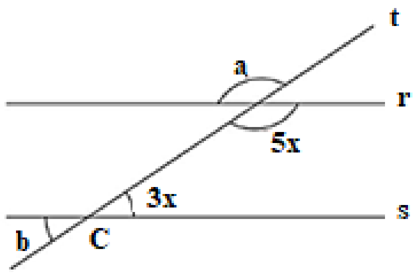


Figura 2

3 – Em cada figura, determine as medidas desconhecidas.

a)

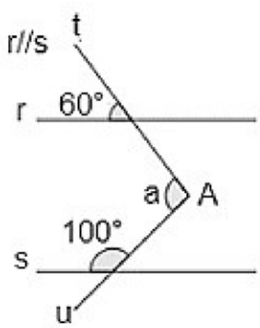


Figura 3a

b)

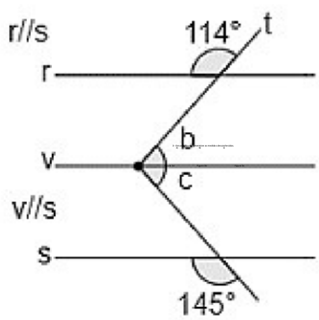


Figura 3b

c)

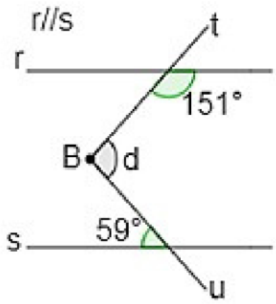


Figura 3c

4 – Dadas as retas paralelas r e s, calcule o valor da expressão z + x − y.

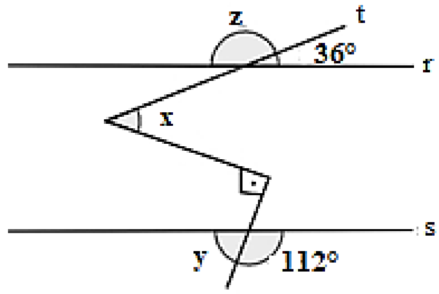
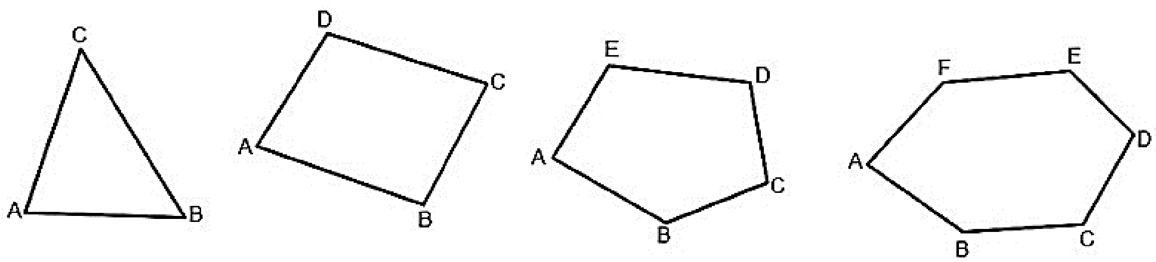


Figura 4

5 – A medida do raio de um disco de vinil é de 15 cm. Para colocá-lo em uma capa de forma quadrada, qual a medida mínima do lado da capa, de modo que o disco de vinil fique guardado nela?

Figura 5

6 – A seguir temos um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e um hexágono.



a) Trace todas as diagonais que partem do vértice A de cada um dos polígonos.

b) Complete a tabela a seguir com essas quantidades.

Polígono	**Quantidade de lados (n)**	**Quantidade de diagonais que partem de um único vértice**
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Polígono qualquer		

7 – A logomarca da empresa Versátil é representada por um polígono com a inicial da empresa fazendo parte dele. Os triângulos de cores azuis são congruentes, e o triângulo verde é equilátero. Determine as medidas dos ângulos indicados por x e y na logomarca.

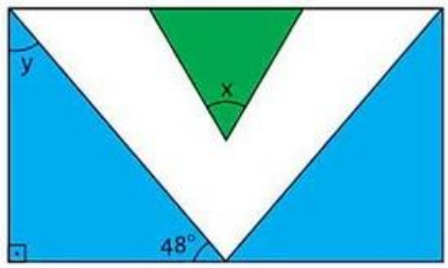


Figura 7

8 – Observe o quadrilátero a seguir e as medidas de seus ângulos internos.

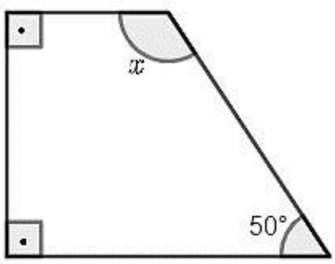


Figura 8

9 – Uma folha com a forma de um paralelogramo foi dividida ao meio, obtendo-se os 2 triângulos a seguir.

