Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental

TATIANE TENÓRIO GONÇALVES

ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

BELÉM/PA
2024

Tatiane Tenório Gonçalves

Ensino de Razão e Proporção por meio de Atividades Experimentais

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o ensino de matemática no nível fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

BELÉM/PA
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G635e Gonçalves, Tatiane Tenório
Ensino de Razão e Proporção por meio de Atividades Experimentais / Tatiane Tenório Gonçalves. — Belém, 2024.
293f. : color.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2024.

1. Ensino de matemática. 2. Engenharia didática. 3. Atividades experimentais. 4. Razão e proporção. I. Título.

CDD 22.ed. 510

Tatiane Tenório Gonçalves

Ensino de Razão e Proporção por meio de Atividades Experimentais

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data de aprovação: 03/09/2024

Banca examinadora

gov.br
Documento assinado digitalmente
PEDRO FRANCO DE SA
Data: 03/10/2024 14:52:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

______________________________________. Orientador

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

gov.br
Documento assinado digitalmente
ROBERTO PAULO BIBAS FIALHO
Data: 03/10/2024 09:22:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____________________________________. Examinadora (Interno)

Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Doutor em Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

gov.br
Documento assinado digitalmente
HECTOR JOSE GARCIA MENDOZA
Data: 06/09/2024 12:00:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____________________________________. Examinador (Externo)

Prof. Dr. Héctor José García Mendoza
Doutor em Educação – Universidade de Jaén
Universidade Federal de Roraima / UFRR

Belém – PA
2024

Dedico a minha família pelo incentivo e paciência, principalmente a meus pais, Natalina e Alonso, minha filha Daniele e meu companheiro Diego.

Agradecimento

➢ A Deus por ter segurado firmemente em minhas mãos nas horas difíceis, e até aqui me sustentar.

➢ A meus familiares, que sempre torceram pelo meu sucesso, especialmente meus pais Natalina e Alonso, por me incentivaram na busca por conhecimento, investirem na minha educação e acreditarem em meu potencial.

➢ A meu companheiro Diego, por acreditar em mim, me dá apoio e dividir comigo as batalhas diárias e noites de ansiedade nesta jornada.

➢ A minha filha Daniele por ser minha razão de tudo que quero conquistar, a força que me impulsiona e me dá apoio para seguir em frente

➢ A minha sobrinha Naylane, por me apoiar e contribuir na revisão desta dissertação.

➢ A Universidade do Estado do Pará pela oportunidade.

➢ Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UEPA

➢ Ao meu orientador Prof.º Dr. Pedro Franco de Sá, pelas orientações e por compartilhar tanto conhecimento sempre de forma cordial e generosa.

➢ Aos membros da banca avaliadora, Prof.º Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho e Prof.º Dr. Héctor José García Mendoza, pelas considerações e avaliação no texto da qualificação que muito contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

➢ A Secretária de Educação do Estado do Pará, por me conceder licença para que eu pudesse aprimorar ainda mais, minha prática de ensino.

➢ A Secretária Municipal de Educação do município de Novo Repartimento, a direção e coordenação da escola E.M. E. F Prof.ª Raimunda Tavares por me apoiarem neste projeto e viabilizar a aplicação da pesquisa.

➢ Aos meus colegas, docentes da turma em que apliquei a pesquisa, por cederem em alguns momentos seu tempo de aula para que eu pudesse desenvolver a pesquisa.

➢ A todos os docentes do curso deste mestrado que contribuíram de forma significativa com seus ensinamentos durante as disciplinas.

➢ Aos colegas da turma de 2022, pelos bons momentos vivenciados e compartilhamentos produtivos.

RESUMO

GONÇALVES, Tatiane Tenório. **Ensino de Razão e Proporção por meio de Atividades Experimentais.** Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2024.

Este trabalho apresenta resultados de um estudo que teve como objetivo analisar possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino por atividades experimentais de Sá e Mafra para o ensino de razão e proporção sobre o aprendizado de resolução de problemas de estudantes do 9º ano do ensino fundamental Utilizamos como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática de Michele Artigue, constituída em etapas metodológicas, a qual temos: a 1ª fase, análises prévias, onde apresentaremos como se deu a escolha do objeto matemático, referenciais teóricos que fundamentam e conceituam a teoria da atividade, o ensino por atividades experimentais, a teoria dos registros de representação semiótica, resolução de problemas, a taxonomia de Bloom, os aspectos: históricos; matemáticos e curriculares, estudos sobre o ensino-aprendizagem de razão e proporção. Na 2ª fase, concepção e análise a priori, apresenta a sequência de atividades experimentais compostas por 13 atividades de ensino, sugerida para a fase da experimentação que foi aplicada em outubro e novembro de 2023 para 32 estudantes do nono ano do ensino fundamental, em uma escola da rede de ensino pública de Novo Repartimento-Pará. Ainda apresenta o pré-teste e pós-teste, bem como as análises a priori de todas as questões dos testes e de cada atividade da sequência, além das expectativas para as análises a posteriori em relação aos testes e cada uma das atividades, na 3ª fase, a experimentação, está descrito como ocorreu a experimentação e apresenta os dados observados. E por fim a última fase – 4ª fase, a análise a posteriori e validação, comparamos as análises a priori com os resultados da experimentação, e os resultados encontrados do desempenho dos estudantes nas atividades foram positivos, em relação ao desempenho nos testes os resultados do pré-teste foram insuficientes, entretanto os resultados do pós-teste foram satisfatórios. Os erros mais comuns evidenciados na resolução das situações problemas do teste, decorreu de erros procedimentais e de atenção. E o tempo da aplicação das atividades mostrou que a tendência é de uma diminuição deste tempo em atividades com as mesmas características. Tendo, portanto, o ensino de matemática por atividades experimentais efeitos positivos, pois possibilitou o amadurecimento cognitivo em relação ao conteúdo de razão e proporção, favorecendo a motivação, estimulando a elaboração de reflexões, a autoconfiança na resolução de situações/problemas por meio de redescoberta seja em grupo ou individualmente. As atividades da sequência didática aplicadas em sala de aula e validadas experimentalmente e pela banca avaliadora desta pesquisa, tornaram-se um produto educacional, intitulado “caderno de atividades para ensinar razão e proporção”.

Palavras-chave: Engenharia didática; Ensino de Matemática; Atividades Experimentais; Ensino de Razão e Proporção.

ABSTRACT

GONÇALVES, Tatiane Tenório. **Teaching Reason and Proportion through Experimental Activities**. Dissertation of the Postgraduate Program in Mathematics Teaching – State University of Pará, Belém, 2024.

This work presents the results of a study that aimed to analyze possible effects of applying a didactic sequence based on teaching through experimental activities by Sá and Mafra for teaching ratio and proportion on the problem-solving learning of students in the 9th year of elementary education We used Didactic Engineering by Michele Artigue as a research methodology, constituted in methodological stages, which we have: the 1st phase, previous analyses, where we will present how the mathematical object was chosen, theoretical references that substantiate and conceptualize the theory of activity, teaching through experimental activities, the theory of registers of semiotic representation, problem solving, Bloom's taxonomy, the: historical aspects; mathematical and curricular studies, studies on the teaching-learning of ratio and proportion. In the 2nd phase, conception and a priori analysis, it presents the sequence of experimental activities composed of 13 teaching activities, suggested for the experimentation phase that was applied in October and November 2023 to 32 students in the ninth year of elementary school, in a school in the public education network of Novo Repartimento-Pará. It also presents the pre-test and post-test, as well as the a priori analyzes of all the test questions and each activity in the sequence, in addition to the expectations for the a posteriori analyzes in relation to the tests and each of the activities, in the 3rd phase, experimentation, describes how the experimentation took place and presents the observed data. And finally, the last phase - 4th phase, the a posteriori analysis and validation, we compared the a priori analyzes with the results of the experimentation, and the results found regarding the students' performance in the activities were positive, in relation to the performance in the tests, the results of the pre-test were insufficient, however the post-test results were satisfactory. The most common errors evidenced in resolving test problem situations resulted from procedural and attention errors. And the time spent implementing activities showed that the tendency is for this time to decrease in activities with the same characteristics. Therefore, teaching mathematics through experimental activities had positive effects, as it enabled cognitive maturity in relation to the content of ratio and proportion, favoring motivation, stimulating the elaboration of reflections, self-confidence in solving situations/problems through rediscovery whether in a group or individually. The activities of the didactic sequence applied in the classroom and validated experimentally and by the evaluation committee of this research, became an educational product, entitled “activity notebook to teach reason and proportion”

Keywords: Didactic engineering; Teaching Mathematics; Experimental Activities; Teaching Ratio and Proportion.

Lista de gráficos

Listra de quadros

Lista de tabelas

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É comum ouvirmos muitos alunos dizerem que uma das disciplinas mais difíceis é a de matemática, seja porque obtém notas baixas ou por não compreenderem os conteúdos e isso leva-os a não terem motivação para engajar-se nas atividades de matemática. Entendemos que é necessário encontrarmos meios para que possamos de fato alcançarmos a motivação e consequentemente o aprendizado dos estudantes, pois o aluno motivado pela matemática certamente terá maior atenção e disciplina para com as tarefas de classe e extraclasse.

Em um contexto do ensino de matemática, existe a dificuldade no aprendizado, a não eficiência no ensino e até mesmo a ausência de ensino no que tange ao objeto matemático, razão e proporção, em algumas etapas da escolaridade dos estudantes. Para que possamos colaborar com essas questões realizamos a pesquisa que tem como título “Ensino de Razão e Proporção por meio de atividades experimentais”

Nossa experiência profissional como docentes do ensino fundamental nos fez perceber a ineficácia no ensino de matemática em atingir o aprendizado de uma parcela maior dos educandos e incluir o conteúdo de razão e proporção como prioridade no ensino da educação básica, pois, mesmo que a BNCC já a tenha incluído em sua normativa como conhecimento básico que o aluno deva adquirir, nem sempre isso ocorre, seja por falta de tempo, pelo não domínio do conteúdo, pela falta de metodologia de ensino ou crença de não relevância do objeto matemático em pauta.

Corroboramos com Quitembo e Domingas (2020, p.2) ao dizerem que, “[...]alguns tópicos específicos do conteúdo matemático são colocados no segundo plano por alguns professores por não se sentirem confortados para os ensinar aos seus alunos”. Ademais, Quitembo e Domingas (2020, p.2) acreditam que:

> “[...]as constantes reclamações de professores sobre as debilidades dos alunos, fundamentalmente em relação ao conceito de função, podem estar associadas ao fraco desenvolvimento do conceito de proporcionalidade nas suas diversas formas de utilização[...]”

Terezinha Nunes (2003), em uma entrevista concedida a revista Nova Escola destaca a necessidade do ensino/aprendizagem da proporcionalidade, ao responder à pergunta “Qual é a principal falha do ensino da Matemática hoje?” ela acredita que é o conceito central da matemática:

> “É a proporcionalidade, questão central que envolve tanto frações como multiplicação, está presente em todas as ciências e faz parte do dia-a-dia de qualquer pessoa, seja no trabalho, seja em casa. O conceito, bastante simples na sua origem, nada mais é do que a relação entre duas variáveis. Para compreendê-lo, fazemos uma relação com a multiplicação, mas a escola não. Lá no início da escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação. Mas muitos professores ensinam essa operação básica apenas como uma "adição repetida" de parcelas. E não fazem relação com a noção de proporção. A adição repetida de parcelas não mostra o sentido de proporção que existe por trás dessa conta. Depois, só na 5ª série a proporção aparece, num capítulo isolado” (Terezinha Nunes, 2003).

O fato de o conteúdo de razão e proporção ser tão comumente presente em situações do cotidiano, como no ato de preparar uma receita, ao compararmos o preço e peso de um produto no supermercado e comprarmos o mais vantajoso ou identificar que quanto maior o peso maior o preço, entre outras situações, além disso ainda destacamos o fato do uso da proporcionalidade estar presente em outras disciplinas como a física e química e ainda assim os estudantes terem dificuldades de aprender ou não saberem relacionar as habilidades para aplicar em diversas situações/problemas que cabe seu uso, foram motivos para realizarmos nossa pesquisa dentro desta temática.

Na busca por referências para nossa pesquisa realizamos revisão na literatura, de estudos relacionados ao objeto matemático, razão e proporção, e destacamos autores como Tinoco (2016), Lobato Júnior (2018), Batista (2018), Lacerda (2019), Dellatorre (2021), Lazzarett (2022) entre outros, que já haviam investigado a temática, apresentaremos em outro momento a metodologia utilizada em suas pesquisas e ainda os resultados que obtiveram.

Acreditando que a temática é relevante e torna possível melhorar as condições de ensino e aprendizado de razão e proporção nos ateremos a seguinte problemática: Como o ensino de razão e proporção pode contribuir sobre o aprendizado de resolução de problemas dos estudantes do 9º ano de uma escola pública de Ensino Fundamental no Município de Novo Repartimento/PA?

Como estratégias de busca a resposta da problemática adotamos como objetivo geral: **analisar possíveis efeitos da aplicação de uma sequência**

didática baseada em atividades experimentais para o ensino de razão e proporção sobre o aprendizado de resolução de problemas de estudantes do 9º ano do ensino fundamental. Ainda para contribuir e viabilizar o alcance do objetivo geral, nos ateremos nos seguintes objetivos específicos:

a) Identificar como as atividades experimentais auxiliam no processo de ensino e aprendizagem;

b) Descrever os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino de razão e proporção por meio de atividades experimentais;

c) Analisar o desempenho dos estudantes quanto à aprendizagem do conteúdo antes e depois da aplicação da sequência didática;

d) Elaborar um produto educacional que oriente professores de matemática da educação básica a desenvolverem aulas com atividades experimentais.

Utilizaremos a Engenharia Didática proposta por Artigue (1996) como metodologia de pesquisa, através das etapas: 1ª fase - *análises previas*; 2ª fase - *análises a priori*; 3ª fase - *experimentação*; 4ª fase - *análise a posteriori e validação*, segundo Lopes e Sá (2021, p.4) é pertinente, porque uma “das essências da Engenharia Didática está no cuidado com a ‘ideologia da inovação’ que é perceptível no campo educacional e gera percursos para todo tipo de experiência em sala de aula, independente de fundamentação científica”.

As principais técnicas utilizadas como instrumentos de geração e coleta de dados foram aplicação de questionários de entrevista, testes e aplicação de sequência didática a 32 discentes do 9° ano do ensino fundamental, que ocorreu no ambiente de sala de aula, observação, registros escritos e produções fotográficas.

Para a análise dos dados coletados na pesquisa utilizaremos a abordagem quantitativa-qualitativa (quanti/quali), pois de acordo com Knechtel (2014, p. 106), esta abordagem “[...] interpreta as informações quantitativas por meio de símbolos numéricos e os dados qualitativos mediante a observação, a interação participativa e a interpretação do discurso dos sujeitos (semântica)”. Minayo (2002, p.22) complementa essa relação para uma convergência de abordagens, pois, “O conjunto de dados quantitativos e qualitativos, porém, não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia”.

O *lócus* escolhido para a pesquisa foi uma escola de Ensino Fundamental, situada no Município de Novo Repartimento/PA, lugar onde um dos pesquisadores desempenha suas atividades profissionais, como professora do ensino fundamental anos finais, área de conhecimento de matemática.

A pesquisa está estruturada da seguinte forma: além da introdução, estudos da Engenharia Didática, análises prévias - com uma breve apresentação da historicidade do município em que realizamos a pesquisa, estudos sobre: Teoria da Atividade, ensino de Matemática por Atividades Experimentais – (EMAE), teoria dos Registros de Representação Semiótica, resolução de Problemas, taxonomia de Bloom, aspectos teóricos do conteúdo, aspectos matemáticos de razão e proporção, aspectos curriculares de razão e proporção, estudos do ensino-aprendizagem de razão e proporção com resultados que mostram como o objeto matemático está situado em livros didático e as metodologias ativas que estão sendo utilizadas para ensinar razão e proporção.

As concepções e análises a priori, apresentam a sequência didática[1] os testes propostos e as análises a priori de cada atividade e de cada questão dos testes para o ensino de razão e proporção. A seção da experimentação, versará o momento da aplicação da sequência didática, apresentará o cronograma dos encontros realizados, descreverá os dados das observações realizadas durante os encontros nas sessões de ensino.

A análise a posteriori e validação, descreverá o resultado da análise do grau do desempenho dos estudantes nos testes aplicados, fará um confronto entre as análises a priori e posteriori do pré-teste e pós-teste de cada aluno, ainda descreverá o resultado da análise de cada atividade realizada pelos estudantes, utilizaremos o Teste Exato de Fisher para correlacionar os resultados dos testes com variáveis qualitativas dos questionários socio econômico e por fim faremos as considerações finais.

Para sequenciarmos a estruturação que ocorrerá a pesquisa, traremos a seguir a seção da metodologia de pesquisa que utilizamos para direcionar nosso estudo.

---

[1] Sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos”. Zabala (1998, p.18).

2 ENGENHARIA DIDÁTICA

Nesta seção apresentaremos a Engenharia Didática considerada como metodologia de pesquisa, suas características e ainda descreveremos, suas etapas metodológicas: 1ª fase análise prévia, 2ª fase análise a priori, 3ª fase experimentação e 4ª fase análise a posteriori e validação.

Para finalizar iremos expor alguns trabalhos que utilizaram a engenharia didática para seguir seus procedimentos metodológicos com fins educacionais e que foram validados com resultados favoráveis.

A Engenharia Didática é a evolução da chamada Didática da Matemática Francesa, originada na França no ano de 1980, para se contrapor ao Movimento da Matemática Moderna. De acordo com Souza e Garnica (2016) foi impulsionada por ideias de pesquisadores como Gérard Vergnaud, Guy Brousseau, Michèle Artigue, Régine Douady e Yves Chevallard entre outros.

É considerada como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, realização e análise de ensino no contexto escolar, conceituada por Artigue (1996), sendo:

> uma forma do trabalho didáctico: aquela que era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projecto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controlo de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos muito mais complexos do que os objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar(Artigue, 1996, p.193).

Ainda de acordo com Artigue (1996) a engenharia didática tem quatro fases: fase 1 das *análises previas*, fase 2 das *análises a priori* de situações didáticas de engenharia, fase 3 da *experimentação* e finalmente fase 4 da *análise a posteriori e validação*. Ocorrem das seguintes formas:

Fase 1: Análises prévias

Está fase favorecerá a nossa investigação, no desenvolvimento de um conjunto de proposições e evidências relacionadas com razão e proporção no ensino de matemática desde a abordagem histórica do conteúdo que mostra o surgimento e uso do objeto matemático por povos da antiguidade bem como verificando sua evolução até a prevalência do contexto atual de nossa sociedade, passando por conceitos, definições, experiências até um panorama de ensino de razão e proporção, esta fase ocorre, pois:

> Numa investigação de engenharia didáctica, a fase de concepção efectua-se apoiando-se num quadro teórico didáctico geral e em conhecimentos didácticos já adquiridos no domínio estudado, mas também apoiando-se num certo número de análises preliminares que são, na maior parte dos casos: a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino, a análise do ensino habitual e dos seus efeitos; a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução; a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didáctica efectiva; e, naturalmente, tendo em conta os objectivos especificos da investigação (Artigue, 1996, p.198).

Nesta perspectiva é interessante perceber os movimentos e articulações que a investigação da engenharia didática considera nos processos de análises, indo do mais geral para uma definição preliminar fundamentada numa epistemologia dos conteúdos tratados no ensino, levando em conta o ensino das concepções de alunos, dificuldades, obstáculos que são evidentes no processo de evolução.

Fase 2: Análise a priori

O momento desta fase ocorrerá a elaboração da sequência de atividades que irá proporcionar na qual o pesquisador fará uma análise do que poderá vir ocorrer no momento da experimentação com a aplicação das atividades e a partir das análises a priori tomar decisões seja em relação ao conteúdo didático ou outra situação específica de ensino/aprendizagem.

> Nesta segunda fase, o pesquisador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos: *variáveis de comando,* que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado. Para facilitar a análise de uma engenharia, parece-nos útil distinguir dois tipos de variáveis de comando:
>
> — as *variáveis macro-didáticas ou globais,* que dizem respeito à organização global de engenharia;
>
> — e as *variáveis micro-didáticas ou locais* que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado (Artigue, 1996, p.202-203).

Entendemos que nesta fase o investigador procura tomar decisão e agir a partir de números de variáveis que se encontra no sistema não fixado, permite compreender que as variações e o problema estudado podem facilitar para o pesquisador a visibilidade dos tipos de variações existentes que necessita ser trabalhada no macro da didática para a busca de resultados a partir de experimentos.

Fase 3 e 4: Experimentação; Análise a posteriori e Validação

A fase da Experimentação será o momento em que o pesquisador irá experimentar as atividades elaboradas na fase anterior e coletar dados produzidos durante, no caso da nossa pesquisa ocorrerá em sessões de ensino. Posteriormente, na última fase da análise a posteriori e validação faz-se um confronto dos dados coletados na fase da análise a priori e análise a posteriori para validar as hipóteses.

> [...] Esta fase é seguida por uma fase de análise dita a posteriori, que se apoia no conjunto dos dados recolhidos aquando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. Estes dados são frequentemente completados por dados obtidos através da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final[...] (Artigue, 1996, p.208).

A metodologia da Engenharia Didática é utilizada por diversos pesquisadores com intuito de seguir seus procedimentos metodológicos com fins educacionais, tendo pretensão de a partir das situações didáticas de aprendizagem criadas para o ensino, analisar os resultados do ensino-aprendizado. Tendo como foco as experiências momentos importantes que são realizados no decorrer da investigação.

Nos últimos anos temos inúmeras pesquisas que utilizaram a Engenharia Didática seja como metodologia de pesquisa na área de Matemática ou como referencial capaz de nortear elaborações e análise de situações didáticas capazes de instigar os alunos a terem uma aprendizagem significativa em sala de aula, não apenas na área de matemática, mas em outras áreas de ensino.

Batista (2018) em uma abordagem de ensino por atividades, utilizou os procedimentos metodológicos da engenharia didática para avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática nos moldes do ensino por atividades experimentais de Sá (2009), Sá e Jucá (2014) e suas potencialidades quanto a aprendizagem do conteúdo de razão e proporção.

Pizarro (2020) realizou uma pesquisa que utilizou a engenharia didática como metodologia de pesquisa que pudesse dar conta de nortear a experimentação e avaliar uma sequência didática considerando as habilidades da modelagem matemática para o ensino de transformações lineares.

Lima e Ferreira (2020), realizaram um estudo voltado ao ensino de física, onde utilizavam os procedimentos da Engenharia Didática para desenvolver uma sequência didática de ensino, aliado a prática de experimentação nos moldes da Robótica Educacional em estudo de fenômeno de encontro de corpos.

Barbosa (2021) a fim de buscar analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática em uma abordagem do ensino de matemática por atividades experimentais na resolução de questões envolvendo o princípio fundamental da contagem, utilizou a engenharia didática como metodologia de pesquisa em seu estudo.

Cotrado *et al* (2023) utilizaram a engenharia didática para nortear as implementações e resultados das ações de formação profissional de matemática peruana que pretendia desenvolver competência para análise crítica de materiais curriculares oficiais do ensino médio do Peru em relação ao conteúdo de probabilidades, considerando a abordagem Ontosemiótica.

A seguir apresentaremos o detalhamento do desenvolvimento da nossa pesquisa, de acordo com as 4 fases da engenharia didática que tomamos como metodologia de pesquisa.

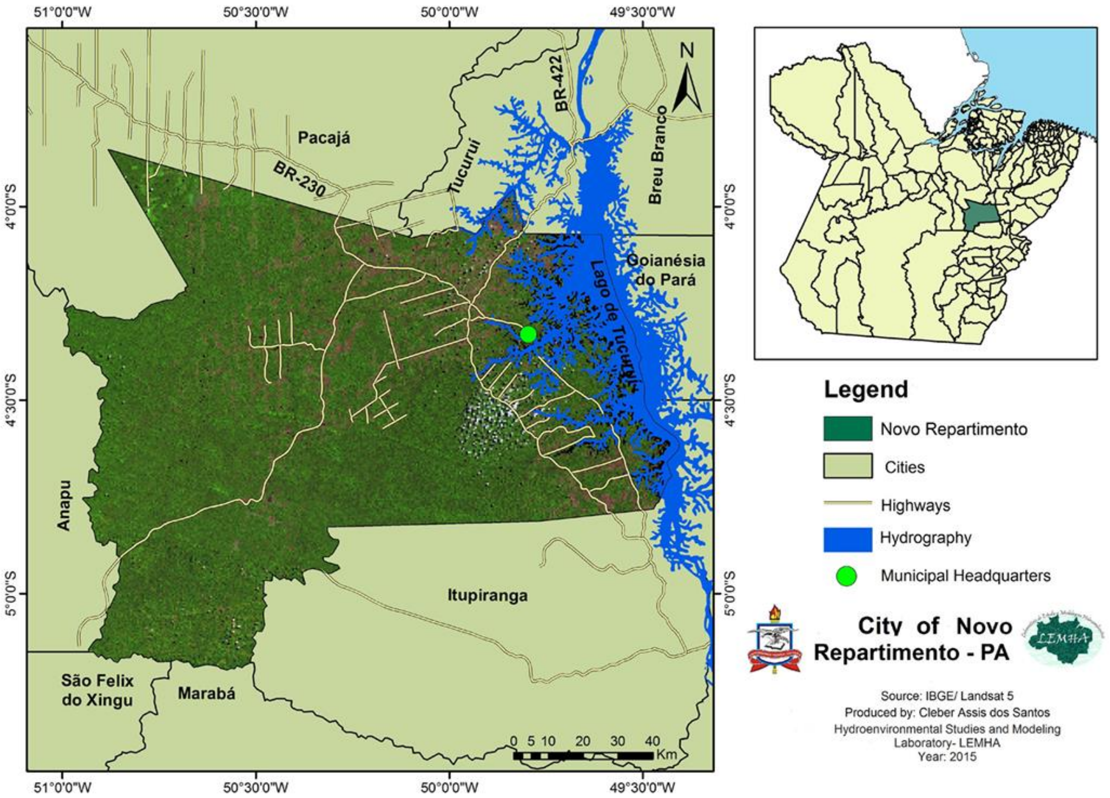
3 ANÁLISES PRÉVIAS

Apresentaremos nesta seção, a primeira fase da nossa pesquisa, a análise prévia, nos oportunizou apresentarmos um pouco sobre o Município em que está o *lócus* da nossa pesquisa, a escolha do nosso objeto matemático e buscou referenciais teóricos que pudessem nos situar em relação a um maior aprimoramento de nosso objeto de estudo, razão e proporção, a compreendermos como se desenvolve a aprendizagem cognitiva dos estudantes e ainda buscar métodos que auxiliem no ensino de razão e proporção de maneira eficiente e significativa.

3.1 MUNICÍPIO QUE ESTÁ INSERIDO O *LÓCUS* DA PESQUISA

A escola em que realizamos nossa pesquisa está localizada na zona urbana, em um município brasileiro chamado Novo Repartimento, situado no Sudeste do estado do Pará, a uma latitude 04º19'53" sul e a uma longitude 49º47'47" oeste, estando a uma altitude de 200 metros. De acordo com o último censo do IBGE (2022), possuía uma população de 60732 habitantes e uma área territorial de aproximadamente 15.398,723 km², limitando-se com Breu Branco, Tucuruí, Goianésia do Pará, Jacundá, Nova Ipixuna, Itupiranga, Marabá, São Felix do Xingú, Anapu e Pacajá.

Figura 1 – Localização do Município de Novo Repartimento, Estado do Pará



Fonte: Imagem retirada de Farias *et al*, 2018.

De acordo com historiadores, o surgimento de Novo Repartimento tem relação com a construção da Rodovia Transamazônica, a construção da Usina Hidrelétrica de Tucuruí e com a tribo indígena Parakanã, que a chamou de Repartimento, pois consideravam um rio como referência de limite de divisão com suas terras.

> “O povoamento foi iniciado em um vilarejo, situado à margem do rio Repartimento. Tudo começou com o Sr. Evaristo, primeiro morador que se instalou, no início dos anos 70, próximo ao alojamento da

> Construtora Mendes Júnior, empresa responsável pela terraplanagem da Rodovia BR-422, que ligaria a Rodovia BR-230 ou Transamazônica à hidrelétrica de Tucuruí.
> Por ser vizinho da primeira área demarcada como reserva indígena Parakanã, denominaram o novo local de vila de Repartimento, pois este rio também servia de limite para a reserva. Essas são as justificativas oficiais para o surgimento do primeiro núcleo populacional que deu origem ao município. Observar os mapas municipais de Tucuruí antes da inundação da hidrelétrica permite inferir que o povoado primitivo localizava-se no mesmo cruzamento da BR-230 com BR-422, só que a inundação de alguns trechos dessas rodovias pelo lago da hidrelétrica obrigou o Governo Federal a construir novas variantes dessas rodovias. Como vemos, o povoado primitivo foi mudado em função da construção da Usina Hidrelétrica de Tucuruí, obrigando a mudança do primitivo núcleo, cujos resquícios habitacionais são passíveis de comprovar somente quando a cota do lago encontra-se baixa” (IBGE, 2024).

A Rede Municipal de Ensino de Novo Repartimento oferta diversas modalidades de ensino, como: Educação Infantil; Ensino Fundamental - anos iniciais (1° ao 5º) e anos finais (6° ao 9º ano); Educação de Jovens e Adultos (EJA), Educação Escolar Indígena e Educação Especial, de acordo com dados do documento curricular do município de Novo Repartimento, o município:

> “[...]possui 16 escolas na área urbana e 102 escolas na área rural, totalizando 118 escolas entre educação infantil e ensino fundamental e 16.208 alunos. Possui também um quantitativo de 758 professores efetivos e 210 professores com tratado temporário” (Novo Repartimento, 2020).

As 118 escolas que fazem parte da administração do município de Novo Repartimento estão distribuídas na zona urbana e rural do município em Creches, Pré-Escola, Fundamental-anos iniciais e Fundamental-anos finais, organizados em sistema de ensino, seriado, multisseriado e etapas com o quantitativo de turmas da seguinte forma:

> [...] Creche: 17 turmas; Pré Escola: 80 turmas; Fundamental Séries iniciais urbana: 137 turmas; Fundamental Séries finais urbanas: 102 turmas; Fundamental Séries iniciais rural: 263 turmas; Fundamental Séries finais rural: 167 turmas; Educação Especial: 8 salas; EJA: 20 turmas; Educação Escolar Indígenas: 78 turmas[...] (Novo Repartimento, 2020).

As escolas que fazem parte da área rural do município de Novo Repartimento ficam localizadas nas seguintes regiões: Lago da Usina Hidrelétrica de Tucuruí - Lago (UHT), Pacajazinho, Transamazônica, Tuerê, Rio Gelado e Parakanã.

O potencial econômico da região onde se localiza o município de Novo Repartimento é voltado para a agropecuária e o extrativismo vegetal, tendo referência na lavoura permanente, segundo o IBGE (2023), com a produção agrícola de açaí, banana e em maior escala o cacau. Ainda de acordo com a Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas – Fapespa (2022), Novo Repartimento está entre os 10 (dez) município que mais produzem rebanho bovinos no país. No Estado do Pará, Novo Repartimento é o terceiro maior produtor de rebanho bovinos.

Uma das principais manifestações culturais do município de Novo Repartimento é a Cavalgada, grupos de pecuaristas, comerciantes e simpatizantes do movimento, além de idosos, crianças e adolescentes, realizam um passeio a cavalo, em um momento de lazer e interação entre gerações. Essa prática é realizada por pessoas em todo o Brasil, em alguns lugares com maior participação popular.

No município de Novo Repartimento, tradicionalmente uma vez ao ano durante uma semana acontece um evento, a Feira de Exposição Agropecuária de Novo Repartimento (Fexpoanr), que no ano de 2023, a prefeitura, através da Secretaria Municipal de Turismo e Cultura realizou a XIX edição e nessa feira ocorre diversas programações onde uma das mais tradicionais é a cavalgada.

Figura 2 – Encontro das comitivas para saírem em cavalgada pelas ruas da cidade

Fonte: g1, 2023.

Figura 3 – Cavalgada das comitivas pelas ruas da cidade

Fonte: g1, 2023.

Figura 4 – Cavalgada das comitivas pelas ruas da cidade

Fonte: Portal da Prefeitura de Novo Repartimento, 2022.

A seguir, traremos o resultado da análise de uma consulta voltada aos discentes de duas turmas de 9º ano da EMEF de Novo Repartimento-Pá, sobre o processo de ensino e aprendizagem de razão e proporção que resultou na escolha do objeto matemático da nossa pesquisa.

3.2 ESCOLHA DO OBJETO MATEMÁTICO

Para realização de nossa pesquisa, escolhemos a partir do resultado de um questionário voltado aos alunos do nono ano de uma escola pública municipal de ensino fundamental o objeto de conhecimento matemático: razão e proporção.

Consideramos realizar o questionário para decidirmos qual conteúdo deveríamos optar para estudo, pois este, a partir da escuta dos alunos nos daria um referencial de quais conteúdos possivelmente já haviam estudado na série anterior a que estariam cursando. No questionário havia os conteúdos que faziam parte do currículo escolar para as turmas de 8º ano do município em que foi realizada a pesquisa. É importante destacar que preferimos enfatizar no questionário os conteúdos da série anterior, pois os conteúdos da série que seria realizada a pesquisa eram de nosso conhecimento, haja vista que, um dos pesquisadores é professor na turma.

O questionário foi aplicado em abril de 2023, responderam ao questionário 49 alunos de duas turmas de 9º ano, e obtemos os resultados como segue no Quadro 1.

Quadro 1 – Questionário acerca do que estudou

1. Acerca do que você estudou no 8º ano, preencha o quadro abaixo:

CONTEÚDO	**Grau de dificuldade que teve em aprender o conteúdo**				
	MUITO FÁCIL	**FÁCIL**	**DIFÍCIL**	**MUITO DIFÍCIL**	**NÃO ESTUDEI**
Notação científica	28,6%	31,6%	8,2%	2%	30,6%
Dízimas periódicas: fração geratriz		6,1%	12,2%		81,7%
Potenciação	20,4%	53%	18,4%	4,1%	4,1%
Radiciação	10,2%	12,2%	20,5%	6,1%	51%
O princípio multiplicativo da contagem	6,1%	8,2%	12,2%		73,5%
Porcentagens	18,4%	30,6%	20,5%	6,1%	24,5%
Valor numérico de expressões algébricas	10,2%	32,6%	18,4%	6,1%	32,7%
Equação linear de 1º grau	4,1%	10,2%	6,1%	8,2%	71,4%
Sistema de equações polinomiais de 1º grau		10,2%	6,1%	6,1%	77,6%
Grandezas diretamente proporcionais		8,2%	14,3%		**77,5%**
Grandezas inversamente proporcionais	2%	4,1%	6,1%	4,1%	**83,7%**
Grandezas não proporcionais		2%	14,3%		**83,7%**
Congruência de triângulos		10,2%	10,2%	10,2%	69,4%
Demonstrações de propriedades de quadriláteros	6,1%		8,2%	4,1%	81,6%

Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	2%	10,2%	10,2%	14,3%	63,3%
Mediatriz como lugar geométrico	4,1%	6,1%	6,1%	4,1%	79,6%
Bissetriz como lugar geométrico		2%	8,2%	6,1%	83,7%
Transformações geométricas: simetrias de translação	2%	2%	6,1%	8,2%	81,7%
Transformações geométricas: simetrias de reflexão	2%	2%	4,1%	4,1%	87,8%
Transformações geométricas: simetrias de rotação	2%	6,1%	6,1%	2%	83,8%
Comprimento da circunferência do círculo	4,1%	14,3%	8,2%	2%	71,4%
Princípio multiplicativo da contagem	6,1%	10,2%	10,2%	4,1%	69,4%
Probabilidades		4,1%	12,2%		83,7%
Gráficos de barras	6,1%	8,2%	10,2%	6,1%	69,4%
Gráficos de colunas	2%	16,3%	4,1%	6,1%	71,5%
Gráficos de linhas	6,1%	6,1%	10,2%	2%	75,6%
Gráficos de setores		4,1%	14,3%	2%	79,6%
Variável contínua	6,1%	2%	6,1%		85,8%
Medidas de tendência central	4,1%	2%			93,9%
Medidas de dispersão		2%	4,1%	4,1%	89,8%
Pesquisas censitária ou amostral		4,1%	6,1%	2%	87,8%

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores, 2023.

Após analisarmos os questionários respondidos pelos alunos, constatamos que ao perguntar a eles qual foi o grau de dificuldade que tiverem em aprender determinados conteúdos que deviam ter estudado no 8º ano, a maioria dos conteúdos os alunos responderam que não haviam estudado. No entanto, apenas com a análise deste questionário não podemos afirmar se de fato não fez parte de seus ensinos do 8º ano, mas, podemos pensar que se os conteúdos foram ensinados e não lhes ficou guardado na memória, talvez não tenha sido significativo para o aluno, o que nos faz entender que a partir dessa escuta poderíamos definir nosso objeto de pesquisa.

Então dentre os conteúdos apresentados consideramos: grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e grandezas não proporcionais os mais instigantes para nossa pesquisa, até mesmo porque, estes conteúdos devem se complementar com o currículo escolar no que tange as relações de proporcionalidade que devem ser ensinados nessa etapa do 9º ano.

Ademais, a BNCC considera que as ideias de proporcionalidade já devem ser inseridas desde o 4º ano, a habilidade (EF04MA06) diz que o aluno nesse ano deve ser capaz de:

> Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e **proporcionalidade**), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos (Brasil, 2017, p.291. Grifo nosso).

Ainda, as ideias de proporcionalidades seguem em sucessão aos anos seguintes do ensino fundamental. Daí, é oportuno e necessário elaborar uma proposta de ensino que favoreça o aprendizado desse objeto que em nosso trabalho consideraremos: razão e proporção.

3.3 TEORIA DA ATIVIDADE

O ser humano no decorrer de sua existência realiza um conjunto de ações e práticas sociais compreendidas como resultado de uma organização individual interna, também associadas ao processo de assimilação das experiências externas que quando manifestadas conjuntamente contribuem na formação dos sentidos e significados responsáveis pelas motivações refletidas em formas de necessidades, anseios e realizações dão sentido à vida humana.

É justamente neste processo inacabado de sensibilidades que toma o homem como produto e processo na construção permanente de sua própria consciência diante das contradições que tornam possível a organização social dos sujeitos, cuja compreensão requer, entre outros aspectos culturais estudos e pesquisas na área psicológica e educacional que busquem melhor compreensão da constituição da consciência humana para o convívio cidadão harmonioso em sociedade. As autoras Cenci e Damiani (2018) consideram que a Teoria da Atividade:

> [...]refere-se à perspectiva teórica, inspirada em princípios marxistas, iniciada nos anos 1920 e 1930, por Lev Vygotsky, na União Soviética. Em uma definição geral, pode-se dizer que a Teoria se preocupa com a análise da constituição do humano – da consciência – na atividade social, entendendo que o ser humano não pode ser visto como separado do meio sociocultural que o cerca[...] (Cenci e Damiani, 2018, p. 921).

Ademais, os estudos das autoras Cenci e Damiani (2018) mostram que as propostas teóricas sobre a Teoria da Atividade dos autores Vygotsky (1ª geração), Leontiev (2ª geração) e Engeström (3ª geração) tem continuidade, influenciadas nas teorias antecedentes, embora se admita que na academia existam relutância quanto a ideia de continuidade, devido as propostas de cada autor apresentar características diferentes. Mas, para as autoras as proposições não teriam como serem diferentes do que é, uma vez que, cada proposição ocorrera em contextos históricos culturais distintos.

De acordo com Cenci e Damiani (2018, p.943) cada geração apresenta o conceito diferente para atividade. Vygotsky (2007) relaciona atividade como atividade mediada por signos e ferramentas, Leontiev (1983, 2004) relaciona atividade como atividade coletiva, base da consciência humana, já Engeström (2013) considera que a atividade aparece como sistema de atividades em transformação.

Como se percebe, cada geração apresenta uma contribuição particular no estudo do desenvolvimento psicológico, na função docente os professores devem se valer dessas explicações para compreender melhor as formas de funcionamento da mentalidade humana, considerando suas etapas de desenvolvimento, como um dos princípios básicos no auxílio da gestão do ensino e aprendizagem educacional escolar, uma vez que a dinâmica de ensino, depende do objeto ou habilidades, propostas no plano de ensino, demanda direcionamento de atividades específicas no trabalho educativo, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e integral dos educandos.

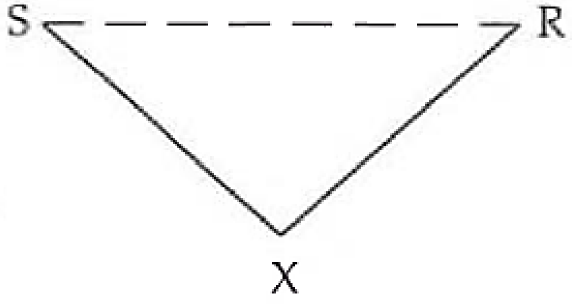
A Teoria de Vygotsky, teve fortes influências da teoria marxista conhecida como materialismo histórico e as concepções de Engels sobre o trabalho humano e o uso de instrumentos, Vygotsky (2007), acredita que as atividades mediadas por signos são produtos correspondentes ao desenvolvimento social, pois, entende que:

> [...]a internalização dos sistemas de signos produzidos culturalmente provoca transformações comportamentais e estabelece um elo de ligação entre as formas iniciais e tardias do desenvolvimento individual[...].

Nesse sentido Vygotsky (2007), entende que a estrutura das operações com signos tem relação direta com o comportamento (estimulo) do indivíduo diante a um problema e consequentemente uma reação (resposta) à situação problema, adotando a relação estímulo e resposta (S→R), mas que esta relação pode alcançar um nível de desenvolvimento mais complexo na atividade psicológica ao ser mediada.

Vygotsky (2007, p.33) representa a situação, onde as operações com signos aparecem com um elo intermediário entre o estímulo e a resposta;

Figura 5 – Representação da estrutura de operações com signos



Fonte: imagem retirada de Vygotsky, 2007.

S = estímulo

R = resposta

X = elo intermediário ou elemento mediador

Oliveira (1995, p.26) considera que a **mediação** é: “[...] o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento[...]”. Nesse sentido podemos considerar a aplicação da sequência didática elaborada por nós, com atividades estruturadas, um elo intermediário cuja mediação se dará por meio do professor.

> “Esse elo intermediário é um estímulo de segunda ordem (signo), colocado no interior da operação, em que preenche uma função especial; ele cria uma nova relação entre S e R. O termo "colocado" indica que o indivíduo deve estar ativamente engajado no estabelecimento desse elo. Esse signo possui, também, a característica importante de ação reversa (isto é, ele age sobre o indivíduo e não sobre o ambiente). Vygotsky (2007, p.33)

Portanto, a utilização dos signos serve como meios auxiliares para as atividades psicológicas dos seres humanos, como bem salienta Vygotsky (2007, p.34), “[....] conduz os seres humanos a uma estrutura específica de comportamento que se destaca do desenvolvimento biológico e cria novas formas de processos psicológicos enraizados na cultura”. E nesse sentido o papel pedagógico mediado pelos docentes é fundamental no processo de aprendizado do aluno, pois o professor durante a aulas poderá estimular seu aluno a lembrar, reconhecer, analisar, um objeto determinado e direcionar a caminhos objetivados, desde que planeje suas aulas de forma que o aluno tenha oportunidade de ser sujeito ativo durante as atividades desenvolvidas.

Leontiev (2004), assim como Vygotsky consideram que as relações sociais interferem nas atividades dos indivíduos o autor considera que o desenvolvimento da psique e consciência do indivíduo dependem das suas condições reais de vida, ainda que suas atividades sejam elas, aparente ou internas, influenciam diretamente seu desenvolvimento à medida que ocupam os lugares nas relações sociais, mas que determinadas atividades se tornam dominantes. O autor chama a atividade de dominante se possuir as três características seguintes:

> 1º - aquela sob a forma da qual aparecem e no interior da qual se diferenciam tipos novos de atividade[...].
>
> 2º - aquela na qual se formam ou se reorganizam os seus processos psíquicos particulares[...].
>
> 3º - aquela que depende o mais estreitamente as mudanças psicológicas fundamentais da personalidade da criança observadas numa dada etapa do seu desenvolvimento[...]. Leontiev (2004, p.311)

Mas, vale ressaltar que nem todas as atividades são dominantes no processo de desenvolvimento, Leontiev (2004, p.315) considera **atividade** sendo "[...] os processos que são psicologicamente determinados pelo fato de aquilo para que tendem no seu conjunto (o seu objeto) coincidir sempre com o elemento objetivo que incita o paciente a uma dada atividade, isto é, com o motivo". Leontiev (1983, p.67. Tradução nossa) ressalta que "[...]Com toda a sua peculiaridade, a atividade do indivíduo humano constitui um sistema incluído no sistema de relações em sociedade. Fora dessas relações, a atividade humana não existe em geral.[...]"

Para Leontiev (1983) toda as atividades requerem uma realização de certos objetivos, logo, as atividades são realizadas por meio de conjuntos de ações cujo objetivos são conscientes então o objetivo consciente passa a ser o motivo.

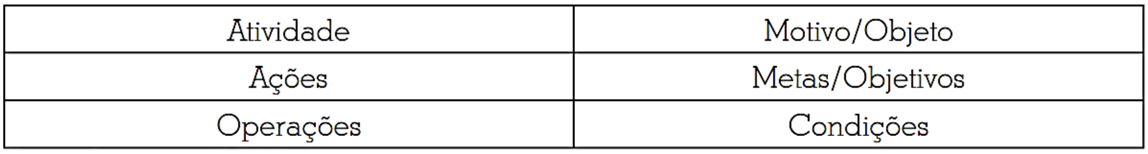
> Chamamos de **ação** o processo que está subordinado à representação daquele resultado que será alcançado, ou seja, o processo subordinado a um objetivo consciente. Da mesma forma que o conceito de motivo está relacionado ao conceito de atividade, também o conceito de objetivo está relacionado ao conceito de ação. (Leontiev, 1983, p.83. Grifo nosso. Tradução nossa)

O ensino por atividades experimentais leva o aluno a ser ativo no seu processo de desenvolvimento da aprendizagem, ou seja, a realização da atividade proposta ocorrerá por que o aluno tende a compreender os procedimentos e por conseguinte agir e isso só ocorre, pois, as atividades experimentais possuem uma estrutura de atividades com objetivos capaz de conduzir o aluno a operações consciente, mesmo que em um dado momento fosse necessário uma intervenção mediada pelo professor.

> Por **operação**, entendemos o modo de execução de uma ação. A operação é o conteúdo indispensável de toda a ação, mas não se identifica com a ação. Uma só e mesma ação pode realizar-se por meio de operações diferentes, e inversamente, ações diferentes podem ser realizadas pelas mesmas operações. [...] (Leontiev, 2004, p. 323. Grifo nosso)

Contudo, pode-se dizer que na atividade, a ação e a operação podem ser trocadas de posições à medida que os objetivos alteram os motivos de forma consciente. No trabalho de Cenci e Damiani (2018) as autoras representam a estrutura que Leontiev (1978) propôs para atividade humana, em três níveis como mostra o quadro 2*:*

Quadro 2 – Estrutura da atividade de acordo com Leontiev

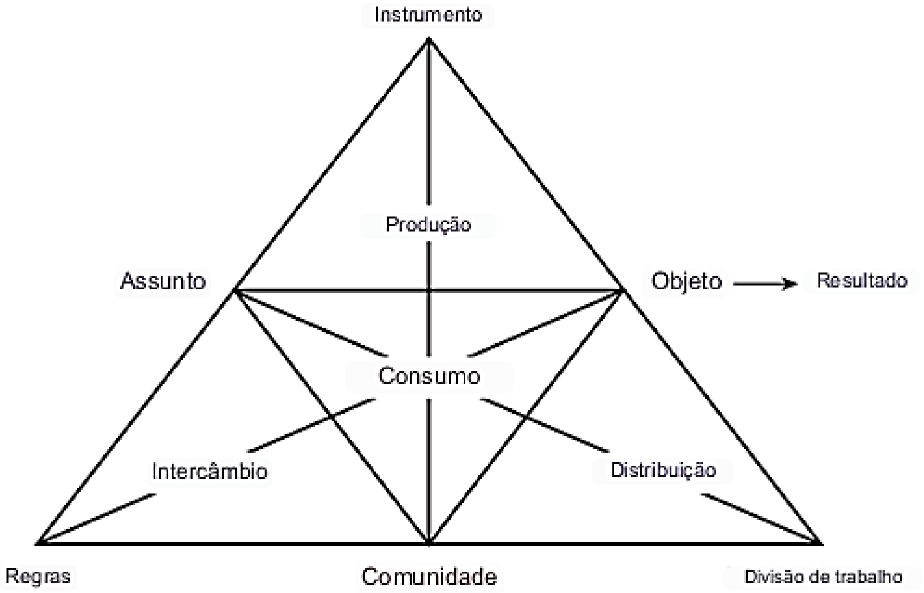


Atividade	Motivo/Objeto
Ações	Metas/Objetivos
Operações	Condições

Fonte: imagem retirada de Cenci e Damiani, 2018.

A busca por entender o funcionamento da atividade humana não se esgota e assim como Leontiev se valeu das ideias de Vygotsky, Engeström também aproveitou as propostas de Vygotsky e Leontiev para aprimorar tal conceito, mas é claro que também com peculiaridades. Engeström (2014) contribui com o desenvolvimento da teoria da atividade humana propondo um modelo de sistema de atividades como uma expansão do modelo do triângulo que Vygotsky utilizou para mostrar como se dá o desenvolvimento psicológico em um nível mais complexo em uma atividade mediada.

Figura 6 – A estrutura da atividade humana



Fonte: imagem retirada de Engeström, 2014.

Para Engeström (2014), o modelo sugere, “a possibilidade de analisar uma multiplicidade de relações dentro da estrutura triangular da atividade. No entanto, a tarefa essencial é sempre apreender o todo sistêmico, não apenas conexões separadas. [...]”. Considera, portando, que a atividade é um sistema de atividade que se transforma, e essa transformação deriva de outras atividades historicamente anteriores.

Marx (1973) publicou uma análise no sentido econômico dessas relações pertencente a estrutura da atividade humana que Engeström propôs, onde considerou que:

> A **produção** cria os objetos que correspondem às necessidades dadas; a **distribuição** os divide segundo leis sociais; **trocar** novas parcelas das parcelas já divididas de acordo com as necessidades individuais; e finalmente, no **consumo**, o produto sai desse movimento social e se torna um objeto direto e servidor da necessidade individual, e a satisfaz ao ser consumida. Assim, a produção aparece como ponto de partida, o consumo como conclusão, a distribuição e a troca como meio, que é, no entanto, dupla, uma vez que a distribuição é determinada pela sociedade e a troca pelos indivíduos. A pessoa objetiva-se na produção, a coisa subjetiva-se na pessoa; na distribuição, a sociedade faz a mediação entre a produção e consumo na forma de determinantes gerais e dominantes; em troca, os dois são mediados pelas características aleatórias do individual. [...] (Marx, 1973, p. 89. Grifos nosso. Tradução nossa)

Fazendo uma analogia no sentido não propriamente econômico como Karl Marx o vê, mas considerando que o modelo de sistema de atividades de Engeström pode nos levar a relacionar sua proposta no sentido educacional do ensino escolar, na qual, por exemplo uma atividade escolar pode apresentar transformação individual e coletiva, satisfatória para o ensino aprendizado do aluno, visto que, Engeström considera que a atividade aparece como sistema de atividades em transformação e que suas transformações são decorrentes de atividades anteriores que mantiveram múltiplas relações.

Considerando a importâncias da Teoria da Atividade dos autores elencados acima e entendendo que o aluno não será exaurido com uma única forma de atividade humana, então, consequentemente sua manifestação intelectual se dará de forma diversas, uma vez que os signos internos e externos interferem diretamente em seu processo social e cognitivo. Elaboramos uma sequência didática de ensino com o objeto matemático “razão e proporção”, fundamentada em pesquisadores da área educacional e psicológica e será referência a um produto educacional - caderno de atividades – que estará à disposição dos interessados.

A seguir abordaremos a tendência metodológica de ensino que utilizaremos para nortear a aplicação da nossa sequência didática o “Ensino de Matemática por Atividades Experimentais”.

3.4 ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

O professor, na busca de aperfeiçoar seus fazeres pedagógicos se propõe ao estudo e pesquisa de referências e experiências profissionais adequadas que possam contribuir no desenvolvimento prático docente, auxiliando de maneira eficiente no processo de ensino e aprendizagem. De acordo com estudos realizados, no decorrer do presente processo investigativo identificamos obras que se destacaram no aprofundamento e entendimento da Teoria da aprendizagem, Teoria da Atividade e do Ensino de Matemática por Atividade Experimentais – (EMAE), sendo esta última considerada uma Tendência Metodológica. Assim, entre outras referências levantadas, destacam-se autores como Moreira (1999); Moreira, Pedrosa e Pontelo (2011); Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023).

As teorias da aprendizagem, segundo Moreira (1999) “são três as filosofias subjacentes — a *comportamentalista* (behaviorismo), a *humanista* e à *cognitivista* (construtivismo)”. Ainda, mesmo o autor fazendo a distinção entre as teorias de aprendizagem é enfatizado que tais teorias podem ser consideradas em outras correntes filosóficas, no entanto, a corrente filosófica cognitivista(construtivismo):

> [...]trata, então, principalmente dos processos mentais; se ocupa da atribuição de significados, da compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição. Na medida em que se admite, nessa perspectiva, que a cognição se dá por construção chega-se ao construtivismo, tão apregoado nos anos noventa. (Moreira, 1999, p. 15)

Moreira (1999), se valendo das Teorias de Piaget sobre o desenvolvimento mental, considera que essa postura filosófica de cunho construtivista se utilizada na perspectiva cognitivista/construtivista no ensino, fará com que o aluno seja o agente da construção de sua própria estrutura cognitiva, visto que:

> [...]No ensino, esta postura implica deixar de ver o aluno como um receptor de conhecimentos, não importando como os armazena e organiza em sua mente. Ele passa a ser considerado agente de uma construção que é sua própria estrutura cognitiva [...] (Moreira,1999, p. 15).

Moreira (1999, p. 96), afirma que Piaget "distingue quatro períodos gerais de desenvolvimento cognitivo: sensório-motor, pré-operacional, operacional-concreto, operacional-formal." Embora cada um desses períodos possua níveis diferentes de desenvolvimento, tomamos como foco principal, neste trabalho o período *operatório formal,* pois, é justamente nessa fase que estão inseridos os estudantes do ensino fundamental anos finais, cuja proposta de atividade de ensino que apresentaremos em seguida será destinada. O que não diminui a importância dos períodos que devem anteceder o operatório formal, que aliás, seguindo uma sequência de períodos, conforme Piaget será o último estágio do desenvolvimento do pensamento.

Considerando que os períodos sensório-motor, pré-operacional, operacional-concreto ocorreram de formas sucessíveis correspondendo, segundo Piaget respectivas faixas etárias do desenvolvimento cognitivo, atingindo de forma sequencial a fase final, identificada como período operacional formal, que ocorre a partir de 11 a 12 anos, fase em que, gradativamente a pessoa desenvolve o pensamento formal. Este período, conforme Moreira (1999):

> [...]prolonga-se até a idade adulta, porém cabe ainda registrar que, no estágio correspondente à adolescência, o indivíduo manifesta um

> último tipo de egocentrismo: o adolescente atribui grande poder ao seu próprio pensamento, à sua capacidade de raciocinar formalmente, e julga, muitas vezes, que somente ele está certo. (Moreira, 1999, p. 99)

Ao considerar o aluno como ser humano potencial, capaz de progressivamente construir seu pensamento formal, o professor, no desenvolvimento de sua função docente deve estimulá-lo, de maneira gradativa e permanente a desenvolver sua capacidade de raciocínio.

Partindo desse princípio e, considerando a tese do “Ensino por Atividades Experimentais” defendida por Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023), como tendência metodológica, capaz de contribuir na dinâmica de aprimoramento no ensino matemático é possível construir uma relação dialógica e experimental na qual o estudante torna-se capaz de se apropriar dos saberes e conhecimentos, a partir de processos de aprendizagens que evolvem e correlacionam interação entre o desenvolvimento do pensamento, articulado a construção de experiências educacionais práticas, conforme afirma Sá (2020):

> “[...]ensino de matemática por atividade experimental é um processo didático desenvolvido por meio da realização de tarefas, envolvendo material concreto ou ideias, elaboradas pelo professor com objetivo de levar estudantes ao encontro com um conhecimento/conteúdo matemático especifico após a realização da tarefa, do registro de resultados, análise e elaboração de reflexões sobre os resultados obtidos que culmina com a sistematização ou institucionalização de um conteúdo matemático”.(Sá, 2020, p.155)

Neste sentido, para aprofundar o diálogo com Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023), referente a procedimentos de ensino por atividades experimentais, faz-se necessário compreender e considerar as ponderações feitas por Moreira, Pedrosa e Pontelo (2011), ao analisarem a relação entre atividade e prática educativa. Esses autores elucidam que um ambiente de aprendizagem organizado implica existência de intenção para promoção adequada de aprendizagem, com isso, a materialização dessa atividade se concretizará em uma relação de dependência que será construída a partir das experiências vividas tanto pelo professor quanto pelo aluno, articuladas as demais características presentes no ambiente.

A partir desse entendimento podemos dizer que este caráter previamente organizado e o caráter socialmente construído se fundem e formam uma prática educativa que segundo Moreira, Pedrosa e Pontelo (2011, p. 17) “[...]constitui um ambiente de aprendizagem desde a sua organização inicial, fundada em certa concepção de aprendizagem, até a sua realização singular[...].”

Então, para se ter compreensão efetiva das práticas educativas deve-se fazer uso da Teoria da Atividade a qual segundo Moreira *et al (*2011, *apud* Ferreira, 2009) “apresenta-se como um referencial capaz de descrever e analisar práticas educativas constitutivas de ambientes de aprendizagem diversos, na complexidade de seus elementos e da relação entre eles”.

Ainda, na intenção de agregar entendimento a respeito da Teoria da Atividade é essencial que se tenha compreensão do que é atividade no sentido de práticas educativas no qual segundo Moreira *et al* (2011), constitui-se com:

> [...]significado de uma atividade como expressão do conteúdo, da articulação das ações que constituem a atividade e dos objetivos explícitos dessas ações. Ao participar de uma atividade, o indivíduo realiza ações, consciente de seus objetivos e, portanto, apropria-se de alguma forma do seu significado. Entretanto, o sentido que o indivíduo atribui às ações, ao seu conteúdo e objetivo está relacionado às necessidades que o levam a participar de uma atividade. Essas necessidades direcionadas ao motivo/objeto da atividade envolvem expectativas pessoais, o papel que se atribui o indivíduo nesse processo, o que ele realmente espera obter com o resultado da atividade e as determinações das relações sociais do sistema de atividade no qual se insere. (Moreira *et al*, 2011, p.22)

Moreira *et al* (2011), consideram que a partir da apropriação da atividade:

> A referência básica do processo de ensino são os objetos científicos (os conteúdos ou os temas) que precisam ser apropriados pelos sujeitos aprendizes mediante a descoberta de um princípio interno do objeto e daí, reconstruídos sob forma de conceito na atividade conjunta entre professores e estudantes (Moreira et al, 2011, p.22).

Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023), buscam em seus trabalhos dar ênfase no ensino por atividades mostrando possibilidades de ensino por atividades experimentais que permitam os estudantes a realizarem ações que possam refletir e buscar conceitos ou resultados operatórios. Saindo do modelo tradicional onde a oralidade constitui a forma predominante de ensino, adotando o estudo por atividade experimentais como meio em que o aluno possa agir para descobrir uma informação gerando saberes e conhecimentos significativo para si mesmo. De acordo com Sá (2019):

> Bruner atribuiu uma grande importância a atividade direta dos indivíduos sobre a realidade e adiciona que condição indispensável para aprender uma informação de maneira significativa é ter a experiencia pessoal de descobri-la. Daí inicia a proposta do ensino por descoberta que hoje consideramos ter dado origem ao que denominamos de ensino de Matemática por Atividade. (Cálciz, 2011 apud Sá, 2019, p.15)

Segundo Sá (2019), "As técnicas associadas ao método da descoberta por Hennig (1986) foram**: redescoberta, problema e projeto**". As quais considera que:

1ª: Aprender por descoberta é aprender a aprender.

2ª: Aprender por descoberta é auto motivador e auto gratificante.

3ª: Aprender por descoberta aumenta a capacidade de pensar e de raciocinar.

4ª: Aprender por descoberta facilita a transferência e memorização.

O Ensino por Atividade, em específico o ensino de matemática por atividades experimentais defendido por Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023),tem as características que garantem condições ao ensino e aprendizado do aluno, pois;

1) É diretivo
2) Tem compromisso com o conteúdo;
3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
4) É estruturado
5) É sequencial
6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
9) Não dispensa a participação do professor
10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos.
11) É iterativo entre estudantes e professor.

Diante dessas características Sá (2019, p.17) considera que "Essas características do ensino de matemática por atividades distingue-o das demais tendências e justifica o fato se esta poder ser acrescentada ao rol das tendências em Educação Matemática”. Sua aplicação ocorre por meio de atividades por conceituação ou atividades por redescoberta desenvolvidos em modelos de demonstração ou experimental. Assim Mafra e Sá (2023) consideram que:

> [....]*atividade de conceituação* (está relacionada ao reconhecimento de um determinado conceito matemático numa situação vivenciada, em que, uma vez identificado o conceito, a atividade também visa a sua apuração para que o aprendiz obtenha um entendimento mais profundo dele) ou de uma *atividade de redescoberta* (diz respeito as possíveis inferências e articulações de novos conhecimentos, pelo aprendiz, com base em ações exploratórias visando o relacionamento de um novo conceito com outros conceitos da sua base cognitiva, ou seja, seus conhecimentos anteriores). (Mafra e Sá, 2023, p.11)

Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023), defendem que no modelo experimental é o professor que elabora a atividade e o aluno executa, mas é importante destacar que é o professor quem irá dirigir as ações. Já no modelo de demonstração, é o professor que realiza as ações e os alunos devem anotar os resultados para depois interagirem e chegarem no resultado que foi objetivado na atividade proposta.

Com tudo, cabe ressaltar que apesar da existência de um conjunto de procedimentos teórico metodológicos que contribuem para o estímulo do aprendizado articulados a busca, produção e ressignificação dos saberes e conhecimentos, permanece sendo fundamental a mediação adequada do professor no desenvolvimento da prática docente.

Atividade de Conceituação

A atividade de conceituação segundo Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023), deve ser organizada didaticamente em momentos como: **organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização**.

A **organização** é o momento da formação das equipes, o professor deve orientar as ações e a formação das equipes, sempre que possível deve-se realizar as atividades em grupos de 2 a 4 pessoas e se de repente algum aluno não queira fazer parte de um grupo o professor com cuidado deverá tentar fazer com que o aluno participe de um grupo, mas, não pode pressionar e caso não consiga convencê-lo, deve permitir sua participação individual.

Apresentação é o momento no qual o professor irá distribuir o material da atividade e o roteiro, orientar os estudantes sobre os procedimentos necessários para realizar as atividades.

No momento da **execução,** o estudante irá manipular os materiais apresentados e seguir os procedimentos do roteiro além de realizar a ação para obter os resultados esperados. Devem fazer isso de forma livre, porém, o professor deve estar sempre dirimindo as ações em caso de dúvidas quanto os procedimentos, até mesmo para que não percam o foco e tempo com conversas paralelas, por exemplo.

O **registro** é o momento em que cada equipe deverá registrar os resultados obtidos, ou seja, fazer a sistematização das informações no espaço destinado no roteiro.

A **análise** é o momento em que as equipes devem analisar os resultados que registraram, a fim de identificar características do objeto matemático em estudo para conceituá-lo ou defini-lo a partir dos resultados que registraram. Caso as equipes não consigam identificar uma relação valida que consigam conceituar ou definir o objeto, mesmo com indagações propositivas do professor a tal finalidade, deve-se deixar então para o momento da institucionalização.

E por fim chega-se ao momento da **institucionalização**, a hora de um aluno por equipe expor na lousa as observações registradas no roteiro e a partir delas o professor apresentará o conceito ou definição geral do objeto de acordo com o objetivo da atividade planejada. Posteriormente deve realizar outras atividades que estimulem o objeto matemático trabalhado.

Além da organização didática apresentada acima, Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023), dizem que o planejamento ocorre em etapas, basicamente em momentos como: **determinação, construção do objetivo, elaboração do procedimento, seleção do material, elaboração do espaço de registro, previsão de observações, previsão de institucionalização, elaboração do roteiro e verificação.**

O momento da **determinação** é quando o professor irá escolher a definição/conceito do objeto matemático desejado. É importante anotar para que não haja disparidade do que se pretende definir ou conceituar.

A **construção do objetivo** é o momento que será descrito o que se pretende alcançar com a atividade, no entanto, deve ser colocado de forma implícita o conceito ou definição, mas que o aluno será capaz de fazer essa relação após finalizar a atividade. Na pretensão de trabalhar razão e proporção, por exemplo, um objetivo para uma atividade poderá ser: “Conceituar proporção”.

Para o momento da **elaboração do procedimento** o professor deve ter atenção ao objetivo que pretende alcançar e a partir disso, propor ações que norteiem os estudantes a observarem e serem capazes de estabelecer uma relação com o objeto matemático escolhido.

No momento da **seleção do material** será elaborado os materiais necessários para o desenvolvimento da atividade que dependerá das ações descritas no procedimento.

Quanto a **elaboração do espaço de registro** será o momento em que se organiza o espaço na atividade para anotações esperadas e até mesmo para anotações não esperada, mas que podem ser necessárias e utilizadas pelos alunos para chegarem a uma possível resposta.

Em relação ao momento da **previsão de observações** é a hora que o professor pensará em quais observações irão surgir após os registros nos espaços, podendo conter possíveis observações, válidas e invalidas, até mesmo observações válidas não-desejadas e invalidas não-previstas.

Diante do momento da **previsão de institucionalização** o professor deverá ter condições para agir diante das possíveis observações, válidas-desejadas, inválidas, válidas não-desejadas e então utilizar para descrever um conceito padrão.

A **elaboração do roteiro** é o momento em que o professor descreve sua atividade e nessa elaboração do roteiro deverá ter: Título, Objetivo, Material, Procedimento, espaço de registro, espaço de observação (sem necessidade de expressar quantidades de linha) e o espaço de conclusão.

O momento da **verificação** é a hora em que o professor irá seguir o roteiro para realizar a atividade e verificar se a partir dela é possível chegar as características do objeto definido e se os materiais estão de acordo com o necessário e finalmente poderá finalizar o roteiro.

Sempre o professor deverá conduzir a institucionalização, pedindo ao final de cada atividade para que um aluno de cada equipe exponha no quadro as observações e daí apresentará o conceito padrão da turma, considerando as observações válidas-desejadas, inválidas, válidas não-desejadas, da turma.

Atividade de Redescoberta

A atividade de redescoberta, segundo Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023), pode ser organizada didaticamente em momentos como: **organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.**

A **organização** é o momento da formação das equipes, o professor deve orientar as ações e a formação das equipes, sempre que possível deve-se realizar as atividades em grupos de 2 a 4 pessoas e se de repente algum aluno não queira fazer parte de um grupo o professor com cuidado deverá tentar fazer com que o aluno participe de um grupo, mas, não pode pressionar e caso não consiga convencê-lo, deve permitir sua participação individual.

Apresentação é o momento no qual o professor irá distribuir o material da atividade e o roteiro, orientar os estudantes sobre os procedimentos necessários para realizar todas as tarefas propostas.

No momento da **execução** o estudante irá manipular os materiais apresentados, seguir os procedimentos do roteiro e realizar a ação para obter os resultados esperados, devendo faze-la de forma livre e com auxílio do professor que precisa estar sempre dirimindo as ações em caso de dúvidas quanto os procedimentos, até mesmo para que não percam o foco e tempo com conversas paralelas por exemplo

O **registro** é o momento em que cada equipe deverá registrar os resultados obtidos ou seja fazer a sistematização das informações no espaço destinado no roteiro.

A **análise** é o momento em que as equipes devem analisar os resultados que registraram, a fim de identificar características do objeto matemático em estudo para conceituá-lo ou defini-lo a partir dos resultados que registraram. Caso as equipes não consigam identificar uma relação válida que consigam conceituar ou definir o objeto, mesmo com indagações propositivas do professor a tal finalidade, deve-se deixar então para o momento da institucionalização.

E por fim chega-se ao momento da **institucionalização**, a hora de um aluno por equipe expor na lousa as observações registradas no roteiro e a partir delas o professor apresentará o conceito ou definição geral do objeto de acordo com o objetivo da atividade planejada. Em seguida a partir das considerações da turma será feita a conclusão da turma.

Sá (2019, p. 37-38), considera as recomendações de Henning (1994) em que o planejamento deve ocorrer em etapas, basicamente em momentos como: "**determinação do resultado desejado, construção do objetivo, produção do material, elaboração do procedimento, elaboração do espaço de registro, elaboração do desafio, verificação, previsão da institucionalização e elaboração do roteiro.**"

O momento da **determinação do resultado desejado** é quando o professor irá escolher o resultado que se pretende alcançar a definição/conceito do objeto matemático desejado, e o enunciado que se espera para definir ou conceituar.

A **construção do objetivo** é o momento que será descrito o que esse pretende alcançar com a atividade, no entanto, deve ser colocado de forma implícita o conceito ou definição, mas que o aluno seja capaz de fazer essa relação após finalizar a atividade.

No momento da **produção do material** será feito a seleção ou elaboração dos materiais necessários para o desenvolvimento da atividade que dependerá das ações descritas no procedimento, podendo até mesmo não existir material necessário.

Para o momento da **elaboração do procedimento** o professor deve ter atenção ao objetivo que pretende alcançar e a partir disso, propor ações instruídas em tópicos com linguagem clara, precisa e que norteiem os estudantes a observarem e serem capazes de estabelecer uma relação com o objeto matemático escolhido.

Quanto a **elaboração do espaço de registro** será o momento em que se organiza o espaço na atividade para anotações produzidas durante a atividade, mas que podem ser necessárias e utilizadas pelos alunos para chegarem a uma possível resposta, esse espaço geralmente é um quadro com linhas e colunas.

O momento da **elaboração do desafio** é hora da construção de questão que seja explicita a relação das características do objeto e que faça com que o aluno possa sistematizar essa relação. A questão poderá perguntar: como obter os resultados mais rapidamente? Ou pode por um espaço para observações.

A **elaboração do roteiro** é o momento em que o professor descreve sua atividade. Nessa elaboração do roteiro deverá ter: Título, Objetivo, Material, Procedimento, espaço de registro, espaço de observação (sem necessidade de expressar quantidades de linha) e também o espaço de conclusão.

O momento da **verificação** é a hora em que o professor irá seguir o roteiro para realizar a atividade e verificar se a partir dela é possível chegar as características do objeto definido e se os materiais estão de acordo com o necessário.

Em relação ao momento da **previsão da institucionalização** é a hora que o professor irá pensar e elaborar possíveis questões que irão auxiliar os alunos a realizarem uma conclusão plausível a partir dos resultados esperados. Vale ressaltar que as questões dependem dos objetivos e procedimentos de cada atividade. Algumas questões que podem ser exemplificadas são;

> 1)Quais das conclusões registradas no quadro permitem que alguém que não participou da atividade entenda o resultado obtido?
>
> 2)O que foi realizado na atividade?
>
> 3)O que foi observado/descoberto na atividade? (SÁ, 2019. p.40)

É fundamental destacar que esse tipo de atividade proposta por Sá (2019, 2020); Mafra e Sá (2023), desenvolvida com interação coletiva, a ação da atividade experimental produzirá conhecimento, pois haverá:

> [...]diálogos e ações com base no que se quer obter, como por exemplo, registros simbólicos e cooperação educativa entre alunos, e movimentos internos e intrínsecos às funções psicológicas superiores e de cognição, cuja a capacidade de abstração, compreensão conceitual e de argumentação, é o que se espera obter, quando da busca de uma autoconsciência, para o que desenvolvemos ou desejamos desenvolver, do ponto de vista educacional. (Mafra e Sá, 2023, p.15)

Através desses direcionamentos propostos acreditamos ser possível utilizar atividades de conceituação e redescoberta para ensinar razão e proporção ou outro conteúdo curricular, com esse tipo de atividades experimentais os alunos tentem a observar, refletir, discutir e concluir um conceito, definição, propriedade ou uma relação. Ao envolver a experimentação contribuímos de forma mais significativa no desenvolvimento cognitivo do aluno na descoberta do conhecimento matemático.

3.5 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Em matemática existem diferentes formas de escrever uma representação de um objeto matemático como nas formas: Algébrica, Geométrica, Gráficas, tabular, entre outras e essas se relacionam com a linguagem natural, seja para expressar uma relação ou uma operação em uma atividade matemática, e cada aluno pode apresentar um pensamento matemático diferente do outro, pois, o processo cognitivo depende das dificuldades individuais que o discente encontra para desenvolver sua capacidade intelectual. Afim de compreender o pensamento matemático o pesquisador Raymond Duval desenvolveu pesquisas e teoria capaz de explicar o pensamento matemático.

Raymond Duval é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da Universidade do Litoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. Duval realiza investigações sobre Teoria dos Registros da Representação Semiótica (TRRS) nas atividades da aprendizagem matemática. Nesse sentido, o pesquisador Duval explora os registros de representação semiótica em relação aos objetos matemáticos em seu artigo apresentado na França nos Anais de Didática e Ciências Cognitivas em Estrasburgo: IREM - ULP, 1993. tendo Morreti realizado sua tradução para a língua portuguesa com publicação na Revemat em 2012.

Para Duval (2012) a matemática é vista por meio de representação de um objeto matemático: notação, um símbolo, um traçado ou uma figura que, por conseguinte, representam os objetos matemáticos - números, função, vetor, pontos, segmentos, retas, círculos, entre outros - e, portanto, para Duval (2012, p.268) “[...]os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele[...]”, o que os torna primordial essa distinção para conhecer a matemática e necessária para a atividade cognitiva do pensamento.

Na matemática nem sempre os objetos matemáticos de acordo com (Duval, 2012, p.268. Grifo nosso) “[...]estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar **representantes** [...]” para se ter um funcionamento cognitivo do pensamento matemático.

O autor considera que o pensamento matemático no ensino se dá sob duas representações as **mentais** e **semióticas**.

> As **representações mentais** recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As **representações semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (DUVAL, 2012, p.269. Grifo nosso)

Almouloud e Henriques (2016), partindo da compreensão das ideias de Durval (1993) discorrem em sua pesquisa algumas definições importantes que facilitam e reforçam o entendimento em relação a alguns termos tratados na TRRS, tais como:

> **Definição 1**: Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema *semiótica* e de outro lado, pela *referência* do objeto representado.
>
> **Definição 2**: Um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico (cf. Definição 3), como as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/ retas/curvas, planos e superfícies) para o registro gráfico, os números, as operações aritméticas, para o registro numérico e, de um modo geral as regras de conformidade. (Almouloud e Henriques, 2016, p.467)

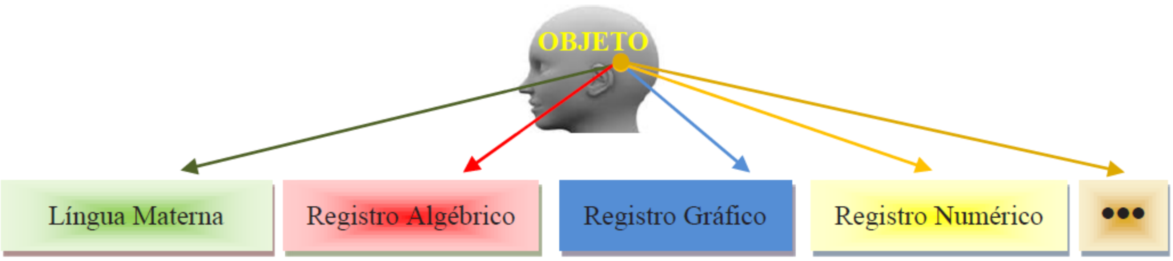
Para Vygotsky e Piaget (1962 e 1968, *apud* Duval, 2012, p.269) as atividades cognitivas do pensamento “no desenvolvimento das representações mentais: estas dependem de uma interiorização de representações semióticas, do mesmo modo que as representações mentais são uma interiorização daquilo que é percebido”. Já para Benveniste, Bresson (1979 e 1978, apud *Duval*, p.269, 2012) “a produção de conhecimentos: as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto, na medida em que elas podem atender sistemas semióticos totalmente diferentes”.

Enquanto que para Duval (2012) as atividades cognitivas do pensamento realizam diferentes funções cognitivas como função de objetivação e função de tratamento:

> - na realização de diferentes funções cognitivas: a **função de objetivação** (expressão particular) que é independente daquela de comunicação (expressão para outrem), e a **função de tratamento** que não pode ser preenchida pelas representações mentais (algumas atividades de tratamento são diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, por exemplo, o cálculo); (Duval, 2012, p. 269. Grifos nosso)

Para que o aluno possa ter a produção do conhecimento é importante que obtenha variados registros de representações semióticas como: figuras, gráficos, tabelas, escrituras simbólicas, língua natural, entre outras, pois, fará uso do registro que lhe for mais plausível em determinada situação para aquisição conceitual do objeto que lhe for apresentada. Mas, vale salientar que, de acordo com Duval (1995, *apud* Almouloud e Henriques, 2016) “dispor de vários registros de representação não é suficiente para garantir a compreensão”.

Figura 7 – Possíveis registros de representação de um objeto matemático



Fonte: imagem retirada de Almouloud e Henriques, (2016).

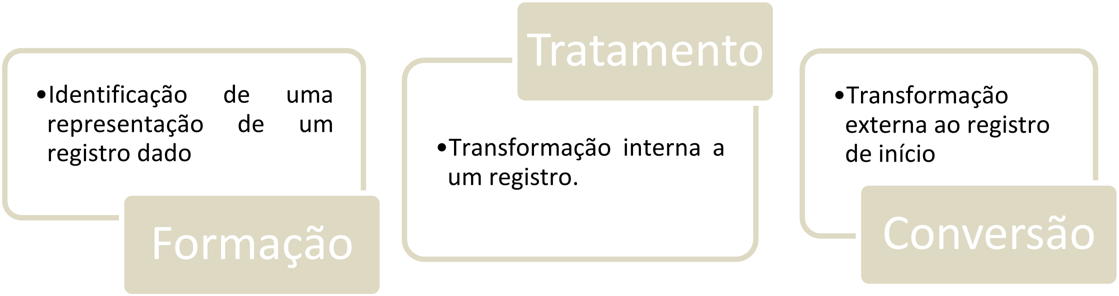
Almouloud e Henriques, (2016, p. 469) utilizam a “**Definição 3:** Um registro de representação é um sistema dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto de saber”, a fim de facilitar o significado de cada expressão que integram a TRRS.

Ainda, para entendermos o funcionamento da aquisição do conhecimento é preciso aceitarmos que para o sistema semiótico ser considerado como registro semiótico este deve possibilitar as três atividades cognitivas ligadas a semiose que segundo Duval (2012) são de: formação, tratamento e conversão. As quais foram definidas por Almouloud e Henriques (2016) como:

> **Definição 4**: A **formação** de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido.

> **Definição 5**: O **tratamento** de uma representação é a transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro.
>
> **Definição 6**: A **conversão** de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro. (Almouloud e Henriques, 2016, p.469)

Quadro 3 – Atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose



Fonte: Adaptado pelos autores a partir de Duval, 2012.

Além disso, a aprendizagem matemática ocorrerá se houver a coordenação dos diversos registros de representação e o reconhecimento do objeto matemático nos diferentes registros representados, ou seja, a ocorrência da semiose e noesis no processo cognitivo do indivíduo. Duval (2012, p.270) faz a distinção entre "semiose" e "noesis", sendo a **semiose** a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e **noesis** a apreensão conceitual de um objeto, logo, para o autor "[...]a noesis é inseparável da semiose".

Segundo Duval (2012, p.278), essa coordenação entre os registros de representação é importante, pois, como se terá uma "[...]diversidade de registros no funcionamento do pensamento humano. Elas estão centradas nos custos de tratamento e nas limitações representativas específicas a cada registro[...]". Teremos que ter então uma condição necessária e centrada em diferenciar o representante e representado. Por isso, de acordo com (Almouloud e Henriques, 2016, p.469) "O **tratamento** dos objetos matemáticos depende, portanto, das possibilidades de suas representações".

3.6 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A demanda escolar carece, cada vez mais de metodologias ativas de ensino que incentivem os alunos a serem autônomos, participativos e colaborativos em busca do conhecimento, por este motivo vem se discutindo procedimentos de inovação e ressignificação metodológicas nos cursos de licenciaturas, conforme orienta os documentos oficiais do sistema de ensino e planejamento pedagógico escolar, referente a resolução de problemas em aulas de matemática.

A BNCC entre outros aspectos educativos orienta que o aluno deve adquirir habilidades para ser capaz de alcançar a competência nº 05 especifica da matemática no ensino fundamental, a qual consiste em “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e **resolver problemas** cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados”. (Brasil, 2017, p. 267. Grifos nossos).

No que tange a competência especifica do ensino médio a BNCC, ressalta também a importância para o aluno ser capaz de:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e **resolver problemas** em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (Brasil, 2017, p.531. Grifo nosso)

Existem estudos que visam a melhoria da qualidade do ensino de matemática por meio de resolução de problemas, pesquisas experimentais, até mesmo, material com proposta de resolução de problemas, mas que certamente exigem estudos, reflexões e apuração de resultados específicos sobre a temática.

Sá (2021) buscou compreender as seguintes indagações: O que vem a ser a resolução de problemas? Qual é a relação entre problema, exercício e questão? Como a resolução de problemas pode ser utilizada em sala de aula? E a partir disso apresentou possibilidades de resolução de problemas para aulas de matemática.

É importante ter ciência que a resolução de problemas não tem relação estrita com a área da matemática apesar de estar presente em documentos oficiais direcionados ao ensino matemático, Sá (2021, p. 7), a partir de Pozo (1998), esclarece que, “a resolução de problemas não deve ser vista como atividade específica de qualquer área do conhecimento [...]”. Entretanto se torna viável ao ensino de matemática, com muitas possibilidades de utilização.

Para Zeitz (1999) existe uma diferença entre exercício e problema, onde diz que:

> - Exercício: é uma questão que você sabe como resolver imediatamente.
> - Problema: é uma questão que demanda muito pensamento e desembaraço antes do caminho ser encontrado. (ZEITZ, apud Sá, 2021, p.12)

Ademais, Sá (2021) estabelece uma espécie de transposição ao relacionar problema e exercício, pois de fato se o aluno dominar uma ação procedimental que soluciona o problema e os leve a uma ação frequente e o aluno tiver contato com qualquer problema de seu domínio procedimental então este problema passará a ser apenas um exercício, pois para ele:

> [...]para uma situação tornar-se um exercício para um indivíduo basta que ele tenha acesso a um procedimento que leve a uma solução da mesma e seja levado a praticar esse procedimento com frequência. Em outras palavras, na primeira vez que uma pessoa enfrenta uma situação e consegue uma solução ela será um **problema**, depois de dominar o caminho que leva a solução dela será apenas um **exercício**. (Sá, 2021, p.13. Grifos nosso)

Ainda Sá (2021, p.15) considera que as **questões** são “[...] as situações apresentadas nos livros didáticos ou nas listas entreguem em sala[...]”. Desse modo o autor esclarece a relação do problema, exercício e questão que foi uma das indagações a serem abordadas em sua pesquisa, mas enfatiza que não é tarefa fácil distinguir se é problema ou exercício em uma situação onde está presente questões de exame, questões de teste ou atividades de livro. Devendo haver sempre uma reflexão do material a ser trabalhado com os discentes.

Borasi (1986) classifica os problemas em sete agrupamentos: **exercício**; **problema verbal**; **desafio**; **prova**; **vida real**; **situação problema**; **situação** que são classificados a partir da triangulação dos descritores: tipo de tarefa, formulação, solução e método de abordagem, os quais Ferreira e Buriasco (2015, p.463), retratam em seu artigo e que apresentaremos no quadro a seguir:

Quadro 4 – Classificação de Problemas – Borasi (1986)

Tipo de tarefa	Formulações	Soluções	Método de abordagem
Exercício	Única e explicita	Sobretudo única e exata	Combinação de algoritmos conhecidos
Problema de palavra	Única e explicita	Sobretudo única e exata	Combinação de algoritmos conhecidos
Problema-Enigma	Única e explicita	Sobretudo única e exata	Elaboração de um novo algoritmo-ato de reformulação-reflexivas
Prova de uma conjectura	Única e explicita	Geralmente, mas não necessariamente única	Reformulação do contexto-reformulações-elaboração de novos algoritmos
Problema da Vida real	Parcialmente dada-muitas alterativas possíveis	Muitas possíveis-apenas soluções aproximadas	Reformulação do contexto-reformulações-criação de um modelo
Situação problemática	Muitas implicitamente sugeridas-uma explicita pode ser dada	Muitas possíveis	Reformulação do contexto-reformulações-problematização
Situação	Inexistente-nem mesmo implicitamente	A criação de um problema	Problematização

Fonte: Ferreira e Buriasco, 2015.

Em Sá (2021, p.23-24) é apresentado a organização de problemas do ponto de vista de Dante (1988), ele descreve os tipos de problema caracterizando-os como: **exercício de reconhecimento**; **exercício de algoritmos**; **problemas-padrão**; **problemas-padrão simples**; **problemas-padrão compostos**, **problemas-processo**; **problemas de aplicação**; **problema de quebra-cabeça**. E estes são classificados também a partir da triangulação dos descritores: objetivo e descrição, sendo:

Objetivo: fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição ou propriedade; treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores; recordar e fixar os fatos básicos de algoritmos já estudados; recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos de mais de uma operação já estudada; iniciar o estudante no desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema; desenvolver a habilidade de matematizar uma situação real; apresentar situações recreativas através de relações matemáticas.

Descrição: podem ser resolvidos passo a passo; pedem a execução de algoritmos; a resolução envolve a aplicação de um ou mais algoritmos anteriormente estudados e não exige qualquer estratégia; a solução envolve operações que não estão contidas no enunciado; retratam situações reais do dia-a-dia e exigem o uso da Matemática para serem resolvidos; sua solução, quase sempre, depende de se perceber algum detalhe que dá a chave para solução do problema.

Reflexões como a de Sá (2021) apontam que Mendonça (1999) realizou um estudo sobre resoluções de problemas no qual considerou três interpretações para a resolução de problemas que foram: **objetivo, um processo** e **um ponto de partida**.

Boavida (1994), fez uma pesquisa, afim de obter um resultado de resolução de problemas matemáticos sob a perspectiva do professor, onde constatou que, as filosofias pessoais da matemática: absolutismo, absolutismo progressista e o falibilismo são os maiores propulsores da resolução de problemas do ponto de vista do professor, porém, influenciadas por objetivos de ensino e aprendizagem, currículo, contexto físico e social das escolas em que trabalha, expectativas ao que deve ser ensinado, entre outros.

Ademais, Sá (2021) considera que os pontos de vistas de Mendonça para a resolução de problemas com as filosofias pessoais da matemática seguem na mesma direção de Boavida, pois:

> - **absolutismo** implica em pensar a resolução de problemas como **objetivo**;
> - **absolutismo progressista** implica em pensar a resolução de problemas como **processo**;
> - **falibilismo** implica em pensar a resolução de problemas como **ponto de partida**. (Sá, 2021, p.39)

Sabe-se que é válido buscar meios de melhorar o processo de ensino aprendizado dos alunos, seja da educação básica ou superior, quanto mais maneiras de ensinar ou de facilitar o desenvolvimento cognitivo, conhecermos, mais significante e progressivo será o processo educacional. Sá (2021) utiliza, faz recomendações e dá sugestões para trabalharmos com a resolução de questões como: objetivo, processo e ponto de partida, pois para o autor:

> [...]pensar a resolução de questões como **objetivo** significa que se ensina matemática para resolver problemas e que a maneira de pensar a resolução de questões como objetivo, implica em ser suficiente ao processo de ensino da matemática, expor a teoria e em seguida propor questões mais ou menos engenhosas sobre o assunto estudado[...]. (Sá, 2021, p.41)

Davis e Mckllip (1997, p.114 -118, *apud* Sá 2021), apresentam as seguintes ideias para melhor criar ou selecionar os problemas como objetivos:

- Começar propondo problemas que todos os envolvidos sejam capazes de resolver
- Substituir os números grandes por números pequenos
- Reduza as dificuldades com a leitura
- Use o contexto social e o nível de interesse dos alunos
- Substituir as questões do tipo “Coloque falso ou verdadeiro” por questões do tipo “Dê um exemplo de”
- Dê uma sequência de exercícios algorítmicos com um propósito específico;
- Faça a inversão de um problema conhecido;
- Apresentar informações para que os estudantes elaborem questões;
- Apresentar questões que faltam dados para que o estudante os descubra;
- Não dizer ao estudante o que ele pode descobrir só;
- Não proteger demais o estudante dos erros;
- Oportunizar a socialização das soluções encontradas;
- Estimular a troca de ideias entre os estudantes;
- Decompor uma questão mais elaborado numa sequência de questões mais simples;
- Utilizar as listas de questões propostas como referência para elaboração de testes avaliativos;
- Propor questões com mais de uma solução;
- Propor questões sem solução;
- Propor questões de processos seletivos;
- A resolução de questões como objetivo e a realidade;

Já sob o ponto de vista de Sá (2021) para a resolução de problemas como processo é que:

> Na interpretação da resolução de problemas como **processo** o objetivo é avaliar e/ou munir os educandos de técnicas ou heurísticas para resolução de problemas, o que é um objetivo louvável, pois na vida em muitas situações que enfrentamos as mesmas nem sempre precisam ser resolvidas através do uso de algoritmos ou fórmulas[...]. (Sá, 2021, p.71)

Mas, para tal, devemos seguir sempre que for pertinente as 5 (cinco) primeiras recomendações adaptadas por Sá (2021) de Butts (1997), bem como outras 7 (sete) advindas da própria experiência que poderão facilitar o objetivo desejado com a resolução de problemas como processo:

1- A resolução de problemas como processo não deve ser uma atividade isolada das aulas regulares;

2- O fato de existirem problemas difíceis não é motivo para eles serem evitados;

3- Quanto mais estratégias para resolver problemas às pessoas conhecem, mais preparadas ela estão para enfrentar os obstáculos da vida;

4- A flexibilidade na resolução de problemas é um tipo de comportamento que se aprende;

5- É preciso tempo para se desenvolver a habilidade de resolver problemas.

6- Incentive o aluno a considerar estratégias diferentes que possam ser usadas para resolver um problema, usando materiais/procedimentos diversos;

7- Use perguntas para focalizar a atenção do aluno na informação pertinente dada no problema;

8- Sempre que possível, planeje dentro de cada conteúdo ou unidade trabalhada sessões de resolução de problemas na interpretação de processo;

9- Estimule os alunos a resolverem e/ou apresentaram problemas criativos dentro de cada assunto estudado;

10- Não subestime a capacidade dos seus alunos em propor e/ou resolver problemas;

11- Realize sessões de resolução de problemas estimulando o trabalho em grupo;

12- Para cada unidade desenvolvida do seu planejamento realize uma sessão de resolução de problemas não padrões;

Ao se tratar dos aspectos da resolução de problemas como ponto de partida, Sá (2021) considera que “[...]a concepção de resolução de questões como ponto de partida, cujo objetivo é partindo de um problema culminar numa sistematização de conceitos e operações da matemática”.

> Para utilizar a resolução de problemas como ponto de partida **o professor deve antes de tudo acreditar que é possível, dentro de certos limites, serem resolvidos problemas sem o domínio de certas operações e conceitos matemáticos.** (Sá, 2021, p.95)

O autor Romanatto (2012) também considera na mesma perspectiva que:

> [...]o problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não a definição. No processo de ensinar e de aprender ideias, propriedades e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os estudantes precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (Romanatto, 2012, p.302)

Ainda de cordo com Sá (2021) a partir de suas experiências vivenciadas em sala de aula tanto na educação básica quanto no nível superior no uso da resolução de problemas como ponto de partida lhe proporcionou uma série de observações a esse respeito, citado como recomendação em seu trabalho para subsidiar os professores que desejam fazer uso destas. Assim, pontua-se as seguintes recomendações do autor:

1- Não tente fazer uma aula desse modo de maneira improvisada.

2- Determine qual é o problema mais simples e interessante para turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução.

3- Descubra um processo de resolver o problema sem o uso da operação.

4- Proponha a situação-problema em sala e disponibilize um pouco de tempo para turma pensar numa solução.

5- Solicite que a turma apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem.

6- Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma.

7- Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema.

8- Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado.

9- Sistematize o conceito, o conteúdo que você tinha como objetivo trabalhar.

10- Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.

11- Proponha outras questões envolvendo o assunto sistematizado.

A resolução de problemas é uma metodologia que pode favorecer o desenvolvimento da habilidade intelectual do aluno, cabendo ao professor um olhar clínico para elaborar seus objetivos e escolher a proposta que melhor se adequa a seus propósitos.

> No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação. (Brasil, 2017, p.535)

Portanto, cabe ao professor saber escolher a maneira mais viável para ensinar matemática com resolução de problemas, até porque não será para todas as questões propostas que poderemos utilizar uma única concepção de resolução de problemas dentre as comentadas anteriormente.

3.7 A TAXONOMIA DE BLOOM E A CLASSIFICAÇÃO DE QUESTÕES

Ferraz e Belhot (2010) nos revelam uma revisão teórica da Taxonomia de Bloom que se iniciou segundo Lomena (2006, apud Ferraz et al, 2010) em 1948 com o pedido da Associação Norte Americana de Psicologia (American Psycological Association) para que montassem uma “força tarefa” a fim de definir e criar uma taxonomia dos objetivos de processos educacionais.

De acordo com Sá (2021, p. 25-26), em 1956, sob a liderança do Psicólogo Educacional Benjamin Samuel Bloom elaboraram a Taxonomia que recebeu a denominação de Taxionomia de Bloom.

O conceito de Taxonomia para Ferraz *et al* (2010) é corroborada com a Wikipédia (2006), aceitando que ela “é a ciência de classificação, denominação e organização de um sistema pré-determinado e que tem como resultante um *framework* conceitual para discussões, análises e/ou recuperação de informação”

Bloom *et al*, *apud* Ferraz *et al* (2010, p.422) citaram que “vários pesquisadores se utilizaram dessa terminologia conceitual baseada em classificações estruturadas e orientadas para definir algumas teorias instrucionais [...]”, e duas das vantagens de usar a taxonomia no contexto educacional são:

> - Oferecer a base para o desenvolvimento de instrumentos de avaliação e utilização de estratégias diferenciadas para facilitar, avaliar e estimular o desempenho dos alunos em diferentes níveis de aquisição de conhecimento; e
> - Estimular os educadores a auxiliarem seus discentes, de forma estruturada e consciente, a adquirirem competências específicas a partir da percepção da necessidade de dominar habilidades mais

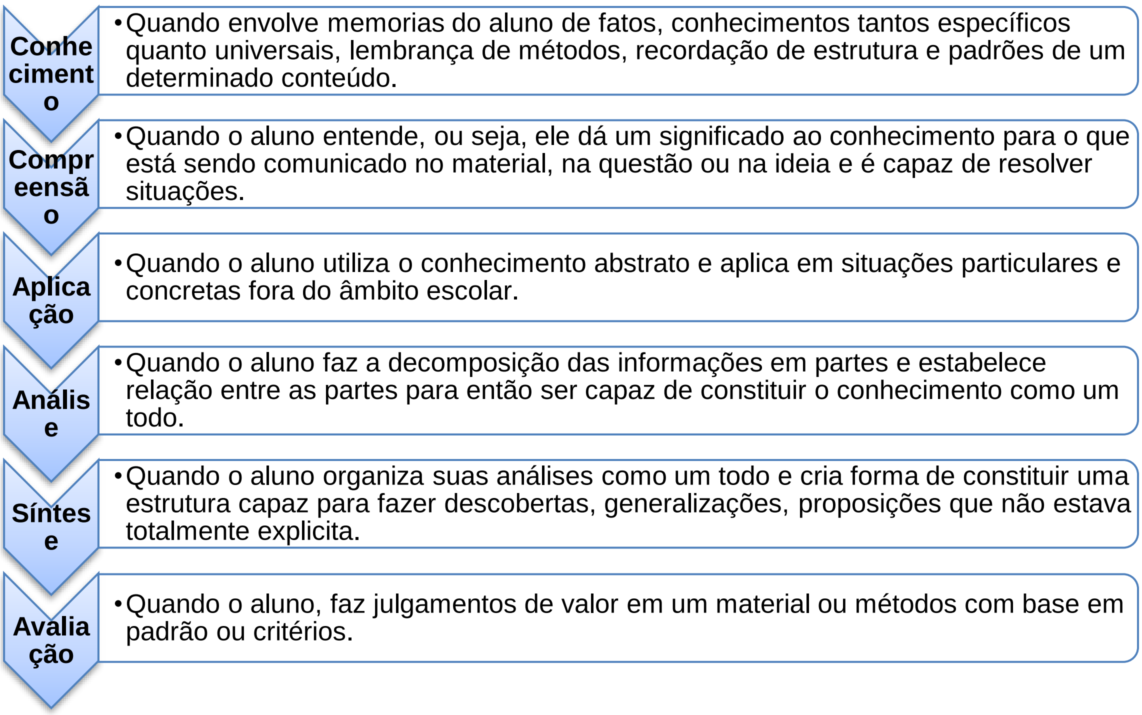
> simples (fatos) para, posteriormente, dominar as mais complexas (conceitos).

Para que conseguissem criar a taxonomia e chegar aos objetivos de processos educacionais como lhes foi designado Bloom e sua equipe, como afirma Sá (2021, p.26) “[...] dividiram o trabalho em três domínios específicos de desenvolvimento: a) **cognitivo**, b) **afetivo** e c) **psicomotor**”.

> - O domínio **cognitivo** foi relacionado ao aprender, dominar um conhecimento, ou seja, abrangendo a aprendizagem intelectual.
> - O domínio **afetivo** foi relacionado a sentimentos e posturas, o que abrange os aspectos de sensibilização e gradação de valores.
> - O domínio **psicomotor** foi associado com habilidades físicas específicas, relacionado às habilidades de execução de tarefas que envolvem o aparelho motor (SÁ, 2021, p.26).

O processo educacional se dá mediante ações e construções dos alunos ao meio e para que se possa compreender o comportamento dos discentes, as mudanças no interesse, atitudes, o desenvolvimento e as habilidades motoras Bloom *et al* (1956, p. 18) estruturou uma taxonomia em 6 classes: 1- conhecimento, 2- compreensão, 3- aplicação, 4- análise, 5- síntese e 6- avaliação.

De acordo com Bloom *et al* (1956), a classificação da taxonomia dos objetivos educacionais voltadas ao domínio cognitivo deve ocorrer de acordo com as estruturas hierárquicas do mais simples ao mais complexo, nessa ordem:



Conhecimento	Quando envolve memorias do aluno de fatos, conhecimentos tantos específicos quanto universais, lembrança de métodos, recordação de estrutura e padrões de um determinado conteúdo.
Compreensão	Quando o aluno entende, ou seja, ele dá um significado ao conhecimento para o que está sendo comunicado no material, na questão ou na ideia e é capaz de resolver situações.
Aplicação	Quando o aluno utiliza o conhecimento abstrato e aplica em situações particulares e concretas fora do âmbito escolar.
Análise	Quando o aluno faz a decomposição das informações em partes e estabelece relação entre as partes para então ser capaz de constituir o conhecimento como um todo.
Síntese	Quando o aluno organiza suas análises como um todo e cria forma de constituir uma estrutura capaz para fazer descobertas, generalizações, proposições que não estava totalmente explicita.
Avaliação	Quando o aluno, faz julgamentos de valor em um material ou métodos com base em padrão ou critérios.

Fonte: Adaptada pelos autores, a partir de Bloom *et al*, 1956.

Após alguns anos da utilização e contribuição da taxonomia no campo educacional com experiências, diálogo e significativos avanços educacionais segundo Anderson *et al* (2001, *apud* Ferraz *et al*, 2010) em 2001 surgiu uma revisada estrutura para a Taxonomia agrupadas nas classes: lembrar, entender, aplicar; analisar, sintetizar e avaliar.

Quadro 5 – Estrutura do processo cognitivo da taxonomia de Bloom – revisada

Classes	Descrição
Lembrar	Relacionado a reconhecer e reproduzir ideias e conteúdo. Reconhecer requer distinguir e selecionar uma determinada informação e reproduzir ou recordar está mais relacionado à busca por uma informação relevante memorizada. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Reconhecendo e Reproduzindo
Entender	Relacionado a estabelecer uma conexão entre o novo e o conhecimento previamente adquirido. A informação é entendida quando o aprendiz consegue reproduzi-la com suas "próprias palavras". Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Interpretando, Exemplificando, Classificando, Resumindo, Inferindo, Comparando e Explicando.
Aplicar	Relacionado a executar ou usar um procedimento numa situação específica e pode também abordar a aplicação de um conhecimento numa situação nova. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Executando e Implementando
Analisar	Relacionado a dividir a informação em partes relevantes e irrelevantes, importantes e menos importantes e entender a inter-relação existente entre as partes. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Diferenciando, Organizando, Atribuindo e Concluindo
Avaliar	Relacionado a realizar julgamentos baseados em critérios e padrões qualitativos e quantitativos ou de eficiência e eficácia. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Checando e Criticando
Criar	Significa colocar elementos junto com o objetivo de criar uma nova visão, uma nova solução, estrutura ou modelo utilizando conhecimentos e habilidades previamente adquiridos. Envolve o desenvolvimento de ideias novas e originais, produtos e métodos por meio da percepção da interdisciplinaridade e da interdependência de conceitos. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Generalizando, Planejando e Produzindo

Fonte: Adaptado pelos autores a partir de Ferraz e Belhot, 2010.

Sá (2021, p.31-33) faz um paralelo com a Taxonomia de Bloom parametrizando, estabelecendo uma relação da resolução de questões entendendo que as "**questões**" outrora definido pelo autor como sendo "as situações apresentadas nos livros didáticos ou nas listas entreguem em sala", podem ser distribuídas "[...]dentro dos seguintes grupos: a) **lembrar**; b) **entender**; c) **aplicar**; d) **analisar**; e) **sintetizar** e f) **avaliar**". Pois, as experiências de aprendizagens podem ser adquiridas por questões de:

Quadro 6 – Estrutura do processo cognitivo da Taxonomia de Bloom a partir de “questões”

Classes	Descrição
Lembrar	Quando a questão solicitar essencialmente o uso de um conceito ou definição para obter a resposta da questão
Entender	Quando a questão solicitar essencialmente a interpretação de um conceito ou definição para obter a resposta da questão
Aplicar	Quando a questão solicitar essencialmente o uso de um conceito, definição, operação ou propriedade(s), ou mesmo a combinação delas, para obter a resposta da questão
Analisar	Quando a questão solicitar essencialmente a produção de uma comparação entre aspectos de um ou mais assuntos de matemática
Sintetizar	Quando a questão solicitar essencialmente a produção de um documento contendo uma sistematização de um assunto de matemática.
Avaliar	Quando a questão solicitar essencialmente o uso combinado de conceitos, definições, operações ou propriedade(s) em uma situação específica, para decidir sobre tomada de decisão

Fonte: Adaptado pelos autores a partir de Sá, 2021.

Nesse sentido devemos considerar o domínio cognitivo de aprendizagem do aluno para que possamos elaborar um plano de aula que possa respeitar seu potencial de aprendizado, seja, usando metodologia com resolução de problemas ou não. Vale a pena ressaltar que não estamos considerando os domínios afetivo e psicomotor menos importantes, afinal cada domínio tem sua colaboração na formação do indivíduo.