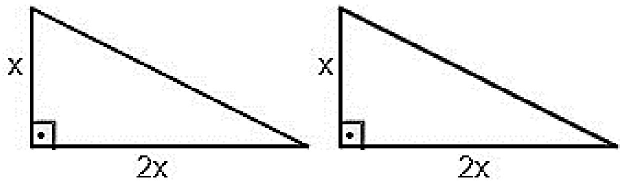


Figura 9

Represente no espaço a seguir o paralelogramo que foi dividido ao meio.

Triângulos

1 – Para obter a soma dos ângulos internos de um triângulo sem utilizar o transferidor, siga as orientações abaixo.

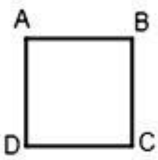
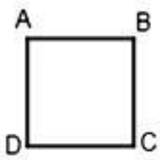
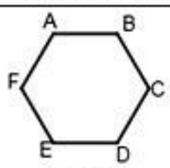
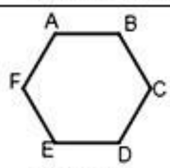
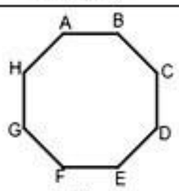
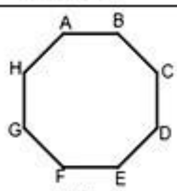
Passo 1 – Desenhe um triângulo ABC qualquer, e pinte os ângulos internos;
Passo 2 – Recorte o triângulo em três partes, de modo que cada parte contenha um ângulo;
Passo 3 – Junte os ângulos um do lado do outro.

Observe a figura que você desenhou utilizando os três passos acima e responda:

a) O que podemos concluir sobre os ângulos internos de um triângulo?

b) Qual é a denominação do ângulo formado na figura pela junção dos três ângulos?

2 – Divida cada polígono regular em triângulos com segmentos partindo de um único vértice. Depois, descubra a medida da soma de ângulos internos e a medida de cada ângulo interno do polígono. Os triângulos formados têm alguma relação com a soma dos ângulos internos dos polígonos?

Polígono	Número de triângulos formados	Soma dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno (a_i)
 Quadrilátero	 Quadrilátero		
 Hexágono	 Hexágono		
 Octógono	 Octógono		

3 – A primeira versão da moeda brasileira real, no valor de R$ 0,25, que usamos atualmente, tinha um heptágono regular em suas faces, conforme ilustração abaixo.

Moeda da 1ª família (1994 – 1997)

Moeda da 2ª família (1998 – atualmente)

Divida a figura do heptágono em triângulos com base em único vértice e determine a soma dos ângulos internos.

4 – O triângulo ABC, a seguir, tem, como medida do perímetro, 36 cm. Determine a sua área sabendo que $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} = 10\ cm$.

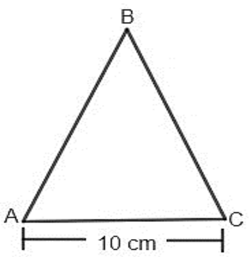


Figura 4

5 – Em um trapézio retângulo ABCD, o lado AD mede 8 cm, conforme mostra a figura.

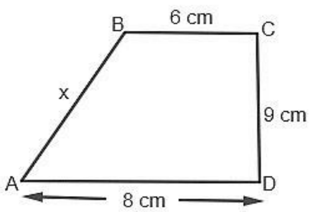
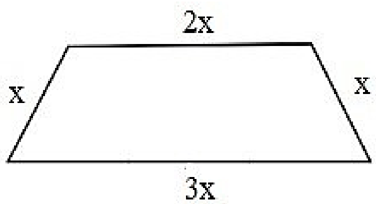


Figura 5

Determine, a seguir, a medida de x no trapézio isósceles, sabendo que x é a medida do lado AB.

6 – Dado o trapézio isósceles, a seguir, divida a figura de modo que seja visível seis triângulos equiláteros.



Polígonos

Figura 6

7 – Decomponha um quadrado em duas partes iguais e, com as partes obtidas, componha um triângulo.

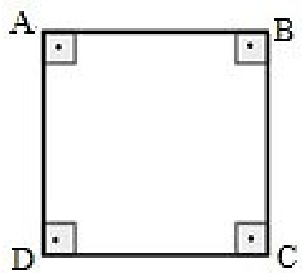


Figura 7

8 – Com um retângulo, cujas medidas são 6 cm e 10 cm, de que maneira é possível transformar essa figura em dois losangos de mesma área?