3.8 ASPECTOS HISTÓRICOS DO CONTEÚDO DE RAZÃO E PROPORÇÃO: UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA

A matemática como uma área de conhecimento fundamental ao saber humano carece de compreensão da sua historicidade e ainda mais se esta, estiver sendo ensinada em sala de aula, afinal, o desenvolvimento do ensino acontece em meio a evolução histórica e a partir dessa necessidade faremos uma abordagem histórica. Para nos delimitarmos ao objeto matemático de estudo de nossa pesquisa, iremos nos ater a estudar aspectos matemáticos de momentos históricos da razão e proporção, afim de entendermos a “recriação” desse objeto matemático, nos referimos a recriação, pois, não se está criando o novo, mas sim transformando uma linguagem escrita no passado em notação simbólica, gráficos e não um conteúdo.

Abdounur (2012), considera que razão e proporção tiveram suas origens relacionados à música, com evidencias desde a época que os pitagóricos utilizaram os monocórdios como experimento musical, mesmo que não de forma aritmética, mas que segundo Abdounur (2012, p.387), inegavelmente se tinha

“[...]correlação entre altura musical e comprimento da corda, entre intervalos musicais e razões matemáticas, bem como entre composição de intervalos musicais contíguos e composição de razões matemáticas”. Fossa (2011, p.6) entende da mesma forma e diz que “a Música é o estudo de razões e proporções.

O autor Abdounur (2012) acredita que a matemática e a música da cultura ocidental têm relações diretas desde a antiguidade e corrobora com as ideias de Grattan-Guinness (1996) que:

> [...] defende ser provável que por razões culturais, os matemáticos gregos, juntamente com seus contemporâneos e predecessores concebiam as teorias de razão como generalização de teoria musical, na medida em que propriedades das cordas e comparação entre alturas, assim como cálculos relacionados a tais magnitudes por meio de razões e proporções, eram uma importante parte da matemática desde os pitagóricos até Euclides (Abdounur, 2012, p.389).

Entretanto, essas relações foram observadas e perceberam que a razão no intervalo musical é um caso particular, o que não desmerece da certeza de sua contribuição no entendimento do estudo da razão e proporção, pois há semelhanças estruturais nas composições dos intervalos das notas musicais e a aritmética. Ainda, Abdounur (2012) faz uma reflexão entre: Razão e número, proporção e igualdade, composição e multiplicação no que concerne ao contexto original de razão e proporção tratado na obra “*Os Elementos*” de Euclides a qual traz a proporção não como sendo igualdade de razões, mas sim como igualdade de números e de grandezas, e diz que:

> O conceito de proporção é, portanto, uma proposição lógica, envolvendo duas razões em que se pode, portanto, atribuir valor verdadeiro ou falso, ao passo que a igualdade reduz os vários casos de proporcionalidade a um elemento representante da classe de equivalência definida por todas as razões que são proporcionais, considerando iguais as diversas proposições que são proporcionais, mas não iguais[...] (Abdounur, 2012, p.391).

Contudo, não foi apenas a música uma forte influência fundamental da razão e proporção nas relações culturais dos povos das civilizações antigas, situações comerciais corriqueiras vivenciadas por povos da antiguidade também foram fundamentais para que pudéssemos, atualmente, entender outros diversos estudos que levaram os pesquisadores a transformarem suas observações em conjuntos de conceitos, definições, problemas, entre outros.

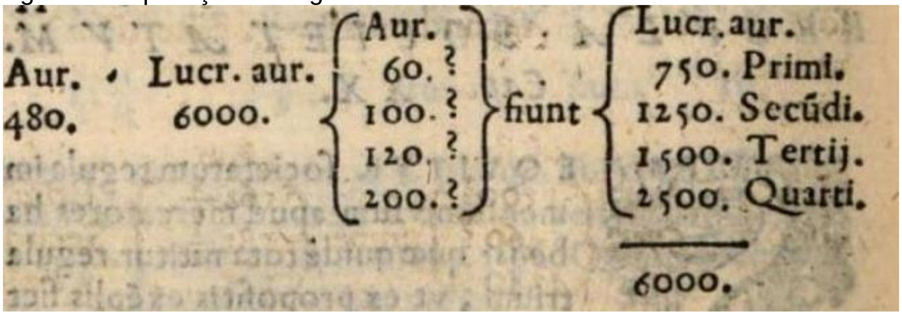
Como veremos, essas antigas civilizações já utilizavam raciocínio proporcional para resolverem problemas.

Brandemberg (2021), traz situações que foram enunciadas por Christophori Clavius em seu livro *Epitome Arithmeticae Practicae* em 1614, mas analisado por ele em uma edição de 2012. Corroboramos com Brandemberg (2021, p.94) ao expressar a utilidade dos estudos de Clavius que buscou em situações da vida prática dos comerciantes, artesões, etc. relações aritméticas para solucionar questões diversas considerando que tal estudo reflete uma "matemática prática":

> De fato, sua aplicação em transações comerciais, na prestação de contas, tanto na esfera pública (cobrança de taxas) quanto na privada (sociedades), a torna uma ferramenta indispensável, por exemplo, para o cálculo de receitas e despesas, reconhecendo possíveis fraudes (Brandemberg, 2021, p.94).

A seguir tem-se exemplo de uma situação que Clavius (2012, *apud* Brandemberg, 2021, p.104), trata em seu livro: "quatro mercadores iniciam um consórcio, e ao final tem um lucro total de 6000. O primeiro contribuiu com 60, o segundo com 100, o terceiro com 120 e o quarto com 200. Qual a parte no lucro que cabe a cada sócio", para o autor a solução da mesma se deu aplicando o método da regra da sociedade, primeiro encontrou a constante de proporcionalidade e, por fim, multiplicou cada valor investido pela constante de proporcionalidade e cada um passou a receber o valor proporcionalmente: 750, 1250, 1500 e 2500.

Figura 8 – Aplicação da regra da sociedade



Aur. Lucr. aur.
480. 6000.
Aur.
60.
100.
120.
200.
fiunt
Lucr. aur.
750. Primi.
1250. Secũdi.
1500. Tertij.
2500. Quarti.
6000.

Fonte: imagem retirada de Brandemberg, 2021.

Eves (2011), nos retrata a matemática dos primórdios de diversos povos até a atualidade, com um tratamento que nos permite perceber a evolução e a contribuição dos antepassados para a matemática utilizada por nós hoje. Ao tratarmos do ensino da proporcionalidade, atualmente, utilizamos a fim de chegarmos a resultados operacionais, o que chamamos de “regra de três”, regra esta que segundo Eves (2011, p.263), “se originou na China antiga, alcançou a Arabia através da Índia, onde Brahmagupta e Bhaskara a tratavam por essa mesma designação[...]”, no entanto segundo o autor a relação como proporção só ocorreu no fim do século XIV.

> Eis como Brahmagupta enunciava a regra: *Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.* A título de esclarecimento, considere o seguinte problema dado por Bháskara: Se dois palas e meio de açafrão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas? Neste caso 3/7 e 9, que tem a mesma denominação, são o Argumento e o Requisito e 5/2 é o Fruto. A resposta, ou Produto, e dada por $(9)(5/2)(3/7) = 52\ 1/2$. Hoje em dia simplesmente resolveríamos a proporção $x \div 9 = (5/2) \div (3/7)$ (Eves, 2011, p.263).

Fibonacci foi um dos grandes matemáticos da idade média, não só pela magnífica criação da conhecida sequência de Fibonacci, mas também por sua contribuição à divulgação dos sistema Hindu-Arábico na Europa, através de sua obra *Liber Abaci(1202)*, de acordo com Eves(2011, p.316) *Liber Abaci* discutia inúmeros problemas matemáticos como este, “Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?” que retrata o uso do estudo da proporção por civilizações antigas.

Segundo Eves (2011), a matemática grega durante seus primeiros 300 anos de seu desenvolvimento se fundamentaram na obra “Os Elementos” de Euclides realizada com contribuições dos pitagóricos seguidas de Hipocrates, Eudoxo, Teodoro, Teeteto, Talles e outros. Assim:

> [...]é provável que os *Elementos* de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. Não há dúvida de que Euclides teve de dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais (Eves, 2011, p.168-169).

Os pitagóricos com suas filosofias e fortes descobertas no conhecimento da matemática grega influenciarem a obra de Euclides que as considerou, revisou e fez demonstrações para garantir veracidade em sua obra. Para garantir a consolidação do pensamento matemático, tendo em vista a relação com a prática do cotidiano, uma vez que podemos considerar.

> A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *quadrivium*, ao qual se acrescentava o *trivium*, formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada (Eves, 2011, p.97).

No entanto, os números inteiros ao passo que se faz imprescindível pra realizar contagens de quantidades de objetos, não é capaz de abranger por completo grandezas de medidas: comprimento, peso, tempo, entre outras, necessitando ampliar os números para a fração e aí se fez necessário definir um número racional, como quociente $^{a}/_{b}$, $b \neq 0$, de dois números inteiros, o qual sua demonstração geométrica consiste em representar as frações como pontos na reta numérica, pois, dado um intervalo unitário de tamanho a este pode se dividir em b partes e assim cada fração terá seu lugar na reta numérica.

Os pitagóricos ainda descobriram a existência de segmentos de retas incomensuráveis, isto é, segmentos de reta para os quais não há um intervalo unitário comum, ou seja, pontos na reta numérica que não correspondem a nenhum número racional. Porém, essa descoberta, embora se percebesse tamanha importância nela, não agradou os pitagóricos, porque, de acordo com Eves (2011):

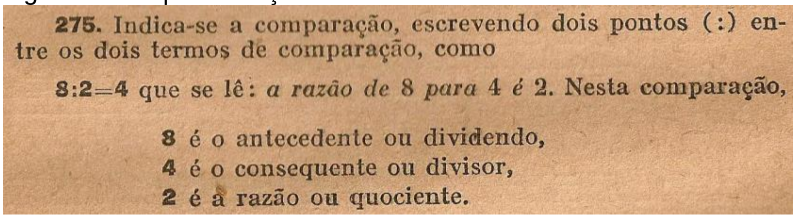
> [...]não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes (Eves, 2011, p.107).

Essa descoberta ficou em total sigilo por muito tempo até que segundo Eves (2011) “[...] o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto”. Mais tarde por volta de 370 a.C, Eudoxo formula uma nova Teoria de Proporções capaz de lidar com magnitudes incomensuráveis e comensuráveis. Teorias estas que estão no livro V, “*Os elementos”* de Euclides.

Trajano (1935, p.18) retrata o estudo de razão e proporção de forma que organiza os sinais das operações presentando as relações “porque mostram a connexão que há entre as quantidades” em uma razão e proporção, tais sinais de acordo com o autor foram introduzidos na aritmética em diversas épocas: “O signal de razão ....**:** que lê: *está para*. O signal de proporção ...**::** que lê: *assim como*”.

Os nomes dos termos que devem ser comparados aparecem na obra de Trajano (1935, p. 147) o primeiro termo chama-se **antecedente** o segundo termo chama-se **consequente**, o resultado da comparação chama-se **razão.**

Figura 9 – Representação e nome dos termos da razão



275. Indica-se a comparação, escrevendo dois pontos (:) entre os dois termos de comparação, como

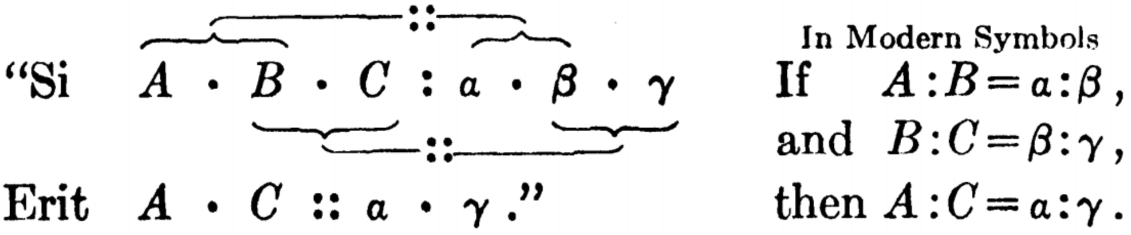
8:2=4 que se lê: *a razão de 8 para 4 é 2*. Nesta comparação,

8 é o antecedente ou dividendo,
4 é o consequente ou divisor,
2 é a razão ou quociente.

Fonte: imagem retirada de Trajano, 1935.

Ao tratar a proporção como sendo a igualdade de duas razões o autor Trajano (1935, p. 149) utiliza e diz que “O sinal da igualdade entre duas razões é 4 pontos (**::**), como 12**:**6**::**8**:**4 que abreviadamente se lê: 12 *está para* 6*, assim como* 8 *está para* 4.” Ainda retrata o primeiro e o quarto termo de uma razão como sendo os **extremos**, e o segundo e terceiro termo como os **meios**. É importante esclarecer que a obra de Antônio Trajano (1935) já é considerada de linguagem atual e que, portanto, já utiliza também o sinal de igualdade (=) ao invés de 4 pontos (**::**) para designar que tem uma proporção entre as razões, inclusive traz em sua obra uma referência a Jhonn Wallis (1657, p-65-68) do uso dessas simbologias presente no livro “*Arithmeticum opus integrum*” do autor:

Figura 10 – Linguagem simbólica antiga e linguagem moderna



“Si $A \cdot B \cdot C : \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

Erit $A \cdot C :: \alpha \cdot \gamma$.”

In Modern Symbols

If $A:B=\alpha:\beta$,
and $B:C=\beta:\gamma$,
then $A:C=\alpha:\gamma$.

Fonte: imagem retirada de Trajano, 1935.

Contudo é interessante lembrar que o símbolo moderno de igualdade (=) é um dos mais utilizados na matemática e foi introduzido por Robert Recorde no século XVI, de acordo com Fossa (2011, p.301) este sinal apareceu pela primeira vez em um de seus textos que “[...]Historicamente, tem interesse particular a álgebra de Recorde, *The Whetstone of Witte,* publicada em 1557, pois foi nela que se fez uso pela primeira vez do moderno símbolo de igualdade. Recorde justificou a adoção de um par de segmentos de reta paralelos como símbolo de igualdade alegando que “não pode haver duas coisas mais iguais”.

Entretanto, o sinal de igualdade nem sempre foi utilizado para representar uma igualdade de razões, ou seja, uma proporção, segundo Guinnesss (1996), William Oughtred no século XVII foi o pioneiro na representação de proporção ao utilizar o símbolo 4 pontos (**::**) para representar a mesmice.

A fim de explicitarmos de maneira sequenciada nossa pesquisa, a seguir faremos uma abordagem da definição de razão e em seguida trataremos da definição de proporção.

3.9 ASPECTOS MATEMÁTICOS DO CONTEÚDO: RAZÃO E PROPORÇÃO A PARTIR DA TEORIA DAS PROPORÇÕES

A palavra **razão**, em seu sentido etimológico vem do latim *ratio*, e significa divisão e aparece na obra os *Elementos*, de Euclides e como foi citado anteriormente, foi Eudoxo quem as formulou. A obra foi traduzida para o português em 2009 por Irineu Bicudo, sendo por nós utilizada nesta pesquisa, a qual consta no livro V que trata das Teorias de Proporção a definição 3 de Euclides (2009, p. 205), e diz que “Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.”

Sabemos que as frações surgiram da necessidade de dividir um dado intervalo ou segmento em partes iguais, assim, atualmente uma fração pode ser escrita por: $\frac{a}{b}$, sendo a o numerador e b o denominador. Como as frações servem para comparar a quantidade de objetos com um todo ou grandezas com outra grandeza, então podemos dizer que na sua conceituação na matemática que:

A **razão** é utilizada para comparar duas grandezas, esta comparação é feita através do quociente entre as grandezas. Dadas duas grandezas a e b quaisquer, com $b \neq 0$, o quociente entre a e b é o resultado da divisão de a por b, que pode ser representado pela fração $\frac{a}{b}$, ou pela divisão $a \div b$. Normalmente é denotada por razão de a para b. O termo a é denominado antecedente e o termo b é denominado consequente.

Deste modo podemos entender que comparar duas grandezas significa dizer o quanto vale a partir de seu cálculo divisório, sendo necessário reconhecer a sua equivalência, numerador e denominador dentro de sua lógica dinâmica que envolve pensamento. Para chegar-se a um dado resultado de sua representação que é a fração ou divisão no conjunto da operação de matemática.

Sendo assim, podemos afirmar que uma mesma grandeza pode ser representa por tamanhos de frações equivalentes, uma vez que temos as frações reduzidas, ou seja, simplificadas ou irredutíveis. Vejamos um exemplo de caso particular:

- $\frac{6}{15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$ e $\frac{18}{45} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{2}{5}$

Desta forma, percebemos que $\frac{6}{15}$ e $\frac{18}{45}$ possuem a mesma fração irredutível $\frac{2}{5}$, logo $\frac{6}{15}$ e $\frac{18}{45}$ são equivalentes e, portanto, podemos dizer que tem razões iguais. O que nos leva a outra propriedade das proporções que também está em "*Elementos*" de Euclides, a qual será ressaltada ao tratar da definição de proporção, mas a frente.

Vejamos alguns exemplos de aplicações de razões entre grandezas adaptados do livro de Álvaro Andrini, *et al* (2015).

Probabilidade (P):

- Adriana vai lançar um dado comum, com faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade de chance de ela obter um 5 em seu lançamento?

Razão: $P = \frac{1}{6}$

Significa que Adriana tem uma chance em seis de obter o número 5.

Velocidade média (V_m):

- Um automóvel percorreu 320 km em 4 horas de viagem. Qual foi a velocidade média do automóvel nesse percurso?

Razão: $V_m = \frac{320}{4} = 80km/h$

Significa que o automóvel percorre a uma velocidade média de 80km a cada hora.

Densidade Demográfica (D):

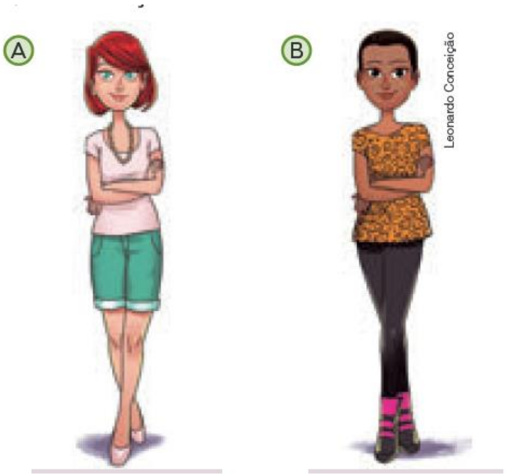
- No estado de São Paulo, por exemplo, temos uma população de aproximadamente 40 milhões de pessoas, para uma área também aproximada de 250 000 km². (IBGE, 2010). Qual a densidade Demográfica do estado de são Paulo?

Razão: $D = \frac{40\ 000\ 000\ hab.}{250\ 000\ km^2} = 160hab./km^2$

Significa que existem 160 pessoas vivendo em cada quilômetro quadrado.

Escalas:

A moça A está representada em uma escala de 1 para 28 e a moça B está representada em uma escala de 1 para 25. Qual é a moça mais alta?



Fonte: Álvaro Andrini (2015, p.114)

Razão da moça A: $\frac{1}{28}$,

Significa que a cada centímetro de altura representada no desenho a moça A tem 28 centímetros de altura na realidade.

Razão da moça B: $\frac{1}{25}$,

Significa que a cada centímetro de altura representada no desenho a moça B tem 25 centímetros de altura na realidade.

Portanto, se no desenho representam a mesma medida, logo a Moça A é a mais alta.

Proporção é uma palavra derivada do Latim *proportion*, significa relação comparativa, analogia. É possível que a designação para a definição de proporção que aparece na obra *Elementos* livro V de Euclides se deva a origem da palavra, bem como por sua funcionalidade. Na obra *Elementos,* Euclides (2019, p.205) discorre na definição 6, "E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção".

Assim, ao retornarmos o exemplo anterior, onde mostramos duas razões equivalentes, e fizermos um paralelo com a definição 6 de Euclides;

- $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{15}} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ e $\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{45}} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

as razões $\frac{6}{15}$ e $\frac{18}{45}$ formam uma proporção desse modo $\frac{6}{15} = \frac{18}{45}$, retratam a definição 6 de Euclides.

O historiador Eves (2011) revela que os pitagóricos descobriram a existência dos incomensuráveis, isto é, segmentos de reta para os quais não há um intervalo unitário comum, ou seja, pontos na reta numérica que não correspondem a nenhum número racional. Felizmente Eudoxo, com brilhantismo criou a Teoria da Proporções suficientemente capaz de cobrir os incomensuráveis e comensuráveis apenas fazendo comparações: "menor", "maior" e "igual" para definir igualdades, como ocorre na definição 5 de proporção do livro os *Elementos* de Euclides.

> Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes (Euclides, 2009, p.205).

De tal forma que se pode demonstrar para os dois casos, assim para:

Proporção comensurável

Se $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então, dados $m\ e\ n \epsilon \mathbb{N}$: $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$ e $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$, portanto: $n \cdot AD = m \cdot DB$ então $n \cdot AE = m \cdot EC$

Proporção incomensurável

Se $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então, dados $m\ e\ n \epsilon \mathbb{N}$: $\frac{AD}{DB} < \frac{m}{n}$ e $\frac{AE}{EC} < \frac{m}{n}$, se $n \cdot AD < m \cdot DB$ então $n \cdot AE < m \cdot EC$

Se $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então, dados $m\ e\ n \epsilon \mathbb{N}$: $\frac{AD}{DB} > \frac{m}{n}$ e $\frac{AE}{EC} > \frac{m}{n}$, se $n \cdot AD > m \cdot DB$ então $n \cdot AE > m \cdot EC$

Considerando tal definição, ter-se a em nossa linguagem atual que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e somente se para todo par de números m e $n \epsilon \mathbb{N}$ ocorrer um dos seguintes casos:

(i) $m \cdot a = n \cdot b$ então $m \cdot c = n \cdot d$

(ii) $m \cdot a > n \cdot b$ então $m \cdot c > n \cdot d$

(iii) $m \cdot a < n \cdot b$ então $m \cdot c < n \cdot d$

Sendo assim, podemos considerar que;

A **Proporção** é a igualdade entre duas ou mais razões (ou equivalência entre razões). Deve-se obedecer a ordem dos termos.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lê-se: a está para b, assim como, c está para d, considerando que b e d são não nulos.

Ademais, no livro *Elementos* de Euclides faz-se fundamentação sobre o Algoritmo Euclidiano e ainda discorre a Teoria das Proporções, na proposição 19 temos:

> Caso quatro números estejam em proporção, o número produzido do primeiro e quarto será igual ao número produzido do segundo e terceiro; e caso o número produzido do primeiro e quarto seja igual ao do segundo e terceiro, os quatro números estarão em proporção (Euclides, 2019, p. 283).

A proporção 19 versada no livro de Euclides atualmente é representada como sendo a **Propriedade Fundamental das Proporções**, a qual podemos dizer que:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $a \cdot d = b \cdot c$; e se $a \cdot d = b \cdot c$ então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Considerando que a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ com b e d não nulos.

A partir da propriedade fundamental das proporções se duas razões estão em proporção, ou seja; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $a \cdot d = b \cdot c$, é condição necessária e suficiente para que se tenha $a \cdot d = c \cdot b$. Daí tem-se as seguintes propriedades:

Propriedade 1.

Se duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são proporcionais, então teremos outra proporção na qual a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o 2º termo, assim como a soma ou diferença dos dois últimos termos está para o 4º termo, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.

Para mostramos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ adicionamos 1 a ambos os lados da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, assim obtemos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Portanto, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

E para mostrarmos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ adicionamos -1 a ambos os membros $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, assim obteremos:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Portanto, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Propriedade 2.

Se duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são proporcionais, então teremos outra proporção na qual a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o 1º termo, assim como a soma ou diferença dos dois últimos termos está para o 3º termo, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$.

Para mostramos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ multiplicamos $\frac{b \cdot d}{a \cdot c}$ a ambos os membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, obtendo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{bd}{ac} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{bd}{ac} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Agora, adicionamos 1 a ambos os lados da igualdade $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, assim obtemos:

$\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{a}{a} = \frac{d}{c} + \frac{c}{c} \Leftrightarrow \frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}$ daí, aferimos que $\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

Portanto podemos considerar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

Agora para mostramos que $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ adicionamos -1 a ambos os lados da igualdade $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, assim obtemos:

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{d}{c} - \frac{c}{c} \Leftrightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}.$$

Portanto podemos considerar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$.

Propriedade 3.

Se duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são proporcionais, então, a soma ou diferença dos antecedentes, está para a soma ou diferença dos consequentes, assim como, cada antecedente está o seu consequentes de cada razão, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Para mostramos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, utilizaremos a Propriedade Fundamental das Proporções, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ e adicionamos $a \cdot b$ a ambos os membros da igualdade $a \cdot d = b \cdot c$, obtendo:

(I) $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow a \cdot d + a \cdot b = b \cdot c + a \cdot b \Leftrightarrow a \cdot (b + d) = b \cdot (a + c) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

Portanto podemos considerar que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

Do mesmo modo que podemos adicionar $d \cdot c$ a ambos os membros da igualdade $a \cdot d = b \cdot c$, assim:

(II) $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow a \cdot d + d \cdot c = b \cdot c + d \cdot c \Leftrightarrow d \cdot (a + c) = c \cdot (b + d) \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.

Portanto podemos considerar que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.

Logo, de I e II podemos constatar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

De maneira análoga ao modo anterior para mostramos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, utilizaremos a Propriedade Fundamental das Proporções, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ e adicionamos $-a \cdot b$ a ambos os membros da igualdade $a \cdot d = b \cdot c$, assim:

(I) $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow a \cdot d - a \cdot b = b \cdot c - a \cdot b \Leftrightarrow a \cdot (d - b) = b \cdot (c - a) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b} \Leftrightarrow \frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$.

Portanto podemos considerar que $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$.

Da mesma forma que podemos adicionar $-d \cdot c$ a ambos os membros da igualdade $a \cdot d = b \cdot c$, obtendo:

(II) $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow a \cdot d - d \cdot c = b \cdot c - d \cdot c \Leftrightarrow d \cdot (a - c) = c \cdot (b - d) \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$.

Portanto podemos considerar que $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$.

Logo, de I e II podemos considerar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Vejamos alguns exemplos de aplicações de proporção entre grandezas adaptados do livro de Álvaro Andrini, *et al* (2015).

- Uma confeitaria é especializada em bolos de aniversário e de casamento. Luana, a confeiteira-chefe, desenvolveu uma receita para a massa e a compartilhou com os demais funcionários. Com essa receita, para um bolo de 20 fatias são necessários 4 ovos além dos outros ingredientes. Para atender a uma encomenda de bolo de 250 fatias, quantos ovos serão necessários?

- Um ônibus em uma estrada, com medida de velocidade constante de 80 km/h, percorre 12 km em 9 min. Qual medida de distância esse ônibus percorreria com a medida de velocidade constante de 100 km/h durante 9 min, na mesma estrada?
- Para revestir uma parede com 3 m de medida do comprimento por 2,5 m de medida da altura são necessários 300 azulejos, então para revestir uma parede com 5 m de medida do comprimento por 2,5 m de medida da altura, quantos desses azulejos são necessários?
- Pra produzir 1000 livros de 240 páginas, uma editora consome 360kg de papel. Quantos livros de 320 páginas são possíveis fazer com 720 kg de papel?

Todos esses exemplos caracterizam a presença da razão e proporção no conhecimento da matemática, revelando sua importância na resolução de problemas, como também no processo de formação da aprendizagem, uma vez que permite a reflexão sobre a ação, tendo como meta a construção de resultados para intervir nos questionamentos das realidades do cotidiano.

3.10 ASPECTOS CURRICULARES DO CONTEÚDO

Segundo Moraes (1996, p.68) as crianças, adolescentes e jovens precisam aprender a “[...] investigar, trabalhar em grupo, dominar diferentes formas de acesso às informações, desenvolver capacidade crítica de avaliar, reunir e organizar informações mais relevantes”, tendo em vista realizar operação com razão e proporção que vise a própria ação dos conhecimentos de matemática no ambiente escolar, reconhecendo sua importância para as articulações com a vida do cotidiano.

Gerar os aspectos curriculares no ensino de matemática envolvendo razão e proporção exige o reconhecimento que segundo Mello (2014) é entendido como “aquilo que o aluno é capaz de saber e fazer” poder de determinação no processo do conhecimento e da verdade como resultado das experiências onde possibilita a termos um olhar objetivo, considerando a subjetividade das relações e práticas sociais no ambiente da instituição escolar.

Garnica (1999) caracteriza os aspectos curriculares como “movimento da educação matemática” que define no pesquisador distintas possibilidades como trabalhar razão e proporção, levando em conta o contexto escolar e as realidades educacionais dos alunos, pois proporciona a realização de experiencias que permite potencializar o raciocínio lógico do sujeito para apropriar-se dos conhecimentos da matemática articulados com a própria existência humana.

Costa et al (2023, p.3438, *apud* Tinoco, 2011) defende que ao “dar um tratamento adequado e integrado a todos os conteúdos que se relacionam com a razão e proporção, por meio da construção cuidadosa dos experimentos no ensino de matemática”, permite assim, a criação de conceitos e ideias inerentes aos processos de formação do aprendizado de modo que os alunos reconheçam a importância da construção de seus conhecimentos.

Deste modo, consideramos que os aspectos curriculares dentro de uma abordagem teórica trazem contribuições não somente reflexiva, mas também práticas com experiências concretas das realidades do cotidiano, uma vez que, a matemática é uma ciência presente na vida e relações de trabalho, pois oferecem diferentes formas de resolução de problemas.

Atualmente há um reconhecimento significativo referente a importância da função curricular no processo de ensino-aprendizado dos alunos, cuja contribuição consiste na busca permanente de procedimentos teórico metodológicos que possibilitem construção adequada de saberes e conhecimentos necessários à sua aplicação social. Melo (2014), ao analisar procedimentos de gestão do ensino e aprendizagem em períodos e contextos distintos, afirma que, desde a antiguidade o currículo esteve centrado no conhecimento, sendo compreendido como uma didática expositiva na qual o aprendizado acontece baseado na observação caracterizando um princípio educativo presente no ensino até os tempos atuais.

Posteriormente, o avanço no debate em torno da contribuição curricular para o aprimoramento na dinâmica do ensino e aprendizagem possibilita uma nova vertente compreendendo o currículo centrado no aluno, onde o professor deve aproveitar o conhecimento cultural e individual do educando como um instrumento facilitador no processo de reconstrução dos saberes e conhecimentos necessários ao aperfeiçoamento no aprendizado. Frente a este cenário constituído por contradição e interação entre opiniões diferentes, referente a contribuição do currículo no aprendizado, Mello (2014) propõe uma outra via, compreendendo-o como alternativa centrada no aprendizado e no resultado referenciado em competência que:

> [...]aproxima-se também da vertente centrada no aluno porque, como esta, atribui ao conhecimento um poder emancipador, com a condição de que seja aprendido não como verdade fixa, mas, sim, como o melhor conhecimento que se construiu até agora, até que novas ideias e evidências o contradigam. O currículo é centrado no conhecimento, mas num conhecimento falível, que deve ser submetido à problematização (Mello, 2014, p. 2).

Godoy e Santos (2012, p.257) ao discutirem sobre a inclusão da Matemática no currículo escolar dizem que “[...]. Não basta uma lista de enunciados sobre os valores e utilidade da Matemática que não venha acompanhada de uma planificação adequada que indique o que fazer, como fazer, quando realizar [...]”. Em uma abordagem sobre o processo de organização e desenvolvimento curricular da Matemática escolar no Brasil, estes autores citados salientam que existem documentos oficiais atuais que norteiam os currículos escolares cabendo aos professores, especialistas e escolas desenvolverem o ensino de Matemática, de maneira qualificada e em consonância com as proposições do parecer documentado, pois:

> [...]quando as portas das salas de aulas se fecham, cada professor de Matemática, de acordo com as suas ideologias, crenças, concepções, formação etc. faz o que quer e entende ser o melhor para ele e para os seus alunos, contudo, se o que o professor faz ao fechar a porta da sua sala é bom ou ruim, não sabemos (Godoy e Santos*,* 2012, p.275).

Entretanto, vale ressaltar que a aplicação do currículo educacional escolar deve dispor de uma prática colaborativa, autônoma e flexível entre os sujeitos envolvidos, visando ao processo de introdução, inovação e eficácia na organização curricular que tem o aluno, como centro do fazer pedagógico focado nas aprendizagens essenciais de forma equacionada. De acordo com Alves e Palmeirão (2017), isso é possível, por que:

> [...]cada escola tem de construir uma prática curricular atenta, próxima e flexível, tendo em conta os contextos e os alunos concretos. Isto é, tem de planear, monitorizar, avaliar, melhorar de forma continuada e

> consistente as aprendizagens dos seus alunos. E quando não aprendem tem de se gerar dispositivos de compreensão dos obstáculos e agir em conformidade (Alves e Palmeirão, 2017, p. 10).

Apesar de as escolas possuírem autonomia e liberdade relativa para construir um currículo escolar, de forma diversificada e democrática considerando as finalidades da Matemática na educação básica, sua proposta de trabalho deve estar alinhada aos principais objetivos do Projeto Político Pedagógico (PPP), seguindo, também, entre outros princípios educativos as orientações contidas na BNCC, documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens consideradas essenciais para que todos os estudantes possam adquirir e se desenvolver, de maneira prática, prazerosa e qualificada, apropriando-se da educação, como um dos direitos fundamentais de cidadania previsto nos Art. 05, 06 e 214 da Constituição Federal, também preceituada no Plano Nacional de Educação (PNE).

Segundo a BNCC, o objeto matemático Razão e Proporção faz parte do bloco curricular da Álgebra, portanto, faz parte do currículo escolar e deve ser ensinado pelos professores garantindo tanto o desenvolvimento de habilidades, como a formação de competências específicas necessárias ao preparo do educando para o exercício adequado de cidadania. Entretanto, apesar de constituir-se como parte integrada ao currículo, por vezes não é ensinada, seja por falta de tempo letivo, domínio do assunto ou prioridade a outro conteúdo.

A BNCC traz em seu escopo habilidades que em decorrência de cada competência espera-se que o aluno a desenvolva de acordo com cada área de conhecimento, assim no eixo de aprendizagem, ao trabalhar razão e proporção o aluno deverá ter a habilidade para capacitar na aquisição de competências que os levamos as condições para:

> (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
> (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (Brasil, 2017, p.317).

Entendemos que estas habilidades são fundamentais no ensino de matemática, uma vez que remete para os sujeitos estratégias e dinâmicas para planejar e criar meios para a solução de problemas, buscando respostas necessárias para uma determinada situação que permita a intervenção e a transformação daquilo que está estabelecido no âmbito da construção dos conhecimentos.

Sendo assim certamente não poderia deixar de mencionar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), afinal, é também um documento que orienta o processo educacional e o PCN foi o parâmetro legal e referencial para a estrutura organizacional da BNCC, tendo como principal objetivo, a orientação do trabalho do cotidiano de professores e especialistas em educação. De acordo com as especificidades do assunto do ensino fundamental relacionado à investigação, o PCN dá importância ao estudo da razão e proporção incluindo-os no bloco de Grandezas e Medidas além de dar as orientações curriculares para este bloco, indicando tratamento correto das informações, pois:

> [...] pode favorecer o aprofundamento, a ampliação e a aplicação de conceitos e procedimentos como porcentagem**, razão, proporção**, ângulo, cálculos etc. Esse estudo também favorece o desenvolvimento de certas atitudes, como posicionar-se criticamente, fazer previsões e tomar decisões ante as informações veiculadas pela mídia, livros e outras fontes (Brasil, 1998, p.134. Grifos nosso).

Para uma discussão mais próxima de um currículo local, tem-se o documento Curricular de Novo Repartimento (2020) que está alinhado a BNCC e ao Documento Curricular do Estado do Pará a que se refere aos eixos, subeixos, habilidades, e objetivos de aprendizagem seguem a mesma estrutura. Tem-se também um referencial interno da escola referenciada na pesquisa, o PPP neste diz que o seu currículo se apoiará:

> "[...]no Currículo do Estado do Pará a fim de garantir autonomia para gerenciar a própria aprendizagem (aprender a aprender) e para a transposição dessa aprendizagem em intervenções solidárias (aprender a fazer e a conviver) deve ser a base da educação das crianças, dos jovens e adultos, que têm em suas mãos a continuidade da produção cultural e das práticas sociais" (Novo Repartimento, 2023, p.17).

Nesse sentido podemos considerar que o currículo escolar irá contemplar um componente curricular com uma base comum, bem como uma parte diversificada, uma vez que, de acordo com o Documento Curricular do Estado do Pará:

> [...]o currículo precisa dar conta dos fenômenos contemporâneos como o mundo do trabalho, a vida moderna, o desenvolvimento tecnológico, as redes sociais, as atividades desportivas e corporais, as produções artísticas, possibilitar vivências de cidadania, possibilitar a participação nos movimentos sociais entre tantas outras possibilidades formativas dos estudantes (Pará, 2019, p.88).

No que tange ao Documento Curricular do Estado do Pará, no nível fundamental, organizado em eixos temáticos, aponta que a avaliação curricular deverá ser feita em consonância com os objetivos de aprendizagem em cada eixo, no eixo 3 que versa sobre o 6º e 7º ano, por exemplo, objetiva-se que o aluno deva “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, na modelação e resolução de problemas matemáticos e sociais”, mas para que o aluno seja capaz de alcançar tal objetivo deve adquirir habilidades como:

> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros
> (EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo (Pará, 2019, p.393).

Ainda, no Documento Curricular do Estado do Pará em que concerne aos ciclos de 8º e 9º anos cujo em um dos seus objetivos de aprendizagem é de “Utilizar o conhecimento matemático na modelação e resolução de problemas sociais”. O aluno deverá ter habilidade para ser capaz de:

> (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica
> (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (Pará, 2019, p. 399).

Além disso, o conteúdo de razão e proporção se torna imprescindível no ensino, pois como vimos estes são considerados conhecimentos básicos que o aluno, ao final da educação básica devem ter adquirido, e faz parte dos conhecimentos cobrados em avaliações de larga escala como o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. A adesão ao ENEM se tornou ainda mais importante ao passo que além de avaliar os conhecimentos dos alunos o resultado dessa avaliação serve como seleção para o ingresso nas maiorias das universidades públicas e particulares do Brasil e ainda no exterior. De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira – INEP, o objetivo do ENEM é:

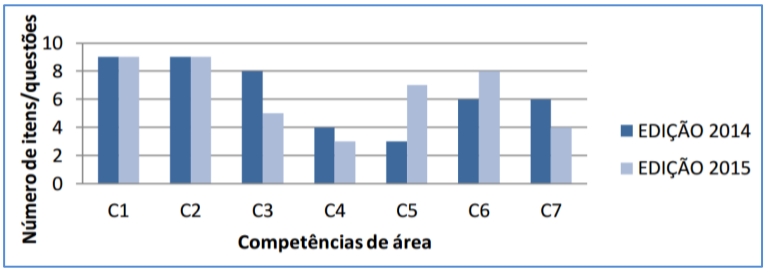
> [...]de avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica. Em 2009, o exame aperfeiçoou sua metodologia e passou a ser utilizado como mecanismo de acesso à educação superior.
> As notas do Enem podem ser usadas para acesso ao Sistema de Seleção Unificada (Sisu) e ao Programa Universidade para Todos (ProUni). Elas também são aceitas em mais de 50 instituições de educação superior portuguesas. Além disso, os participantes do Enem podem pleitear financiamento estudantil em programas do governo, como o Fundo de Financiamento Estudantil (Fies). Os resultados do Enem possibilitam, ainda, o desenvolvimento de estudos e indicadores educacionais.

Enquanto ao objeto matemático em questão, este aparece na estrutura da Matriz de Referência do ENEM para nortear os conteúdos que poderão constar na prova, entretanto, se deve considerar o domínio de competências e habilidades que o aluno deva ter adquirido durante a educação básica. Assim a matriz de referência do ENEM de acordo com o INEP considera que o aluno deva ter adquirido além de outras competências as:

> **Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
> **Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**

Batista (2017, p.41), analisou questões do ENEM das edições 2014-2015 e verificou que as competências acima citadas aparecem em inúmeras questões e esses resultados constaram de forma semelhante na pesquisa de Campos (2015, 67) que buscou analisar a área de conhecimento matemático no ENEM das edições de 2012, 2013 e 2014. Entretanto, para adquirir tais competências é necessário que o aluno entre em contato com os conteúdos necessários.

Gráfico 1 – Competência de Matemática e suas Tecnologias



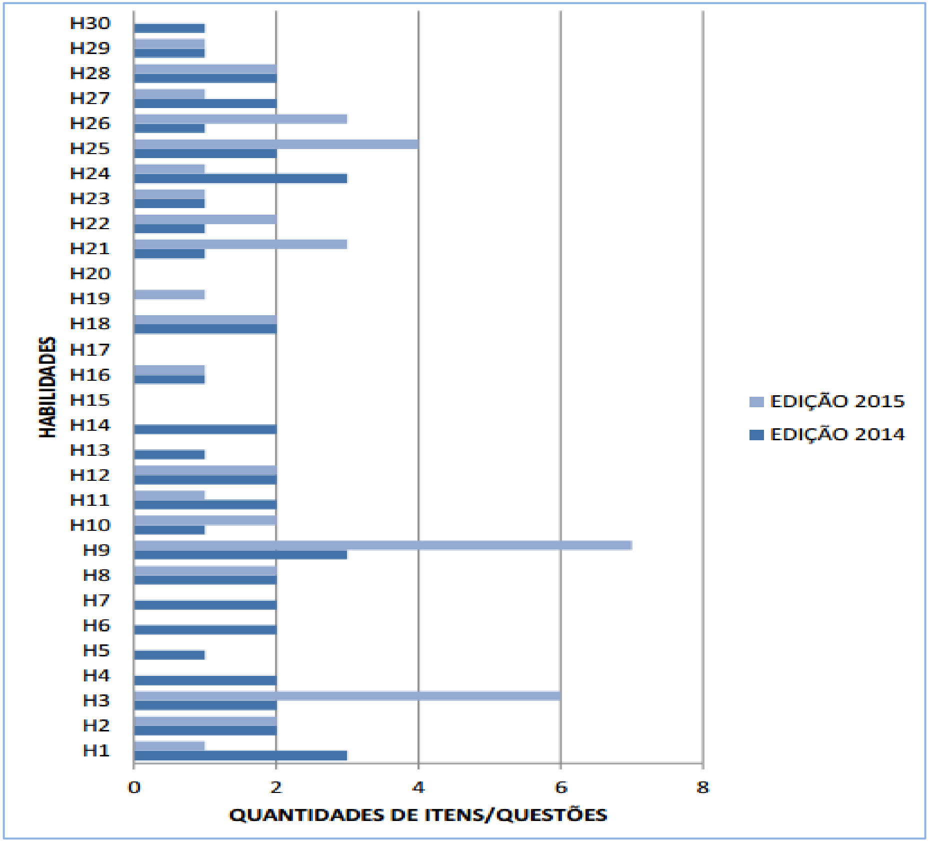
Fonte: imagem retirada de Campos, 2015.

De acordo com INEP tem-se uma Matriz de Referência que norteia o ENEM a ter questões as quais o aluno possa demonstrar que adquiriu tais competências e para isso é necessário que demonstre as habilidades constantes na matriz de referência como:

> H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
> H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
> H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
> H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
> H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
> H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
> H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

A pesquisa de Campos (2015, p. 43), nos revela dados referentes ao quantitativo de números de questões que aparecem as habilidades que preceitua as diretrizes da Matriz de Referência do ENEM para as edições por ele pesquisado e que foi utilizada na edição de 2023.

Gráfico 2 – Habilidades Matemáticas e suas Tecnologias



Fonte: imagem retirada de Campos, 2015.

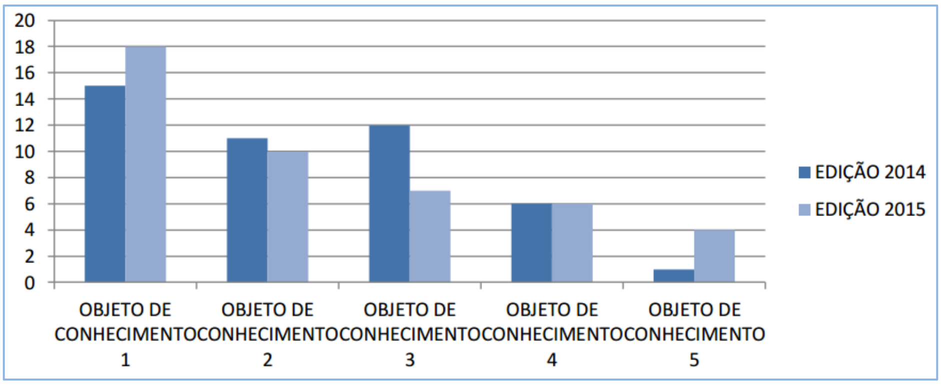
Para que essas habilidades sejam adquiridas o conteúdo de razão e proporção deve estar presentes nos componentes curriculares dos estudantes, pois, como mostra os estudos de Campos (2015) no ENEM das edições 2014 – 2015, verificou-se questões que avaliam os objetos do conhecimento matemáticos inerente aos estudantes da educação básica como direciona a Matriz de Referência, de acordo com o INEP, deve constar:

> - **Conhecimentos numéricos**: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, **razões e proporções, porcentagem** e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

Campos (2015, p. 72) considera que “85% das questões de Matemática e suas Tecnologias das edições de 2012, 2013 e 2014 são pertinentes a conteúdo do Ensino Fundamental, contra 15% de conteúdo do Ensino Médio”, o que nos faz refletir que é possível os conteúdos de razão e proporção estarem presente em algumas das questões das edições do ENEM.

Batista (2017, p.46) mostra em sua pesquisa um percentual significativo do objeto de conhecimento a qual o conteúdo de razão e proporção está inserido, ao analisar o objeto matemático de “conhecimentos numéricos (1)”, aparecem em 38% dos conteúdos das questões de edições 2014-2015 do ENEM analisadas, sendo 15 questões na edição 2014 e 18 questões na edição 2015, o que nos leva a considerar que as chances de ter questões que necessitem do conhecimento do conteúdo de razão e proporção existem.

Gráfico 3 – Objeto do conhecimento trabalhados por itens/questões-Edições 2014 e 2015



Fonte: imagem retirada de Batista, 2017.

Esta consideração é corroborada na obra de Braz *et al* (2020) ao catalogar questões que envolve razão e proporção das edições do ENEM de 2009 a 2016, em seu livro a autora catalogou inúmeras questões detalhando em cada questão os conteúdos envolvidos que traziam a ideia de grandezas diretamente e grandezas inversamente proporcionais, razão, divisão em partes proporcionais, escalas, densidade demográfica até regra de três, entre outros, revelando portanto a inserção de nosso objeto de pesquisa no ENEM.

Além do ENEM o Sistema de Avaliação da Educação Básica – Saeb que é o principal instrumento de medida e produção de informações sobre a educação básica das escolas brasileiras, avalias áreas específica de conhecimento como a matemática, traz em seus testes de avaliação questões que também envolve razão e proporção, de acordo com INEP o Saeb diante da educação básica tem como objetivos:

> (i) avaliar a qualidade, a equidade e a eficiência da educação praticada no país em seus diversos níveis governamentais; (ii) produzir indicadores educacionais para o Brasil, suas regiões e Unidades da Federação e, quando possível, para os municípios e as instituições escolares, tendo em vista a manutenção da comparabilidade dos dados, permitindo, assim, o incremento das séries históricas; (iii) subsidiar a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas públicas baseadas em evidências, com vistas ao desenvolvimento social e econômico do Brasil; e (vi) desenvolver competência técnica e científica na área de avaliação educacional, ativando o intercâmbio entre instituições educacionais de ensino e pesquisa.

Sendo assim, podemos considerar que o Saeb é uma avaliação externa de larga escala, serve ainda como referência para as avaliações estaduais e para o cálculo de indicadores de qualidade, como o Ideb, segundo o INEP no Documento de Referência do Saeb (2018, p.15) diz que o foco da avaliação está:

> [...] no desempenho que os alunos alcançam nos testes cognitivos aplicados em áreas de conhecimento específicas e no ambiente em que esse desempenho é gerado. Para conhecer esse ambiente, normalmente utilizam-se questionários aplicados aos alunos, aos professores das disciplinas testadas e aos diretores escolares[...]

Ao tratarmos dos dados de desempenhos na avaliação de aprendizagem do aluno a partir dos Testes Cognitivos das áreas de conhecimento de matemática devemos considerar a matriz de referência, Matriz que passou por inúmeras mudanças até alinhar-se as diretrizes da BNCC, considerando as metas do Plano Nacional de Educação – PNE para que pudesse dar conta de avaliar se o aluno atingiu o Letramento Matemático[2] esperado até cada etapa de

---

[2] De acordo com o Documento de Referência do Saeb o Letramento Matemático, “é conceituado como a compreensão e aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos na resolução de

estudo avaliado, adquirindo as habilidades necessárias ao domínio das competências exigidas.

Ao que concerne a Matriz de Referência para a Matemática, esta é constituída por eixos cognitivos e eixos de conhecimento que de acordo com INEP as competências presentes na BNCC são agrupadas/sintetizadas em dois Eixos Cognitivos: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos; resolver problemas e argumentar, já os eixos do conhecimento utilizam as 5 (cinco) unidades temáticas do eixo de conhecimento da BNCC: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e medidas; Probabilidade e Estatística.

Com isso, evidencia-se que o objeto de conhecimento razão e proporção da mesma forma se faz presente na Matriz de Referência para o Teste Cognitivo de Matemática do Saeb dentro do eixo de conhecimento para o 2º ano do ensino fundamental "Números" trazendo a ideia de proporcionalidade por meio da multiplicação incluindo dobro, triplo, metade ou terça parte, e nas etapas do 5º e 9º ano dentro do eixo de conhecimento "Álgebra".

De acordo com o INEP a Matriz de Referência sugere o aparecimento destes conteúdos nos testes, pois, dentro do eixo cognitivo; resolver problemas e argumentar, na etapa do 5º ano do ensino fundamental:

> [...]contempla resolução de problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas e resolução de problemas que envolvam a partição de um todo em duas partes proporcionais (Inep, 2018, p.81).

Devendo ainda ser ampliada e aprofundada nesse eixo com a:

> [...] resolução de problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas, resolução de problemas que envolvam a partição de um todo em partes proporcionais[...] (Inep, 2018, p.81).

Além disso conforme o INEP no documento da matriz de referência (2018, p.96) na etapa do 9º ano de avaliação o eixo de conhecimento da álgebra deve se articular com o eixo cognitivo resolver problemas e argumentar para que o aluno possa ser capaz de mostrar o desenvolvimento da habilidade 9A2.1 que é "Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta ou

---

problemas nos campos de Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, bem como na argumentação acerca da resolução de problemas" (Inep, 2018, p. 75).

inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisões proporcionais e taxa de variação”.

Entretanto, vale a pena considerar que a matriz de referência utilizada na última edição que possui os resultados analisado até a data desta pesquisa foi a edição de 2021 e a mesma ainda utilizou a matriz de referência do ano 2001, cuja matriz dos testes cognitivos eram composto por 4 (quatro) temas: Espaço e forma; Grandezas e medidas; Números e operações/ álgebra e funções; Tratamento da informação, relacionados às habilidades desenvolvidas pelos estudantes e de acordo com cada tema havia um conjunto de descritores ligados às competências desenvolvidas.

Como já mencionamos a Matriz de Referência do Saeb está passando por transição afim de adequar as diretrizes da BNCC, para tanto, segundo o Inep a “proposta busca ampliar a discussão da avaliação, agregando novas dimensões e enfatizando a importância do desenvolvimento de instrumentos capazes de iluminar o debate sobre como enfrentar e superar os desafios” para além de um currículo escolar. Se fizermos uma comparação com a estrutura da matriz de 2001 e a estrutura da matriz dos testes que estão em transição percebemos que o conteúdo de razão e proporção está presente, só que agora organizado de acordo com as competências e habilidades norteadas pela BNCC.

Com intuito de aproximar a pesquisa ao objeto de conhecimento matemático em geral, ao de escolha para o nosso estudo e ainda a etapa de estudo em que realizamos o experimento da pesquisa, traremos resultados das escalas de proficiências das duas últimas edições do Saeb – 2019 e 2021 do 9º ano do ensino fundamental.

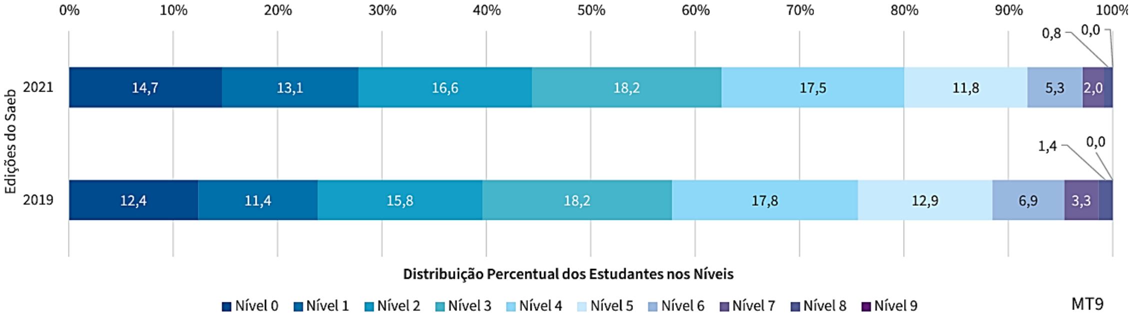
Antes de enunciar os resultados é importante esclarecer que a escala de proficiência de Matemática é composta por níveis (variam de 1 a 9) progressivos e cumulativos, ou seja, se um aluno conseguiu atingir um nível acima significa que o mesmo provavelmente adquiriu as habilidades dos níveis abaixo. Por exemplo um aluno que conseguiu um desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250, este estará no nível 3 de aprendizagem, é interessante frisar que uma das habilidades entre outras que o aluno deve demostrar ter desenvolvido para estar nesse nível 3 é “Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representada por números inteiros”.

O nível 4 de proficiência que deve ter desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300, sugere que o aluno possa ter adquirido conhecimento de proporcionalidade para demonstrar a habilidade “Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade”.

Ao analisarmos a escala de proficiência do nível 5 cujo desempenho do estudante é maior ou igual a 300 e menor que 325, percebemos que umas das habilidades que o aluno deve ter desenvolvido é “Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal”.

Obviamente que não estamos garantindo que tais habilidades foram atingidas e que houve questões nos testes que envolvesse conteúdos que pudessem medir o desempenho dessas habilidades, mas podemos supor a possibilidade já que houve um quantitativo de estudantes nestes níveis como mostra o gráfico 4:

Gráfico 4 – Distribuição Percentual dos Estudantes por Níveis da Escala de Proficiência, no Saeb, em Matemática, no 9º ano do Ensino Fundamental – BRASIL – 2019 e 2021



Fonte: imagem retirada de Daeb/Inep, 2023, p. 177.

Para garantir que o objeto matemático “razão e proporção” estava entre as questões analisadas, mesmo que não seja com mesma nomenclatura, e foi de fato favorecedor no percentual de desempenho dos estudantes que representam o nível 3, 4 e 5 considerado por ter que demonstrar habilidades que garantem as competências diante de tais conteúdo, seria necessário realizar um estudo de cada questão do teste, no entanto, neste momento podemos apenas cogitar um trabalho futuro. Para garantir análises de resultados mais completos do Saeb 2021 sugerimos a leitura do Relatório de Resultados do Saeb 2021 | Volume 1.

Entretanto, considera-se de fundamental importância que os objetos de conhecimento “Razão e Proporção” sejam ensinados, de forma adequada no âmbito escolar, pois, trata-se de um conjunto de procedimentos metodológicos que envolvem operações e sentenças matemáticas, cuja aplicação, entre outros aspectos educativos demanda formação profissional e planejamento de trabalho adequados, aprimoramento didático, procedimentos avaliativos permanentes, referentes aos objetivos de ensino propostos, requerendo também compromisso de todos os sujeitos envolvidos no processo educativo para que a gestão do ensino e aprendizagem possa fluir, de forma integral e qualificada.

3.11 ESTUDOS SOBRE ENSINO-APRENDIZAGEM DE RAZÃO E PROPORÇÃO

Nesta sessão trataremos de investigações que nos geraram um referencial teórico nos proporcionando analisar resultados de diversos estudos que realizaram análises de livros didáticos sobre o objeto razão e proporção, além de resultados de pesquisas que utilizaram metodologias ativas para o ensino/aprendizagem de razão e proporção.

3.11.1 Análise de livro didático

Para este momento nos ateremos a três pesquisas que investigaram o objeto de estudo razão e proporção presentes em livros didáticos, uma que utilizou abordagem ecológica do saber, a outra realizou o estudo por meio da Teoria Antropológico do Didático e a última que se utilizou de critérios de análise dos conteúdos em questão, antes e depois da implementação da BNCC. Ambos os estudos mostram a origem, desenvolvimento e evolução de uma forma geral desse objeto de saber matemático.

Tinoco (2016) investigou como os autores exploraram o objeto proporcionalidade nos livros didáticos de quatro coleções de livros voltadas ao fundamental II previamente selecionadas, das décadas de 1980, 1990, 2000 e 2010, a partir dos referenciais teóricos da ecologia dos saberes[3] para então

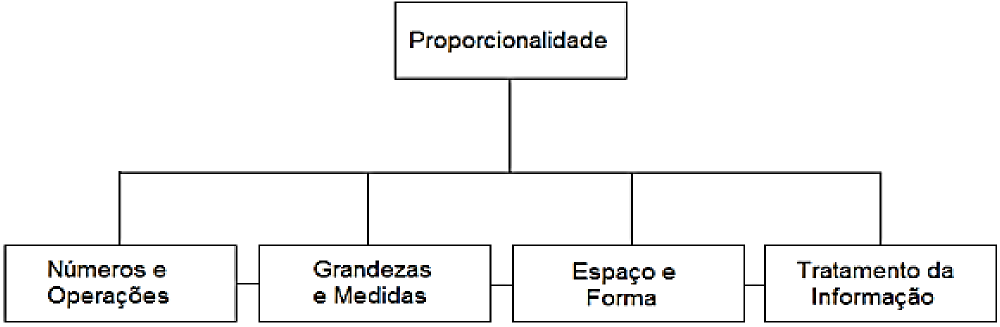
---

[3] [...] a ecologia de saberes é, por assim dizer, uma forma de extensão ao contrário, de fora da universidade para dentro da universidade. Consiste na promoção de diálogos entre o saber científico que a universidade produz, e saberes [...] que circulam na sociedade. (SANTOS, 2004, *apud* Tinoco, 2016, p. 19).

chegar a uma resposta da problemática na perspectiva da ecologia didática[4]: Quais saberes relacionados a Proporcionalidade foram priorizados e quais foram omitidos em alguns manuais das últimas quatro décadas?

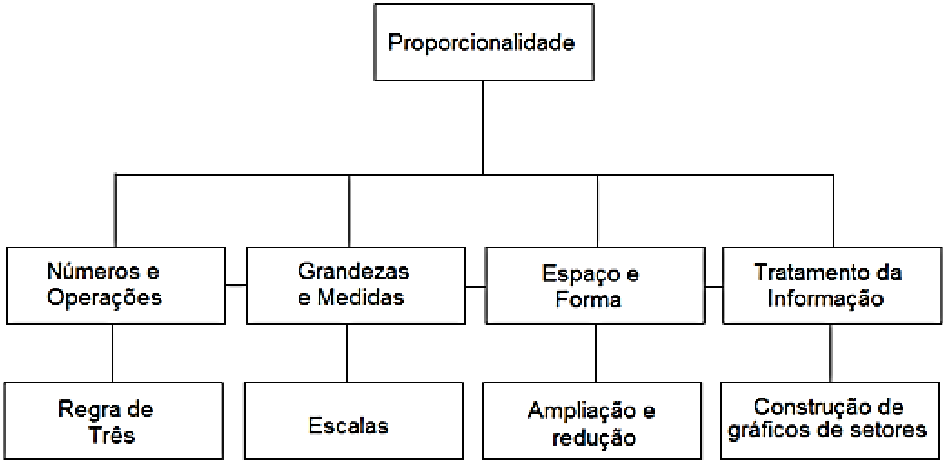
Por isso, Tinoco (2016) em sua pesquisa considerou que para compreender a estrutura ecológica da proporcionalidade é necessário dar ênfase aos 4 tipos de ecossistema[5], sendo assim, pode-se compreender a organização do objeto matemático apresentado nos livros didáticos. A autora traz em sua pesquisa exemplos particulares de esquemas que estruturam um ecossistema da proporcionalidade:

Figura 11 – Proporcionalidade e os blocos de conteúdos



Fonte: imagem retirada de Tinoco, 2016, p. 31.

Figura 12 – Ecossistema inicial da proporcionalidade e algumas aplicações na Matemática



Fonte: imagem retirada de Tinoco, 2016, p. 31.

---

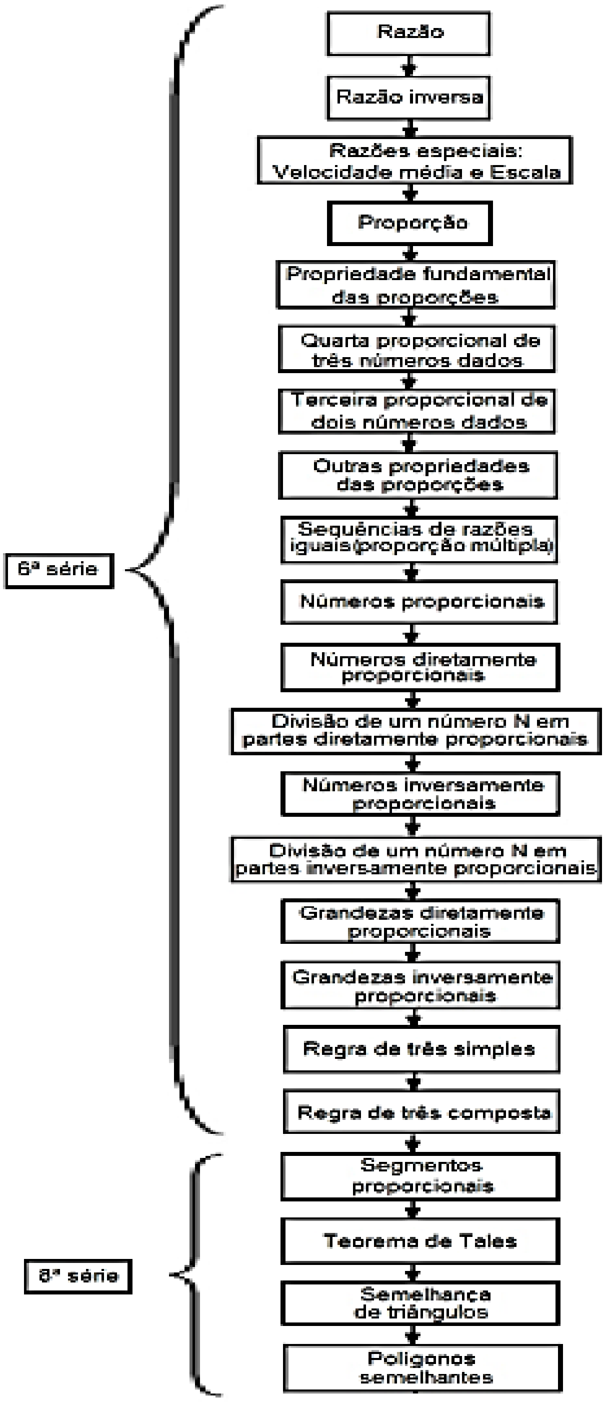
[4] A criação da palavra ecologia veio de Haeckel, em 1866. Ele definiu “ecologia” como a ciência que engloba todas as relações dos organismos com o mundo exterior que os envolve, incluindo suas condições de existência, isto é, as relações extrínsecas e intrínsecas dos organismos com o meio, formando uma estrutura ecológica chamada de ecossistema. (RODRIGUES, 2009, *apud* Tinoco, 2016, p. 28-29)

[5] [...] ecossistema do saber, no qual se produz a matemática; ecossistema didático escolar, no qual se estuda a matemática; ecossistema profissional, onde utilizam a matemática para concretizar algumas tarefas; ecossistema noosferiano, enfim, aonde a matemática é manipulada para fins de transposição. Estes são os objetos matemáticos que, os primeiros, constituíram o “biótico do didata” (ARTAUD, 1998, p. 4).

Após as análises das quatro coleções, Tinoco (2016) estabeleceu a estrutura ecológica em relação a proporcionalidade apresentada nos livros didáticos. Vale a pena relatar que nem todas as coleções apresentaram em todos os anos o objeto matemático em estudo.

Em relação a coleção 1, referente a década de 80, Tinoco (2016) estabeleceu o seguinte esquema de estrutura ecológica a partir do ecossistema da proporcionalidade observado nos livros didáticos.

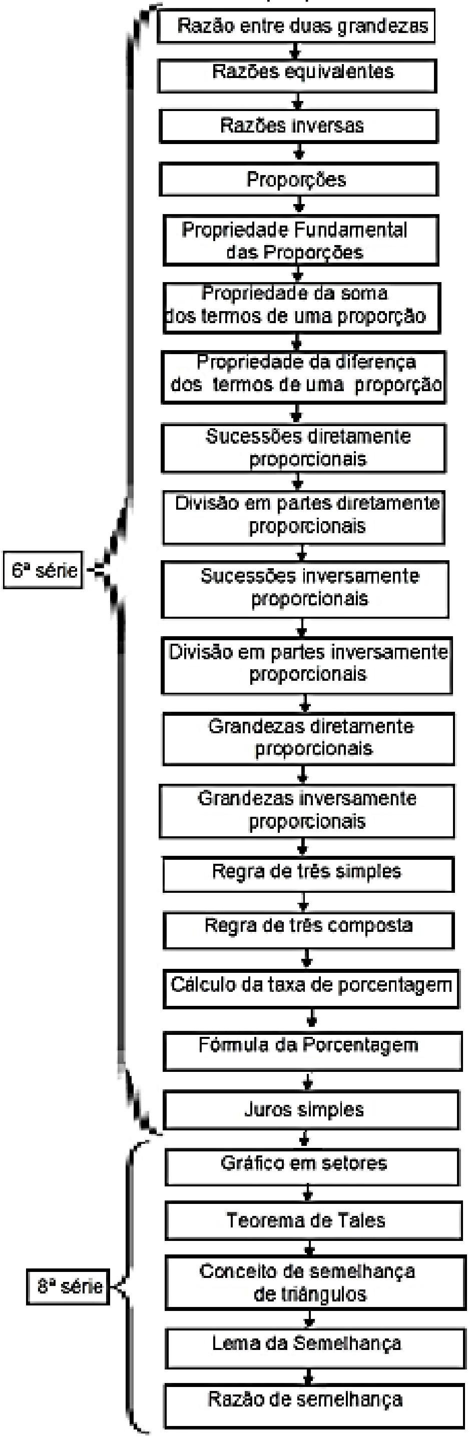
Figura 13 – Ecossistema da proporcionalidade da C1



Fonte: imagem retirada de Tinoco,2016, p.79.

No que tange a coleção 2, especificamente voltado a década de 90, a autora, de acordo com o que foi pesquisado e analisado nos livros didáticos, estabeleceu a seguinte estrutura ecológica:

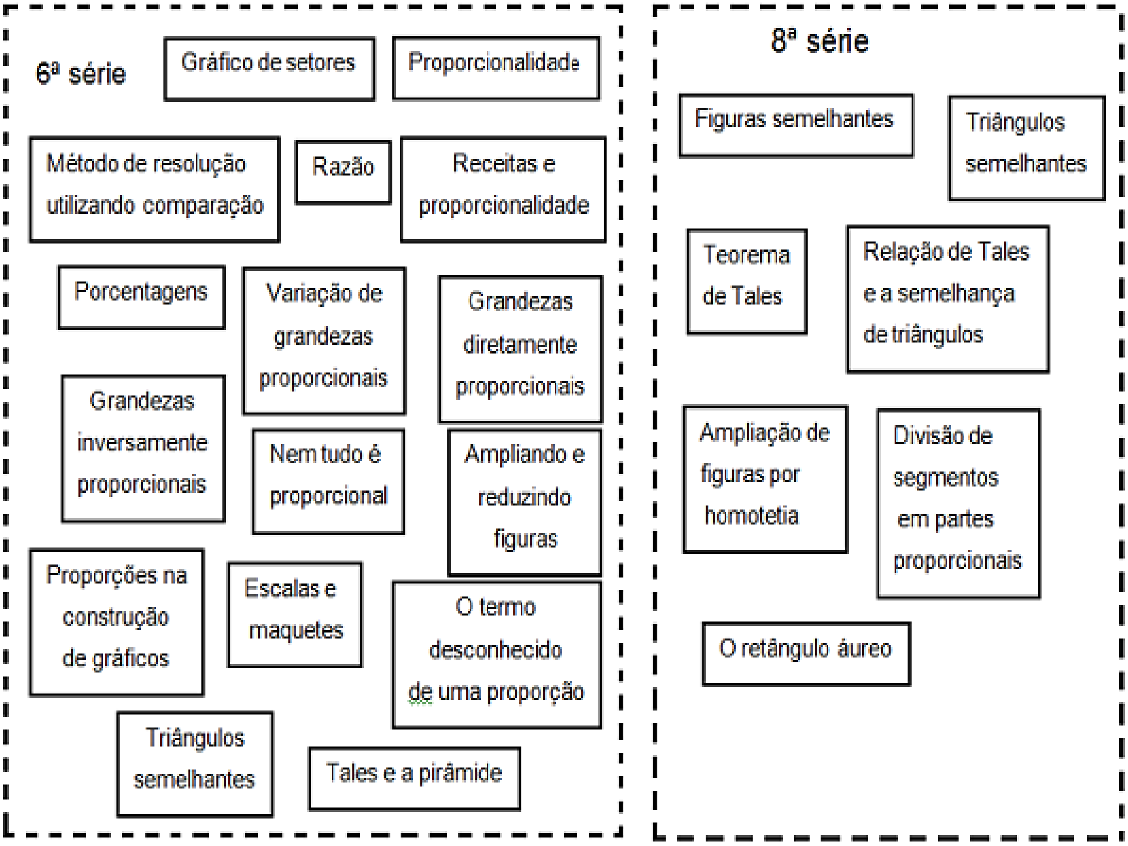
Figura 14 – Ecossistema da proporcionalidade da C2



Fonte: imagem retirada de Tinoco, 2016, p.97.

Já a estrutura ecológica que Tinoco (2016) esquematizou após as análises da coleção 3, referente a década de 2000, é apresentada da seguinte forma:

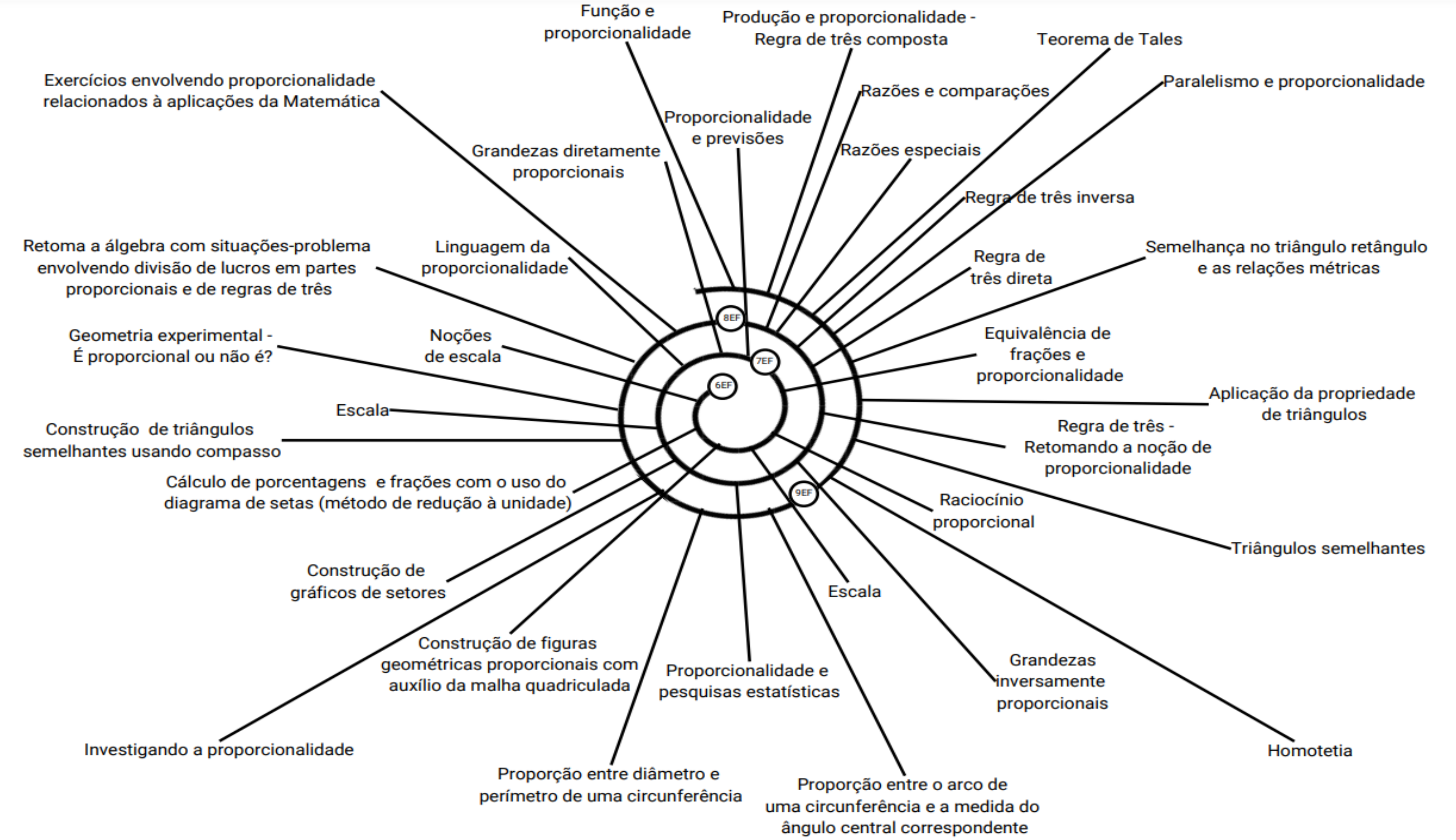
Figura 15 – Ecossistema da proporcionalidade da C3



Fonte: imagem retirada de Tinoco, 2016, p.118.

Por fim, a análise da coleção 4 gerou um esquema da estrutura ecológica em formato de espiral, pois, a autora percebeu que o conteúdo proporcionalidade vai sendo retomado à medida que se faz necessário para a compreensão de outros, além disso, foi a única coleção que explorou o objeto de estudo nas quatro etapas (6º, 7º, 8º e 9º anos) do ensino fundamental II. A estrutura ecológica da última coleção analisada foi esquematizada por Tinoco (2016) da seguinte forma:

Figura 16 – Ecossistema da proporcionalidade da C4



Fonte: imagem adaptada de Tinoco, 2016, p.145.

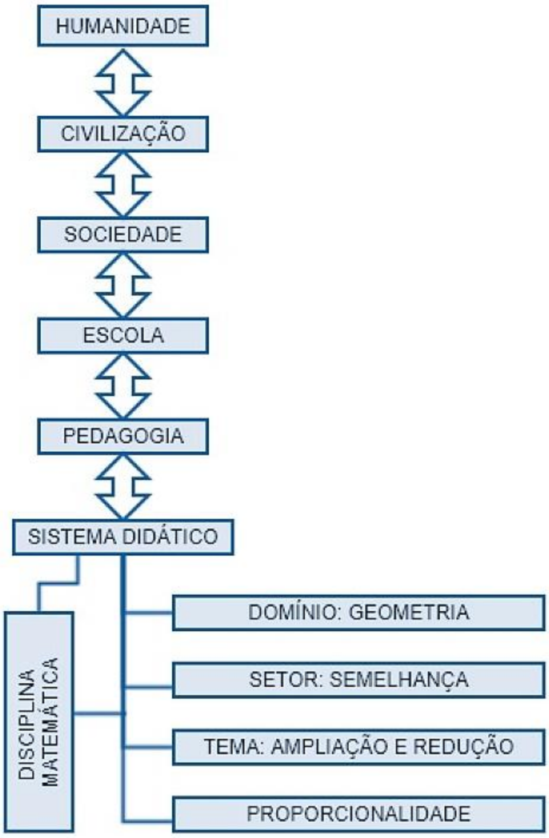
O currículo matemático direciona o ensino da proporcionalidade e dá ênfase a sua importância no que tange a sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, neste sentido Tinoco (2016) ressalta a importância que os PCNs, a BNCC e o PNLD tiveram no aprimoramento e transformações estruturais da exploração da proporcionalidade presentes nos livros didáticos. Portanto, constatou que objeto de ensino pesquisado esteve presente em apenas dois anos, nas três primeiras coleções os das décadas de 1980, 1990 e 2000, e considerou um avanço significativo na quarta coleção analisada, pois, verificou que explorou a proporcionalidade em todos os anos.

Contudo, Tinoco (2016) considerou que os conceitos: razão, proporção, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, teorema de tales e semelhança de triângulos foram priorizados em todas as coleções, apesar disso, conceitos como: terceira e quarta proporcional, regra de três simples e compostas desaparecem em algumas das coleções. Deste modo, deve-se refletir se de fato a omissão ou priorização de alguns saberes em detrimento de outros está favorecendo ou dificultando o aprendizado do aluno que é quem deve ser o protagonista no processo educacional.

Vieira (2020), realizou uma pesquisa que vislumbrava investigar a ecologia do objeto de saber proporcionalidade sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), no saber sábio em textos acadêmicos, no saber ensinado no currículo e livros didáticos do Ensino Fundamental. A fim de chegar em resposta(s) para o seguinte questionamento: como vive o saber proporcionalidade no âmbito dos textos acadêmicos, dos referenciais curriculares e dos livros didáticos? Portanto, com intuito de entender o que caracteriza a razão de ser do saber no que tange a proporcionalidade nesses âmbitos, bem como as praxeologias matemáticas; e a relação institucional do objeto em questão, situando-o quanto ao habitat, nichos e relações ecológicas nos textos.

A autora constatou que são várias as circunstâncias que rodeiam esse objeto de saber nas instituições e que a proporcionalidade mantém uma relação de protocooperação com diferentes assuntos que compõem o tema matemático e estabelece a teia alimentar, ora alimentando-se, ora servindo de alimento. Para ter maior clareza a esse respeito, a autora esquematizou uma escala de estudo da proporcionalidade para mostrar a organização matemática do ponto de vista de nível superior através da humanidade, civilização, sociedade, escola e pedagogia; no ponto de vista de nível inferior tem-se o sistema didático com um foco inicial em um certo domínio de estudo, e durante o desenvolvimento se desdobra em diversos assuntos de forma harmoniosa:

Figura 17 – Escala de codeterminação particular: proporcionalidade



Fonte: imagem retirada de Vieira e Santos, 2020.

Em sua pesquisa Vieira (2020) do ponto de vista da ecologia didática considera diferentes setores de domínios como a Geometria, Aritmética, Álgebra, Grandezas, entre outros, para designar os lugares da vida e o ambiente conceitual da proporcionalidade, ou seja, seu *habitat* e o *nicho*, isto é, designar o modo como este vive no ecossistema matemático e sua função nos sistemas com os quais interagem.

Ademais, identificou a proporcionalidade como tendo seu habitat na comunidade de saberes da álgebra com o nicho ecológico no estudo da função linear; habitat na comunidade de saberes das grandezas e o nicho ecológico presente no estudo das grandezas proporcionalmente diretas e proporcionalmente inversas, podendo ainda se articular a função linear e função exponencial; ainda tem habitat na comunidade de saberes da geometria com o nicho ecológico no estudo da semelhança, podendo se articular com a função identidade. Especificamente no ensino fundamental a autora constatou que o habitat da proporcionalidade recai na comunidade de saberes da aritmética com nicho ecológico evidente nos significados de multiplicação, divisão e porcentagem.

Entretanto, é importante destacar que os resultados da pesquisa realizada por Vieira (2020) revelam que o uso da técnica da regra de três deve-se seguir em direção contrária à relação de parasitismo, haja vista que, seu uso só tem legitimidade se houver uma proporcionalidade.

Além disso, a autora destaca suas análises dos livros didáticos enfatizando que a instituição Currículo tem o mesmo viés quanto ao encaminhamento da organização matemática introduzindo o saber de proporcionalidade a partir dos anos iniciais do ensino fundamental, porém divergem no não reconhecimento da importância da proporcionalidade enquanto ideia fundamental da matemática na relação recíproca, em que se comporta ora alimentando-se, ora servindo de alimento no saber a ser ensinado e que não deve ser reservado apenas a um capítulo como aparece nos livros didáticos, para que esse isolamento do saber não se torne a ruptura da construção da essência do raciocínio proporcional a uma mera aplicação de regras de álgebra, geometria, trigonometria, entre outros.

Vieira (2020), justifica a necessidade de introdução da proporcionalidade antes mesmo do ensino fundamental mediando a ideia de metade e relacionando com ideias multiplicativas, em tipo de tarefa de comparação, bem como refletem a razão de ser da proporcionalidade, entendendo que esse saber existe e deve continuar presente, pois faz parte do cotidiano da humanidade, possui contexto histórico, sociais, culturais, universais e milenar, ainda se revela em uma teia de saberes, que, à medida que se vivencia esse objeto de saber, favorece a vida de vários outros saberes no ecossistema. Reconhecendo-a como importante na utilização de problemas de porcentagem, multiplicação, divisão, ampliação e redução, variação de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Lazzaretti (2022), realizou uma análise de quatro obras de livros voltados ao ensino fundamental onde buscou analisar como se desenvolve o conteúdo de razão e proporção nos livros didáticos do Ensino Fundamental, especificamente do 7º ano e ainda fez uma comparação das edições anteriores e posteriores à BNCC. Utilizou-se de sete critérios, incluindo tópicos de definição às estratégias de resolução que pudessem dar conta dá analise a ser feita sobre o desenvolvimento do objeto razão e proporção dos livros tomados como referência de diferentes coleções e edições. Antes da implementação da BNCC, dois livros do ano de 2009 e 2015 da editora FTD e Teláris, respectivamente, foram analisados; e após a implementação outros dois livros foram dos anos de 2018, também das mesmas editoras.

É importante ressaltar que a pesquisa nos traz resultados, sugestões pertinentes e necessárias a escolha e uso que fazemos dos livros didáticos, Lazzaretti (2022), considera que não devemos nos ater a um único livro didático, assim, elaborou e indica sete critérios a considerar para avaliar tal escolha, muito utilizada para abordagem do conteúdo em sala de aula e cumprimento de sua proposta de ensino que são:

> 1- Como são apresentadas as ideias fundamentais do conteúdo?
> 2- Qual significado dado aos termos “razão” e “proporção”?
> 3- Como o livro didático integra novos conceitos?
> 4- Como o livro didático relaciona os diferentes tipos de representação?
> 5- Quais estratégias de resolução são apresentadas?
> 6- Como é o incentivo para a elaboração de problemas?
> 7- Como o conteúdo é contextualizado? (Lazzaretti, 2022, p. 64-66)

Assim, Lazzaretti (2022), constata que os livros analisados dentro dos critérios elaborados, e que por ela tinha uma perspectiva otimista em relação a atingir mudanças adequadas ao que tange as normativas da BNCC não tiveram destaques significativos em relação ao desenvolvimento de razão e proporção a partir dos tópicos avaliados, não superando as edições anteriores a implementação. Mas vale destacar que a autora evidenciou tópicos relevantes ao ensino de razão e proporção nas edições que após a pesquisa não mostrou melhor eficiência de a cordo com os critérios adotados e por essas razões fica a expectativa de melhorias em edições seguintes.

Podemos afirmar que os resultados expostos nos trabalhos das autoras Lazzareti (2022), Vieira (2020) e Tinoco (2016), ambas trataram o objeto matemático, razão e proporção, respectivamente: analisando-o sob a perspectiva do livro didático trazendo em seus resultados ressalvas no desenvolvimento do conteúdo em algumas edições que devem se adequar as recomendações da BNCC; mostrando a razão de ser e reconhecendo a importância da proporcionalidade em inúmeras situações problemas; ou revelando e instigando-nos a atenção que devemos dar em relação a omissão ou priorização dos saberes relacionados a razão e proporção apresentados nos livros didáticos.

Nesta próxima seção apresentaremos resultados do ensino e aprendizado de razão e proporção de autores que utilizaram metodologias ativas, especialmente o ensino por atividades como metodologia de ensino em sala de aula.

3.11.2 Ensino de razão e proporção, utilizando metodologias ativas

Diversas são as maneiras que o professor busca para trabalhar de forma eficiente os conteúdos matemáticos em sala de aula, no entanto, nem sempre consegue chegar a praticar uma metodologia diferente da tradicional em que utiliza, apenas a lousa, pincel e exposição oral para ministrar suas aulas. Talvez por não conhecer a fundo as diversas metodologias ou até mesmo por não ter certeza se o ensino se efetivará ao utilizá-las.

Diante disso, diversos pesquisadores passaram a estudar, propor e realizar experiências com outras metodologias que diferenciasse a tradicional. A exemplo disso temos a pesquisa de Delatorre (2021) a qual explora problemas do cotidiano a partir de uma conta de água, de produtos à venda em um supermercado, da receita de um bolo, entre outras situações, como possibilidade para ensinar razão e proporção atrelado a “*Recursos Tecnológicos*”, como os aplicativos Price Cruncher e GeoGebra.

Delatorre (2021) acredita ser possível e eficaz essa forma de ensinar, nesse sentido a autora propõe em seu trabalho atividades que podem servir de base para o educador desenvolver outros exemplos práticos utilizando criatividade e planejamento, pois, de acordo com seu entendimento se em uma atividade que o aluno for executar existir uma relação do conteúdo com seu cotidiano eles irão problematizar uma situação real, percebendo a importância de um conteúdo matemático em sua vida diária, e ainda utilizando a tecnologia para efetivar a aplicabilidade em prol de um planejamento financeiro ou até mesmo de uma economia nos gastos.

Ainda seguindo a dinâmica de um ensino que seja mais significante ao aluno Lobato Junior (2018) analisou as potencialidades de uma sequência didática para o ensino de razão e proporção de acordo com a fundamentação e estrutura da metodologia de ensino "*Ensino por Atividades*".

Lobato Junior (2018), propôs uma sequência didática com 22 atividades experimentais que levassem os alunos a dar conta de chegar aos objetivos matemáticos propostos nas atividades e realizou o experimento em uma turma com 25 alunos constatando no final da experiência que a sequência didática desenvolvida e aplicada nos moldes de ensino por atividades proporciona resultados favoráveis à aprendizagem dos alunos, dado que os alunos obtiveram um desempenho satisfatório na resolução de questões sobre os conteúdos em estudo como consta em sua pesquisa.

A pesquisadora Batista (2018), utilizou a abordagem de ensino, Ensino por atividades, a qual utilizou os procedimentos metodológicos da engenharia didática para avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática nos moldes do ensino por atividades experimentais de Sá (2009) e Sá e Jucá (2014) e suas potencialidades quanto a aprendizagem do conteúdo de razão e proporção.

A autora citada anteriormente, revela em seus estudos, através de dados estatísticos de sua experimentação um avanço no aprendizado de razão e proporção dos estudantes que participaram do experimento, ainda propaga que sua sequência de atividades dentro da perspectiva de ensino por atividades experimentais, por trazer em seu escopo situações do cotidiano instigou, envolveu e motivou os alunos no desenvolvimento da atividade, e portanto, pode ser utilizada para ensino de razão e proporção.

Silva (2022) apresenta uma proposta para o ensino de proporcionalidade por meio de metodologias ativas, utilizou a metodologia de ensino, Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da *Resolução de Problemas*, a qual utilizou problemas geradores para introduzir conceitos matemáticos e estimular os alunos na busca de resolução de problemas, problematizados a partir de temas voltados a educação ambiental e educação para o consumo.

Em seu trabalho Silva (2022) constatou que o ensino de proporcionalidade ao ser trabalhada com a Resolução de Problemas contribuiu para uma postura ativa de interação durante a aula, análise, reflexão para resolução dos problemas por parte dos alunos e ainda favoreceu o professor oferecendo uma dinâmica inovadora para uma aula pautada em metodologia diferente da expositiva que possa trabalhar proporcionalidade.

Lacerda (2019), se propôs pesquisar o recurso metodológico "*jogo*" em específico o jogo de tabuleiro considerando a metodologia de pesquisa, a participante em uma abordagem qualitativa que teve como objetivo conhecer o jogo para usar como suporte ao aprendizado de conteúdos de proporcionalidade, de acordo com a metodologia de ensino resolução de problemas, aplicou um jogo de tabuleiro para os alunos da 1ª série do ensino Médio de uma escola pública do município de Fortaleza-Ceará.

O estudo de Lacerda (2019), constatou que a utilização desse recurso favorece tanto o ensino e pode ser aliado a outro método, quanto a aprendizagem do educando, pois os alunos mostraram interesse, estímulo, raciocínio o que levou os estudantes uma aprendizagem ao resolverem os problemas com conceitos de proporcionalidade presentes no jogo.

Não esgotamos neste tópico as diversas metodologias ativas que estão disposta a nosso favor enquanto profissional, mas apresentamos estudos que certamente favorecem a sua utilização, pois estas oferecem estratégias de implementação de ensino com aquilo que já está estabelecido, não rompe, mas procura completar dá sentido e significado na ação educativa. Segundo Berbel (2011):

> [...]A implementação de metodologias ativas pode vim a favorecer uma motivação autônoma quando incluir o fortalecimento da percepção do aluno de ser origem da própria ação, ao serem apresentados oportunidades de problematização de situações envolvidas na programação escolar, de escolha de aspectos dos conteúdos de estudo, de caminhos possíveis para o desenvolvimento de respostas ou soluções para os problemas que se apresentam alternativas criativas para a conclusão do estudo ou da pesquisa, entre outras possibilidades (Berbel, 2011, p.28).

Portanto, inferimos que esta caracterização permite compreender que as metodologias ativas no ensino de razão e proporção no ensino de matemática constituem-se como instrumentos lógicos nas práticas pedagógicas, visam situar o aluno no seu contexto social de sua dada realidade que influência sua realidade, pois é necessário relacionar com o conteúdo ensinado, já que as experiências do cotidiano contribuem para despertar o interesse no processo de formação do aprendizado no ambiente escolar.

Contudo, é preciso reconhecer que as metodologias ativas no ensino de razão e proporção tende a demonstrar que o professor pode fazer utilidade distinta, porém é necessário ajustar as necessidades e realidades educacionais dos estudantes dentro de uma abordagem que lhes possibilite a pensar e agir buscando respostas para as suas indagações na construção de seus conhecimentos.

De posse das análises prévias buscamos realizar uma sequência didática de ensino e testes, levando em consideração os pressupostos estudados, e serão elencados na segunda fase da engenharia didática a partir desse momento.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Esta seção irá apresentar a segunda fase de nossa pesquisa a análise a priori, nessa fase é realizado uma proposta didática que visem ajudar o aluno no desenvolvimento de seu aprendizado, a proposta pensada foi uma sequência didática com 13 atividades que envolvem situações-problemas que favoreçam possibilidades de realizarem ações, estratégias e tomadas de decisões que lhes permitam produzir conhecimento definir conceitos do objeto matemático, descobrir relações ou realizar procedimentos operatórios.

Além do que, para a elaboração da sequência didática foram utilizadas as orientações metodológicas de ensino – EMAE de Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023) e serão voltadas aos alunos do 9º ano da rede municipal de ensino pública. Contendo atividades de redescoberta e conceituação.

Nesta seção também traremos o pré-teste e o pós-teste proposto aos alunos e as análises a priori de cada questão. Ainda apresentaremos as atividades presentes na sequência didática bem como as análises a priori de cada questão, e para aprimoramento e fixação do conteúdo propomos três listas com questões.

4.1 OS TESTES PROPOSTOS

Elaboramos um pré-teste com 10 questões voltado ao conteúdo de razão e proporção, para que possamos fazer uma análise antes da aplicação da sequência didática de ensino e ter um parâmetro de comparação do desenvolvimento de sua aprendizagem e este será o mesmo do pós-teste, também com intuito de fazer a comparação dos dados adquiridos após a aplicação da sequência didática.

4.2 A ANÁLISE A PRIORI DE CADA QUESTÃO DO PRÉ-TESTE E DO PÓS-TESTE.

Aplicamos aos alunos consultados na fase da experimentação um teste com 10 questões, o pré-teste. O pré-teste e o pós-teste serão os mesmos. Adiante apresentaremos o teste e a análise a priori de cada questão dos testes.

Questão 1: (Adaptada Saresp 2013) - Um estojo de maquiagem tem 12 tonalidades de batom, sendo 3 tonalidades cintilantes e as restantes cremosas.

Qual a representação da razão entre o número de batom cintilante e o número de batons no estojo?

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Esperamos que os estudantes, em sua maioria, possam ter êxito na resposta, visto que terão participado da atividade referente razão, porcentagem e já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão.

Questão 2: O tamanho máximo das bandeiras autorizadas para entrarem em um estádio de futebol na copa do mundo de 2022, segundo o padrão da FIFA foi de 2m de comprimento por 1,5m de largura. Considerando que uma Bandeira Nacional possui 1 m de comprimento, quanto deverá medir a largura dessa bandeira, seguindo a proporcionalidade dos padrões FIFA?

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto razão e proporção.

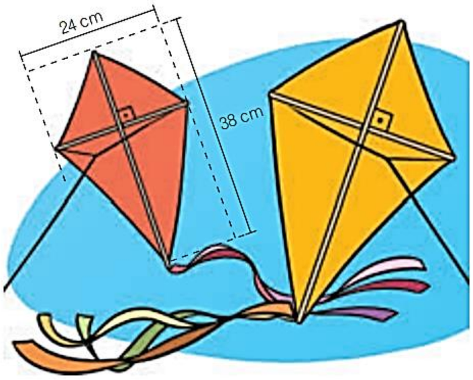
Análise a priori do pós-teste: Acreditamos que os estudantes, possam ter êxito na resposta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão na atividade referente ao conceito de uma razão e proporção.

Questão 3: Densidade demográfica(D) é a razão entre o número de habitantes e a área que é ocupada por eles, ou seja, $D = \frac{número\ de\ habitantes}{área\ em\ km^2}$, e serve para comparar a população com a área ocupada. No Brasil há lugares pouco povoados e outros com grande concentração de pessoas. No estado de São Paulo, por exemplo, temos uma população de aproximadamente 44 milhões de pessoas, para uma área também aproximada de 250 000 km². (IBGE, 2022). Com isso, a densidade do estado de São Paulo será de?

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Os estudantes podem encontrar a resposta correta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão na atividade referente a razão especial densidade demográfica.

Questão 4: As duas pipas são semelhantes, sendo 1,5 a razão de semelhança. Qual é o comprimento das diagonais da pipa maior?

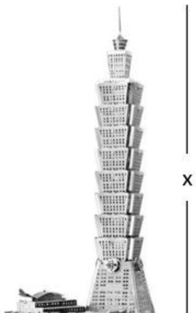


Fonte: Coleção praticando matemática, v. 9, 2025, p. 181.

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Acreditamos que os estudantes, possam ter êxito na resposta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão na atividade referente ao conceito de proporção.

Questão 5: (Saresp 2013) - O edifício da foto abaixo foi construído em Taipei e é um dos dez mais altos do mundo. Sua altura real é de 509 metros. Se, na foto, a medida da altura x do prédio for de 14 cm e a medida de y for de 5 cm, a medida real aproximada de y será de:



Fonte: https://bayshoreshoppingcentre.com.

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Os estudantes podem obter a resposta correta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão na atividade referente ao conceito de escalas.

Questão 6: O sal mineral, ou suplemento mineral para cavalo é uma mistura composta por macro e micronutrientes extremamente importantes para a manutenção da saúde do animal. Os minerais são essenciais para o bom funcionamento de qualquer organismo. No caso dos cavalos, os minerais são imprescindíveis para a **boa performance de atividades**, bem como para a **longevidade do animal**. O sódio, um dos principais componentes do sal mineral para cavalo, possui funções de transporte de nutrientes no organismo e funções cerebrais. E esses são apenas alguns dos motivos que tornam a ingestão desse suplemento tão importante para os equídeos. A ingestão do sal mineral para cavalo deve ser diária e de acordo com peso do animal. Veja a tabela abaixo:

Quadro 7 – Consumo de Sal mineral diário de alguns cavalos, considerando o peso do animal

Quantidade de Sal (g)	Peso do cavalo (Kg)
25	100
50	200
100	400
200	800

De acordo com as informações na tabela descubra se há proporcionalidade entre a quantidade de sal e o peso do animal, e qual a constante de proporcionalidade?

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Os estudantes podem encontrar a resposta correta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão na atividade referente ao conceito de constante de proporcionalidade.

Questão 7: Uma loja que vende tintas tem uma máquina que efetua misturas de variadas cores para obter diferentes tonalidades. Um cliente irá comprar uma tonalidade de tinta com a mistura das cores amarelo e branco, na proporção de 5 para 2, respectivamente. O cliente, irá precisar de 21 l, nesse caso quantos litros de cada cor irão utilizar para obter a tonalidade na mesma proporção?

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

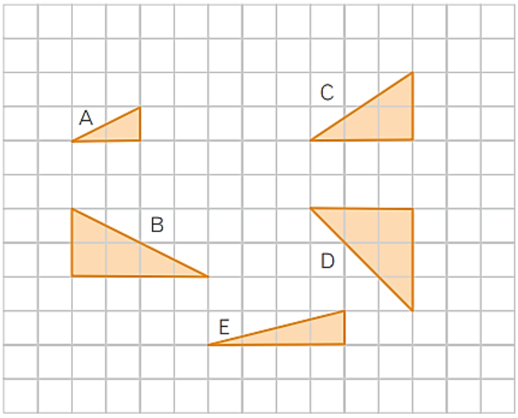
Análise a priori do pós-teste: Os estudantes podem encontrar a resposta correta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão na atividade referente a conceito de razão e proporção.

Questão 8: (ABCP 2022) - Considerando que uma herança de R$ 50.000,00 será dividida em partes diretamente proporcionais à idade de três pessoas (10, 15 e 25 anos, respectivamente), é correto afirmar que a pessoa mais velha receberá um valor igual a:

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Acreditamos que os estudantes encontrarão a resposta correta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão na atividade referente a distribuição em partes diretamente proporcionais.

Questão 9: Observe a imagem abaixo.



Fonte: Coleção praticando matemática, v. 9, 2015, p. 171.

Qual figura é a ampliação da figura A?

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Os estudantes podem encontrar a resposta correta, visto que já poderão ter construído o conhecimento exigido na atividade referente ao conceito de proporcionalidade.

Questão 10: Três herdeiros André, Berenice e Caio, receberam uma herança de R$ 2 950 000. A divisão deverá ser feita na razão inversa a 2, 5 e 7 respectivamente. Qual o valor que Berenice irá receber?

Análise a priori do pré-teste: Pode ser que os estudantes não consigam resolver a questão, já que ainda não estudaram o assunto.

Análise a priori do pós-teste: Esperamos que os estudantes, em sua maioria, possam ter êxito na resposta, visto que terão participado da atividade referente a distribuição em partes inversamente proporcionais e já poderão ter construído o conhecimento exigido nesta questão.

4.3 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A PRIORI DE CADA ATIVIDADE[6] PROPOSTA

Para abordar os objetos de conhecimento de nossa pesquisa razão e proporção elaboramos 13 propostas de atividades em uma sequência didática que abrangeu os conteúdos de: conceito de razão; razões inversas; razões equivalentes; razões especiais como: escalas, velocidade média, porcentagem e densidade demográfica; conceito de proporção; propriedade fundamental da proporção, grandezas proporcionais (diretamente e inversamente) e grandezas não proporcionais; propriedades da soma e diferença das proporções; distribuição em partes proporcionais.

Em cada atividade traremos o título, objetivo, materiais necessários, os procedimentos a serem realizados e ainda um espaço para o registro onde será feito anotações produzidas durante a atividade que podem ser necessárias e utilizadas pelos alunos para chegarem a uma possível resposta, esse espaço geralmente é um quadro com linhas e colunas. As atividades propostas na sequência didática foram adaptadas de Batista (2018).

Anotaremos o tempo de início e fim de cada atividade realizada pelos alunos, a fim de analisar o tempo médio que os estudantes levaram para executarem as atividades propostas. Logo abaixo apresentaremos as atividades experimentais e suas análises a priori.

---

[6] Destacamos que utilizaremos nesta seção o termo “atividade” para designar um conjunto de tarefas que deverão ser realizadas por meio de ações, com a pretensão de alcançar objetivos descritos de forma clara.

4.3.1 Atividade 01

Título: Razão em matemática

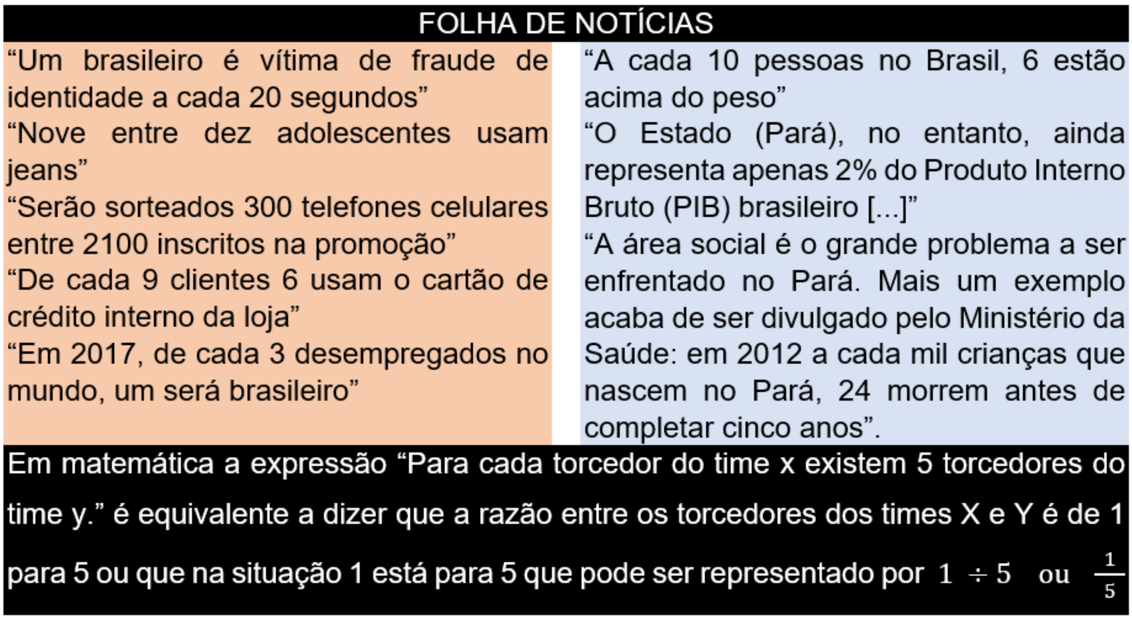
Objetivo: Introduzir o conceito de razão

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta

Hora de Início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimentos:

- Leia a folha de notícias juntamente com o quadro informativo e faça o que se pede em seguida.



FOLHA DE NOTÍCIAS

“Um brasileiro é vítima de fraude de identidade a cada 20 segundos”

“Nove entre dez adolescentes usam jeans”

“Serão sorteados 300 telefones celulares entre 2100 inscritos na promoção”

“De cada 9 clientes 6 usam o cartão de crédito interno da loja”

“Em 2017, de cada 3 desempregados no mundo, um será brasileiro”

“A cada 10 pessoas no Brasil, 6 estão acima do peso”

“O Estado (Pará), no entanto, ainda representa apenas 2% do Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro [...]”