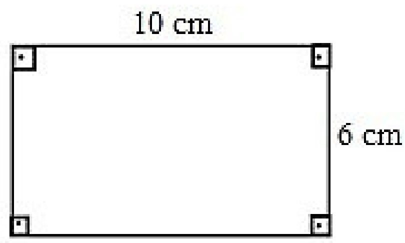


Figura 8

9 – A figura abaixo mostra um polígono irregular ABCDE. Determine a medida, em graus, do ângulo x.

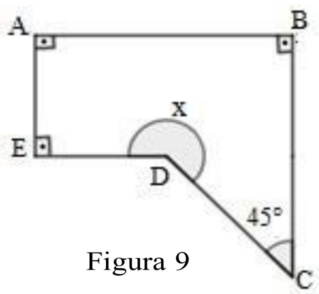


Figura 9

10 – Determine a medida do ângulo x do polígono abaixo:

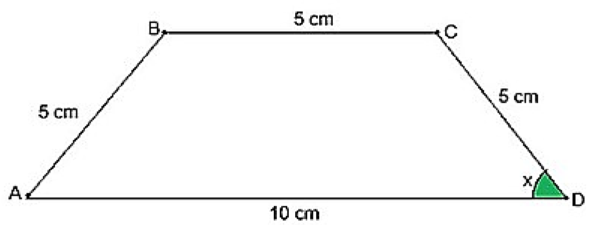


Figura 10

Transformações Geométricas

11 – A figura abaixo mostra um trapézio retângulo ABCD.

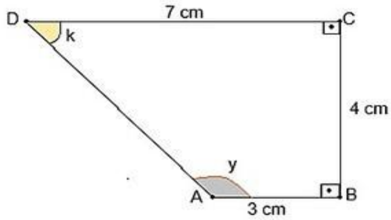


Figura 11

Qual a medida, em graus, do ângulo k?

12 – Analisando o polígono ABCDE abaixo, o que podemos afirmar sobre as medidas dos ângulos x e y?

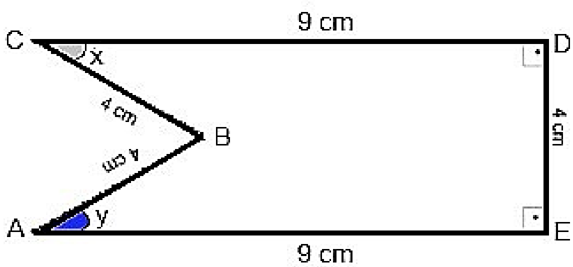
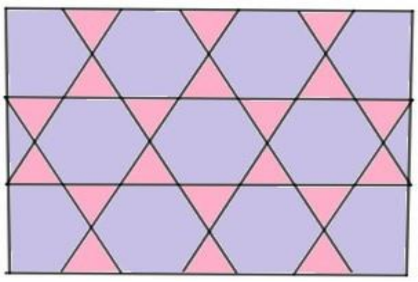


Figura 12

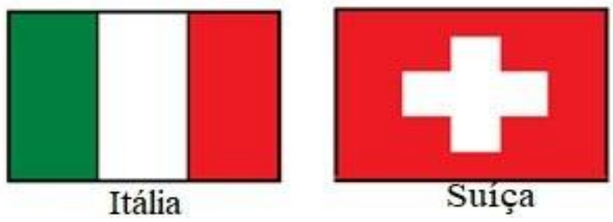
13 – Para o ladrilhamento de uma parede foram utilizadas cerâmicas para a construção do mosaico, que é composto por alguns polígonos representados na figura abaixo.


Fonte: Adaptado de Dante (2015, p.88).

a) Observe as figuras do mosaico e desenhe o que podemos ver.

b) Quais são as figuras geométricas utilizadas no padrão para a construção desse mosaico?

14 – Observe as bandeiras dos países: Itália e Suíça.



Determine quantos eixos de simetria tem cada uma das bandeiras.

15 – Trace apenas 3 linhas retas sobre a figura abaixo de modo a obter o maior número possível de triângulos.

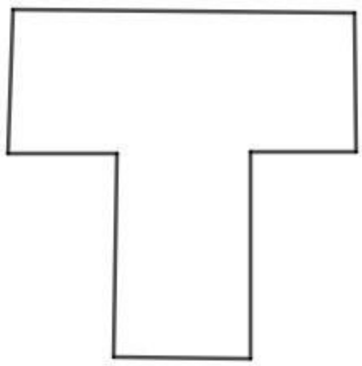
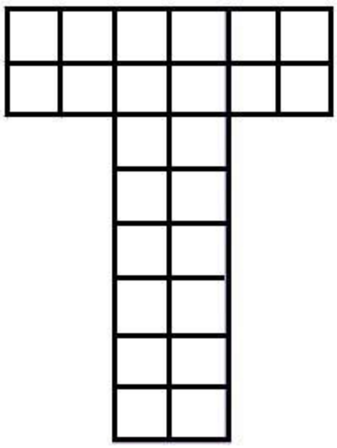


Figura 15

16 – Considere a figura abaixo e decomponha-a em quatro partes iguais.