“A área social é o grande problema a ser enfrentado no Pará. Mais um exemplo acaba de ser divulgado pelo Ministério da Saúde: em 2012 a cada mil crianças que nascem no Pará, 24 morrem antes de completar cinco anos”.

Em matemática a expressão “Para cada torcedor do time x existem 5 torcedores do time y.” é equivalente a dizer que a razão entre os torcedores dos times X e Y é de 1 para 5 ou que na situação 1 está para 5 que pode ser representado por $1 \div 5$ ou $\frac{1}{5}$

- Analise as situações a seguir e escreva a razão correspondente entre os elementos envolvidos em cada situação.

Situação 1: Santa Catarina tem a maior sobra de homens solteiros. Para cada 100 mulheres solteiras existem 122 homens na mesma condição.

Razão correspondente:

Situação 2: Em Novo Repartimento de cada 1000 crianças que nascem aproximadamente 25 não sobrevivem.

Razão correspondente:

Situação 3: Três de cada dez brasileiros são ateus.

Razão correspondente:

Situação 4: A gasolina teve um aumento de 7%.

Razão correspondente:

Situação 5: Em uma cidade, 30% dos moradores são estrangeiros.

Razão correspondente:

Situação 6: 94% dos brasileiros que tem contato com notícias ou informação na rotina, consideram importante checar as notícias.

Razão correspondente:

Situação 7: As principais fontes de informações atuais, para 7% das pessoas são as fontes digitais como: Twitter, Instagram, Facebook, LinkedIn e YouTube.

Razão correspondente:

Situação 8: A cada 4 brasileiros, 1 se declara portador de alguma deficiência.

Razão correspondente:

Situação 9: Nove entre dez crianças assistem desenho animado.

Razão correspondente:

Situação 10: No Brasil o número de mulheres supera o de homens, em média de 95,6 homens para cada 100 mulheres.

Razão correspondente:

- Dê 05 exemplos de situações que envolvem a ideia de razão.

Na razão $\frac{3}{4}$ o três é denominado de **antecedente** e o quatro de **consequente**.

- Para cada razão a seguir identifique o antecedente e o consequente

1) Na razão $\frac{2}{5}$, o antecedente é__________ e o consequente é __________

2) Na razão $\frac{1}{2}$, o antecedente é__________ e o consequente é __________

3) Na razão $\frac{4}{5}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

4) Na razão $\frac{7}{8}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

5) Em $\frac{11}{13}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

6) Em $\frac{3}{6}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

7) Em $\frac{3}{7}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

8) Em $\frac{11}{25}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

9) Em $\frac{6}{7}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

10) Em $\frac{7}{9}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

- Preencha as lacunas:

a) Ao comparar a medida de duas grandezas estou trabalhando a ideia de __________. A ordem na representação de uma razão é importante e recebem o nome de _________________ e __________________ que podem ser representados na forma de ___________________.

Observações:

Análise a priori da atividade 01: Esperamos que os alunos identifiquem uma semelhança entre as diferentes notícias que trabalham com a ideia de razão retiradas de jornais, sites de pesquisas como o IBGE, as quais estão sempre comparando as medidas de duas grandezas. Elencaremos também outros exemplos de diversas razões e a partir disso esperamos que os alunos consigam compreender a ideia de razão e consigam resolver as atividades seguintes. Os alunos poderão sentir dificuldades quanto a ordem na representação de uma razão, caso isso ocorra será esclarecido a importância na ordem da representação de uma razão e pediremos que a refaça, visto que é importante a ordem ser considerada e por isso cada elemento numérico recebe um nome. Esperamos que no final dessa atividade o aluno consiga assimilar razão como sendo uma fração na qual tem-se a comparação da parte e o todo como duas grandezas, ou quociente. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.2 Atividade 02

Título: Razões Inversas

Objetivo: Descobrir uma relação entre as razões que tem seus termos invertidos.

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta e se achar necessário podem fazer uso de calculadora.

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia a o roteiro de atividade com o quadro abaixo e faça o que se pede.
- Preencha o quadro a seguir:

Razão 1	Razão 2	Produto das razões
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	
$\frac{9}{3}$	$\frac{3}{9}$	
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	
$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	
$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{2}$	
$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{7}$	
$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{8}$	
$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{7}$	

Observação:

Conclusão:

- De 5 exemplos de pares de razões inversas.
- De 5 exemplo de pares de razões que não são inversas.

Análise a priori da atividade 02: Esperamos que os alunos verifiquem a regularidade quando o produto de duas razões é igual a 1 dizemos que as razões são inversas, assim para significar ainda mais essa relação colocamos alguns exemplos que não possuem seus termos invertidos. Os alunos poderão cometer erros ao equivocar-se na operação de multiplicação, sendo levados ao erro quanto ao produto dos antecedentes ou consequentes e não chegando ao objetivo da atividade, caso isso aconteça pediremos que se atente para a multiplicação e refaçam as que não estiverem de acordo. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.3 Atividade 03

Título: Razões equivalentes

Objetivo: Introduzir o conceito de razões equivalentes

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Considere cada situação apresentada e responda o que lhe é solicitado

Situação 01: Num grupo de 10 torcedores do time o Cruzeiro, 06 são homens e de cada grupo de 20 torcedores do time do Vasco, 12 são homens. Qual dos times tem mais torcedores homens?

a) Qual é a razão entre os torcedores do Cruzeiro que são homens e o total do grupo de torcedores do Cruzeiro? Simplifique ao máximo esta razão.

b) Qual é a razão entre os torcedores do Vasco que são homens e o total do grupo de torcedores do Vasco? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Qual dos times tem mais torcedores homens?

Situação 02: De cada 08 profissionais da construção civil, 02 são mulheres e de cada 24 engenheiros, 06 são mulheres. Qual das profissões tem mais mulheres?

a) Qual é a razão entre as profissionais da construção civil e os profissionais da construção civil de ambos os sexos? Simplifique ao máximo esta razão.

b) Qual é a razão entre as engenheiras e os engenheiros de ambos os sexos? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Qual das profissões tem mais mulheres?

Situação 03: De cada 12 mulheres que tem câncer de mama, 02 morrem e de cada 06 mulheres que tem câncer de colo do útero, 01 morre. Qual dos dois tipos de câncer é mais mortal?

a) Qual é a razão entre a mortalidade das mulheres e o câncer de mama? Simplifique ao máximo esta razão.
b) Qual é a razão entre a mortalidade das mulheres e o câncer de colo do útero? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Qual dos dois tipos de câncer é mais mortal?

Situação 04: Três de cada dez brasileiros são ateus e nove de cada trinta italianos são ateus. Há mais ateus entre brasileiros ou italianos?
a) Qual é a razão entre o número de brasileiros ateus e o número de brasileiros? Simplifique ao máximo esta razão.
b) Qual é a razão entre o número de italianos ateus e o número de italianos? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Há mais ateus entre brasileiros ou italianos?

Situação 05: Nove entre dez crianças acessam a internet todos os dias e dezoito entre vinte adolescentes acessam a internet diariamente. Quem acessa mais a internet diariamente, as crianças ou os adolescentes?
a) Qual é a razão entre o número de crianças que acessam a internet diariamente e o número de crianças? Simplifique ao máximo esta razão.
b) Qual é a razão entre o número de adolescentes que acessam a internet diariamente e o número de adolescente? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Quem acessa mais a internet, diariamente, as crianças ou os adolescentes?

- Preencha o quadro a seguir:

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	Razão $\frac{a}{b}$ simplificada ao máximo	Razão $\frac{c}{d}$ simplificada ao máximo	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais?	
					SIM	NÃO
$a = 1; b = 2; c = 4; d = 8$						
$a = 12; b = 18; c = 12; = 16$						
$a = 2; b = 4; c = 8; d = 16$						
$a = 2; b = 6; c = 4; d = 12$						
$a = 6; b = 15; c = 4; d = 10$						

$a = 1; b = 2; c = 4; d = 8$						
$a = 4; b = 8; c = 3; d = 6$						

Fonte: Adaptada de Batista (2018)

- Verifique quais dos pares de razões são equivalentes ou iguais:
  1) $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$
  2) $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{20}$
  3) $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$
  4) $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$
  5) $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{10}$
  6) $\frac{10}{15}$ e $\frac{3}{30}$
  7) $\frac{7}{14}$ e $\frac{1}{7}$
  8) $\frac{6}{12}$ e $\frac{4}{24}$
  9) $\frac{9}{10}$ e $\frac{18}{20}$
  10) $\frac{9}{18}$ e $\frac{3}{6}$

Observação:

Análise a priori da atividade 03: Esperamos que com essa atividade que os alunos identifiquem que a partir de cada situação é proposta dois problemas para serem representadas por razões e que ao simplificarem estas ao máximo chegarão a uma mesma razão. Acreditamos ainda, ao passo que o aluno preenche a tabela eles irão identificar e sintetizar quando as razões são equivalentes ou não, percebendo que ao relacionarem uma razão com a outra multiplicando ou dividindo todas as partes da razão pelo mesmo número, então terão duas razões equivalentes. Os alunos poderão sentir dificuldade em representar a razão na ordem em que é enunciado nas questões, caso isso aconteça iremos ajudá-los a relembrarem do que foi tratado no quadro informativo da atividade 01, a fim de que representem de forma correta o antecedente e o consequente da razão. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.4 Atividade 04

Título: Escalas

Objetivo: Conceituar escala

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta e se achar necessário podem fazer uso de calculadora.

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia com atenção o texto apresentado a seguir
- Em seguida responda o que lhe é solicitado em cada situação

Um pouco sobre Escala: mapa do Brasil

Um mapa, como, por exemplo, o do Brasil, é uma representação do país, visto de cima, em tamanho reduzido e que preserva as relações de tamanho. Ou seja, as distâncias nos mapas são diretamente proporcionais às distâncias correspondentes na realidade. Qualquer mapa, planta ou maquete tem uma escala. A escala do mapa indica a razão ou o coeficiente de proporcionalidade entre as distâncias representadas e as distâncias reais. No mapa abaixo, a escala é de 1 cm para 485 km, isto é, cada 1 cm no mapa corresponde a 485 km (ou 48 500 000 cm) na realidade. Indica-se essa escala assim: 1 ÷ 48 500 000 ou $\frac{1}{48\ 500\ 000} = 1\,cm\ \div\ 485\,km$ (Lê-se: um centímetro para quatrocentos e oitenta e cinco quilômetros.)

Nesse mapa, por exemplo, a distância em linha reta de Porto Alegre a Cuiabá é de 3,5 cm. Como calcular a distância real entre essas duas capitais?

Fonte: Adaptado de Batista (2018).

Situação 01: Em um mapa cada cm linear corresponde a 10 m na realidade.
a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância na realidade?
b) Se a distância entre duas cidades A e B no mapa é 3 cm qual é a distância real entre as cidades?
c) Como você fez para descobrir a distância real?

Situação 02: Em um mapa cada 2 cm linear corresponde a 10 km na realidade.
a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância na realidade?
b) Se a distância entre duas cidades A e B no mapa é 5 cm qual é a distância real entre as cidades?
c) Como você fez para descobrir a distância real?

Situação 03: A distância entre duas cidades A e B é de 20.000 m. Sabendo que a cada 2 cm linear no mapa corresponde a 200 m na realidade. Responda:
a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância na realidade?
b) Qual é a distância no mapa entre as cidades A e B?
c) Como você fez para descobrir a distância no mapa?

Situação 04: A distância entre duas cidades A e B é de 90 km. Sabendo que a cada 3 cm linear no mapa corresponde a 10 km na realidade. Responda:
a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância linear na realidade?
b) Qual é a distância linear no mapa entre as cidades A e B?
c) Como você fez para descobrir a distância no mapa?

Situação 05: A distância entre a cidade A e a cidade B é de 400 km. Sabendo que em um mapa essa distância está representada por 20 cm. Responda:
a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância linear na realidade? Simplifique ao máximo.
b) Se a distância entre duas cidades A e B no mapa é 10 cm qual é a distância real entre as cidades?

c) Como você fez para descobrir a distância real?

- Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.

Situações	distância no mapa	distância real	$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			
Situação 5			

Observação:

Análise a priori da atividade 04: Esperamos nessa atividade que os alunos identifiquem em cada situação a relação existente entre a distância no mapa e a distância na realidade, comparando o comprimento real com o comprimento na ampliação ou redução no desenho. E que a partir disso descubra a relação de que a razão entre a medida linear no mapa e a medida linear real é denominada escala do mapa. Acreditamos que poderá haver dificuldade nessa atividade na unidade de medida das distâncias que devem ser iguais para que possam chegar aos resultados esperados, caso isso ocorra, iremos explicar como devem proceder. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.5 Atividade 05

Título: Densidade demográfica

Objetivo: Conceituar densidade demográfica.

Material: Folha de atividade, lápis ou caneta, calculadora

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia com atenção o texto apresentado a seguir
- Responda o que lhe é solicitado em seguida preencha a tabela de situações

Densidade demográfica

Para saber quantidade de pessoas em certos eventos, são usados aparelhos próprios para este fim, como catracas, que registram a entrada das pessoas em estádios de futebol, em shows, etc. No entanto, no caso de missas em praça pública, comícios políticos, manifestações populares, feiras, etc., não é possível fazer a contagem com esses aparelhos. Como calcular então o número de presentes nesses eventos? Conhecendo a área em que o evento foi realizado e supondo o número de pessoas em cada metro quadrado, podemos estimar o número de pessoas presente. Chamamos de **densidade demográfica a razão entre a população de uma determinada região e a área dessa mesma região**. Esse dado permite calcular a distribuição da população residente em um determinado território, permitindo a verificação das áreas mais e menos povoadas.

Fonte: Adaptado, coleção ideias e relações, 2002.

Situação 01: Um comício político foi realizado em uma praça que tem 4 500 m². Supondo que havia, em média, 8 pessoas por metro quadrado.

a) Qual o número aproximado de pessoas nesse comício?

b) Qual a razão entre o número de pessoas nesse comício e a área que foi realizado?

Situação 02: Na Feira de Exposição Agropecuária de Novo Repartimento (Fexpoanr) de 2022, na cidade de Novo Repartimento, realizada no Parque de Exposição do município ocupou aproximadamente 4000 m². Sabendo que havia, em média, 10 brincantes por metro quadrado.

a) Qual o número aproximado de brincantes nessa feira?

b) Qual a razão entre o número de brincantes e a área dessa Avenida?

Situação 03: Um ninho de formiga é habitado por cerca de 300 mil formigas em uma área de 100 m².

a) Qual a razão entre a população de formigas e a área ocupada?

b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

Situação 04: Na escola “Prof.ª Raimunda Tavares” o espaço da quadra de esportes possui 500 m², para cantar os Hinos em homenagem a semana da pátria reuniu em uma tarde 250 alunos nessa quadra.

a) Qual a razão entre o número de alunos e a área da quadra da escola “Prof.ª Raimunda Tavares”?

b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

Situação 05: Em uma missa realizada em praça pública compareceram cerca de 5 mil pessoas e ocuparam uma área de aproximadamente 900 m².

a) Qual a razão entre o número de pessoas e a área dessa praça?

b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

Situação 06: Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km².

a) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade?

Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

- Preencha o quadro de situações

Situações	Número de habitantes	Área territorial	$\frac{\text{nº de habitantes(população)}}{\text{área}}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			
Situação 5			
Situação 6			

Observação:

Análise a priori da atividade 05: Esperamos com essa atividade que os alunos identifiquem em cada situação a razão entre o número de habitantes e a área ocupada, e ao ver esta ocorrência estabeleça uma relação entre a razão especial: Densidade demográfica, a qual estuda como a população está distribuída. Acreditamos que se houver dificuldade nessa atividade será para fazer a simplificação dos termos da razão, caso isso ocorra orientaremos a refazer os cálculos. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.6 Atividade 06

Título: Velocidade Média de um corpo em movimento

Objetivo: Conceituar Velocidade Média

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia com atenção a situação apresentada
- Responda o que lhe é solicitado

Situação 01: Um automóvel percorreu 320 km em 4 horas de viagem. Responda:

a) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

b) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 02: Ao realizar uma viajem em um carro por 140 quilômetros, demorarei 2 horas para chegar em meu destino. Responda:

a) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

b) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 03: Uma pessoa com hábito de praticar trilha percorre 13 km a pé em 2 h. Responda:

a) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

b) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 04: Uma van percorre aproximadamente 72 km para ir de Novo Repartimento a Tucuruí. Sabendo que gastou um intervalo de 1,5 horas entre o percurso. Responda:

a) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

b) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 5: Roberto saiu de casa dirigindo seu automóvel e fez uma viagem de 210 km por uma estrada praticamente retilínea. Chegando ao seu destino, reclamou de um trecho da estrada em que teve de viajar com velocidade de 70 km/h, que ele considerou baixa, por causa dos buracos. Responda:

a) Qual o tempo que Roberto gastou para chegar ao seu destino?
b) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?
c) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 06: Um ônibus percorre 72 km para ir de Novo Repartimento a Tucuruí. Sabendo que andou a uma velocidade de 60km/h entre o percurso. Responda:

a) Qual o tempo o ônibus levou para fazer o percurso?
b) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?
c) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido em horas? O que esse resultado significa?

Situação 07: Josafá saiu de sua casa, em Novo Repartimento dirigindo seu automóvel para ir até Marabá. Antes de chegar ao seu destino o pneu do carro furou, tendo que parar para trocar o pneu, ao olhar no painel do automóvel sua velocidade média marcava 70km/h e já havia percorrido 2horas de tempo na estrada. Responda:

a) Quantos quilômetros de distância Josafá percorreu até parar para trocar o pneu?
b) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?
c) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 8: Um carro fez um percurso a uma velocidade média de 75km/h em um tempo 1,2h. Responda:

a) Quantos quilômetros de distância o carro percorreu?
b) Qual a razão entre a distância percorrida e a velocidade média do carro?
c) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

- Preencha o quadro de situações

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1					
Situação 2					
Situação 3					
Situação 4					
Situação 5					
Situação 6					
Situação 7					
Situação 8					

Observação:

Análise a priori da atividade 06: Esperamos nessa atividade que os alunos identifiquem em cada situação a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, e estabeleça uma relação entre a distância percorria e o tempo gasto de um determinado objeto móvel além de descobrir como se calcula a distância percorrida por determinado móvel e o tempo gasto em determinado percurso, de acordo com cada situação e por isso estas razões são denominadas razão especial: Velocidade Média. Acreditamos que nessa atividade a dificuldade que os alunos podem encontrar será na operação de divisão ou multiplicação que deverão efetuar para encontrarem o resultado esperado. Caso isso ocorra orientaremos a refazerem os cálculos. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.7 Atividade 07

Título: Porcentagem

Objetivo: Conceituar porcentagem

Material: Folha de atividade, lápis, caneta e calculadora

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Responda as questões abaixo:

1) Quanto é $\frac{1}{2} \times \frac{70}{1}$ é?

2) Quanto é $\frac{1}{3} \times \frac{150}{1}$ é?

3) Quanto é $\frac{2}{4} \times \frac{1000}{1}$ é?

4) Quanto é $\frac{2}{4} \times \frac{1240}{2}$ é?

5) Quanto é $\frac{3}{2} \times \frac{560}{2}$ é?

6) Quanto é $\frac{2}{5} \times \frac{2145}{1}$ é?

$\frac{1}{2} \times \frac{70}{1}$ é equivalente a $\frac{1}{2}\ \mathrm{de}\ 70.$

7) Quanto é $\frac{1}{4}$ de 1200?

8) Quanto é $\frac{2}{5}$ de 1600?

9) Quanto é $\frac{2}{3}$ de 2100?

10) Quanto é $\frac{1}{100}$ de 1000?

$\frac{1}{100}$ de 1000 é equivalente a “um por cento de 1000”

11) Quanto é dois por cento de 100?

12) Quanto é quatro por cento de 200?

13) Quanto é vinte por cento de 300?

14) Quanto é cinco por cento de 500?

15) Quanto é dez por cento de 250?

16) Quanto é por trinta por cento de 400?

A expressão “um por cento” é representada por 1%

17) Quanto é 5% de 400?

18) Quanto é 10% de 200?

19) Quanto é 15% de 500?
20) Quanto é 25% de 300?
21) Quanto é 20% de 100?
22) Quanto é 4% de 800?
23) Como se calcula 2% de 50?
24) Como se calcula 5% de 700?
25) Como se calcula 8% de 400?
26) Como se calcula 10% de 20?
27) Como se calcula 15% de 200?
28) Como se calcula 20% de 80?
29) Como se calcula 5% de uma quantidade C?
30) Como se calcula 10% de uma quantidade C?
31) Como se calcula 20% de uma quantidade C?
32) Como se calcula i% de 100?
33) Como se calcula i% de 200?
34) Como se calcula i% de 700?
35) Como se calcula i% de uma quantidade C?

Observação:

Análise a priori da atividade 07: Esperamos nessa atividade que os alunos identifiquem que a fração de denominador 100 é considerada uma razão denominada porcentagem. Esperamos que percebam que para realizar seu cálculo percentual basta multiplicar a quantidade pelo numerador(antecedente) e dividir por 100. Acreditamos que se houver dificuldades nessa atividade será errando a ordem em que se deve operar a multiplicação no caso em questão, multiplica-se o antecedente com o valor dado e depois divide pelo consequente no caso o 100 ou esqueçam de dividir por 100. Caso ocorra, pediremos que refaçam ou finalizem seus cálculos de forma correta. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.8 Atividade 08

Título: Razão e proporção

Objetivo: Conceituar proporção

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de Início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento

- Leia com atenção o texto a seguir referente a receita de um bolo de chocolate

Receita de Bolo de Chocolate

Bolo de Chocolate

Ingredientes

08 ovos

12 xícara (chá) de óleo

01 xícara (chá) de água

01 colher (sobremesa) de essência de baunilha

02 xícaras (chá) de farinha de trigo

12 xícara (chá) de chocolate ou cacau em pó

03 xícaras (chá) de açúcar

01 xícara (chá) de amido de milho

02 colheres (sobremesa) de fermento em pó

Rendimento: 20 porções

- Leia com atenção cada enunciado:
  - ✓ Sérgio vai comemorar seu aniversário e convidou 40 pessoas.
  - ✓ No aniversário de Camila foram convidadas 80 pessoas.
- Agora, preencha o quadro a seguir estabelecendo a quantidade de ingredientes para preparar cada bolo em questão.

Ingredientes	Bolo da receita dada	Bolo de Sérgio	Bolo de Camila
Amido de milho			
Açúcar			

Farinha de trigo			
Fermento em pó			

Responda as questões a seguir:

a) Qual a quantidade de amido de milho é necessária para fazer um bolo para 40 pessoas? E para 80 pessoas?

b) Qual a quantidade de açúcar é necessária para fazer um bolo para 40 pessoas? E para 80 pessoas?

c) Qual a quantidade de farinha de trigo é necessária para fazer o bolo de Sérgio, sabendo que ele convidou 40 pessoas? E o bolo de Camila?

d) Se Sérgio convidasse 60 pessoas para sua festa de aniversário, como você calcularia a quantidade de ingredientes para que fosse preparado o bolo para 60 pessoas?

e) Ao “dobrarmos” ou “triplicarmos” uma receita, o que acontecerá com a quantidade de ingredientes “dobram” ou “triplicam”?

- Preencha o quadro a seguir:

Razões (simplificada ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	Receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$					
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$					
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$					

Observação:

Análise a priori da atividade 08: Esperamos que os alunos identifiquem a equivalência de razões presentes nas duas situações apresentadas acima e que com isso possamos introduzir a ideia de proporção a partir da equivalência de razões, ou seja, consigam compreender quando duas razões formam uma proporção e então conceituar que uma proporção é a igualdade entre duas ou mais razões. Acreditamos que se houver dificuldade será no momento de simplificarem as razões, podendo não realizar os cálculos corretos, se isso ocorrer estaremos atentos a orientá-los. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.9 Atividade 09

Título: Grandezas Diretamente Proporcionais, Grandezas Inversamente Proporcionais

Objetivo: Conceituar grandezas diretamente Proporcionais e Grandezas Inversamente Proporcionais

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de Início: Hora de Término:

Procedimento:

- Leia cada uma das situações apresentadas.
- Preencha os espaços em branco dos quadros de cada situação.
- Responda as questões propostas.

Situação 01: Adaptada da Coleção praticando matemática 9 (2015) - No laboratório do colégio, alguns alunos mediram, usando uma balança, a massa de blocos retangulares de chumbo cujo volume era conhecido. Com os valores do volume (V) e da massa (m) de cada bloco, montaram a tabela abaixo.

V (cm^3)	1	2	3		5	6	7	8
m (g)	11	22	33	44	55			88

a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

b) Quando dobra o valor da primeira linha dobra o da segunda linha também dobra?

c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado?

d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado?

e) Quais grandezas estão relacionadas?

f) Divida cada medida do volume com suas respectivas massas, o que acontece com o quociente obtido?

g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Situação 02: Um atleta dá 5 voltas numa pista em 20 minutos, ao dá 10 voltas ele leva 40 minutos, mantendo a velocidade constante. Relacione o quadro abaixo ao número de voltas com o tempo percorrido em minutos?

Nº de voltas	Tempo (min.)
5	20
10	40
	60
20	
25	

a) Quando os valores da primeira coluna aumentam os da segunda coluna também aumentam?

b) Quando dobra o valor da primeira coluna o da segunda coluna também dobra?

c) Quando é triplicado o valor da primeira coluna o da segunda coluna também é triplicado?

d) Quando é quadruplicado o valor da primeira coluna o da segunda coluna também é quadruplicado?

e) Quais grandezas estão relacionadas?

f) Divida cada quantidade do número de voltas com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o quociente obtido?

g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo a mesmo raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.

Nº de torneiras	1	2			5
Tempo (min.)	60	30	20	15	

a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?

c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte?

d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?

e) Quais grandezas estão relacionadas?

f) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?

g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Situação 04: Um ciclista corre a uma velocidade constante de 5 km/h. e passa a linha de chegada em 16 minutos, se esse atleta aumentar a velocidade para 10 km/h. irá alcança a linha de chegada em 8 minutos. Seguindo o mesmo raciocínio, preencha o quadro abaixo com o tempo em minutos ou a velocidade constante em km/h. a ser desenvolvida pelo ciclista para que o mesmo percurso seja realizado nas condições dadas.

Velocidade (km/h)	5	10	20		80
Tempo (minutos)	16	8		2	

a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?

c) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?

d) Quais grandezas estão relacionadas?

e) Multiplique cada medida de velocidade com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?

f) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Observação:

Análise a priori da atividade 09: Esperamos nessa atividade que os alunos possam estabelecer uma relação entre os valores de cada coluna ou linha dos quadros apresentados, percebendo que "duas grandezas de variáveis dependentes são **diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores da 1ª grandeza é igual a razão entre os valores correspondentes da 2ª grandeza. Nesse sentido, quando o valor de uma grandeza dobra, triplica, fica a metade, o da outra também dobra, triplica, fica a metade", "duas grandezas de variáveis dependentes são **inversamente proporcionais** quando a razão entre os valores da 1ª grandeza é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da 2ª. Isso quer dizer que uma grandeza aumenta à mesma proporção que a outra diminui e vice-versa, dizemos que as grandezas são inversamente proporcionais". Acreditamos que a dificuldade que poderá haver, será na percepção da crescente ou diminuição dos valores das linhas ou colunas, podendo confundirem com aumento no sentido de adição ou diminuição no sentido de subtração dos valores ao invés de multiplicação ou divisão. Se isso ocorrer faremos uma mediação para refletirem os valores do quadro e se necessário respondam novamente as perguntas. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.10 Atividade 10

Título: Propriedade fundamental das proporções

Objetivo: Descobrir uma propriedade fundamental das proporções

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta.

Hora de Início: Hora de Término:

Procedimento:

- Leia a seguinte informação:

Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ chamamos os termos ***c*** e ***b*** de meios ***a*** *e* ***d*** *de* extremos.

- Para cada razão a seguir identifique os extremos e o meios

1) Em $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{2}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são: ____ ; ____

2) Em $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

3) Em $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

4) Em $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{5}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

5) Em $\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{3}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

6) Em $\frac{6}{24}$ e $\frac{1}{4}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são: ____ ; ____

7) Em $\frac{1}{3}$ e $\frac{6}{18}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

8) Em $\frac{4}{12}$ e $\frac{2}{6}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são: ____ ; ____

9) Em $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

10) Em$\frac{5}{20}$ e $\frac{1}{2}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

- Preencha o quadro a seguir de acordo com a informações e responda as perguntas:

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	Produto dos meios $b \cdot c$	Produto dos extremos $a \cdot d$	Os produtos dos meios e extremos são iguais?		A razões formam uma proporção?	
					SIM	NÃO	SIM	NÃO
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 3$								
$a = 1; b = 3; c = 1; d = 3$								
$a = 2; b = 5; c = 4; d = 10$								
$a = 2; b = 6; c = 3; d = 9$								
$a = 7; b = 10; c = 5; d = 6$								
$a = 2; b = 9; c = 6; d = 27$								

$a = 3; b = 5; c = 6; d = 10$								
$a = 4; b = 7; c = 3; d = 8$								
$a = 8; b = 16; c = 1; d = 2$								
$a = 1; b = 5; c = 4; d = 20$								

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da atividade 10: Esperamos com essa atividade que os alunos possam perceber que ao realizar o cálculo do produto dos extremos e o produto dos meios das razões dadas, descubram que os resultados serão iguais quando as razões formam uma proporção ou que em uma proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Acreditamos que a dificuldade que poderão ter nessa atividade será na realização da operação de multiplicação ou trocar os valores dos termos: extremos e meios na hora de realizar os cálculos. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.11 Atividade 11

Título: Propriedade aditiva da proporção I

Objetivo: Descobrir uma propriedade da soma dos termos de uma proporção

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Preencha com atenção o quadro abaixo e responda as perguntas cuidadosamente colocando ao final suas observações e conclusão a respeito da atividade.

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?		$\frac{a+b}{a}$	$\frac{c+d}{c}$	A razões $\frac{a+b}{a}$ e $\frac{c+d}{c}$ formam uma proporção?	
			SIM	NÃO			SIM	NÃO
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 3$								
$a = 1; b = 3; c = 1; d = 3$								
$a = 2; b = 5; c = 4; d = 10$								
$a = 2; b = 6; c = 3; d = 9$								
$a = 7; b = 10; c = 5; d = 6$								
$a = 2; b = 9; c = 6; d = 27$								
$a = 3; b = 5; c = 6; d = 10$								
$a = 4; b = 7; c = 3; d = 8$								
$a = 8; b = 16; c = 1; d = 2$								
$a = 1; b = 5; c = 4; d = 20$								

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da atividade 11: Esperamos com essa atividade que os alunos descubram que quando duas razões formam uma proporção, então teremos outra proporção na qual a soma dos dois primeiros termos está para o 1º termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o 3º termo. Acreditamos que a se houver dificuldade nessa atividade será na troca dos valores dos termos das razões por falta de atenção, se isso ocorrer informaremos o erro cometido e orientaremos a refazer os cálculos para conseguirem o resultado correto. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.12 Atividade 12

Título: Propriedade aditiva da proporção II

Objetivo: Descobrir a propriedade da soma dos termos de uma proporção

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Preencha o quadro abaixo

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?		$\frac{a+b}{b}$	$\frac{c+d}{d}$	A razões $\frac{a+b}{b}$ e $\frac{c+d}{d}$ formam uma proporção?	
			SIM	NÃO			SIM	NÃO
$a = 2; b = 3; c = 1; d = 6$								
$a = 1; b = 4; c = 2; d = 8$								
$a = 2; b = 5; c = 4; d = 10$								
$a = 2; b = 6; c = 3; d = 9$								
$a = 8; b = 10; c = 5; d = 6$								
$a = 1; b = 7; c = 6; d = 42$								
$a = 3; b = 5; c = 6; d = 10$								
$a = 5; b = 7; c = 3; d = 2$								
$a = 8; b = 12; c = 2; d = 3$								
$a = 1; b = 5; c = 2; d = 3$								

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da atividade 12: Esperamos com essa atividade que os alunos descubram que quando duas razões formam uma proporção, então teremos outra proporção na qual a soma dos dois primeiros termos está para o 2º termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o 4º termo. Acreditamos que se houver dificuldade nessa atividade será na troca dos valores dos termos das razões por falta de atenção, se isso ocorrer informaremos o erro cometido e orientaremos a refazer os cálculos para conseguirem o resultado correto. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva no quadro as observações registradas no roteiro e a partir delas discutir se podem ser válidas e apresentaremos a conceituação da turma.

4.3.13 Atividade 13

Título: Propriedade aditiva de uma proporção III

Objetivo: Descobrir uma propriedade da soma dos antecedentes e consequentes de uma proporção

Material: Folha de atividade, lápis ou caneta

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Preencha o quadro abaixo

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?		$\frac{a+c}{b+d}$	As razões $\frac{a+c}{b+d}$ e $\frac{a}{b}$ formam uma proporção?		As razões $\frac{a+c}{b+d}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?	
			SIM	NÃO		SIM	NÃO	SIM	NÃO
$a = 9; b = 2; c = 27; d = 6$									
$a = 7; b = 3; c =; 35; d = 15$									
$a = 4; b = 3; c = 6; d = 8$									
$a = 38; b = 2; c = 19; d = 1$									
$a = 7; b = 8; c = 5; d = 6$									
$a = 1; b = 7; c = 6; d = 7$									
$a = 3; b = 9; c = 8; d = 24$									
$a = 4; b = 5; c = 16; d = 20$									
$a = 9; b = 12; c = 2; d = 3$									
$a = 1; b = 4; c = 3; d = 12$									

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da atividade 13: Esperamos nessa atividade que os alunos descubram que dadas duas razões proporcionais, ao somarmos os antecedentes e os consequentes dessas razões, a soma entre eles também forma uma proporção com cada uma das duas razões dadas inicialmente. Acreditamos que se houver dificuldade nessa atividade será na troca dos valores dos termos das razões por falta de atenção, se isso ocorrer informaremos o erro cometido e orientaremos a refazer os cálculos para conseguirem o resultado correto. Posteriormente faremos a institucionalização, pediremos que um aluno de cada equipe escreva na lousa as observações registradas no roteiro e a partir delas apresentaremos a conclusão da turma que se duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são proporcionais, então, a soma dos antecedentes (1º e 3º termos) está para a soma dos consequentes (2º e 4º termos) assim como está para as os antecedente e consequentes de cada razão. Assim temos, $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

4.4 ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO DOS CONTEÚDOS DE RAZÃO E PROPORÇÃO

Para complementar nossa sequência didática, elaboramos atividades de aprofundamento com diversas questões adaptadas dos livros voltado ao ensino fundamental (anos finais) de: Gelson Iezzi, et al (2022), Patrícia Moreno Pataro (2018), Edwaldo Bianchini (2018) e Maria J. V. A. Andrini (2015) e Enem (2020). As atividades de aprofundamento foram executadas, após finalizarmos algumas atividades de ensino, durante o período de experimentação.

4.4.1 Listas de questões de aprofundamento

Lista de questões 1

Título: Lista de questões sobre Razão

Objetivo: Exercitar os conhecimentos acerca de grandezas proporcionais ou não proporcionais, representação de razões e razões especiais (escala, velocidade média densidade demográfica, etc.)

Material: Roteiro de atividade de fixação, lápis ou caneta e calculadora

Procedimentos:

- Resolva as seguintes questões

1) (Pataro, 2018) - Verifique se em cada item as grandezas em destaque são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

a) A **massa** de carne a ser comprada em um açougue e o **preço** a ser pago.

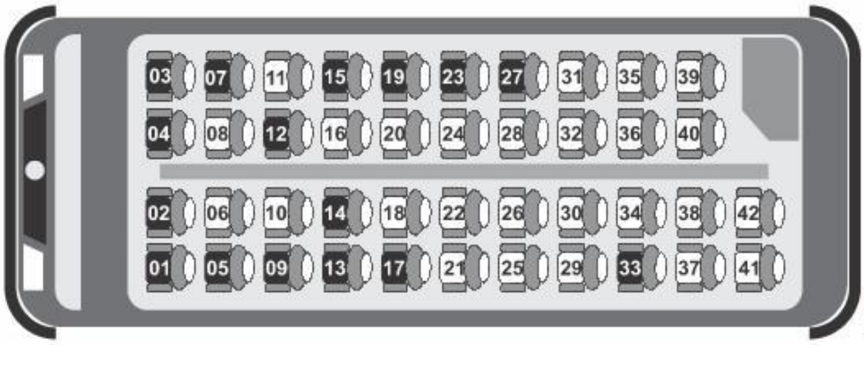
b) A **velocidade média** obtida ao se deslocar de uma cidade a outra e a **distância** entre essas cidades.

c) A **vazão** da mangueira de um caminhão-pipa e o **tempo** necessário para esvaziar o reservatório.

d) A **idade** e a **altura** de uma pessoa.

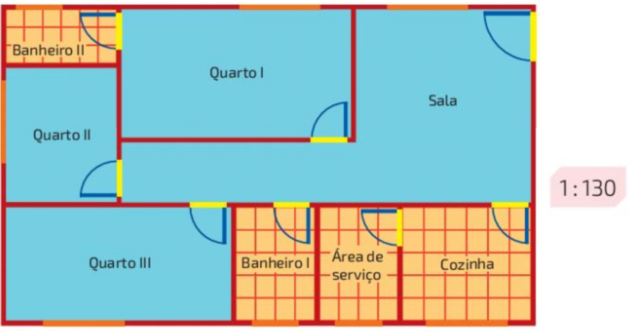
2) (ENEM -2020) Uma empresa de ônibus utiliza um sistema de vendas de passagens que fornece a imagem de todos os assentos do ônibus, diferenciando os assentos já vendidos, por uma cor mais escura, dos assentos ainda disponíveis. A empresa monitora, permanentemente, o número de assentos já vendidos e compara-o com o número total de assentos do ônibus para avaliar a necessidade de alocação de veículos extras.

Na imagem tem-se a informação dos assentos já vendidos e dos ainda disponíveis em um determinado instante.



A razão entre o número de assentos já vendidos e o total de assentos desse ônibus, no instante considerado na imagem, é:

3) (Pataro, 2018) - No encarte de propaganda do lançamento de um condomínio residencial, foi apresentada a planta baixa dos apartamentos.



Ingridhi Borges

Planta baixa.

De acordo com as informações, resolva as questões.

a) Nessa planta baixa, 5 cm correspondem a quantos metros do apartamento?

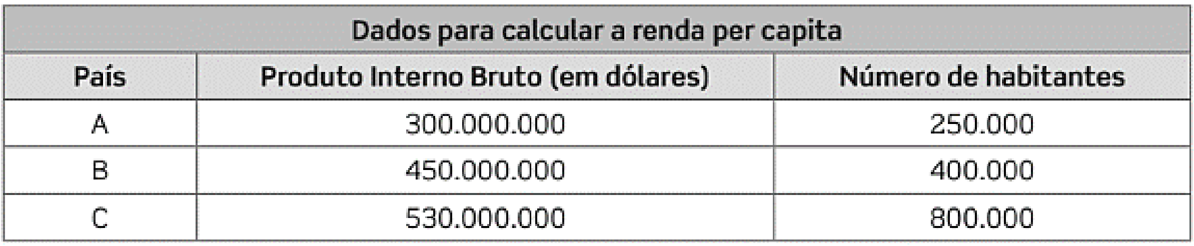
b) Para representar 5,2 m do apartamento, quantos centímetros da planta baixa são utilizados?

4) (Andrini, 2015) - No estado de São Paulo, por exemplo, temos uma população de aproximadamente 40 milhões de pessoas, para uma área também aproximada de 250 000 km². (IBGE, 2010). Qual a densidade Demográfica do estado de são Paulo?

5) (Pataro, 2018) - Em termos de velocidade, o guepardo, um felino típico das savanas africanas, é considerado um dos animais terrestres mais velozes do mundo. Qual é a medida da velocidade média, em metros por segundo(m/s), obtida por um guepardo que percorreu 266 m em 10 s?

6) (Bianchini 2018) - O **Produto Interno Bruto** (PIB) é o total de bens e serviços produzidos por um país durantes um ano. A razão entre o PIB e o número de habitantes de um país é chamada **renda *per capita***. A renda *per capita* de um país equivale à quantia em dólar, que cada habitante receberá caso o PIB fosse dividido igualmente por toda a população.

Considere os dados da tabela a seguir e calcule a renda *per capita* de cada um desses países.



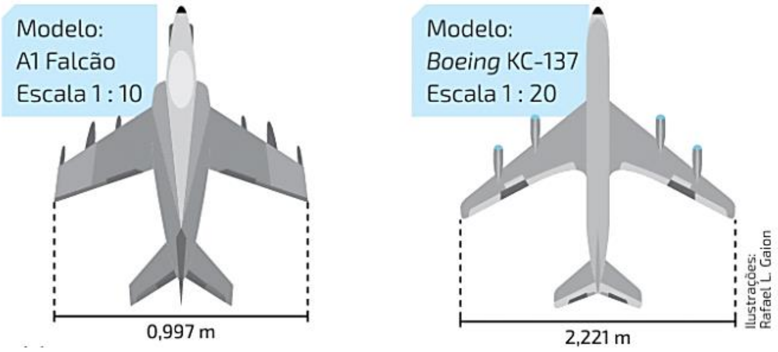
Dados para calcular a renda per capita		
País	**Produto Interno Bruto (em dólares)**	**Número de habitantes**
A	300.000.000	250.000
B	450.000.000	400.000
C	530.000.000	800.000

Agora responda:

a) Comparando as rendas *per capita* calculada acima, qual dos países é mais rico?

7) (Pataro, 2018) - Os aeromodelos são miniaturas de aviões e helicópteros construídos com base em uma escala de verdadeiras dimensões da aeronave.

Envergadura › nos aviões, é a distância máxima entre as extremidades de suas asas.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Com base nas escalas indicadas e nas medidas das **envergaduras** dos aeromodelos a seguir, determine a medida em metros, das envergaduras dos aviões em tamanho real.

Lista de questões 2.

Título: Lista de questões sobre Proporção

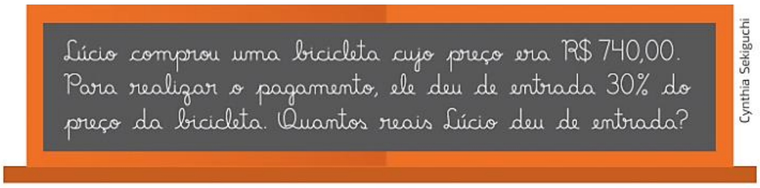
Objetivo: Exercitar os conhecimentos acerca de grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, proporção e as propriedades da proporção.

Material: Roteiro de atividade de fixação, lápis ou caneta e calculadora.

Procedimentos:

- Resolva as seguintes questões

1) (Pataro, 2018) - Leia o problema e em seguida responda-o:



Lúcio comprou uma bicicleta cujo preço era R$ 740,00. Para realizar o pagamento, ele deu de entrada 30% do preço da bicicleta. Quantos reais Lúcio deu de entrada?

Cynthia Sekiguchi

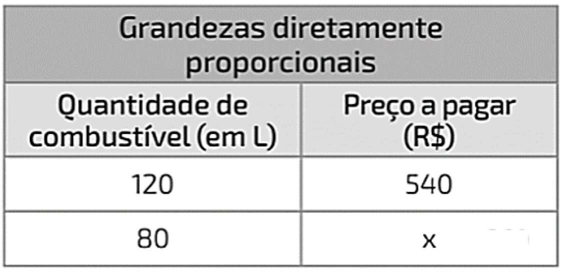
2) (Pataro, 2018) - Na bula de um determinado medicamento pediátrico, recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do “peso” da criança. Quantas gotas desse medicamento Mariana deverá dar à sua filha, cujo medida de massa é igual a 20 kg?

3) (Andrini, 2015) - No baile de formatura da escola, a razão entre o número de alunos formandos e demais pessoas presentes é de 2 para 3, nessa ordem. Do total de pessoas presentes, os formandos representam quantos por cento?

4) (Andrini, 2015) - O jornal Folha de S.Paulo publicou, em 19 de abril de 2013, a seguinte informação: “4 em cada 5 semáforos de São Paulo têm defeito” Sabendo-se que o número de semáforos com defeito é 4 800, então o número de semáforos que não precisam de reparos é de quantos?

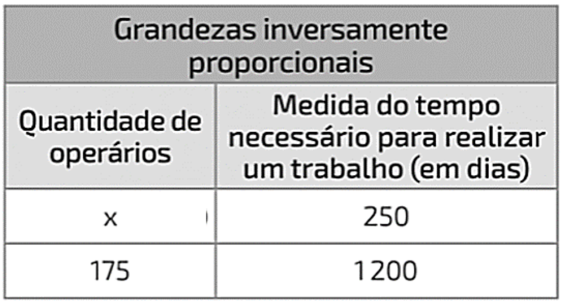
5) (Pataro, 2018) - Em cada quadro, realize os cálculos necessários e determine o valor de ***x***.

a)



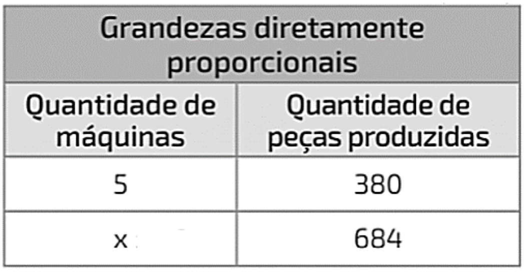
Grandezas diretamente proporcionais	
Quantidade de combustível (em L)	Preço a pagar (R$)
120	540
80	x

b)



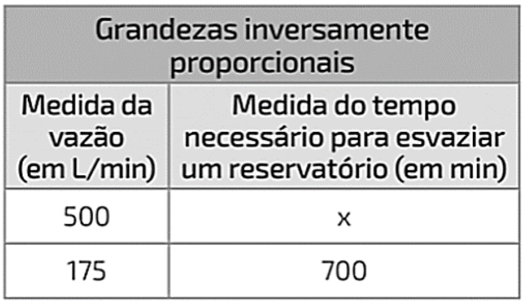
Grandezas inversamente proporcionais	
Quantidade de operários	Medida do tempo necessário para realizar um trabalho (em dias)
x	250
175	1 200

c)



Grandezas diretamente proporcionais	
Quantidade de máquinas	Quantidade de peças produzidas
5	380
x	684

d)



Grandezas inversamente proporcionais	
Medida da vazão (em L/min)	Medida do tempo necessário para esvaziar um reservatório (em min)
500	x
175	700

6) (Bianchini 2018) - O relógio de Márcio está com defeito. Ele atrasa 4 minutos a cada 2 dias. Nos últimos 14 dias. Márcio esqueceu de acertar o relógio e, por esse motivo, chegou atrasado ao encontro com a namorada.

a) Construa uma tabela que indique o tempo de atraso, em minuto, correspondente a cada 2 dias que Márcio esqueceu de acertar o relógio.

b) Quantos minutos o relógio atrasa em 10 dias?

c) Quantos minutos Márcio chegou atrasado ao encontro?

d) As grandezas apresentadas (tempo de atraso e número de dias) são diretas ou inversamente proporcionais?

e) Suponho que o defeito continue, quantos minutos o relógio estará atrasado no 22º dia?

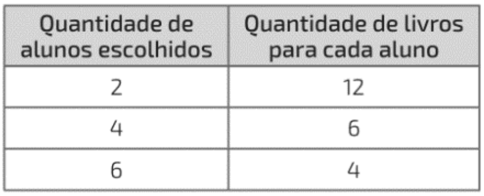
7) Os dados do quadro a seguir referem-se ao número de máquinas (iguais) e ao tempo necessário para a produção de 36 litros de sorvete.

Número de máquinas	1	2	b	6
Tempo (em minuto)	60	a	15	c

a) Determine os valores de *a, b* e *c.*

8) (Pataro, 2018) - Um professor de matemática tem 24 livros para distribuir igualmente entre alguns de seus alunos. De acordo com o quadro a seguir, se ele escolher apenas 2 alunos, cada um deles receberá 12 livros. Se ele escolher 4 alunos, cada um receberá 6 livros. Se ele escolher 6 alunos, cada um receberá 4 livros.

Nesse caso, as duas grandezas envolvidas, quantidades de alunos e quantidade de livros, são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?



Quantidade de alunos escolhidos	Quantidade de livros para cada aluno
2	12
4	6
6	4

9) (Pataro, 2018) - Douglas tem 6 calopsitas e paneja ter mais. Para alimentá-la, um pacote de ração é o suficiente para 12 dias. Se Douglas tivesse oito calopsitas, um pacote de ração poderia alimentá-las por quantos dias?

Lista de questões 3

Título: Lista de questões sobre Proporção

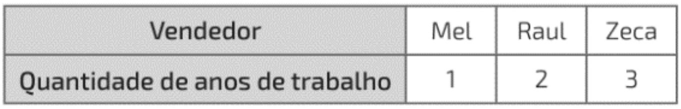
Objetivo: Exercitar os conhecimentos acerca de distribuição em partes proporcionais e as propriedades da proporção.

Material: Roteiro de atividade de fixação, lápis ou caneta e calculadora

Procedimentos:

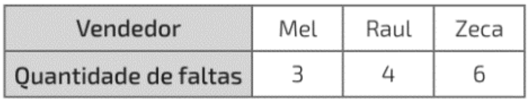
- Resolva as seguintes questões

1) (Pataro, 2018) - Em certo ano o dono de uma loja dividiu uma bonificação salarial de R$ 12 000 ,00 entre seus três vendedores de maneira proporcional a quantidade de anos de trabalho nessa loja como indicado no quadro a seguir. Quantos reais recebeu cada funcionário?



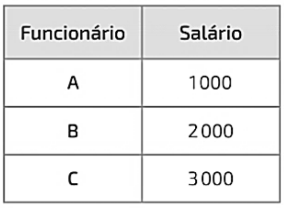
Vendedor	Mel	Raul	Zeca
Quantidade de anos de trabalho	1	2	3

2) (Pataro, 2018) - No ano seguinte o dono dessa loja decidiu dividir a bonificação salarial de R$ 18 000,00 entre seus três vendedores de maneira inversamente proporcional à quantidade de faltas de cada um deles naquele ano. As faltas estão indicadas no quadro a seguir. Quanto recebeu, cada funcionário?



Vendedor	Mel	Raul	Zeca
Quantidade de faltas	3	4	6

3) (Pataro, 2018) - O gerente de um setor de uma empresa vai presentear os seus três funcionários com 11 diárias em um hotel-fazenda da região, baseando a distribuição em seus salários. Para que a divisão seja justa, o gerente determinou que o funcionário com o menor salário deverá receber a quantidade maior de diárias e aquele com o maior salário deverá receber a quantidade menor de diárias.



Funcionário	Salário
A	1000
B	2000
C	3000

Quantas diárias no hotel-fazenda cada funcionário ganhará?

4) (Pataro, 2018) - Três amigos fizeram um investimento juntos, no qual receberam no final R$ 3 500,00. Sabendo que Júlia contribuiu com R$ 400,00, Débora com R$ 600,00 e Igor com R$ 1 000,00, calcule a quantia recebida no final, sabendo que a divisão deve ser diretamente proporcional ao valor do investimento.

5 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção apresentaremos a fase 3 da engenharia didática, a experimentação. A experimentação é o momento em que iremos aplicar os testes, questionários socioeconômicos e a sequência didática com as atividades que foi elaborada de acordo com as orientações da Tendência Metodológica do EMAE.

Para obter resultados pontuais, referentes ao ensino/aprendizado matemático de razão e proporção, e poder sistematizar os resultados gerados a partir da investigação dos principais fundamentos da Engenharia Didática, articulada ao EMAE. Além da aplicação da sequência didática, faremos uso dos instrumentos de geração e coletas de dados como: questionário, observações, registros escritos e produções fotográficas.

A pesquisadora durante a experimentação estava de posse de um diário de campo para que pudesse realizar anotações de suas observações, pontuando observações sobre: comportamento, realização da atividade, tempo de realização, interação coletiva, quais as indagações feitas pelos estudantes.

Desta forma, a experimentação teve como sujeitos envolvidos, 32 estudantes de uma turma do 9º ano devidamente matriculados no local escolhido para experimentação. O *Lócus* escolhido para realizar a pesquisa foi uma escola pública de Ensino Fundamental, situada em Novo Repartimento-Pará, a escolha se deu pelo fato de a pesquisadora desempenhar suas atividades profissionais, como professora de 6º ao 9º ano do fundamental anos finais, área de conhecimento de matemática nesta escola, pois, dessa forma foi mais fácil a autorização para realizar a pesquisa neste local, uma vez que usaria os mesmos horários das aulas de matemáticas para realizar o estudo.

A seguir descreveremos os encontros de desenvolvimento das seções de ensino por atividades experimentais bem como nossas observações.

5.1 ENCONTROS PARA A EXPERIMENTAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A experimentação ocorreu durantes 16 encontros, sendo que 02 encontros foram realizados os testes (pré-teste e pós-teste) e 14 sessões de ensino de ensino, onde foram desenvolvidas 13 atividades e 03 listas de

47aprofundamento, conforme mostraremos detalhadamente no quadro 8, sendo 14 encontros de 2 h/a (80 min) e 02 encontros de 1h/a (40 min). Conforme mostra o cronograma no quadro 8 a seguir.

Quadro 8 – Cronograma dos encontros/sessões de ensino desenvolvido na experimentação

Data	C/H	Encontros: Atividades realizadas	Assunto
24/10/23	2 h/a	Apresentação, TCLE Questionário e Pré-teste.	
25/10/23	2 h/a	Atividade 01 – Razão em matemática	Conceito de razão
26/10/23	2 h/a	Atividade 02 – Razões Inversas Atividade 03 – Razões equivalentes	Razões inversas Razões equivalentes
27/10/23	2 h/a	Atividade 04 – Escalas	Razão especial
01/11/23	2 h/a	Atividade 05 – Densidade demográfica	Razão especial
02/11/23	2 h/a	Atividade 06 – Velocidade Média de um corpo em movimento	Razão especial
03/11/23	2 h/a	Atividade 07 – Porcentagem Atividade 08 – Razão e proporção	Razão e proporção
06/11/23	2 h/a	Continuação da atividade 08. Atividade de aprofundamento	Aprofundamento do conteúdo
08/11/23	1 h/a	Continuação da Atividade de aprofundamento	Aprofundamento do conteúdo
09/11/23	2 h/a	Atividade 09 – Grandezas Diretamente Proporcionais, Grandezas Inversamente Proporcionais	Proporcionalidade
16/11/23	2 h/a	Atividade 10 – Propriedade fundamental das proporções Atividade de aprofundamento	Propriedade fundamental das proporções
17/11/23	2 h/a	Atividade 11 – Propriedade aditiva da proporção I	Propriedade aditiva de proporções
22/11/23	2 h/a	Atividade 12 – Propriedade aditiva da proporção II Atividade 13 – Propriedade aditiva da proporção III	Propriedade aditiva de proporções
23/11/23	2 h/a	Continuação da Atividade 13 Atividade de aprofundamento	Propriedade aditiva de proporções
27/11/23	1 h/a	Continuação da Atividade de aprofundamento	Aprofundamento do conteúdo
29/11/23	2 h/a	Pós-teste	

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

O quadro 9, irá fornecer o percentual de frequência com que os alunos participaram dos encontros que ocorreram as sessões de ensino. Esclarecemos que utilizamos a letra (P) para os estudantes que estava presente e (F) para quem faltou no dia do experimento das atividades.

Quadro 9 – Frequência dos Estudantes durante o Experimento

Estudante	Outubro/2023				Novembro/2023												Frequência (%)
	24	25	26	27	01	02	03	06	08	09	16	17	22	23	27	29	
A1	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A2	P	F	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	F	P	P	P	68,75%
A3	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A4	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A5	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A6	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%

A7	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	93,75%
A8	F	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	81,25%
A9	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A10	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A11	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A12	P	P	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	81,25%
A13	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A14	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	93,75%
A15	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A16	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A17	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A18	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A19	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A20	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A21	F	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	F	P	P	P	81,25%
A22	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A23	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	93,75%
A24	P	P	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	81,25%
A25	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	93,75%
A26	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A27	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A28	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A29	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A30	P	F	P	P	P	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	81,25%
A31	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	87,5%
A32	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

É importante ressaltar que as atividades da sequência didática foram desenvolvidas em grupos conforme orienta a metodologia de ensino por atividades experimentais de Sá (2019, 2020), Mafra e Sá (2023) o que irá favorecer a mediação e acompanhamento das atividades executada pelos alunos.

5.1.1 Primeiro encontro: Apresentação da proposta de ensino, entrega do TCLE, Questionário Sócio Econômico e Pré-Teste

No dia 24/10/23, iniciamos a fase da experimentação em uma turma do 9º ano com 32 alunos devidamente matriculados, no turno da tarde em uma escola de ensino público, em Novo Repartimento-Pa. O primeiro encontro ocorreu em momentos que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:55h e finalizou às 15:55h, com a participação de 27 estudantes.

Ao entrar na sala de aula alguns alunos alertaram que a aula não era de matemática, logo expliquei que a professora que deveria entrar nesse horário teve problemas pessoais e não poderia estar lá nesse momento, então por isso, aproveitaríamos o horário para iniciar nossa pesquisa de mestrado “ensino de razão e proporção por meio de atividades experimentais”, e ensinar matemática de forma diferente de como fazemos costumeiramente, em que copia-se o conteúdo na lousa, explicamos, passamos exercício e no final expomos a resolução, lembrei-os que em outro momento já havíamos falado sobre serem eles (a turma) os sujeitos que participariam e que eles já haviam manifestado interesse em participar da nossa pesquisa.

Então, foi informado como seria a dinâmica das aulas na forma de ensino por atividades experimentais, esclarecemos que a colaboração deles seria fundamental para realizar as atividade, informamos sobre o conteúdo a ser trabalhado: razão e proporção e que fazem parte da grade curricular de ensino do ano em estudo, no entanto, ainda não haviam estudaram nesta etapa de estudo, mas que já deveriam ter estudado algumas ideias dos conteúdos na série anterior, entretanto, de acordo com a aplicação do questionário (quase no início do bimestre em abril de 2023) para turma, constatamos que não haviam estudado ou não recordavam de terem estudado tais conteúdo.

Posteriormente perguntamos se eles concordavam em participar da pesquisa, deram sinal positivo e então entregamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) explicamos a necessidade do mesmo e pedimos para levarem a seus responsáveis assinarem e trouxessem no dia seguinte, uma vez que todos eram menores de idade.

Em um terceiro momento aplicamos o questionário socioeconômico a 27 alunos que estavam presentes (os cinco alunos que faltaram neste dia responderam ao questionário em outro dia). Em um quarto momento foi o momento de aplicar o pré-teste, antes de entregar uma cópia para cada aluno presente, expliquei a importância do pré-teste que seria para uma análise inicial com intuído de identificar seus conhecimentos prévios sobre a temática, antes de iniciarmos a abordagem do conteúdo por meio de atividades experimentais e que após estudarmos os conteúdos por meio da sequência de atividades elaboradas iríamos fazer outro teste, no caso o pós-teste.

No momento da aplicação do pré-teste alguns alunos logo no início diziam que não iam resolver nada porque não sabiam nada daquilo, percebi que alguns participantes estavam eufóricos por não saberem como encontrar os resultados para as questões, querendo entregar antes de tentar resolver cada questão, mais uma vez orientei que realizassem a leitura com calma e a partir daí fossem resolvendo as questões, caso não conseguissem poderiam entregar.

A duração da aplicação do pré-teste foi de cerca de 30 min para que todos entregassem o pré-teste, neste dia após o intervalo os alunos iriam participar de um projeto de competição com atividades esportivas o que deixou eles agitados.

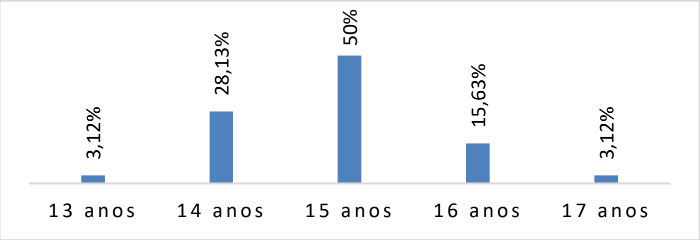
Adiante descreveremos as sessões de ensino que ocorrerá nos encontros seguintes, mas antes revelaremos o resultado da coleta de dados realizada por meio do questionário o qual nos mostrará o perfil dos sujeitos envolvidos na pesquisa, hábitos de estudo, perfil dos responsáveis e a prática docente.

PERFIL DOS ESTUDANTES

O questionário socio econômico que aplicamos (APENDICE - A) continha 16 perguntas que nos forneceram dados importantes em relação aos perfis dos 32 estudantes, seus hábitos de estudos, bem como o perfil de seus responsáveis e a percepção de acordo com a visão dos pesquisados sobre a prática docente do professor de matemática. Abaixo, traremos os resultados dos dados encontrados, organizados em gráficos e tabelas, analisados em consonância com cada pergunta presente no questionário sócio econômico aplicado.

Abaixo, no gráfico 05 e tabela 01 traremos o percentual da frequência de alunos de acordo com a faixa etária dos estudantes pesquisados.

Gráfico 05 – Distribuição de estudantes por faixa etária



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 01 – Distribuição de estudantes por faixa etária

IDADE	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
13	01	3,12%
14	09	28,13%
15	16	50%
16	05	15,63%
17	01	3,12%
TOTAL	32	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Ao analisarmos os dados coletados do questionário socioeconômico aplicado, constatamos que a faixa etária dos sujeitos pesquisados, conforme mostra o gráfico 05 e a tabela 01, está entre 13 - 17 anos, sendo: 3,1% possuem 13 anos; 28,1% tem 14 anos; 50% dos sujeitos possuem 15 anos; 15,6% possuem 16 anos e 3,1% possuem 17 anos de idade. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) considera que o ensino fundamental deva ser iniciado aos 6 anos de idade, com o primeiro ano e finalizado aos 14 anos de idade, no nono ano, entretanto, a idade ideal para finalizar o 9º (nono ano) pode variar (entre 14 a 15 anos de idade).

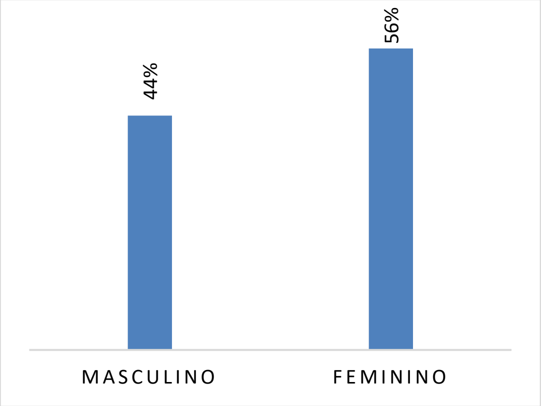
Portella, *et al*, (2017, p.480), considera que a distorção idade-série (ou defasagem idade-escolaridade) "é a diferença entre a idade adequada para a série do estudante e a idade real do estudante. O recomendado é que esta diferença seja zero, isto é, que o estudante esteja na série adequada para sua idade". Então, considerando a possível variação de idade entre 14 e 15 anos, tem-se apenas 18,75% dos estudantes em defasagem idade/série e 81,25% estão dentro dos padrões de idade ideal.

O Fundo das Nações Unidas para a Infância - UNICEF (2018, p.3. grifos nosso), diz que os estudantes que "[...] estão em situação de **distorção idade-série** – ou seja: **têm dois ou mais anos de atraso escolar** [...]", nesse sentido compararmos os resultados analisados da nossa pesquisa com o estudo da UNICEF que define e mostra o Panorama da distorção idade-série no Brasil, das escolas no ano de 2017 do Brasil, considerando a idade de 14 anos a ideal, vemos que nossos resultados representam um percentual de distorção idade-série de 3,12%, ou seja, muito menor que a média de 41%, como mostra dados da UNICEF (2018, p.5) em relação ao estado do Pará nos anos finais do ensino fundamental.

É importante ressaltar que, os resultados refletem dados de uma única turma de 9° ano da escola pesquisada, mas que não podemos afirmar se de fato houve diminuição de defasagem na escola, pois, o estudante em atraso escolar pode ter abandonado a escola ou pode estar em outra modalidade de ensino, como a educação de jovens e adultos, para isso precisamos ampliar a pesquisa, seja para um resultado apenas para a série que realizamos a pesquisa (9° ano) ou para todas as turma da escola, no entanto, isso poderá ser uma pesquisa futura.

Em seguida no gráfico 06 e tabela 02, temos os resultados em percentual dos gêneros dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Gráfico 06 – Distribuição de estudantes por gênero



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 02 – Distribuição de estudantes por gênero

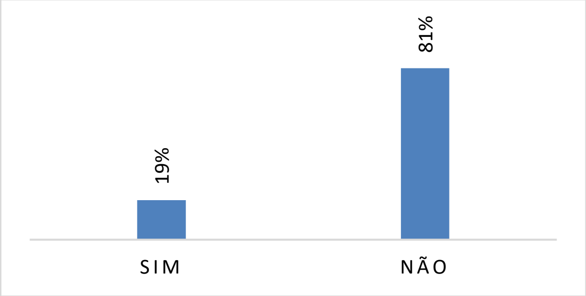
GÊNERO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Masculino	14	44%
Feminino	18	56%
TOTAL	32	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Portanto, podemos considerar de acordo com o gráfico 06 e a tabela 02, que 44% dos estudantes são do gênero masculino, enquanto que 56% são do gênero feminino, perfazendo uma diferença de 4 (quatro) estudantes a mais do gênero feminino que participaram da nossa pesquisa. Esse mesmo percentual foi encontrado no resultado da pesquisa de Tourão (2020) e Lobato Junior (2018).

Buscamos saber se os sujeitos envolvidos na pesquisa trabalhavam e obtemos o seguinte resultado mostrado no gráfico 7 abaixo.

Gráfico 07 – Percentual de estudantes que trabalham



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 03 – Percentual de estudantes que trabalham

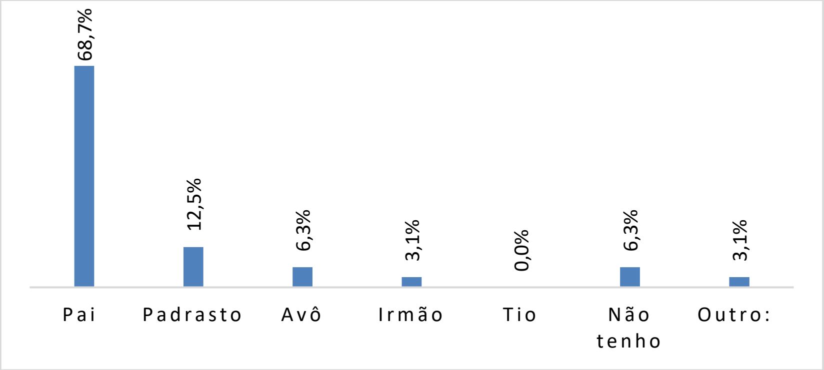
TRABALHA	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Sim	06	19%
Não	26	81%
TOTAL	32	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Os resultados dos do gráfico 07 e tabela 03, nos fazem inferir que 19% dos sujeitos pesquisado trabalham e 81% não trabalham. Como a maioria dos estudantes, de acordo com a Constituição Federal não poderiam trabalhar pois tinham menos de 16 anos de idade, salvo na condição de aprendiz a partir dos 14 anos de idade, nos faz acreditar que como 81% dos jovens pesquisados não trabalham, então estes têm mais tempo para se dedicar e realizar as atividades escolares extraclasse.

O gráfico 08 e a tabela 04, retratam em percentual quantitativo do responsável masculino considerado pelos sujeitos na pesquisa.

Gráfico 08 – Responsável masculino



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Tabela 04 – Responsável masculino

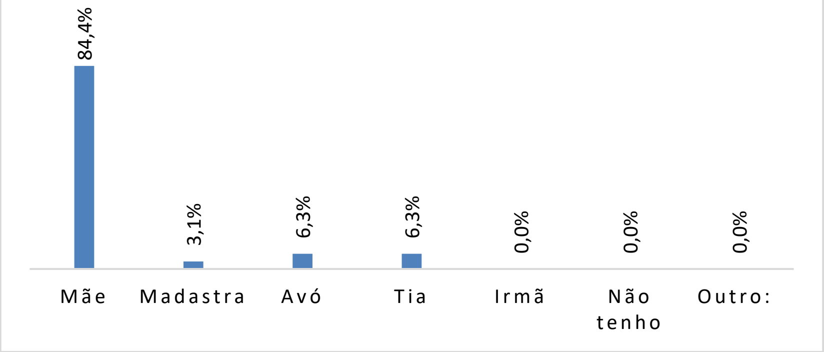
RESPONSÁVEL	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Pai	22	68,7%
Padrasto	04	12,5%
Avô	02	6,3%
Irmão	01	3,1%
Tio	00	0,0%
Não tenho	02	6,3%
Outro: (não informaram quem)	1	3,1%
TOTAL	32	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Os resultados apresentados no gráfico 08 e na tabela 04, nos mostram que o responsável masculino em sua maioria são os pais para 68,7% dos estudantes, seguido do padrasto considerado por 12,5% dos estudantes, o avô para 6,3% dos estudantes, 6,3% dos estudantes disseram não ter nenhum responsável masculino e ainda 3,1% dos estudantes disse ter outro responsável masculino, entretanto não expuseram quem seria. Lobato Júnior (2018), encontrou em sua pesquisa resultados em que a maioria dos estudantes, 76%, também tem os pais como seu responsável masculino.

Ao serem questionado quem é o seu responsável feminino os sujeitos da pesquisa responderam, conforme mostraremos no gráfico 09 e tabela 05.

Gráfico 09 – Responsável feminino



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 05 – Responsável feminino

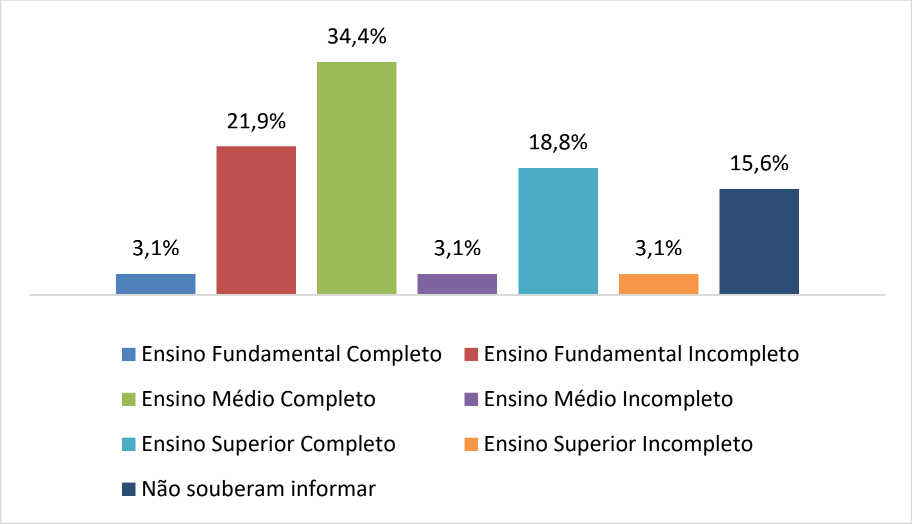
RESPONSÁVEL	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Mãe	27	84,4%
Madrasta	01	3,1%
Avó	02	6,3%
Tia	02	6,3%
Irmã	00	0,0%
Não tenho	00	0,0%
Outra: (não informaram quem)	00	0,0%
TOTAL	32	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Portanto a partir dos resultados mostrado no gráfico 09 e tabela 05, podemos constatar que 84,4% dos estudantes tem a mãe como seu responsável feminino, a madrasta sendo responsável para 3,1% dos pesquisado, a avó e a tia sendo responsável por 6,3%, respectivamente, dos alunos que participaram da pesquisa. Dados apontado por Lobato Júnior (2018), diz que 88% dos sujeitos de sua pesquisa disseram que seu responsável feminino era a própria mãe, um percentual bem próximo aos dados coletados em nossa pesquisa.

No gráfico 10 e tabela 06, mostraremos em percentual as respostas dos estudantes sobre o nível de escolaridade do seu responsável masculino. Como perguntamos até que série/ano seu responsável masculino estudou, as respostas dos pesquisados foram dadas em alguns casos pela série/ano a qual os responsáveis haviam estudado, entretanto, organizamos os dados de acordo com o nível de escolaridade de ensino, a fim de facilitar a apresentação do resultado.

Gráfico 10 – Escolaridade do responsável Feminino



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Tabela 06 – Escolaridade do responsável Feminino

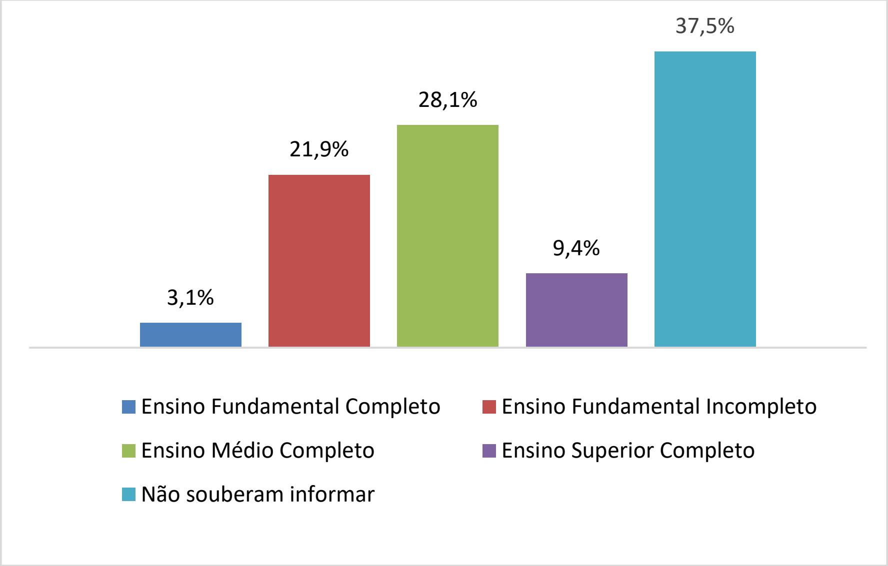
NÍVEL DE ESCOLARIDADE	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Ensino Fund. Completo	01	3,1%
Ensino Fund. Incompleto	07	21,9%
Ensino Médio Completo	11	34,4%
Ensino Médio Incompleto	01	3,1%
Ensino Superior Completo	06	18,8%
Ensino Superior Incompleto	01	3,1%
Não souberam informar	05	15,6%
TOTAL	32	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Do gráfico 10 e tabela 06, podemos verificar que de acordo com a pesquisa 34,4% dos estudantes, em sua maioria, disseram que seus responsáveis feminino estudaram o ensino médio completo, 18,8% dos estudantes disseram que suas responsáveis estudaram o ensino superior completo, 3,1% disseram que sua responsável feminina estudou o ensino fundamental completo e este mesmo quantitativo de pesquisados disseram que seus responsáveis feminino estudaram , o ensino médio incompleto, e o ensino superior incompleto, ainda percebemos que 15,6% dos estudantes não souberam informar até que ano/série seu responsável masculino estudou.

Em seguida tem-se o gráfico 11 e a tabela 07, que compara em percentual o nível de escolaridade do responsável masculino, considerado pelos estudantes.

Gráfico 11 – Escolaridade do responsável masculino



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 07 – Escolaridade do responsável masculino

NÍVEL DE ESCOLARIDADE	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Ensino Fund. Completo	01	3,1%
Ensino Fund. Incompleto	07	21,9%
Ensino Médio Completo	09	28,1%
Ensino Superior Completo	03	9,4%
Não souberam informar	12	37,5%
TOTAL	**32**	**100,00%**

Fonte: Experimentação, 2023.

Ao analisarmos os resultados do gráfico 11 e da tabela 06, podemos concluir que a maioria dos estudantes, em percentual de 37,5 não souberam informar até que ano/série seu responsável masculino estudou, 28,1% dos pesquisados disseram que seu responsável estudou o ensino médio completo, enquanto que 21,9% dos estudantes responderam que seu responsável estudou o ensino fundamental incompleto, ainda 9,4% disseram que seu responsável estudou o ensino superior completo e apenas 3,1% dos pesquisados disse que seu responsável masculino estudou até o ensino fundamental completo.

Ao compararmos as tabelas 06 e 07, percebemos que a maioria dos responsáveis seja feminino ou masculino estudaram em sua maioria o ensino médio completo, decrescendo a escolaridade em sequência para o ensino fundamental incompleto e em um percentual menor o ensino superior completo, seguido do fundamental incompleto e superior incompleto, entretanto, não podemos inferir a escolaridade do quantitativo embora expressivo, que não souberam responder sobre o ano/série que seus responsáveis estudaram. Vejamos na tabela 08, o comparativo.

Tabela 08 – Comparativo da escolaridade do responsável dos pesquisados

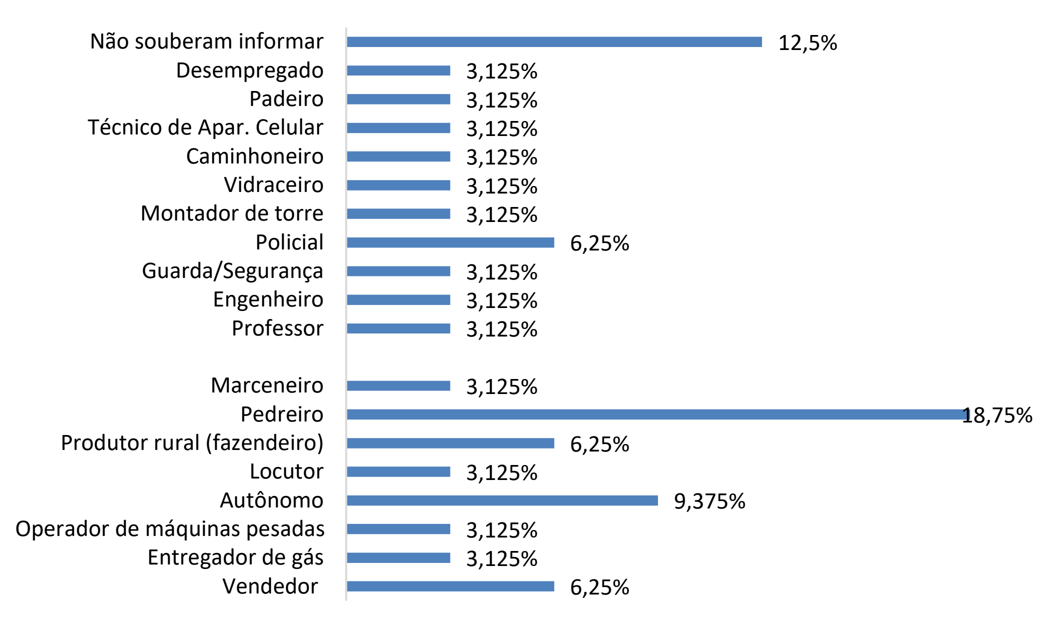
NÍVEL DE ESCOLARIDADE	**RESPONSÁVEL**	
	Feminino	Masculino
Ensino Médio Completo	34,4%	28,1%
Ensino Fund. Incompleto	21,9%	21,9%
Ensino Superior Completo	18,8%	9,4%
Ensino Fund. Completo	3,1%	3,1%
Ensino Médio Incompleto	3,1%	-
Ensino Superior Incompleto	3,1%	-
Não souberam informar	15,6%	37,5%
TOTAL	100%	100%

Fonte: Experimentação, 2023.

Nos dois gráficos e tabelas seguintes, traremos dados referentes a profissão dos responsáveis dos estudantes, mas cabe esclarecer que no momento da aplicação do questionário, informamos que deveriam citar as profissões em que seus responsáveis estavam exercendo no momento.

Ao serem questionados sobre a profissão dos seus responsáveis masculinos os sujeitos da pesquisa responderam conforme mostramos no gráfico 12 e na tabela 09, o quantitativo em percentual da profissão dos responsáveis masculinos.

Gráfico 12 – Profissão exercida, do responsável masculino



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 09 – Profissão exercida, do responsável masculino

PROFISSÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Não Souberam informar	4	12,5%
Desempregado	1	3,125%
Padeiro	1	3,125%
Técnico/Aparelho Celular	1	3,125%
Caminhoneiro	1	3,125%
Vidraceiro	1	3,125%
Montador de Torre	1	3,125%
Policial	2	6,25%
Guarda/Segurança	1	3,125%
Engenheiro	1	3,125%
Professor	1	3,125%
Marceneiro	1	3,125%
Pedreiro	6	18,75%
Produtor rural(fazendeiro)	2	6,25%
Locutor	1	3,125%
Autônomo	3	9,375%
Operador de Máquina Pesadas	1	3,125%
Entregador de Gás	1	3,125%
Vendedor	2	6,25%
TOTAL	**32**	**100%**

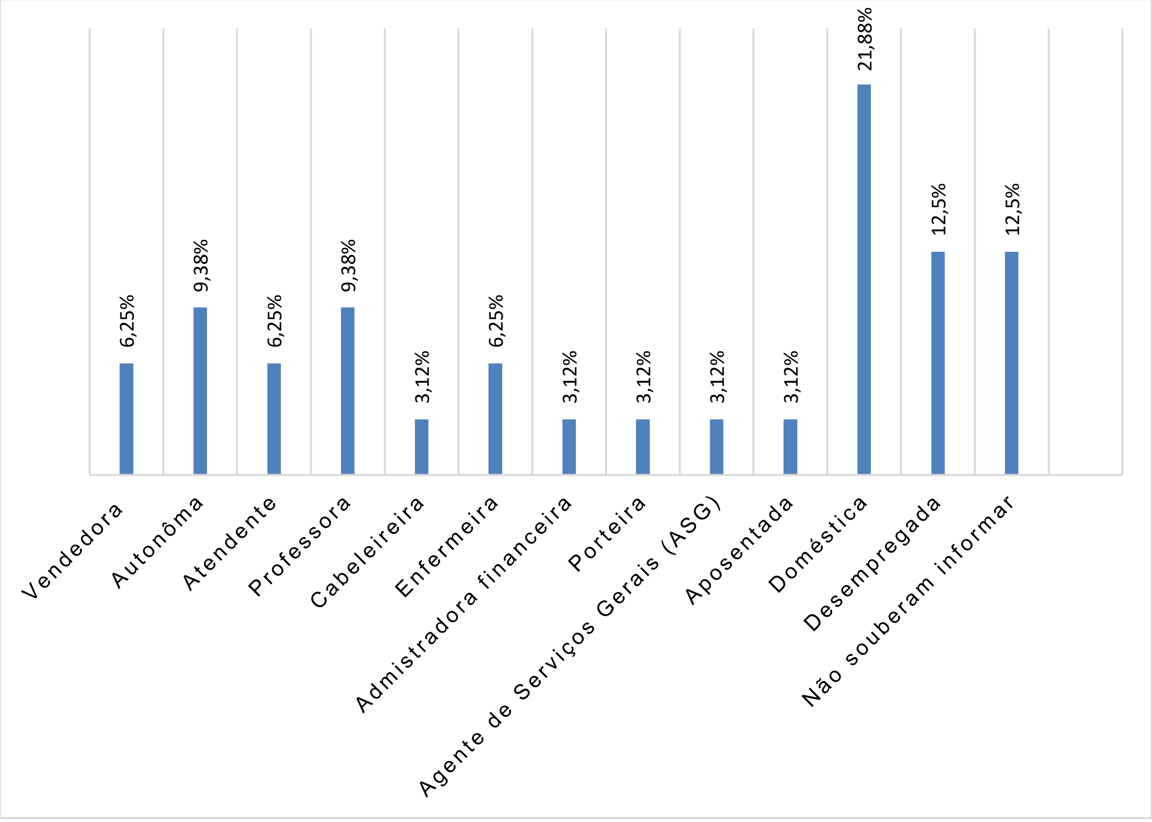
Fonte: Experimentação, 2023.

O resultado do gráfico 12 e a tabela 09, nos revelam que os responsáveis masculinos dos estudantes pesquisados, possuem a profissão de pedreiro com 19,75%, o maior quantitativo, em seguida tem-se a profissão de autônomo para 9,375% dos responsáveis, 6,25% são policiais, e esse mesmo percentual são vendedores, as demais profissões dos responsáveis masculinos de acordo com o que os estudantes responderam correspondem a 3,125% ou seja, 1 (um) responsável, em cada profissão citada como: Técnico/aparelho celular, caminhoneiro, vidraceiro, montador de torre, guarda/segurança, professor, marceneiro, pedreiro, locutor, operador de máquinas pesadas.

Acreditando que os responsáveis masculinos dos estudantes estão trabalhando nessas profissões e que apenas 3,1% estão desempregados, e ainda dos 12,5% não podemos inferir sua profissão, mas entendemos que exercem alguma profissão, entretanto os alunos não souberam relatar qual. Portanto, a figura masculina, responsável pelo aluno, dificilmente terão condições necessárias para acompanhar o desenvolvimento escolar do estudante, pois exercerem tais atividades que exigem um tempo grande e ainda são exaustivas.

Indagamos aos estudantes sobre a profissão do responsável feminino e estes nos forneceram os seguintes dados conforme mostra o gráfico 13 e a tabela 10, da profissão dos responsáveis femininos.

Gráfico 13 – Profissão exercida pelo responsável feminino



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 10 – Profissão exercida pelo responsável feminino

PROFISSÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Não Souberam informar	4	12,5 %
Desempregada	4	12,5 %
Doméstica	7	21,88 %
Aposentada	1	3,12 %
ASG	1	3,12 %
Porteira	1	3,12 %
Administradora financeira	1	3,12 %
Enfermeira	2	6,25 %
Cabeleireira	1	3,12 %
Professora	3	9,38 %
Atendente	2	6,25 %
Autônoma	3	9,38 %
Vendedora	2	6,25 %
TOTAL	**32**	**100%**

Fonte: Experimentação, 2023.

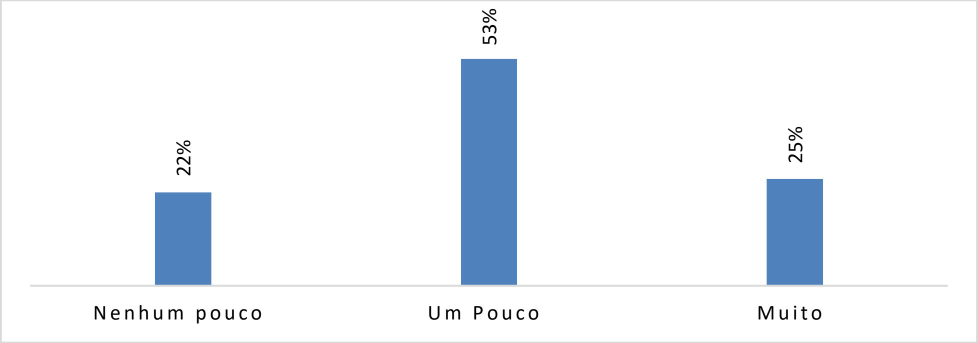
De acordo com o resultado do gráfico 13 e da tabela 10, podemos inferir que a maioria das responsáveis exerce atividade doméstica, 21,88%, ou seja, “trabalha em outro domicílio que não é a sua residência”, consideramos dessa forma, pois, indagamos aos estudantes como seria esse trabalho e partir de suas colocações definimos dessa forma.

Respectivamente, um quantitativo de 9,8% exerce as profissões de professora ou autônoma, em seguida temos a profissão de vendedora, atendente e enfermeira com 6,25% cada uma, e ainda 4 (quatro) estudantes disseram que seu responsável feminino representando 3,12% cada, exerce a profissão de: ASG, porteira, administradora financeira ou cabeleireira, ainda temos 12,5% que disseram não saberem a profissão de seus responsáveis feminino. Representando um percentual de 3,1% está aposentada e 12,5% desempregada.

Contudo, é perceptível que das responsáveis femininas a maioria exerce alguma profissão e talvez também não possa ter tempo de acompanhar o educando com atividades escolares ou até mesmo seu desenvolvimento, devido sua rotina de trabalho, entretanto, tivemos um resultado maior das responsáveis femininas que não exercem profissão ao compararmos com os responsáveis masculinos.

O gráfico 14 e tabela 11, mostra o resultado dos dados coletados dos sujeitos pesquisados ao serem perguntados se gostavam de Matemática.

Gráfico 14 – Gosto por Matemática



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 11 – Gosto por Matemática

GOSTA DE ESTUDAR MATEMÁTICA	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Nenhum pouco	07	22%
Um pouco	17	53%
Muito	08	25%
TOTAL	**32**	**100,00%**

Fonte: Experimentação, 2023.

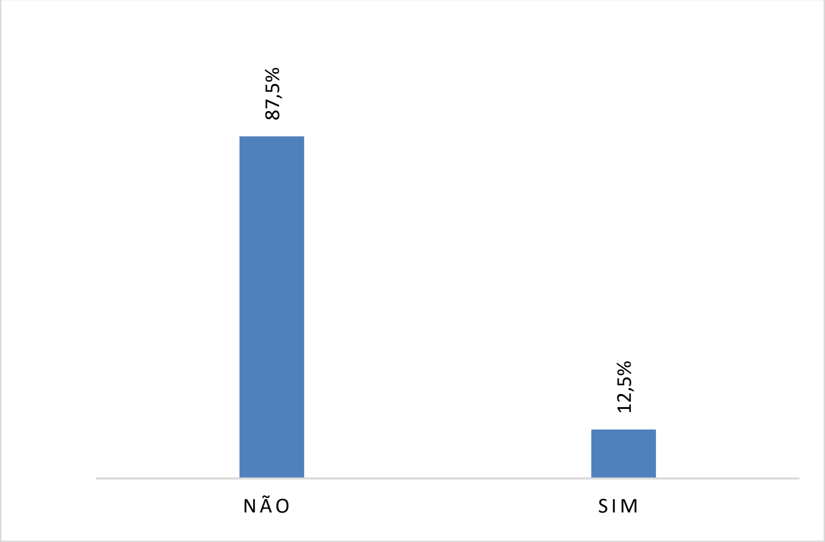
Ao analisarmos os resultados dos dados coletados e apresentados no gráfico 14 e tabela 11, podemos considerar que o quantitativo dos estudantes que dizem gostar de matemática é superior a quem diz não gostar nenhum pouco de matemática, sendo que 53% dos estudantes disseram gostar um pouco de matemática e 25% disseram, gostar muito. Enquanto que apenas 22% dos estudantes não gostam, nenhum pouco de matemática.

Em Tourão (2020) encontramos resultados onde a maioria dos alunos, 74%, consideraram gostar um pouco de matemática, Silva (2019) – 52,6%, Lobato Junior (2018) – 60% e Batista (2018) – 55%, seguem na mesma direção em que, a maioria dos pesquisados dizem gostar, um pouco de matemática.

Esses resultados nos fazem refletir que o motivo de um desempenho não satisfatório em testes cognitivos de matemática pode não estar relacionado a aversão que os alunos poderiam ter de matemática, mas sim em como a matemática está sendo trabalhada para desenvolver a capacidade cognitiva dos estudantes.

Exibiremos no gráfico 15 e tabela 12, o quantitativo de estudantes que participaram da pesquisa que são repetentes ou não, do ano/etapa de ensino em que ocorreu a pesquisa.

Gráfico 15 – Estudantes que repetiam o 9º ano



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 12 – Estudantes repetentes do 9° ano

REPETE A SÉRIE/ANO DE ESTUDO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Não	28	87,5%
Sim	4	12,5%
TOTAL	**32**	**100,00%**

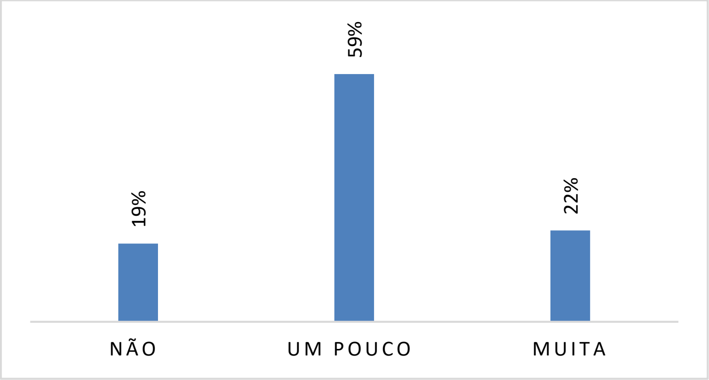
Fonte: Experimentação, 2023.

Constatamos que dos resultados apresentados no gráfico 15 e tabela 12, os 87,5% dos estudantes não estavam repetindo o 9° ano, série/ano em que estavam estudando durante a realização da pesquisa, porém ainda tinha um percentual de 12,5% dos estudantes que estavam repetindo o 9° ano.

Não temos dados para saber os motivos pelos quais haviam estudantes repetindo a série/ano, mas imaginamos que alguns dos motivos poderiam ser, evasão da escola em anos anteriores para ter que trabalharem, repetência por falta de média mínima exigida para prosseguir de série/ano, entre outros motivos. Acreditamos que é preciso realizar ações efetivas para diminuir ou até acabar com a repetência escolar, mas que esses dados não sejam mascarados se caso um aluno que por não ter sido aprovado em alguma série não tenha retornado à escola e deixem de fazer parte dessa estatística.

Os sujeitos pesquisados ao serem questionados se tinham dificuldade em aprender matemática responderam da seguinte forma como mostraremos no gráfico 16 e tabela 13.

Gráfico 16 – Dificuldade em aprender matemática



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 13 – Dificuldade em aprender matemática

TEM DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA	**FREQUÊNCIA**	**PERCENTUAL**
Não	06	19%
Um pouco	19	59%
Muita	07	22%
TOTAL	**32**	**100,00%**

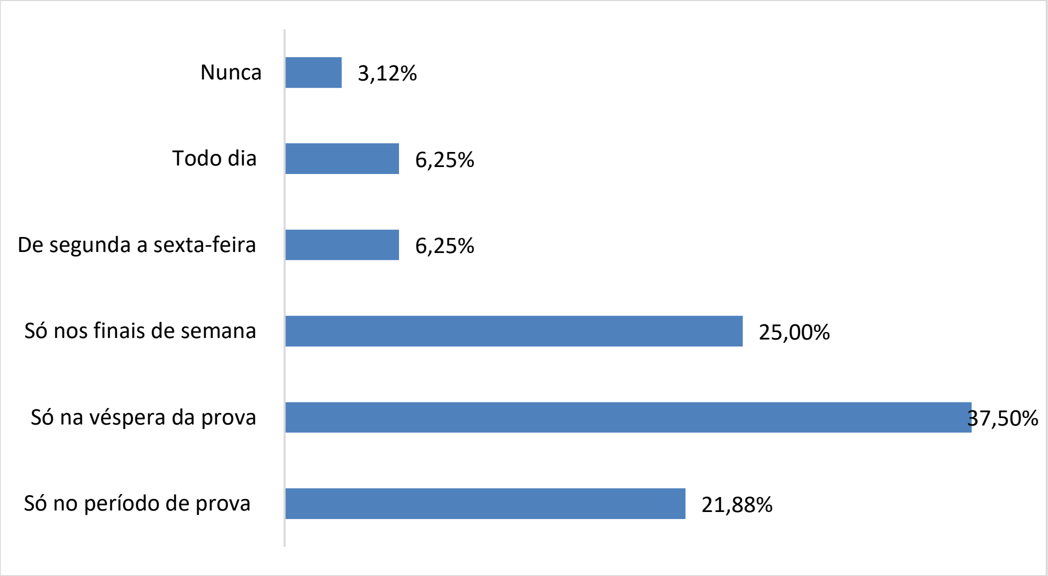
Fonte: Experimentação, 2023.

De acordo com nossa análise dos resultados apresentados no gráfico 16 e a tabela 13, percebemos que 19% dos estudantes dizem não terem dificuldade, 59%, acreditam ter um pouco de dificuldade e 22% desses estudantes pesquisados disseram ter muita dificuldade em aprender matemática.

Esses resultados nos fizeram pensar, que temos um fator favorável ao ensino de matemática, uma vez que, se um aluno acredita que não tem muita dificuldade em aprender matemática, como ocorre na maioria dos resultados apresentados, então, os alunos poderão ser levados a aprenderem os conteúdos matemáticos com maior eficiência, mas certamente, precisamos ter um olhar atento ao considerarmos o que o aluno acredita ser o sentido de ter dificuldade ou não em aprender matemática, se são nas operações básicas, na resolução de problemas, em resultados das avaliações objetivas ou subjetivas, etc. e só a partir disso buscar a possibilidade de ensino para agir diante dos obstáculos que fazem com que não consigamos desenvolver as habilidades cognitivas necessárias em cada etapa do ensino escolar.

Os dados mostrados no gráfico 17 e tabela 14, indicam o resultado comparativo do quantitativo em percentual de alunos, com o período que os estudantes costumam estudar Matemática fora da escola.

Gráfico 17 – Hábito em estudar Matemática fora da escola



Fonte: Experimentais, 2023.

Tabela 14 – Hábito em estudar matemática fora da escola

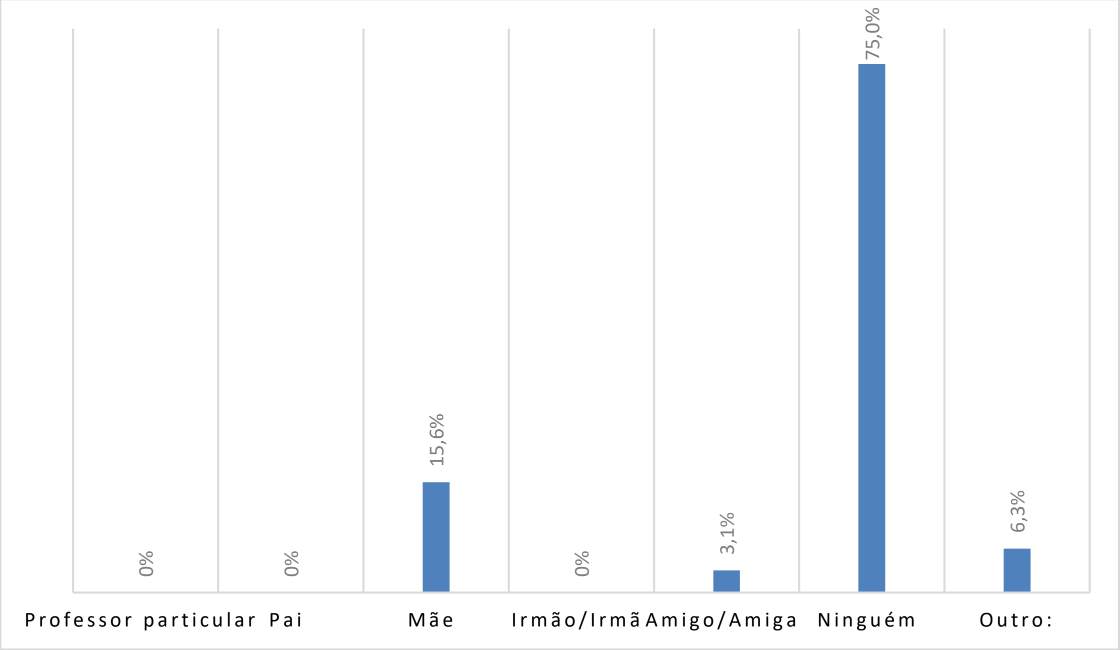
HÁBITO DE ESTUDO FORA DA ESCOLA	**FREQUÊNCIA**	**PERCENTUAL**
Nunca	1	3,12%
Todo dia	2	6,25%
De segunda a sexta-feira	2	6,25%
Só nos finais de semana	8	25%
Só nas vésperas de prova	12	37,5%
Só no período de prova	7	21,88%
TOTAL	**32**	**100%**

Fonte: Experimentação, 2023.

A pesquisa de Felix (2021) e Lobato Júnior (2018) tem resultados em que a maioria dos estudantes, 63,88% e 36%, respectivamente, disseram ter hábitos de estudo somente nas vésperas de prova, assim como em nosso resultado, como mostramos no gráfico 17 e tabela 14, a maioria dos estudantes, 37,5% disseram ter hábitos de estudos apenas nas vésperas de prova. Ainda, nossos resultados apontam que 21,88%, um percentual bastante expressivo de estudantes diz estudar matemática apenas no período de prova, 25% estudam matemática só nos finais de semana.

O gráfico 18 e a tabela 15, revela o resultado de quem os sujeitos envolvidos disseram ajudá-los em tarefas extraclasse de Matemática.

Gráfico 18 – Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Tabela 15 – Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática

QUEM AJUDA NA TAREFA EXTRACLASSE DE MATEMÁTICA	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Professor particular	00	0,00%
Pai	00	0,00%
Mãe	05	15,6%
Irmão/Irmã	00	0,00%
Amigo/Amiga	01	3,1%
Ninguém	24	75,0%
Outro:(não expressaram quem)	02	6,3%
TOTAL	**32**	**100%**

Fonte: Experimentação, 2023.

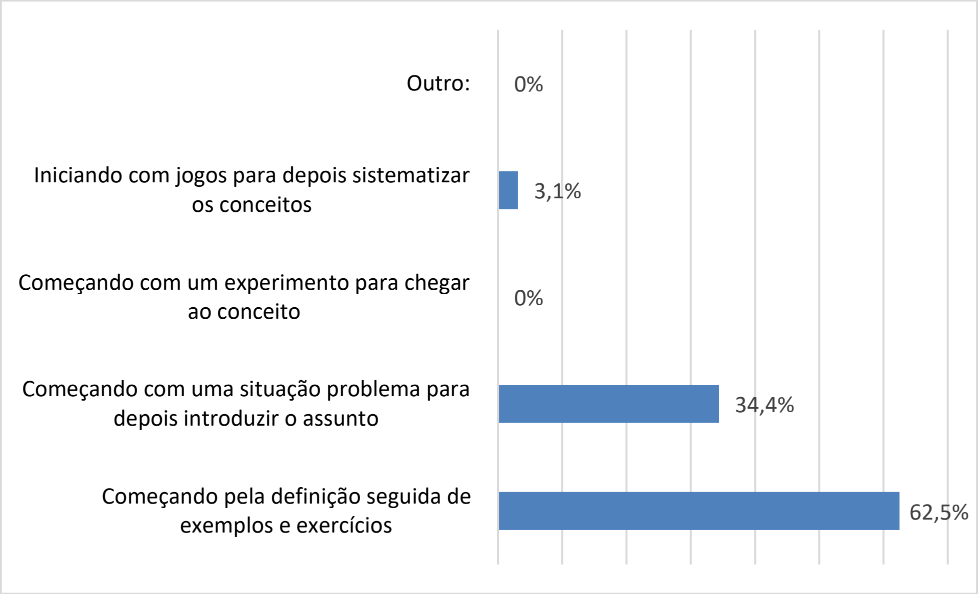
Acerca de quem ajudava os estudantes nas tarefas extraclasse de matemática, verificamos no gráfico 18 e tabela 15, que a maior parte dos estudantes pesquisados, sendo 75% não recebem ajuda de ninguém nas tarefas de matemática, 15,6 % dos estudantes disseram receber ajuda das mães, 3,1% responderam ter ajuda de um amigo/amiga nas tarefas de matemática e 6,3% dizem que outra pessoa os ajuda com as tarefas de matemática, entretanto, não expressaram quem os ajudava.

Acreditamos que o fato de a pesquisa também mostrar que quase todos os pais, estavam exercendo alguma profissão, possa ter influenciado na ajuda que não puderam dar a seus dependentes e as mães como estavam em maior quantidade sem exercer uma profissão aparecem com o maior percentual de ajuda que recebem, para 15,6% dos estudantes. Ainda, estudos como o de Lobato Junior (2018), Silva (2019) e Tourão (2020) mostram em suas pesquisas que o percentual de alunos, correspondentes a 44%, 68,4% e 56% não recebem ajuda de ninguém para realizar tarefas extraclasse, apesar de bastante expressivo esses dados são menores que nossos resultados.