Circunferência

17 – A figura abaixo mostra um círculo de centro em C de corda $\overline{BD}$, e um losango ABCD. Nessas condições, o que podemos afirmar sobre a diagonal menor do losango?

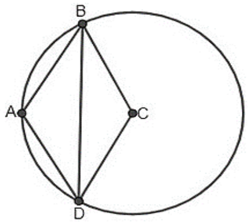


Figura 17

18 – No círculo abaixo de raio r, o arco AB, formado pelo ângulo X, é três vezes menor que o arco formado pelo ângulo Y. Qual é a menor distância entre os pontos A e B?

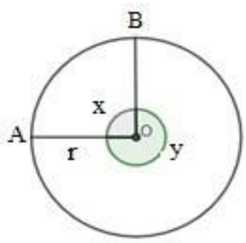


Figura 18

19 – No desenho abaixo estão representadas três circunferências que têm, duas a duas, apenas um ponto em comum.

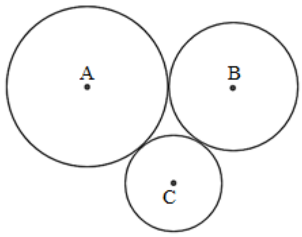
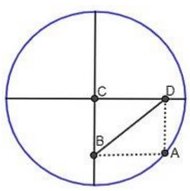


Figura 19

Considerando que os raios das circunferências de centro A, B e C, respectivamente, medem 5 cm, 4 cm e 3 cm, que figura podemos observar ao ligar os pontos A, B e C e quais são as medidas de seus lados?

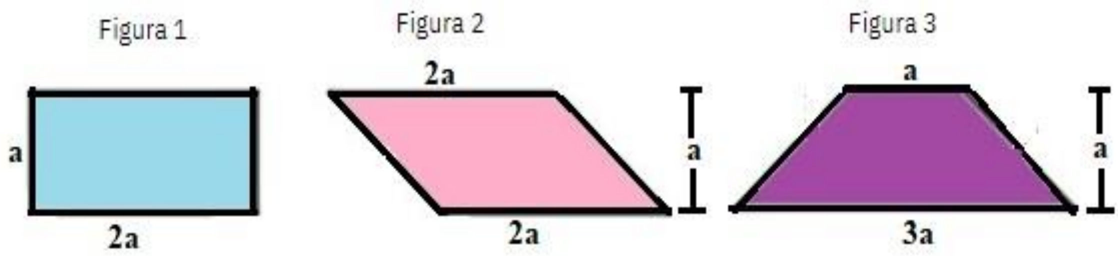
20 – Na figura abaixo, consideramos um círculo de raio conhecido e um retângulo ABCD. Nessas condições, o que podemos afirmar sobre a medida do segmento $\overline{BD}$?



Fonte: Trevisan (2016, p 135).

Área

21 – Os quadriláteros representados pelas figuras abaixo possuem a mesma altura. Quais possuem a mesma área? Justifique sua resposta representando por meio de figuras.



22 – A área da figura destacada em roxo é 35 cm², e seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais, determine a área do quadrado.

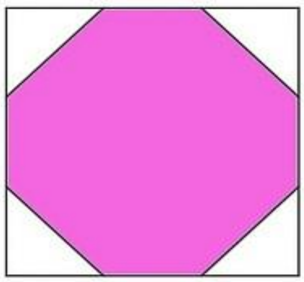


Figura 22

23 – Na figura abaixo temos um quadrado ABCD de centro em O e área medindo 64 cm^2, M é o ponto médio do lado CD. Determine a área da região sombreada.

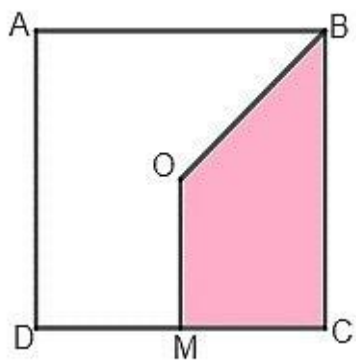


Figura 23

24 – Analise o quadrado EFGH, representado na Figura 24, e calcule sua área. Considere que E, F, G, H são pontos médios do lado do quadrado ABCD.

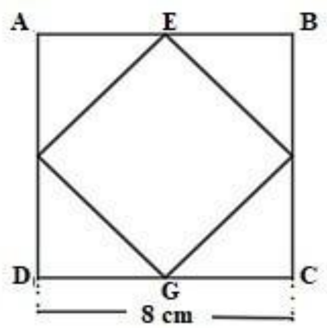


Figura 24