Resultado preocupante, haja vista que, o aprendizado de matemática depende também de o aluno realizar atividades extraclasse e ao passo que o aluno não tem o hábito de estudar todos os dias fora da escola, se agrava ainda mais se não receber ajuda de um responsável. No entanto, acreditamos que, se o aluno conseguir ter um perfil autônomo e comprometido em seu estudo talvez não necessite de ajuda de outra pessoa em atividades extraclasse, entretanto, esse perfil requer hábitos que deverão ser incentivados no âmbito não apenas escolar, mais principalmente em seus lares por seus responsáveis.

Questionados sobre como a maioria das aulas de matemática era desenvolvida pelo professor, os estudantes responderam de acordo como mostraremos no gráfico 19 e tabela 16.

Gráfico 19 – Metodologia utilizada pelo professor nas aulas de matemática



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 16 – Metodologia utilizada pelo professor nas aulas de matemática

A MAIORIA DAS AULAS DE MATEMÁTICA É DESENVOLVIDA:	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos	01	3,1%
Começando com um experimento para chegar ao conceito	00	0,00%
Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto	11	34,4%
Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios	20	62,5%
Outra maneira:	00	0,00%
TOTAL	**32**	**100%**

Fonte: Experimentação, 2023.

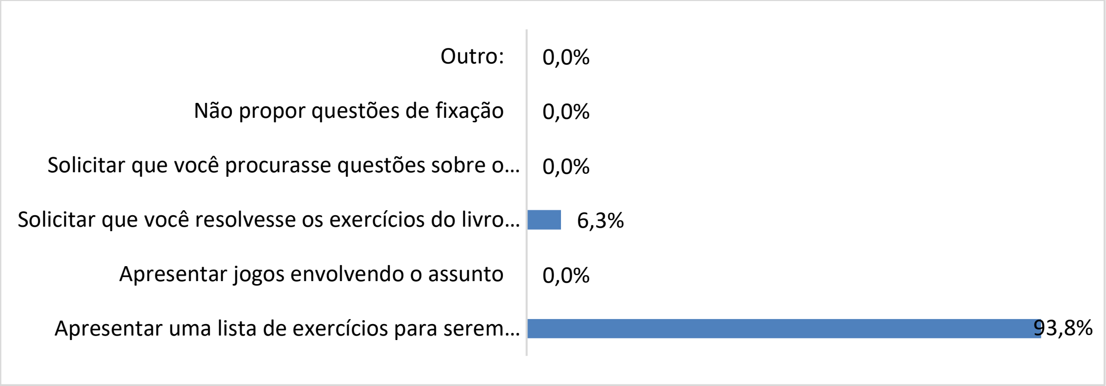
Dados do gráfico 19 e tabela 16, mostra que a maior parte dos estudantes, 62,5%, responderam que o professor começa as aulas de matemática pela definição e segue com exemplos e exercícios. Mas embora a forma tradicional de ensino com uso de definição escrito na lousa seguindo com os exemplos e exercícios ainda prevaleça no entendimento dos alunos, percebemos que outras metodologias de ensino já estão sendo adotadas como é o caso da inserção de situações problemas, 34,4% dos estudantes disseram que o professor começa suas aulas com situação problema, e isso faz com que o aluno reflita sobre uma ideia e depois ele introduz o assunto.

Ainda temos o resultado, embora não seja expressivo, de 3,1% de estudante que disse que o professor começa suas aulas com jogos para depois sistematizar os conceitos.

Corrêa (2019), constatou em sua pesquisa que 92% dos estudantes disseram que os professores começam suas aulas de matemática pela definição e segue com exemplos e exercícios, em Batista (2018) encontra-se o resultado de 75%, em Silva (2019) – 57,9%, ou seja, ainda segue o modelo tradicional de ensino de acordo com resultado de nossa pesquisa e de outros mencionados.

No gráfico 20 e tabela 17, demonstramos o resultado dos dados coletados quando perguntarmos para os sujeitos da pesquisa o que os professores faziam para fixar o conteúdo de Matemática.

Gráfico 20 – Recursos utilizados pelo professor para praticar o conteúdo de matemática



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 17 – Recursos utilizados pelo professor para praticar o conteúdo de matemática

PARA FIXAR O CONTEÚDO, O PROFESSOR COSTUMA:	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Não propor questões de fixação.	00	0,0%
Solicitar que você procurasse questões sobre o assunto para resolver em outras fontes (internet, outros livros)	00	0,0%
Solicitar que você resolvesse os exercícios do livro didático	2	6,3%
Apresentar jogos envolvendo o assunto	00	0,0%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	30	93,8%
Outra maneira:	00	0,0%
TOTAL	**32**	**100%**

Fonte: Experimentação, 2023.

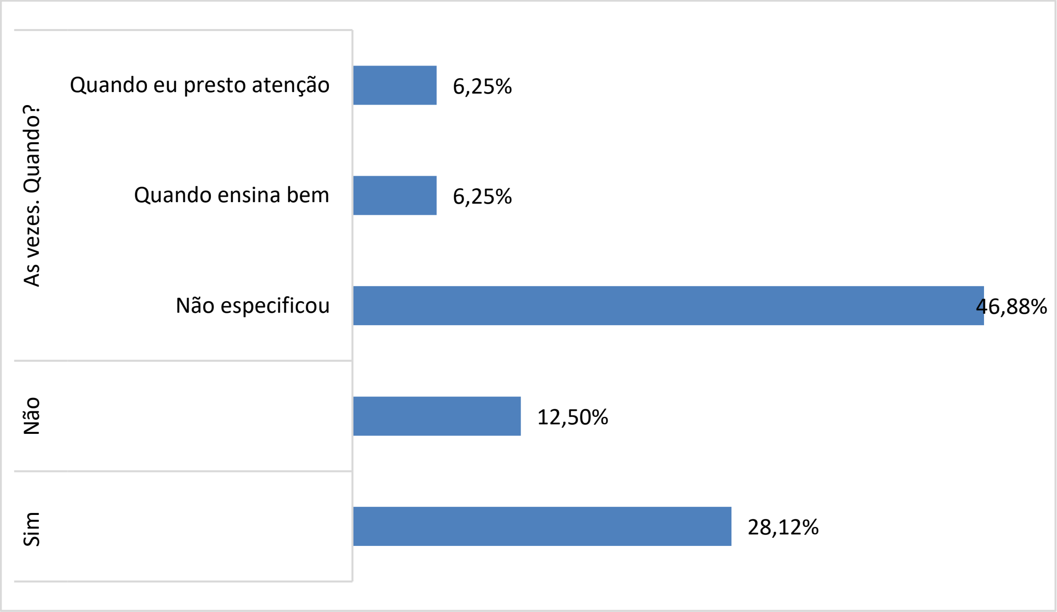
Os dados do gráfico 20 e tabela 17, representam os resultados dos estudantes ao serem questionados sobre o que seu professor costuma fazer para que fixassem o conteúdo matemático. Destes resultados, constatamos que os professores não utilizam formas diferenciadas para que os estudantes possam fixar o conteúdo, utilizam apenas lista de exercícios apresentadas pelo professor, sendo considerado por 93,8% dos pesquisados, e 6,3% dos pesquisados disseram que o professor costuma usar exercício do livro didático.

Porém, esses dados se correlacionam com o resultado da tabela 15, em que representa a maneira como o professor desenvolve suas aulas, a maioria dos pesquisados disse que o professor, começa pela definição seguida de exemplos e exercícios. É importante destacar que a lista de exercícios de fixação é uma ferramenta fundamental para aprimoramento de conteúdo, tanto é, que utilizamos também em nossa experimentação, mas é necessário que seja combinada com uma maneira eficaz de desenvolver o ensino.

Lobato Junior (2018), apresenta resultado de 84% e Batista (2018), revela que 75% dos estudantes disseram que seu professor utiliza lista de exercício para fixarem o conteúdo, resultados inferiores ao encontrado em nosso estudo de 93,8%.

O gráfico 21 e a tabela 18, anunciam o resultado do questionamento feito pra saber se o estudante está entendendo matemática de acordo com a forma que o professor ensina.

Gráfico 21– Entendimento da matemática da forma como o professor ensina



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Tabela 18 – Metodologias utilizadas de fixação dos assuntos matemáticos

VOCÊ ENTENDE MATEMÁTICA DA FORMA QUE O PROFESSOR ENSINA?	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Às vezes:	19	59,38%
Não	04	12,50%
Sim	09	28,12%
TOTAL	**32**	**100%**

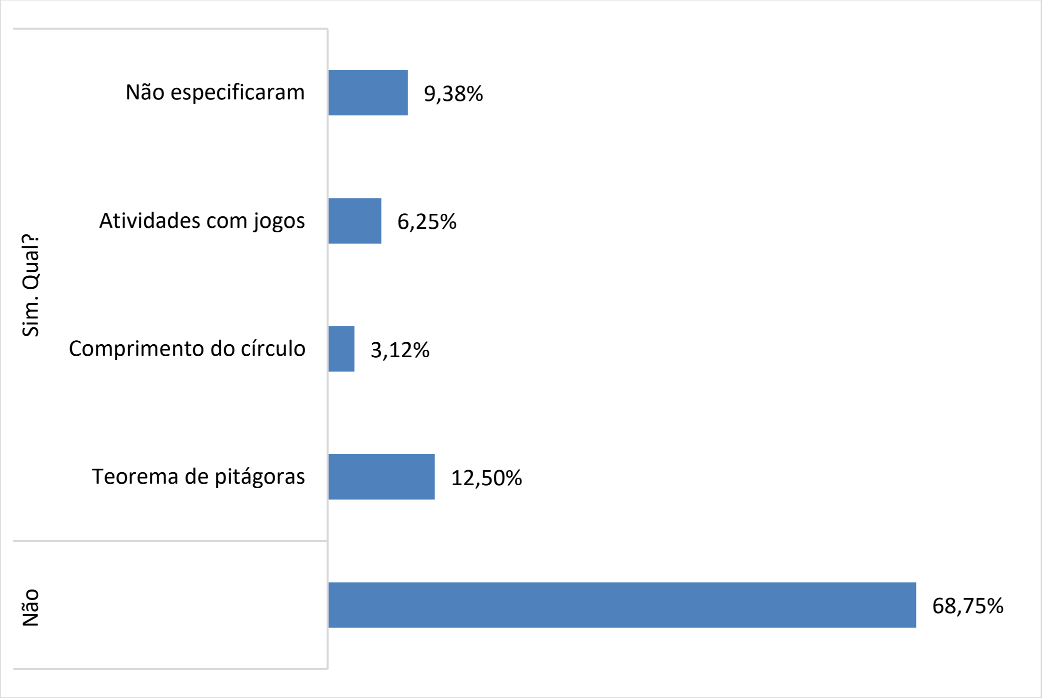
Fonte: Experimentação, 2023.

Questionados se os estudantes entendiam matemática da forma como seu professor ensinava, os estudantes responderam de acordo com os dados representados no gráfico 21 e tabela 18. Os resultados mostram que 59,38% dos estudantes pesquisados entende somente, às vezes, a matemática da forma que o professor ensina, 12,5% disseram que não entendem e 28,12% disseram “sim”, que entendem matemática da forma que o professor ensina.

O resultado 12,5% de estudantes que “não” entendem a matemática da forma como o professor ensina foi menor que os dados de estudo de Batista (2018) onde aponta que 40% dos estudantes não entendiam a matemática como o professor ensinava, entretanto, nosso resultado superou o de Corrêa (2019) em que nenhum aluno, ou seja 0%, respondeu “nunca” entender a aulas de matemática da forma que o professor ensina.

Conforme dados coletados na pesquisa, mostraremos no gráfico 22 e tabela 19, o quantitativo que indica o resultado em percentual dos estudantes que lembram de algum experimento desenvolvido pelo seu professor para ensinar matemática.

Gráfico 22 – Participação dos estudantes em experimento matemático



Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 19 – Participação dos estudantes em experimento matemático

VOCÊ LEMBRA DE ALGUM EXPERIMENTO DESENVOLVIDO PELO SEU PROFESSOR PARA ENSINAR MATEMÁTICA?	**FREQUÊNCIA**	**PERCENTUAL**
Sim	10	31,25%
Não	22	68,75%
TOTAL	**32**	**100%**

Fonte: Experimentação, 2023.

Ao investigar os dados do gráfico 22 e tabela 19, inferimos que 68,75% dos estudantes não lembram de algum experimento, quanto que 31,25% disseram lembrar de algum experimento que o professor desenvolveu para ensinar matemática, ainda, a maior parte dos estudantes que disseram lembrar de algum experimento conseguiram lembrar e dizer qual experimento foi utilizado pelo professor, como: Teorema de Pitágoras (12,5%), Comprimento do círculo (3,12%) e Atividades com jogos (6,25%), mas tivemos 9,38% dos estudantes que lembraram que já haviam tido contato com algum experimento desenvolvido pelo professor, no entanto, não conseguiram dizer qual.

Entendemos que precisamos ampliar o quantitativo de alunos a terem ensino de matemática com desenvolvimento de experimento, entretanto, os resultados que encontramos, em nossa percepção é otimista, pois, percebemos que o percentual de estudantes, 31,25%, que lembram de ter participado de algum experimento que o professor desenvolveu para ensinar matemática mais que triplicou ao compararmos aos dados de Batista (2018), com apenas 10% que já haviam participado de algum experimento.

5.1.2 Segundo encontro: primeira sessão de ensino

O segundo encontro ocorreu no dia 25/10/23 em momentos que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:15h e finalizou à 14:35. Neste dia estavam presentes 28 alunos em sala de aula, aplicamos a Atividade 01- Razão em matemática que teve duração de cerca de 60 min para ser finalizada pelos alunos.

No primeiro momento pedimos que devolvessem os TCLE assinados por seus responsáveis. Os alunos faltosos do dia anterior responderam o questionário socioeconômico, realizaram o pré-teste e entregamos o TCLE ao mesmo. Seguidamente pedi que se reunissem em grupos de cinco a seis alunos e incluíssem os alunos faltosos, me entregassem uma lista com os nomes dos alunos de cada grupo. Alguns alunos não queriam fazer parte de nenhum grupo e foi preciso que convencêssemos eles a participar de um grupo, conseguimos inseri-los e demos prosseguimentos, distribuindo um roteiro de atividades para cada grupo, orientamos a lerem o material com muita atenção e socializassem com seu grupo sobre a atividade e que estaríamos lá para ajudá-los a dirimir suas dúvidas a respeito da atividade que estavam no material.

Ainda esclarecemos que todas as atividades seriam realizadas em grupos, os mesmos que formariam deviam se organizar com seu grupo a cada aula de matemática, também lhes dissemos que em outras atividades poderiam fazer uso de calculadora e caso pretendesse usar, deveriam trazer uma nas próximas aulas de matemática, alguns alunos disseram "*ainda bem porque as vezes fico enrascado no cálculo*", reforcei que a calculadora deveria ser de uso pessoal ou usada apenas pelos componentes do grupo, pra evitar que fiquem circulando pela sala em busca de emprestar a calculadora de outro grupo.

Distribuímos o roteiro das atividades por grupos e orientamos a seguirem os procedimentos devidos, com atenção e comprometimento, durante a execução da atividade 01, após observar que os grupos já haviam lido todo o roteiro e não estavam executando as atividades, pois, diziam que não estavam entendendo, fui à frente da lousa e realizei perguntas a toda a turma como: Vocês leram a folha de notícia que tem no roteiro? Ficaram em silêncio, mas antes havia percebido que haviam lido, no entanto, pedi que lessem novamente a folha de notícia em voz alta, a aluna A26 quis ler para a turma e assim o fez com quatro situações apresentadas no roteiro. Em seguida pedi que outro aluno lesse o quadro informativo que estava logo abaixo do anúncio, o aluno A5 leu com um certo grau de dificuldade na leitura da fração, nesse momento ajudei a ler de forma correta. Então perguntei "quais notícias que o quadro de notícias trazia?", o aluno A18 respondeu "*notícia de um monte de coisa de coisa que tem no dia a dia*". Aproveitei a resposta do aluno e disse que se nos atentarmos para a expressão do quadro informativo perceberemos que foi escrito por meio de uma razão, então dialogamos se as situações lidas na folha de notícia também poderiam ser escritas em forma de razão. Imediatamente, disseram que podiam sim, então perguntei como representariam então a primeira notícia lida. A aluna A26 disse "*acho que dá de colocar em fração tipo 1(um) barra 20 (vinte), como lá no quadro*", concordei que estaria correta sua resposta. Então a partir da ideia de representar em forma de fração se sucederam cada noticia e os grupos falavam como escrever no quadro, conforme a notícia escolhida.

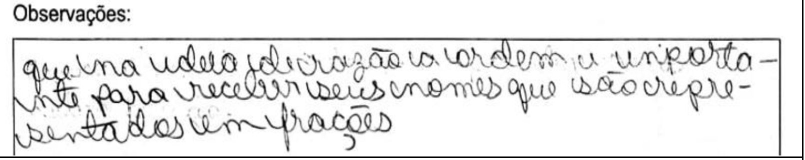
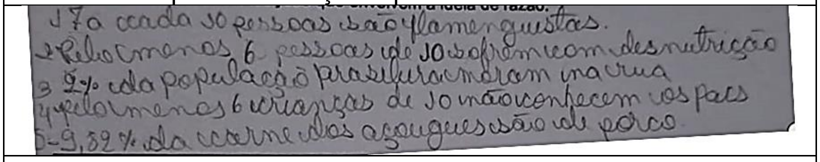
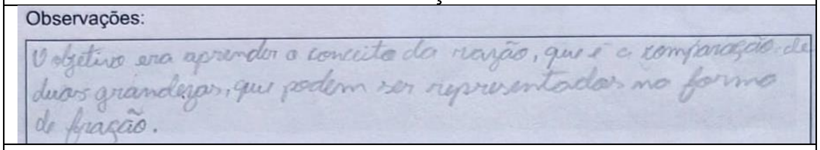
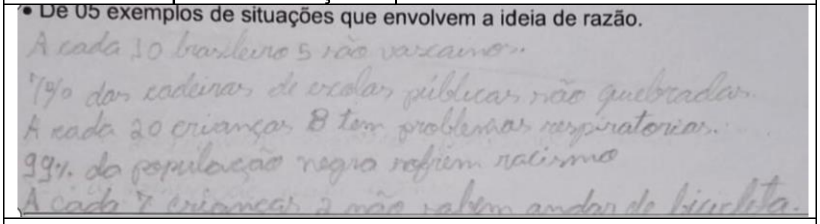
Indagados se já conseguiriam representar as situações da atividade por meio de razão disseram “*agora já damos conta*” e se seriam capazes de escrever outras situações que envolvem razão responderam “*vamos tentar e lhe chamamos pra senhora vê se tá certo*”. Aproveitei o momento pra entusiasmá-los dizendo que iriam conseguir até mais rápido se começassem a se ajudar pensando em como resolver e discutir as possíveis respostas e caso ainda houvesse dificuldade poderíamos discutir juntos, só que o grupo todo deveria estar atento caso fossemos auxiliá-los em seus grupos.

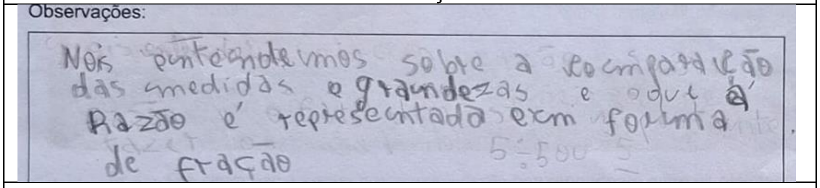
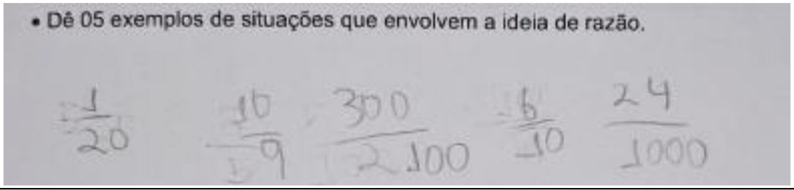
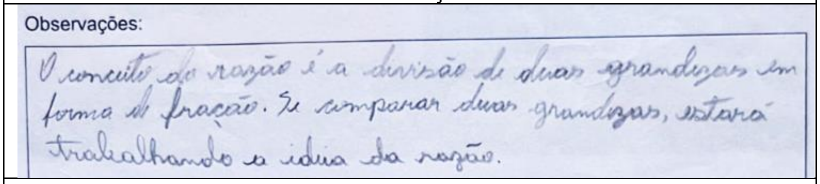
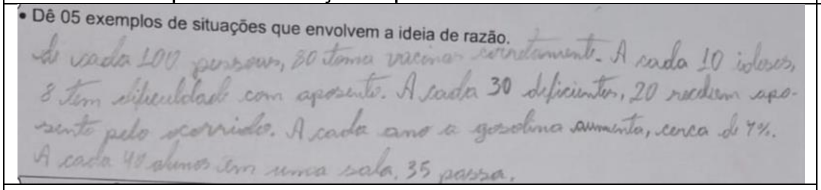
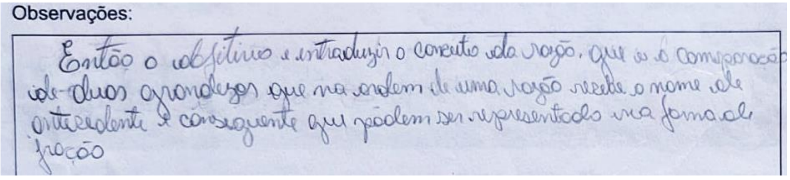
Ao começarem a responder as questões com situações propostas que deveriam ser expressas em forma de razão a aluna A26 do grupo 5, perguntou “*professora a ordem na razão, o maior sempre fica em cima ou embaixo?*”. Esclareci que não tem uma ordem específica que pode variar, em alguns momentos o valor maior pode ficar em “*baixo*” em outros em “*cima*” e que isso depende de cada situação dada, utilizei esses termos pois o aluno indicou apontando o local dos termos, mas expliquei que em seguida iria se depara com o nome devido para cada termo que mostrou.

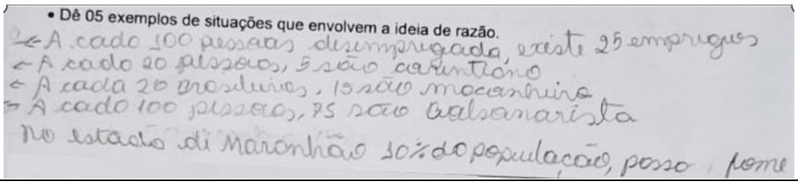
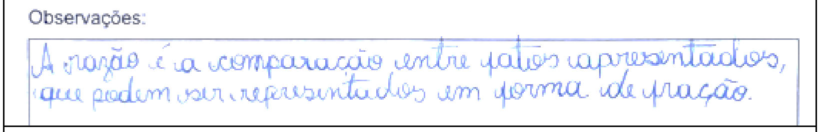
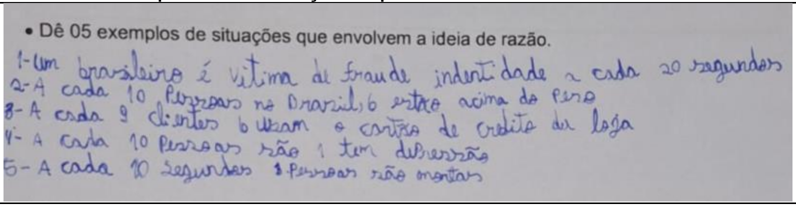
As respostas dos grupos sugerem o entendimento a respeito de situações que podem ser expressas por meio de uma razão ao solicitarmos que escrevessem 5 (cinco) exemplos de situações que envolvessem a ideia de razão os alunos conseguiram responder e em alguns grupos fizeram até uma divisão para cada um falar um exemplo pra escreverem, mostraremos as respostas por grupo no quadro 10 abaixo, a maior parte dos grupos ao escreverem um exemplo logo chamava pra verificar se estava correto, ao confirmar que o exemplo estava correto as equipes já ficavam mais autônomos na realização dos outros exemplos.

O objetivo desta atividade é introduzir o conceito de razão. No quadro 10 trazemos a transcrição de observações e exemplos de situações dadas pelos grupos de alunos que envolve ideia de razão, bem como a validade de cada observação e situações em conformidade com a institucionalização formalizada.

Quadro 10 – Observações e exemplos de situações dadas pelos alunos que envolve ideia de razão na atividade 01

GRUPO	ALUNOS	Observações/Exemplos de situações com ideia de razão	VALIDADE
G1	A1, A3, A4 e A5	Observações  Observações: que na ideia de razão a ordem e importa-nte para receber seus nomes que são repre-sentados em frações Transcrição Que na idéia de razão a ordem é importante para receber seus nomes que são representados em frações	Válida
		Exemplos de situações que envolve ideia de razões  1 7 a cada 10 pessoas são flamenguistas. 2 Pelo menos 6 pessoas de 10 sofrem com desnutrição 3 2% da população brasileira moram na rua 4 pelo menos 6 crianças de 10 não conhecem os pais 5 9,82% da carne dos açougues são de porco Transcrição 1 7 a cada 10 pessoas são flamenguistas e pelo menos 2 pelo menos 6 pessoas de 10 sofreram com desnutrição 3 2% da população brasileira moram na rua 4 pelo menos 6 crianças de 10 não conhecem os pais 5 – 9,82% da carne dos açougues são de porco	Válida
G2	A6, A7, A8, e A9	Observações  Observações: O objetivo era aprender o conceito da razão, que é a comparação de duas grandezas, que podem ser representadas na forma de fração. Transcrição O objetivo era aprender o conceito da razão, que é comparação de duas grandezas que podem ser representados na forma de fração	Válida
		Exemplos de situações que envolve ideia de razões  • De 05 exemplos de situações que envolvem a ideia de razão. A cada 10 brasileiro 5 são vascaino. 7% das cadeiras de escolas públicas não quebradas. A cada 20 crianças 8 tem problemas respiratorias. 99% da população negra sofrem racismo A cada 7 crianças 2 não sabem andar de bicicleta. Transcrição A cada 10 brasileiros 5 são vascaínos. 7% das cadeiras de escolas públicas são quebradas A cada 20 crianças 8 tem problemas respiratórios 99% da população negra sofrem racismo A cada 7 crianças 2 não sabem andar de bicicleta.	Válida

G3	A11, A12, A13, A14 e A15	Observações	Válida
		 Observações: Nós entendemos sobre a comparação das medidas e grandezas e que a Razão é representada em forma de fração	
		Transcrição	
		Nós entendemos sobre a comparação das medidas e grandezas e que a razão é representada em forma de fração	
		Exemplos de situações que envolve ideia de razões	Inválida
		 • Dê 05 exemplos de situações que envolvem a ideia de razão. $\frac{1}{20}$ $\frac{10}{9}$ $\frac{300}{2100}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{24}{1000}$	
		Transcrição	
		$\frac{1}{20}$ $\frac{10}{9}$ $\frac{300}{2100}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{24}{1000}$	
G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	Observações	Válida
		 Observações: O conceito da razão é a divisão de duas grandezas em forma de fração. Se comparar duas grandezas, estará trabalhando a ideia da razão.	
		Transcrição	
		O conceito da razão é a divisão de duas grandezas em forma de fração. Se comparar duas grandezas, estará trabalhando a ideia de razão.	
		Exemplos de situações que envolve ideia de razões	
		 • Dê 05 exemplos de situações que envolvem a ideia de razão. de cada 100 pessoas, 80 toma vacina corretamente. A cada 10 idosos, 8 tem dificuldade com aposento. A cada 30 deficientes, 20 recebem aposento pelo ocorrido. A cada ano a gasolina aumenta, cerca de 7%. A cada 40 alunos em uma sala, 35 passa.	Válida
		Transcrição	
		de cada 100 pessoas 80 toma vacina corretamente. A cada 10 idosos 8 tem dificuldade com aposento. A cada 30 deficientes, 20 recebem aposento pelo ocorrido. A cada ano a gasolina aumentou, cerca de 7%. A cada 40 alunos em uma sala 35 passa	
G5	A22, A23, A24, A25 e A26	Observações	Válida
		 Observações: Então o objetivo é introduzir o conceito da razão, que é a comparação de duas grandezas que na ordem de uma razão recebe o nome de antecedente e consequente que podem ser representados na forma de fração	
		Transcrição	
		Então o objetivo é introduzir o conceito da razão que é a comparação de duas grandezas que na ordem de uma razão recebe o nome de antecedente e consequente que podem ser representados na forma de fração	

		Exemplos de situações que envolve ideia de razões	
		 • Dê 05 exemplos de situações que envolvem a ideia de razão. A cado 100 pessoas desempregada, existe 25 empregos A cado 20 pessoas, 5 são carintiano A cada 20 brasileiros, 15 são maconheiro A cado 100 pessoas, 75 são balsanarista No estado di Maranhão 10% do população, posso fome	Válida
		Transcrição	
		A cada 100 pessoas desempregadas, existe 25 empregos A cada 20 pessoas, 5 são corintiano A cada 20 Brasileiros, 15 são maconheiros A cada 100 pessoas, 75 são bolsonarista No estado de Maranhão 10% da população, passa fome	
G6	A27, A28, A31 e A32	Observações	Válida
		 Observações: A razão é a comparação entre fatos apresentados, que podem ser representados em forma de fração.	
		Transcrição	
		A razão é a comparação entre fatos apresentados, que podem ser representados em forma de fração	
		Exemplos de situações que envolve ideia de razões	
		 • Dê 05 exemplos de situações que envolvem a ideia de razão. 1-Um brasileiro é vitima de fraude indentidade a cada 20 segundos 2-A cada 10 Pessoas no Brasil, 6 estão acima do peso 3- A cada 9 clientes 6 usam o cartão de credito da loja 4- A cada 10 Pessoas são 1 tem depressão 5- A cada 10 segundos 1 Pessoas são mortas	Válida
		Transcrição	
		1- Um brasileiro é vítima de fraude identidade a cada 20 segundos 2- A cada 10 pessoas no Brasil, 6 estão acima do peso 3- A cada 9 clientes 6 usam cartão de créditos da loja 4- A cada 10 pessoas são 1 tem depressão 5- A cada 10 segundos 1 pessoas são mortas	

Fonte: Experimentação, 2023.

Após finalizarem a atividade 01 realizamos a institucionalização de acordo com as observações que cada grupo escrevia na lousa, então formalizamos um conceito geral, que "Razão é uma comparação entre duas partes; parte e todo, entre duas grandezas ou o quociente, e pode ser representada em forma de fração." e pedimos que anotassem em seus cadernos.

Como vemos no quadro 10 todos os grupos fizeram observações válidas, ainda conseguiram realizar e explicitar muito bem situações que envolvem ideias de razão, apenas o grupo G3 não escreveu situações válidas que envolvem ideia de razão, no entanto, representou em forma fracionária a ideia que possivelmente representa razão, pois percebemos que nas questões, onde as situações eram expressas e pedia para representar em forma de razão o grupo representou da mesma forma. Já o grupo G6 iniciou suas situações escrevendo as mesmas que aparecem no roteiro, ao percebemos orientamos que criassem suas próprias situações, então realizaram apenas duas situações e as demais permaneceram iguais ao da atividade o que não invalida seus exemplos dados.

Percebemos uma das maiores dificuldades que todos os grupos tiveram foi o fato de terem que elaborar a observação, ao observar suas dúvidas ou ser chamada para explicar como deveriam fazer ao ouvir dizerem que “não iam fazer essa observação”, orientei-os que todos deveriam fazer, pois era essencial para construírem a organização das informações que tiveram ao resolverem as questões da atividade para isso, deviam ficar atentos aos procedimentos que realizaram para poder alcançar o objetivo da atividade e que essas observações seriam justamente o resultado do que descobriram ao efetuar a atividade, realizava perguntas como: após responderem as atividades vocês saberiam identificar uma situação em que pudesse ser representada por uma razão? Vocês aprenderam a representar uma razão? Como se representa a razão? A ordem dos termos na representação da razão é importante? Como chamamos os termos da razão? a fim de ajuda-los a pensar em uma forma de escreverem o que observaram, além disso pedimos que realizassem as atividades em sequência para poderem observar a informação que os levará ao objetivo da atividade. Todas as equipes conseguiram fazer as observações.

A validação das observações dadas ocorreu de forma que cada uma, devia estar em conformidade com encaminhamento da atividade e objetivos, a fim de chegarmos à formalização de um conceito, no momento da institucionalização. Na tabela 20 mostraremos a validade das observações da atividade 01, em frequência e percentual.

Tabela 20 – Validade das observações da atividade 01

VALIDADE DAS OBSERVAÇÕES	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	6	100,00%
Parcialmente válida	0	0,00%
Inválida	0	0,00%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Portanto, a tabela 20 nos mostra que 100% dos grupos de alunos expressaram observações válidas, o que nos faz acreditar que o resultado da atividade desenvolvida, de forma geral, teve um bom aproveitamento.

5.1.3 Terceiro encontro: segunda sessão de ensino

O terceiro encontro do dia 26/10/23, durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 14:35h e finalizou à 15:55, estavam presentes 32 alunos, aplicamos neste dia as Atividade 02 – Razões Inversas e Atividade 03 – Razões Equivalentes. A aplicação da Atividade 02 teve duração de aproximadamente 30 min, as aulas desse dia iriam seguir fora dos padrões de horário, iriam ter aula até as 15:55 por conta dos jogo que estava ocorrendo intercalado com as aulas, então essas atividades iriam encerrar próxima ao horário que sairiam para lanchar e irem para a quadra de esportes jogar o futsal que era a modalidade que iriam participar neste dia, o que deixou os alunos mais dispersos pela ansiedade em dá o horário para saírem, perguntavam constantemente a hora.

Ao entrarmos em sala de aula pedimos que se organizassem em seus grupos como escolheram na aula anterior e lembrei-os que salvo alguma necessidade de fazermos mudança, era preferível manter os mesmos componentes de cada grupo até o final da pesquisa. Os alunos se organizaram, em seguida distribuímos os roteiros e instruímos a realizarem a leitura com calma, darem atenção aos objetivos da atividade e ao seguirem o procedimento para realizarem a atividade observarem alguma relação com o que estão fazendo e caso necessário, estaríamos dispostos a ajudá-los.

Observamos algumas dificuldades na realização das atividades de início, por não saberem o que significava o termo “produto”, um aluno A11 do grupo G3 disse “*professora, venha cá, o que é esse produto das razões*?” Pedi que todo o grupo prestasse atenção no que eu iria dizer e respondi que seria o resultado das multiplicações das razões, sinalizaram que entenderam dizendo “*agora sim, então é só multiplicar as razões*”.

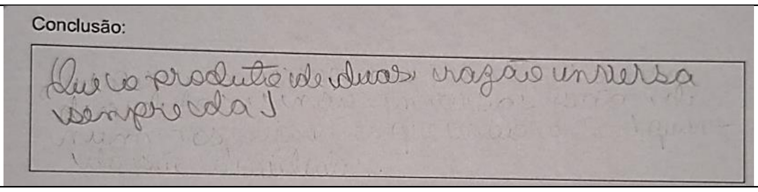
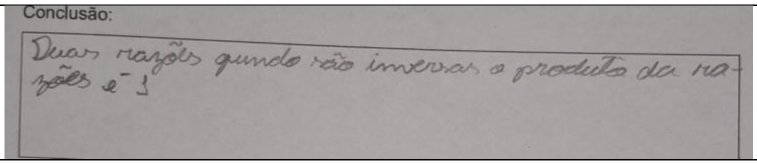
Andei observando os grupos e percebi que a maioria não estava fazendo ou faziam a multiplicação de forma incorreta dos termos da razão, fui à frente da lousa chamei a atenção deles e perguntei se sabiam o que seria produto das razões, o grupo 3 imediatamente disse “*o resultado da multiplicação*”, então pus duas razões em forma de fração no quadro e realizamos a multiplicação, nesse momento atentei eles que para multiplicarmos devíamos multiplicar antecedente com antecedente e consequente com consequente.

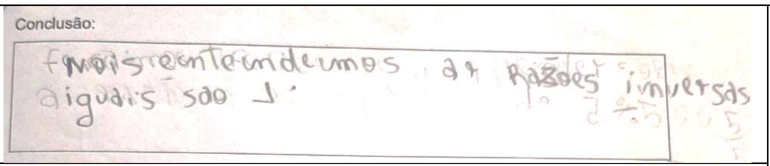
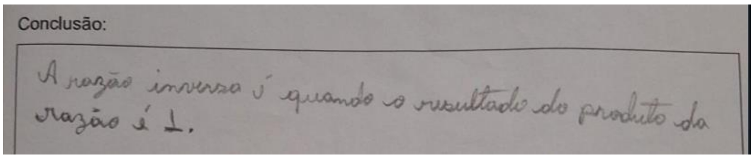
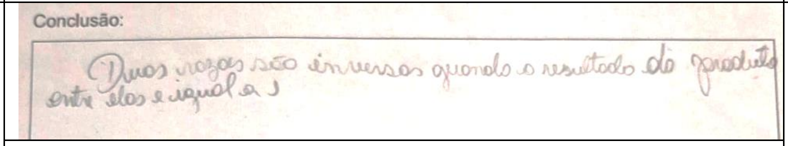
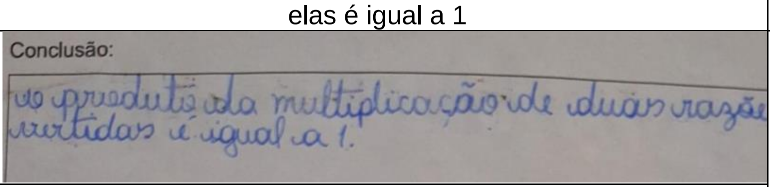
Um aluno no grupo G5 perguntou o que colocar na observação, orientamos que ao preencherem o quadro observassem os termos das razões que estavam se multiplicando, ao conseguirem achar os resultados e escrevesse-os no espaço do quadro, analisassem o que aconteceu com alguns resultados pra assim conseguirem escrever suas observações.

Os grupos continuaram a preencher o quadro e logo o espaço para observação já estava sendo preenchidos pela maioria dos grupos, no entanto, o campo da conclusão todos os grupos queriam saber o que deviam fazer, expliquei-lhes de forma geral para a turma que a partir de suas observações deveriam fazer uma conclusão do que descobriram no desenvolvimento da atividade e de acordo com o objetivo da atividade.

O objetivo desta atividade era descobrir uma relação entre as razões que tem seus termos invertidos. No quadro 11 trazemos a transcrição das conclusões dadas pelos alunos e a validade de cada conclusão de acordo com as ligações das ações realizadas e as ideias expostas na conclusão.

Quadro 11 – Conclusões dadas pelos alunos na atividade 02

GRUPO	ALUNOS	Conclusões dos alunos	VALIDAÇÃO
G1	A1, A2, A3, A4 e A5	 Conclusão: Que o produto de duas razão inversa sempre dá 1	Válida
		Transcrição	
		Que o produto de duas razão inversa sempre dá 1	
G2	A6, A7, A8, A9, e A10	 Conclusão: Duas razões qundo são inversas o produto da razões é 1	Válida
		Transcrição	
		Duas razões quando são inversas o produto da razão é 1	

G3	A11, A12, A13, A14 e A15	 Conclusão: Nóis entendemos as Razões inversas iguais são 1. Transcrição Nós entendemos as razões inversas iguais são 1	Inválida
G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	 Conclusão: A razão inversa é quando o resultado do produto da razão é 1. A razão inversa é quando o resultado do produto da razão é 1	Parcialmente Válida
G5	A22, A23, A24, A25 e A26	 Conclusão: Duas razões são inversas quando o resultado do produto entre elas é igual a 1 Transcrição Duas razões são inversas quando o resultado do produto entre elas é igual a 1	Válida
G6	A27, A28, A29, A30, A31 e A32	 Conclusão: o produto da multiplicação de duas razões invertidas é igual a 1. O produto de duas razões invertidas é igual a 1	Válida

Fonte: Experimentação, 2023.

Logo após irem finalizando a atividade 02 realizamos a institucionalização de acordo com as conclusões que cada grupo escrevia na lousa, então formalizamos a conclusão geral "Quando o produto de duas razões é igual a 1 dizemos que as razões são inversas" e pedimos que anotassem em seus cadernos.

Estes resultados do quadro 11 revelam que a maioria dos grupos conseguiu realizar uma conclusão válida, dos 6 (seis) grupos, apenas 1 (um) grupo, o grupo G3, não conseguiu elaborar uma conclusão que fosse válida, o que não significa que os alunos não exploraram de forma adequada a atividade, podemos pensar que, apenas não souberam descrever uma conclusão a contento de uma formalização adequada para a atividade.

Acreditamos que poderiam não saber explicitar o raciocínio em forma escrita naquele momento, pois, ao multiplicarem as razões inversas dadas observaram os resultados de suas ações de forma parcial, pois ao analisarmos, o produto dos antecedentes e consequentes, serão iguais, e o resultado dessa razão será 1 (um) que poderá gerar confusão na hora de organizar uma representação escrita, como escreveram - “G3: Nós entendemos as razões inversas iguais são 1”, no entanto, o momento da institucionalização pôde mediar a internalização dessa representação de forma organizada.

A validação das conclusões ocorreu de forma que as conclusões escritas pelos grupos de alunos deveriam ter ligação com as ações realizadas e as ideias expostas. Assim trazemos a tabela 21 com o resultado das validades das conclusões da atividade 2 em frequência e percentual.

Tabela 21 – Validade das conclusões da atividade 02

VALIDADE DAS CONCLUSÕES	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	4	66,66%
Parcialmente válida	1	16,67%
Inválida	1	16,67%
Não formulou conclusão	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Observamos então que 66,66% dos alunos expressaram conclusões válidas, 16,67% conclusões parcialmente válidas e apenas 16,6% dos alunos expressaram conclusões inválidas. O que representa um bom desempenho nas atividades, conforme mostra a validade das conclusões, após as análises que fizeram para chegar a uma conclusão.

Posteriormente distribuí mais um roteiro para iniciarmos a aplicação da Atividade 03 - Razões equivalentes, teve duração de cerca de 40 min. Na ocasião dissemos pra seguirem o roteiro e o mesmo ritmo da atividade anterior que estavam indo bem. Observamos uma fala de um aluno A16 que fazia parte do grupo 4 que dizia, “*professora a senhora não está ensinando o que é pra fazer, assim não vamos aprender nada*”, mas também houve outra aluna A21 do mesmo grupo que disse “*rapaz tem que ler o roteiro e ir fazendo que dá, tu não quer nem ler*”.

Percebemos que de acordo com cada situação dada os alunos conseguiam representar a razão e acreditamos que a Atividade 01 deu esse suporte, pois, ao passo que as atividades pediam pra representar a razão os alunos conseguiram representar de forma correta, porém observamos que não tinham compreensão de simplificação dos termos da razão e não prosseguia a atividade, sendo necessário ir até a frente da lousa chamar a atenção no geral e instiga-los com perguntas do tipo: será que se nós dividirmos os termos de uma razão por um mesmo número vamos obter outra razão de mesmo valor? Escrevi no quadro uma razão 2/4 e pedi que escolhessem um número que dividiria ambos os termos, escolheram o número 2, realizamos a divisão por cada termo e assim exemplificamos a simplificação de uma razão escrita em forma de fração de maneira geral, ainda realizamos mais um exemplo de razão 6/18. Uma aluna A4 do grupo G1 ao perceber que podia chegar também em uma outra razão por meio da multiplicação ressaltou "*professora se multiplicar está certo*?" Respondi-lhe que sim, se você multiplicar os termos de uma razão por um mesmo número também encontrará outra razão, no entanto não estará simplificando, pedi-lhes que realizassem na calculadora a divisão da razão dada e em seguida da outra razão encontrada após simplificarmos e observar o resultado. Um aluno disse que dava iguais os resultados.

Após responderem as perguntas da situação 1, começaram a perceber que a pergunta inicial não seria a resposta correta e passaram a mudar suas respostas, percebendo a ideia de razão equivalente. A aluna A26 do grupo G5 acenou pra ir em seu grupo e falou "*faz sentido? Se aqui e aqui* (referiu-se ao item a e b da situação 1) *nós encontramos uma razão igual do número de torcedores do Cruzeiro e de torcedores do Vasco, então, é igual aqui também*" apontando para a resposta inicial da pergunta feita na situação 1, disse que fazia sentido sim o que estavam pensando. Os grupos conseguiram realizar as atividades e as observações, mas a institucionalização da atividade 03 não deu tempo de ser feita, então, ficou combinado que no próximo encontro escreveriam as observações na lousa e discutiríamos se estava correto.

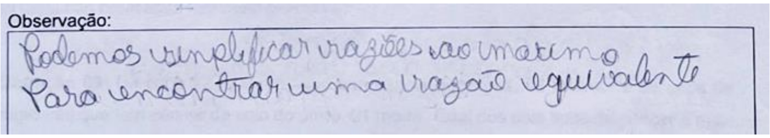
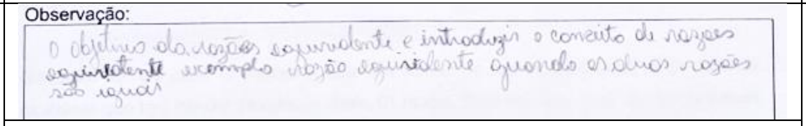
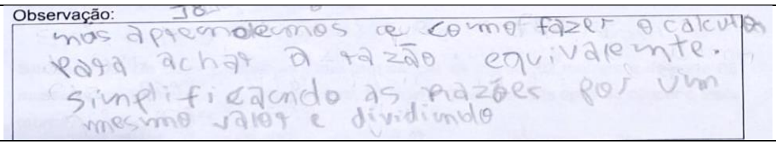
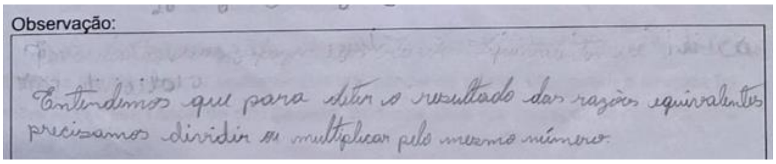
5.1.4 Quarto encontro: terceira sessão de ensino

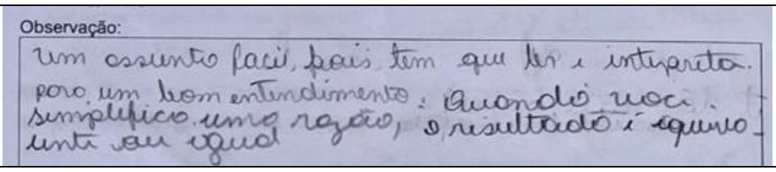
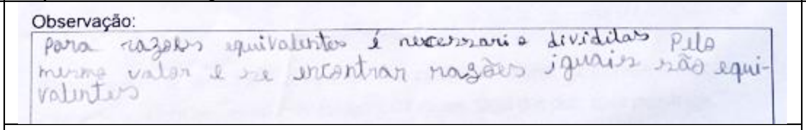
No dia 27/10/23 ocorreu o quarto encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:15h e finalizou à 14:35, participaram da aula 31 alunos.

Assim que entramos em sala de aula os alunos perguntaram se já era para formarem os grupos, disse que sim, e bem em seguida perguntaram se já iam escrever na lousa o que faltou fazer da aula do dia anterior, devolvi os roteiros da aula anterior que havia recolhido e orientei que cada grupo escrevessem as observações referente a atividade 3 na lousa e em seguida iríamos fazer a institucionalização.

O objetivo da atividade 03, era introduzir o conceito de razões equivalentes. No quadro 12 trazemos a transcrição das observações dadas pelos alunos e a validade de cada observação de acordo com objetivo pretendido com a atividade.

Quadro 12 – Conclusões dadas pelos alunos na atividade 03

GRUPO	ALUNOS	Conclusões dos alunos	VALIDAÇÃO
G1	A1, A2, A3, A4 e A5	 Observação: Podemos simplificar razões ao maximo Para encontrar uma razão equivalente Transcrição Podemos simplificar ao máximo para encontrar uma razão equivalente	Válida
G2	A6, A7, A8, A9, e A10	 Observação: O objetivo da razões equivalente e introduzir o conceito de razões equivalente exemplo razão equivalente quando as duas razões são iguais Transcrição O objetivo das razões equivalente é introduzir o conceito de razões equivalentes exemplo de razão equivalente quando as duas razões são iguais	Válida
G3	A11, A12, A13, A14 e A15	 Observação: nos aprendemos e como fazer o calculo para achar a razão equivalente. simplificando as razões por um mesmo valor e dividindo Transcrição Nós aprendemos e como fazer o cálculos para achar a razão equivalente. Simplificando as razões por um mesmo valor e dividindo	Válida
G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	 Observação: Entendemos que para obter o resultado das razões equivalentes precisamos dividir ou multiplicar pelo mesmo número. Entendemos que para obter o resultado das razões equivalentes precisamos dividir ou multiplicar pelo mesmo número	Parcialmente Válida

<table>
<tr><td rowspan="3">G5</td><td rowspan="3">A22, A23, A24, A25 e A26</td><td>
Observação:
Um assunto facil, pois tem que ler e interpreta. poro um bom entendimento: Quando voce simplifico uma razão, o resultado é equivalente ou igual</td><td rowspan="3">Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Um assunto fácil, pois tem que ler e interpreta para um bom entendimento. Quando você simplifica uma razão, o resultado é equivalente ou igual.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G6</td><td rowspan="2">A27, A28, A29, A30, A31 e A32</td><td>
Observação:
Para razões equivalentes é necessario dividilas Pelo mesmo valor e se encontrar razões iguais são equivalentes</td><td rowspan="2">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>Para razões equivalentes é necessário dividi-las pelo mesmo valor e se encontrar razões iguais são equivalentes.</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação, 2023.

Então após finalizarem a análise de seus registros e expressarem suas observações no roteiro e escreverem na lousa realizamos a institucionalização formalizando um conceito de que “Ao simplificarem ao máximo uma razão chegarão a outra(as) razões equivalentes”, ainda foi oportuno dizer que uma razão equivalente pode ser encontrada também se multiplicarmos os termos da razão por um mesmo valor, e pedimos que anotassem em seus cadernos.

Os resultados do quadro 12 denotam que os grupos conseguiram descrever observações válidas, apenas um grupo, o grupo G6 não elaborou uma observação completamente válida, no entanto, acreditamos em ser apenas uma questão de domínio para formar uma ideia escrita, pois, durante o desenvolvimento das atividades o grupo demonstrou entendimento, ao passo que obtiveram erros em cálculos procedimentais como ao simplificarem duas razões de forma incorreta chegaram a razões, ao serem comparadas, não equivalente onde seriam, o grupo ao serem orientados conseguiram perceber e sanar seus erros.

E como o título da atividade era “razões equivalentes” talvez tenham associado ao título a relação da execução da atividade com o que escreverem “Para razões equivalentes é necessário dividi-las pelo mesmo valor e se encontrar razões iguais são equivalentes” ou simplesmente tenha suprimido a palavra “encontrar” depois de “Para”, entretanto acreditamos que essa lacuna na organização da ideia geral foi esclarecida no momento da formalização da atividade.

A validação ocorreu de forma que as observações realizadas pelos grupos de alunos deviam estar em conformidade com o objetivo e a formalização geral do conceito de razão equivalente. Na tabela 22 mostramos o resultado das validades das conclusões da atividade 03 em frequência e percentual.

Tabela 22 – Validade das observações da atividade 03

VALIDADE DAS OBSERVAÇÕES	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	5	83,33%
Parcialmente válida	1	16,67%
Inválida	0	0,00%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Na tabela 22 observamos então que 83,33% dos grupos de alunos apresentaram conclusões válidas e 16,67% conclusões parcialmente válidas. E esses dados refletem um bom desempenho nas análises de seu desenvolvimento e registros que fizeram para chegar a uma boa observação da atividade.

Em seguida distribuímos aos grupos o roteiro da Atividade 4 - Escalas, a realização dessa atividade durou aproximadamente 50 min. Antes de iniciarem a atividade pedimos que realizassem uma correção em um dado da situação 3, então foi feita a correção. Ainda percebemos que a situação 6 estava se repetindo e por esse motivo orientamos que não seria necessário fazê-la uma vez que já haviam resolvido momentos antes se seguissem o roteiro conforme orientado.

Logo no início da atividade os alunos já sabiam que deviam seguir o roteiro, percebi isso devido os grupos iniciarem a leitura, no entanto percebi que não se sentiam confiantes em suas respostas, um aluno A26 do grupo G6, chamou e disse "*professora, tá certo isso aqui?*" e mostrou para o item *a* da situação 1 que pedia a razão entre as distâncias linear no mapa e a distância da realidade, confirmei que sim e o mesmo falou "*tem certeza que tá, é tão fácil assim*?", novamente disse que sim e pedi que continuassem.

Outra aluna A1 do grupo G1 acenou chamando, ao chegar perto perguntou "*como respondo essa aqui?*" apontou para a folha do roteiro na situação 1 letra *a,* direcionei-me ao grupo e perguntei se lembravam das aulas anteriores, como vocês fizeram pra representavam uma razão? Disseram, "*mais* *ou menos*", pedi que me dissessem então os dados que estavam na situação dada como a distância do mapa e a distância da realidade a aluna A1 falou "*como assim?*", disse-lhes que se já haviam lido a situação com atenção seria fácil saber os dados que estavam lá, os outros colegas de grupo A2 e A3 disseram "*ah tá é 1 e 10*", daí a aluna A1 disse "*então só fazer assim*" mostrando a razão representada em forma de fração, concordei e pedi que continuassem e confiassem em si e nos colegas para responderem.

Observei o desenvolvimento nas atividades dos outros grupos e ao perceber que estavam sem foco por conta das conversas chamava a atenção aos grupos, como no caso do grupo G4 que tinha um cubo mágico e estavam fazendo uso deixando apenas três alunos A17, A20 e A21 realizando as atividades. Reforcei-os que a atividade deveria ser coletiva e pedi que em outro momento usassem o cubo, agora era o momento de realizar a atividade, pediram desculpas e começaram a ajudar.

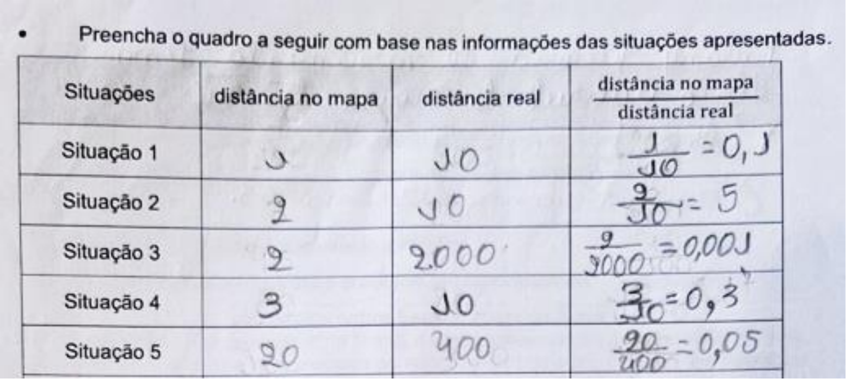
Ao passo que os grupos iam avançando em suas atividades, alguém do grupo chamava e íamos orientá-los. A hora de preencher o quadro foi um momento de bastante dúvidas dos grupos, mas percebemos o avanço das atividades pelos grupos, agora as dúvidas era como seria pra preencher o quadro da atividade, utilizando a frente da lousa para chamar a atenção. Perguntei, o que a atividade estava pedindo pra fazer? O aluno A27 do grupo G6 respondeu "*pra gente preencher a tabela*" e segui perguntando de onde vou tirar as informações pra preencher a tabela? O mesmo aluno disse "*de cada situação que a gente já viu*", disse então pra lerem novamente cada situação e verificassem qual era o dado de cada situação que pedia pra pôr na "tabela" e escrever.

Os grupos passaram a preencher o quadro e me chamavam pra verificar se estava correto, ao observar se havia erro orientava a fazerem de forma correta e no momento de escreverem a observação sempre que não conseguiam escrever indagava-os sobre qual era o objetivo da atividade e se percebiam algo comum no preenchimento do quadro com as respostas das situações dadas e as informações que o texto inicial trouxe, que se atentassem a isso e iriam conseguir escrever. Um aluno A11 do grupo G3 disse ao desfolhar a atividade “*é mesmo aqui na tabela tem respostas iguais ao dá nossa resposta, deixa eu ver o texto de novo*”.

À medida que os grupos iam finalizando a atividade 04, escreviam suas observações na lousa para então realizávamos a institucionalização a partir das observações realizadas por cada grupo.

O objetivo da atividade 04, era conceituar escala. No quadro 13 apresentamos resultados coletados de um quadro preenchido com dados de situações presente na atividade, suas as observações e a transcrição, bem como a validade de cada resultado apresentado no quadro pelos grupos e das observações, validadas de acordo com as ações desenvolvida de forma coerente e o objetivo pretendido com a atividade.

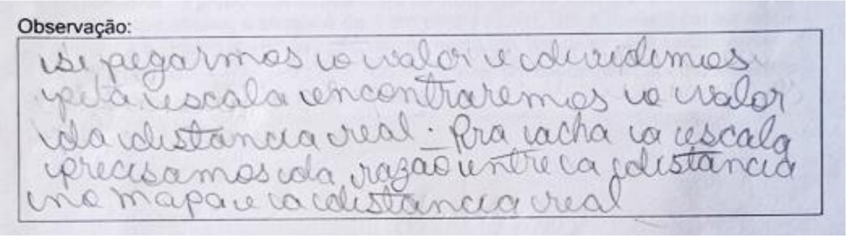
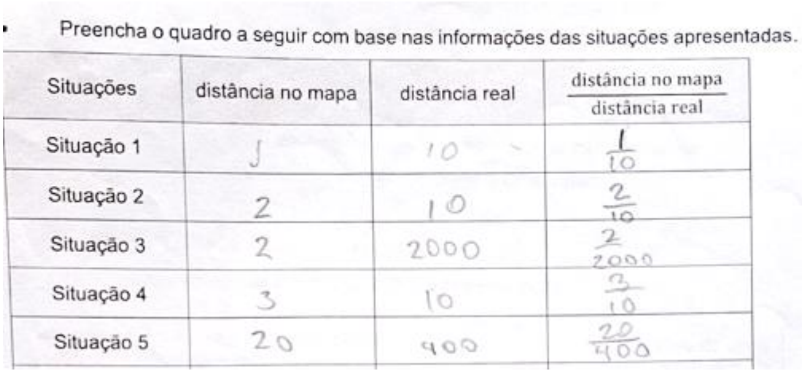
Quadro 13 – Quadro preenchido/Observações da atividade 04

<table>
<tr><th>GRUPO</th><th>ALUNOS</th><th>Quadro da atividade preenchido/Observações</th><th>VALIDADE</th></tr>
<tr><td rowspan="4">G1</td><td rowspan="4">A1, A2, A3, A4 e A5</td><td>Quadro da atividade 04 preenchido pelos alunos</td><td rowspan="4">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>


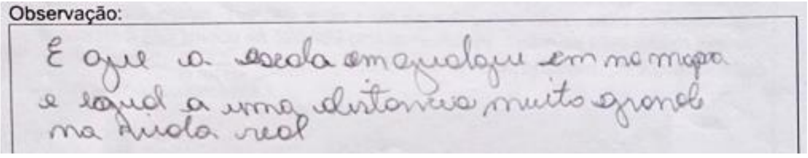
- Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.

Situações	distância no mapa	distância real	$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10} = 0,1$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10} = 5$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000} = 0,001$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10} = 0,3$
Situação 5	20	400	$\frac{20}{400} = 0,05$
</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>

Situações	Distância no mapa	Distância real	$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10} = 0,1$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10} = 5$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000} = 0,001$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10} = 0,3$
Situação 5	20	400	$\frac{20}{400} = 0,05$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="4"></td>
<td rowspan="4"></td>
<td>Observações</td>
<td rowspan="4">Válida</td>
</tr>
<tr>
<td>Observação:
se pegarmos o valor e dividimos pela escala encontraremos o valor da distância real. Pra acha a escala precisamos da razão entre a distância no mapa e a distância real</td>
</tr>
<tr>
<td>Transcrição</td>
</tr>
<tr>
<td>Se pegarmos o valor e dividimos pela escala encontraremos o valor da distância real. Pra achar a escala precisamos da razão entre a distância no mapa e a distância real</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="6">G2</td>
<td rowspan="6">A6,
A7,
A8,
A9,
e
A10</td>
<td>Quadro da atividade 04 preenchido pelos alunos</td>
<td rowspan="4">Válida</td>
</tr>
<tr>
<td>

• Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.

<table>
<tr><th>Situações</th><th>distância no mapa</th><th>distância real</th><th>$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}$</th></tr>
<tr><td>Situação 1</td><td>1</td><td>10</td><td>$\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>Situação 2</td><td>2</td><td>10</td><td>$\frac{2}{10}$</td></tr>
<tr><td>Situação 3</td><td>2</td><td>2000</td><td>$\frac{2}{2000}$</td></tr>
<tr><td>Situação 4</td><td>3</td><td>10</td><td>$\frac{3}{10}$</td></tr>
<tr><td>Situação 5</td><td>20</td><td>400</td><td>$\frac{20}{400}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Transcrição</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>Situações</th><th>Distância no mapa</th><th>Distância real</th><th>$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{distância real}}$</th></tr>
<tr><td>Situação 1</td><td>1</td><td>10</td><td>$\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>Situação 2</td><td>2</td><td>10</td><td>$\frac{2}{10}$</td></tr>
<tr><td>Situação 3</td><td>2</td><td>2000</td><td>$\frac{2}{2000}$</td></tr>
<tr><td>Situação 4</td><td>3</td><td>10</td><td>$\frac{3}{10}$</td></tr>
<tr><td>Situação 5</td><td>20</td><td>400</td><td>$\frac{20}{400}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Observação</td>
<td rowspan="2">Válida</td>
</tr>
<tr>
<td>Observação:
É que a escala em qualquer em no mapa e igual a uma distância muito grande na escala real</td>
</tr>
</table>

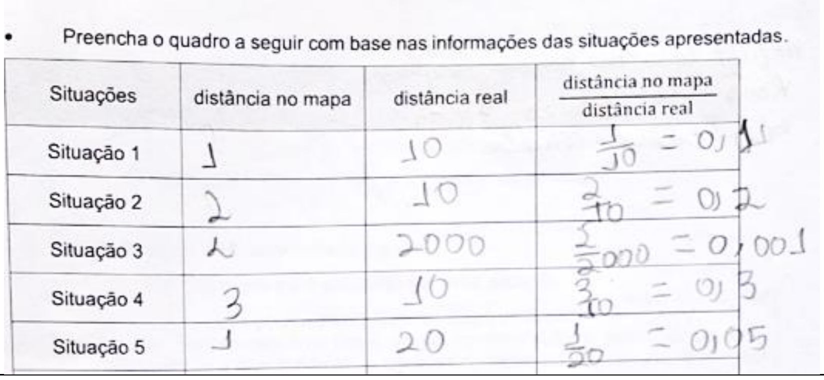
Transcrição

E que a escala em qualquer cm no mapa é igual a uma distância muito grande na vida real

G3

A11, A12, A13, A14 e A15

Quadro da atividade 04 preenchido pelos alunos



- Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.

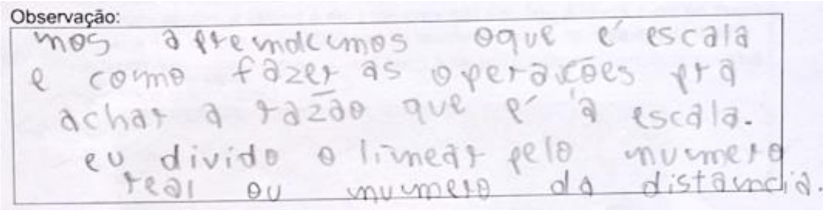
Situações	distância no mapa	distância real	$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10} = 0,1$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10} = 0,2$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000} = 0,001$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10} = 0,3$
Situação 5	1	20	$\frac{1}{20} = 0,05$

Transcrição

Situações	Distância no mapa	Distância real	$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10} = 0,1$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10} = 0,2$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000} = 0,001$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10} = 0,3$
Situação 5	1	20	$\frac{1}{20} = 0,05$

Válida

Observações



Observação:

nos aprendemos oque é escala e como fazer as operações pra achar a razão que é a escala. eu divido o linear pelo numero real ou numero da distância.

Transcrição

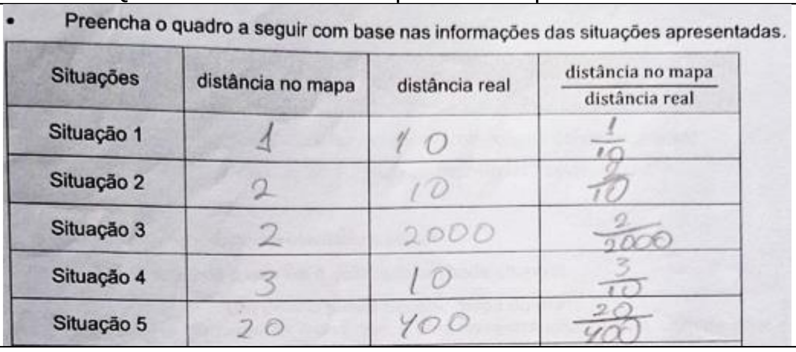
Nos aprendemos o que é escala e como fazer operações pra achar a razão que é a escala. Eu divido o linear pelo número real ou número da distância.

Parcialmente Válida

G4

A16, A17, A18, A19, A20 e A21

Quadro da atividade 04 preenchido pelos alunos



- Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.

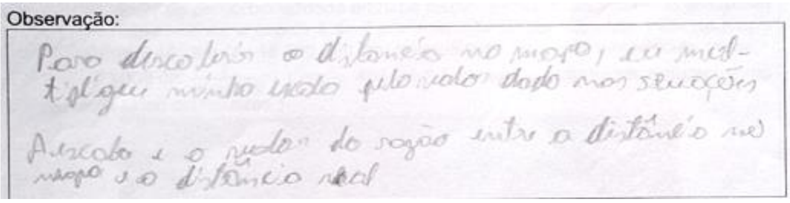
Situações	distância no mapa	distância real	$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10}$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10}$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000}$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10}$
Situação 5	20	400	$\frac{20}{400}$

Válida

Transcrição

Situações	Distância no mapa	Distância real	$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10}$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10}$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000}$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10}$
Situação 5	20	400	$\frac{20}{400}$

Observação



Observação:

Para descobrir a distância no mapa, eu mul-tipliquei minha escala pelo valor dado nas situações

A escala é o valor da razão entre a distância no mapa e a distância real

Transcrição

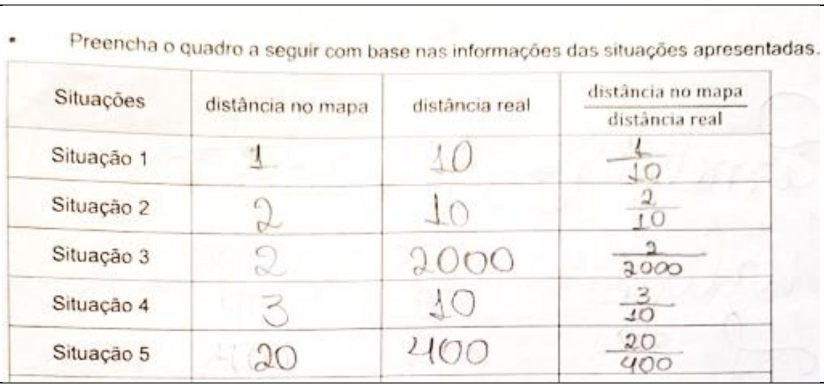
Para descobrir a distância no mapa, eu multipliquei minha escala pelo valor dado nas situações
A escala e o valor da razão entre a distância no mapa e a distância real

Válida

G5

A22, A23, A24, A25 e A26

Quadro da atividade 04 preenchido pelos alunos



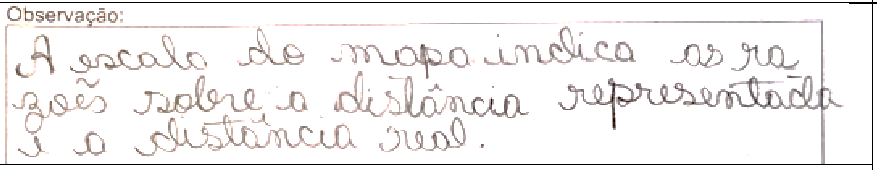
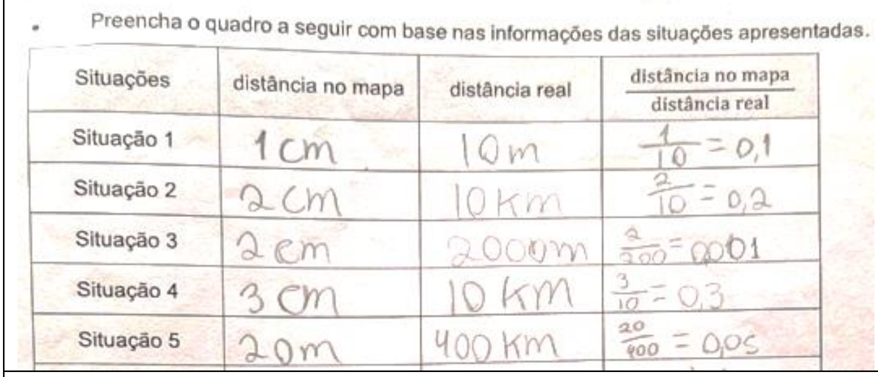
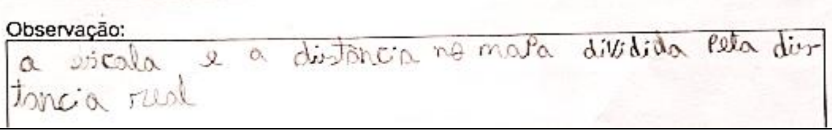
- Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.

Situações	distância no mapa	distância real	$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10}$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10}$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000}$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10}$
Situação 5	20	400	$\frac{20}{400}$

Transcrição

Situações	Distância no mapa	Distância real	$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1	1	10	$\frac{1}{10}$
Situação 2	2	10	$\frac{2}{10}$
Situação 3	2	2000	$\frac{2}{2000}$
Situação 4	3	10	$\frac{3}{10}$
Situação 5	20	400	$\frac{20}{400}$

Válida

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>Observação</td><td></td></tr>
<tr><td>
Observação:
A escala do mapa indica as razões sobre a distância representada e a distância real.</td><td rowspan="3">Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>A escala do mapa indica as razões sobre a distância representada e a distância real.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">G6</td><td rowspan="8">A27,
A28,
A29,
A30,
A31
e
A32</td><td>Quadro da atividade 04 preenchido pelos alunos</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.
<table>
<tr><th>Situações</th><th>distância no mapa</th><th>distância real</th><th>distância no mapa / distância real</th></tr>
<tr><td>Situação 1</td><td>1 cm</td><td>10 m</td><td>$\frac{1}{10} = 0,1$</td></tr>
<tr><td>Situação 2</td><td>2 cm</td><td>10 km</td><td>$\frac{2}{10} = 0,2$</td></tr>
<tr><td>Situação 3</td><td>2 cm</td><td>2000 m</td><td>$\frac{2}{200} = 0,001$</td></tr>
<tr><td>Situação 4</td><td>3 cm</td><td>10 km</td><td>$\frac{3}{10} = 0,3$</td></tr>
<tr><td>Situação 5</td><td>20 m</td><td>400 km</td><td>$\frac{20}{400} = 0,05$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><th>Situações</th><th>Distância no mapa</th><th>Distância real</th><th>$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{distância real}}$</th></tr>
<tr><td>Situação 1</td><td>1 cm</td><td>10 m</td><td>$\frac{1}{10} = 0,1$</td></tr>
<tr><td>Situação 2</td><td>2 cm</td><td>10 km</td><td>$\frac{2}{10} = 0,2$</td></tr>
<tr><td>Situação 3</td><td>2 cm</td><td>2000 m</td><td>$\frac{2}{2000} = 0,001$</td></tr>
<tr><td>Situação 4</td><td>3 cm</td><td>10 km</td><td>$\frac{3}{10} = 0,3$</td></tr>
<tr><td>Situação 5</td><td>20 m</td><td>400 km</td><td>$\frac{20}{400} = 0,05$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Observação</td><td></td></tr>
<tr><td>
Observação:
a escala é a distância no mapa dividida pela distância real</td><td rowspan="3">Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>A escala é a distância no mapa dividida pela distância real</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação, 2023.

De acordo com o objetivo da atividade formalizamos o conceito geral para a turma que “Escala é a razão entre a medida linear representada no mapa e a medida linear real”, também enfatizamos a ideia de que a escala não é utilizada apenas em mapas, mas em outras situações como em maquetes de prédio, miniaturas de objetos e então pedimos que anotassem em seus cadernos o conceito de escala.

De acordo com os resultados mostrado no quadro 13, o grupo de alunos G1 obtiveram validação parcialmente válida em relação ao seu preenchimento do quadro da atividade, na situação 2 representaram a razão entre a distância no mapa e a distância real de forma correta, no entanto, realizaram o cálculo numérico de forma incorreta o que resultou em um valor que não condiz com um valor proporcional, embora acreditarmos que a ação ocorreu dessa forma, por realizarem o cálculo da divisão invertendo seus termos, pois, durante o desenvolvimento da atividade encontraram os coeficiente de proporcionalidade de forma correta, ainda assim, com o resultado expressado a relação entre a distância no mapa e a distância na realidade, não seria mais proporcional.

Interessante mostrar que o grupo de alunos o G3 diferiu os valores representados para a distância no mapa e distância real dos outros grupos na situação 5, isso ocorreu, pois, a situação na letra ***a*** perguntava qual era a razão entre a distância no mapa e a distância real e que pedia para simplificá-las ao máximo e assim o grupo representou na forma simplificada (1/20). E apesar de que na situação a distância representada no mapa fosse 20cm e distância real fosse 400km, acreditamos que os alunos utilizaram estes valores, pois conseguiram estabelecer a relação de equivalência para as distâncias representada em escala mantendo uma proporcionalidade, tendo então uma validação válida.

Entretanto o grupo de alunos G3 apesar de desenvolver a atividade e conseguir preencher o quadro da atividade muito bem, ainda teve dificuldade para ter uma validação totalmente válida, no entanto, acreditamos que é apenas a falta de domínio de uma escrita coerente, pois, o que o grupo escreveu foi desenvolvido na atividade.

Assim a validação ocorreu de forma que o preenchimento do quadro da atividade 04 devia estar de acordo com o as ações desenvolvidas de forma coerente e as observações realizadas pelos alunos estivesse conforme análises pontuais de procedimentos corretos relacionadas de forma que pudessemos chegar ao objetivo na formalização geral do conceito de escala. A tabela 23 enfatizará o resultado das validades do preenchimento do quadro da atividade

04 em frequência e percentual e a tabela 24 mostrará a validade das observações.

Tabela 23 – Validade do preenchimento do quadro da atividade 04

VALIDADE DO PREENCHIMENTO DO QUADRO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	5	83,33%
Parcialmente válida	1	16,67%
Inválida	0	0,00%
Não preencheu o quadro	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Tabela 24 – Validade das observações da atividade 04

VALIDADE DA OBSERVAÇÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	5	83,33%
Parcialmente válida	1	16,67%
Inválida	0	0,00%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Observamos na tabela 23 que a quantidade da frequência válida, teve um percentual de 83,33% dos grupos de alunos que apresentaram preenchimento do quadro, válidas, e 16,67% parcialmente válidas. As observações tiveram o mesmo valor de frequência válida e parcialmente válidas como mostra na tabela 24. Sendo por nós considerado, que esses dados refletem um bom desenvolvimento durante a atividade 04 e nas análises de seus registros.

5.1.5 Quinto encontro: quarta sessão de ensino

No dia 01/11/23 ocorreu o quinto encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:15h e finalizou à 14:35, aplicamos as Atividade 05 - Densidade demográfica, houve 32 alunos participantes da aula, a realização da atividade levou aproximadamente 40 min para ser concluída. Ao entrarmos em sala de aula apenas um grupo logo se organizou, então, pedimos que os demais grupos se organizassem também.

Distribuí os roteiros da atividade 05 a cada grupo, os grupos já estavam familiarizados com a dinâmica das aulas, nesse dia percebi os estudantes do grupo G2 se aproximando um do outro pra conseguirem escutar o que um aluno estava lendo para todo o grupo ao perceber que estavam em conversas muito alta e alguns grupos não haviam iniciado a leitura, chamei a atenção no geral para que não atrapalhassem os colegas e que também deveriam realizar a atividade.

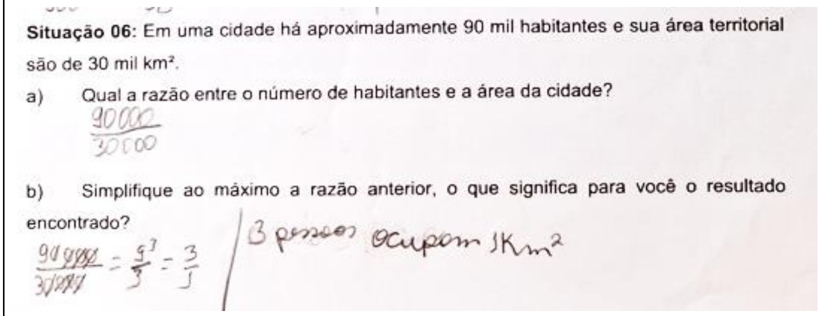
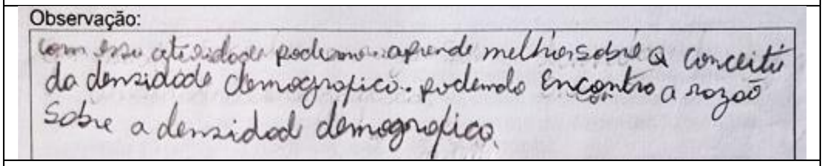
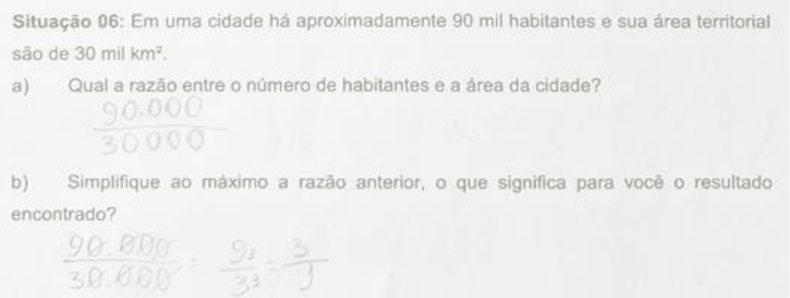
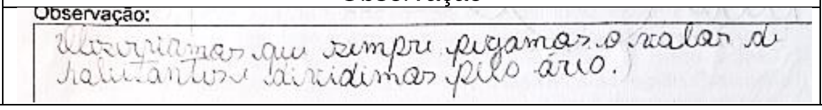
De imediato se acalmaram e realizaram a atividades, a aluna A26 do Grupo G5 observou que a situação 2 se referia a um evento local e mostrando que respondeu à pergunta e conhecer o evento, disse "*professora deu muita gente mesmo nisso ó, a senhora estava na cavalgada?*", respondi que não sabia montar a cavalo e ela continuou em tom de descontração dizendo "*eu estava lá arrasando*".

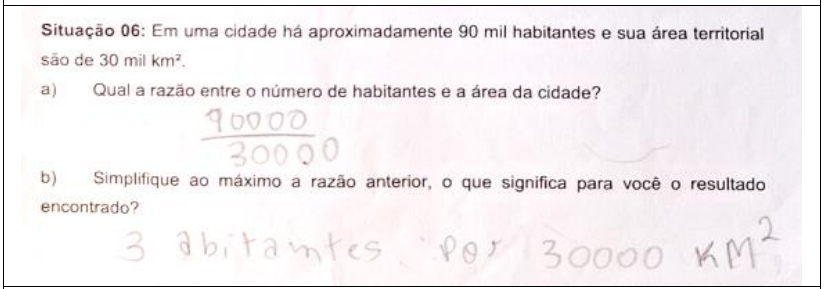
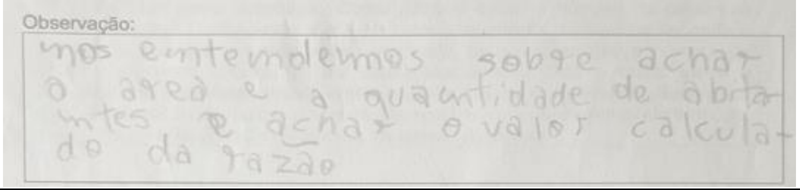
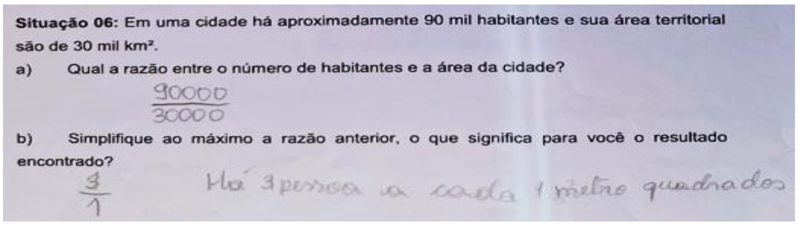
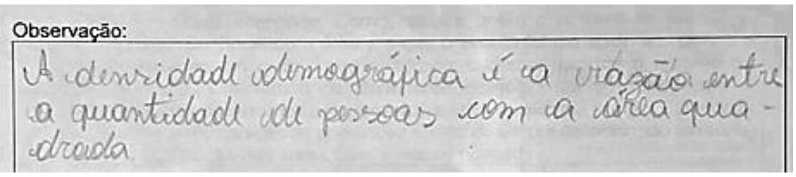
O desenvolvimento da atividade ocorreu sem muitas chamadas dos grupos para que fossemos orientar em algo, observamos que escreviam a representação de razão com certeza de estarem corretos, mas ainda assim chamavam pra verificar, um aluno A3 do grupo G1, preencheu o quadro e pediu que verificasse se estava correto, analisamos as situações dadas e o quadro com as anotações e confirmamos que estavam, de imediato alguém do mesmo grupo disse "*te falei que estava tudo certo*".

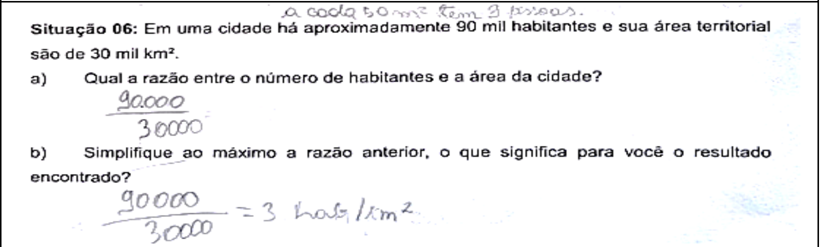
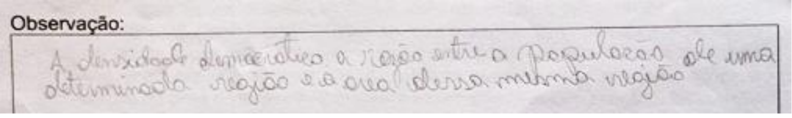
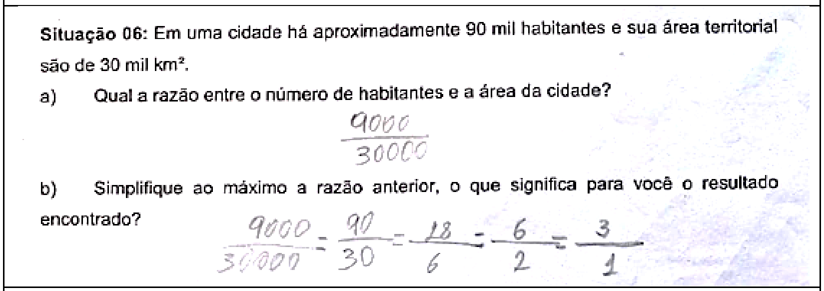
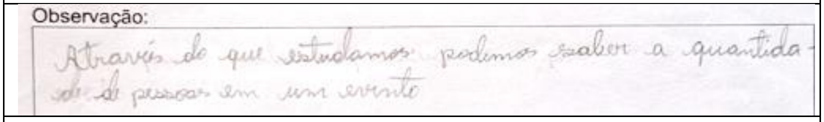
A atividade 05 tinha como objetivo conceituar densidade demográfica. No quadro 14 apresentamos resultados coletados das respostas dadas pelos alunos referentes a uma situação problema presente na atividade, suas observações e a transcrição, ainda apresentamos a validade de cada resultado apresentado pelos alunos para a situação 06 dada na atividade.

A validação das respostas para a situação 06, ocorrerá de acordo com as respostas dos itens (*a* e *b*) estarem em consonância com a resposta devida e ainda conseguirem estabelecer uma relação com o resultado da razão, explicando o significado do resultado encontrado. Já a validade das observações, ocorrerá de forma que o aluno consiga expressar a ação desenvolvida durante a atividade de forma coerente e que consiga ou favoreça chegar ao objetivo pretendido com a atividade.

Quadro 14 – Respostas da situação 6/Observações, da atividade 05

GRUPO	ALUNOS	Resposta da situação 6/Observações	VALIDADE
G1	A1, A2, A3, A4 e A5	Resposta da situação 6, dada pelos alunos	Válida
		 **Situação 06:** Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km². a) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade? $\frac{90000}{30000}$ b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado? $\frac{90000}{30000} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$ | 3 pessoas ocupam 1Km²	
		Transcrição	
		a) $\frac{90000}{30000}$ b) $\frac{90000}{30000} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$ / 3 pessoas ocupam 1km²	
		Observação	Parcialmente Válida
		 Observação: Com essa atividade podemos aprende melhor sobre a conceito da densidade demografico. podendo Encontro a razão Sobre a densidad demografico.	
		Transcrição	
		Com essa atividade podemos aprender melhor sobre o conceito da densidade demográfica podendo encontrar a razão sobre a densidade demográfica	
G2	A6, A7, A8, A9, e A10	Resposta da situação 6, dada pelos alunos	Parcialmente Válida
		 **Situação 06:** Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km². a) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade? $\frac{90.000}{30000}$ b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado? $\frac{90.000}{30.000} = \frac{9_3}{3_3} = \frac{3}{1}$	
		Transcrição	
		a) $\frac{90.000}{30.000}$ b) $\frac{90000}{30000} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$	
		Observação	Válida
		 Observação: Observamos que sempre pegamos o valor d habitantes dividimos pelo área.	

		Transcrição	
		Observamos que sempre pegamos o valor de habitantes e dividimos pela área.	
G3	A11, A12, A13, A14 e A15	Resposta da situação 6, dada pelos alunos	Parcialmente Válida
		 Situação 06: Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km². a) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade? $\frac{90000}{30000}$ b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado? 3 abitantes por 30000 KM²	
		Transcrição	
		a) $\frac{90.000}{30.000}$ b) 3 abitantes por 30000 km²	
		Observação	Válida
		 Observação: nos entendemos sobre achar o area e a quantidade de abtantes e achar o valor calculado da razão	
		Transcrição	
		Nós entendemos sobre achar a área e quantidade de abitantes e achar o valor cálculado da razão	
G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	Resposta da situação 6, dada pelos alunos	Válida
		 Situação 06: Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km². a) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade? $\frac{90000}{30000}$ b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado? $\frac{3}{1}$ Há 3 pessoa a cada 1 metro quadrados	
		Transcrição	
		a) $\frac{90.000}{30.000}$ b) $\frac{3}{1}$ Há 3 pessoas a cada 1 metro quadrados	
		Observação	Válida
		 Observação: A densidade demográfica é a razão entre a quantidade de pessoas com a área quadrada	
		Transcrição	
		A densidade demográfica é a razão entre a quantidade de pessoas com a área quadrada	

G5	A22, A23, A24, A25 e A26	Resposta da situação 6, dada pelos alunos	Válida
		 a cada 50 m² tem 3 pessoas. **Situação 06:** Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km². a) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade? $\frac{90.000}{30000}$ b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado? $\frac{90000}{30000} = 3$ hab/km²	
		Transcrição	
		a) $\frac{90.000}{30.000}$ b) $\frac{90.000}{30.000} = 3\ hab/km^2$	
		Observação	
		 Observação: A densidade demográfica a razão entre a população de uma determinada região e a área dessa mesma região	Válida
		Transcrição	
		A densidade demográfica a razão entre a população de uma determinada região e a área dessa minha região.	
G6	A27, A28, A29, A30, A31 e A32	Resposta da situação 6, dada pelos alunos	Parcialmente Válida
		 **Situação 06:** Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km². a) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade? $\frac{9000}{30000}$ b) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado? $\frac{9000}{30000} = \frac{90}{30} = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$	
		Transcrição	
		a) $\frac{90.000}{30.000}$ b) $\frac{90000}{30000} = \frac{90}{30} = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$	
		Observação	Válida
		 Observação: Através do que estudamos podemos saber a quantida- de de pessoas em um evento	
		Transcrição	
		Através do que estudamos podemos saber a quantidade de pessoas em um evento	

Fonte: Experimentação, 2023.

Então, após os grupos finalizarem a atividade 05 realizamos a institucionalização de acordo com as observações que cada grupo escrevia na lousa. Considerando o objetivo da atividade e o resultado das observações formalizamos o conceito geral para a turma que “A Densidade demográfica é a razão entre o número de uma população e a área ocupada” reforçando que essa representação é de muita relevância para compararmos por exemplo o quantitativo de pessoas/habitantes que cabe em cada área ocupada (m², km²) e pedimos que anotassem em seus cadernos o conceito de densidade demográfica.

No quadro 14, aparece os resultados apresentados pelos grupo referente a atividade 05, o qual os grupos de alunos G2, G3 e G6 obtiveram validação, parcialmente válida, em relação a respostas dadas na situação 6, os grupos representaram a razão entre o número de habitantes e a área de forma correta, realizaram a simplificação da razão como solicitado no entanto, os grupos de alunos G2 e G6 não expressaram qual significado teria o resultado encontrado como pedíamos, o grupo de alunos G3 conseguiu expressar o significado, porém, equivocou-se ao dizer que o resultado significava “3 abitantes por 30000 km²”, acreditamos que fizeram uma comparação no resultado com o número de habitantes e a área, entretanto, se confundiram ao utilizar a área total para comparar com o resultado do quantitativo de habitantes que haviam simplificado e esses fatores nos levaram a considerarmos suas respostas, não incorretas, mas parcialmente válidas.

Já os grupos de alunos G1, G4 e G5 tiveram as validações de acordo com seus resultados, válidas, pois, conseguiram representar de forma satisfatória suas respostas para a situação em questão.

Mostraremos na tabela 05, a frequência dos resultados em percentual das validades das respostas dadas para a situação 6 dos grupos de alunos, a validação ocorreu de acordo que as respostas dos itens (*a* e *b*) deviam estar em consonância com o procedimento devido e ainda conseguirem estabelecer uma relação com o resultado da razão, explicando o significado do resultado encontrado.

Tabela 25 – Validade das respostas do problema/situação 6, dos alunos na atividade 05

VALIDADE DAS RESPOSTAS	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	3	50%
Parcialmente válida	3	50%
Inválida	0	0,00%
Não respondeu o(a) problema/situação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

O resultado apresentado na tabela 25 demonstra que a quantidade em percentual de 50% dos grupos de alunos apresentou respostas, válidas, e 50% dos grupos de alunos conseguiram responder de forma, parcialmente válido. Diante deste resultado e do acompanhamento dos procedimentos, inferimos que a atividade teve um bom aproveitamento em seu desenvolvimento.

Ainda de acordo com o quadro 14, o resultado mostra que os grupos G2, G3, G4, G5 e G6 manifestaram observações válidas, apenas o grupo G1 expressou observação parcialmente válida, no entanto, acreditemos que a dificuldade deva estar em uma incoerência na forma escrita, pois os procedimentos realizados durante a atividade por nós acompanhado e analisado revelam um bom desenvolvimento.

A tabela 26, evidenciará a validade das observações da atividade 05, em percentual, considerando o que os grupos de alunos manifestaram na ação desenvolvida durante a atividade de forma coerente e que consigam ou favoreça chegar ao objetivo pretendido com a atividade. Os dados percentuais são apresentados de acordo a frequência das respostas dadas pelos 6 grupos de alunos.

Tabela 26 – Validade das observações da atividade 05

VALIDADE DA OBSERVAÇÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	5	83,33%
Parcialmente válida	1	16,67%
Inválida	0	0,00%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Portanto, de acordo com o que mostra a tabela 26, as observações válidas atingiram um percentual de 83,33% e 16,67% das observações foram parcialmente válidas. E por esses grupos de alunos terem alcançados resultados válidos, podemos considerar que esses dados são reflexo de um bom desenvolvimento durantes a atividade e nas análises de seus registros.

Após finalizarmos a institucionalização da atividade, disse que entregaria mais uma atividade, reclamaram dizendo "*está bom por hoje professora, bora deixar pro outro dia professora essa outra aí*". Disse que ainda faltava muito tempo pra terminar o horário cerca de 20 min, mas que podíamos fazer o seguinte, iriamos distribuir o roteiro, apenas para lerem depois iriam devolver e na próxima aula entregava-os novamente para realizarem as atividades, concordaram e assim finalizamos a aula.

5.1.6 Sexto encontro: quinta sessão de ensino

No dia 02/11/2023, ocorreu o sexto encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 14:55h, com um intervalo e finalizou à 16:10, participaram da aula todos os 32 alunos matriculados e neste dia foi aplicado a Atividade 06 - Velocidade Média de um corpo em movimento. A aplicação da atividade levou um tempo de aproximadamente 60 min para ser concluída.

De início, foi necessário pedir para que os grupos se organizassem, os alunos se organizaram em seus grupos e então distribuímos o roteiro aos grupos. Um aluno falou assim que entregamos o roteiro "*professora é até bom que a gente nem escreve do quadro, mas é ruim ter que fazer essas observações ô*", o outro aluno aproveitou e disse "*é "verdade mesmo professora*", falei que ficassem tranquilos e realizassem a atividade que iriam conseguir fazer facilmente, pois já haviam feito as anteriores então dariam conta dessa também.

Tinha dois grupos que estavam muitos dispersos, o grupo G1 apenas dois alunos estavam interessado em fazer a atividade os demais estavam formando o grupo, porém não participavam da leitura ficando com rosto abaixado na cadeira, fomos até eles, perguntamos o que estava acontecendo, disseram que não havia nada, que já iam ajudar a fazer a atividade.

Já o outro grupo, o G4, três alunos (A17, A20, A21) estavam interagindo para realizar a atividade os alunos (A16, A18 e A19) estavam brincando com dois cubos mágicos, fomos até eles e conversamos, dissemos que naquele momento deveriam estar realizando a atividade e que guardaríamos o cubo que estavam distraindo-os e no final da aula devolveríamos, e que eles deveriam participar da aula ajudando seus colegas na atividade, concordaram e deram continuidade com os colegas de grupo.

Ao passar observando os grupos perguntava se estava conseguindo dar andamento nas atividades a aluna A26 do grupo G5 disse que *"esta até fácil essa primeira folha, não sei o resto estamos terminando essa aqui da Van que vai daqui do Rep. até Tucuruí*".

Um aluno do grupo G1 chamou e perguntou se o quadro que era pra preencher deviam colocar o mesmo número que tá na questão que resolveram "*olhe professora, tipo assim?"* e a aluna A1 anotou no quadro os valores da situação 1, concordei com o que fizeram e disse que continuassem respondendo.

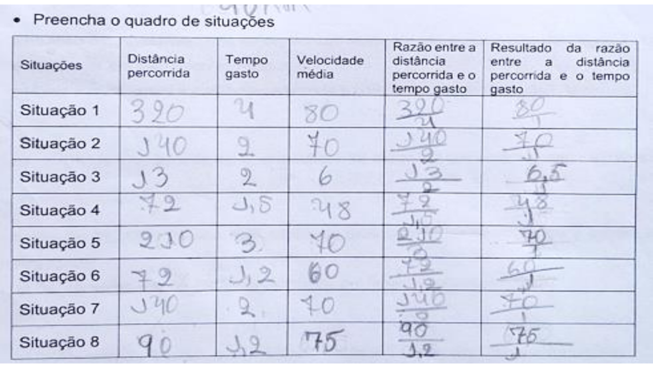
Apresentaremos no quadro 15 resultados coletados referentes as respostas preenchidas pelos alunos no quadro da atividade de cada situação problema propostos na atividade, suas observações e as transcrições, ainda apresentaremos a validação de cada resultado apresentado pelos alunos que devem estar em conformidade com os procedimentos orientados, respostas com cálculos favoráveis, ainda coerência ao significado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, em cada situação respondida.

Além de apresentar a validação de cada observação dada pelos alunos que devem expressar a ação desenvolvida durante a atividade de forma coerente e que consiga ou favoreça chegar ao objetivo pretendido com a atividade 06 que é conceituar velocidade média.

Quadro 15 – Quadro preenchido/Observações, da atividade 06

<table>
<tr><th>GRUPO</th><th>ALUNOS</th><th>Quadro da atividade preenchido/Observações</th><th>VALIDADE</th></tr>
<tr><td>G1</td><td>A1, A2, A3, A4 e A5</td><td>

Quadro da atividade 06 preenchido pelos alunos



- Preencha o quadro de situações

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1	320	4	80	$\frac{320}{4}$	$\frac{80}{1}$
Situação 2	140	2	70	$\frac{140}{2}$	$\frac{70}{1}$
Situação 3	13	2	6	$\frac{13}{2}$	$\frac{6,5}{1}$
Situação 4	72	1,5	48	$\frac{72}{1,5}$	$\frac{48}{1}$
Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	$\frac{70}{1}$
Situação 6	72	1,2	60	$\frac{72}{1,2}$	$\frac{60}{1}$
Situação 7	140	2	70	$\frac{140}{2}$	$\frac{70}{1}$
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1,2}$	$\frac{75}{1}$

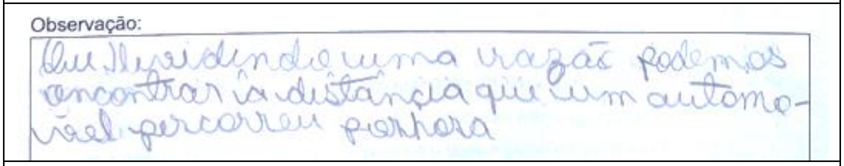
Transcrição

<table>
<tr><th>Situações</th><th>Distância percorrida</th><th>Tempo gasto</th><th>Velocidade média</th><th>Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto</th><th>Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto</th></tr>
<tr><td>Situação 1</td><td>320</td><td>4</td><td>80</td><td>$\frac{320}{4}$</td><td>$\frac{80}{1}$</td></tr>
<tr><td>Situação 2</td><td>140</td><td>2</td><td>70</td><td>$\frac{140}{2}$</td><td>$\frac{70}{1}$</td></tr>
<tr><td>Situação 3</td><td>13</td><td>2</td><td>6</td><td>$\frac{13}{2}$</td><td>$\frac{6,5}{1}$</td></tr>
<tr><td>Situação 4</td><td>72</td><td>1,5</td><td>48</td><td>$\frac{72}{1,5}$</td><td>$\frac{48}{1}$</td></tr>
</table>

</td><td>Parcialmente Válida</td></tr>
</table>

Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	$\frac{70}{1}$
Situação 6	72	1,2	60	$\frac{72}{1,2}$	$\frac{60}{1}$
Situação 7	140	2	70	$\frac{140}{2}$	$\frac{70}{1}$
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1,2}$	$\frac{75}{1}$

Observações



Observação:

Que dividindo uma razão podemos encontrar a distância que um automó-vel percorreu porhora

Transcrição

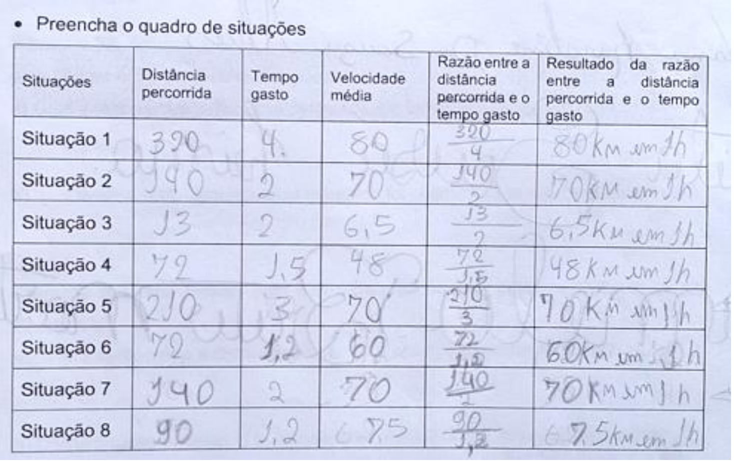
Que dividindo uma razão podemos encontrar a distância que um automóvel percorre por hora

Inválida

G2

A6, A7, A8, A9, e A10

Quadro da atividade 06 preenchido pelos alunos



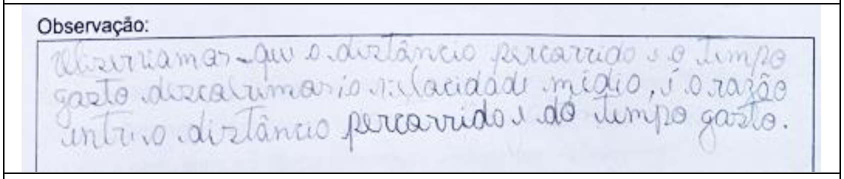
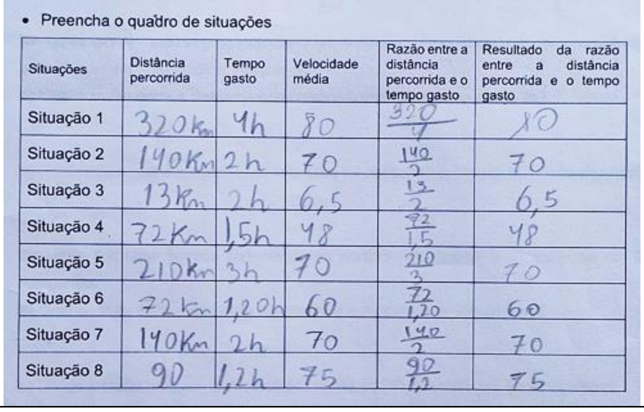
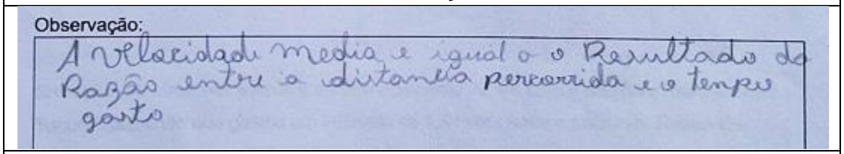
- Preencha o quadro de situações

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1	320	4	80	$\frac{320}{4}$	80km em 1h
Situação 2	140	2	70	$\frac{140}{2}$	70KM em 1h
Situação 3	13	2	6,5	$\frac{13}{2}$	6,5km em 1h
Situação 4	72	1,5	48	$\frac{72}{1,5}$	48km em 1h
Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	70km em 1h
Situação 6	72	1,2	60	$\frac{72}{1,2}$	60Km em 1h
Situação 7	140	2	70	$\frac{140}{2}$	70km em 1h
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1,2}$	75km em 1h

Transcrição

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1	320	4	80	$\frac{320}{4}$	80km em 1hora
Situação 2	140	2	70	$\frac{140}{2}$	70km em 1hora
Situação 3	13	2	6,5	$\frac{13}{2}$	6,5km em 1hora
Situação 4	72	1,5	48	$\frac{72}{1,5}$	48km em 1hora
Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	70km em 1hora
Situação 6	72	1,2	60	$\frac{72}{1,2}$	60km em 1hora
Situação 7	140	2	70	$\frac{140}{2}$	70km em 1hora
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1,2}$	75km em 1hora

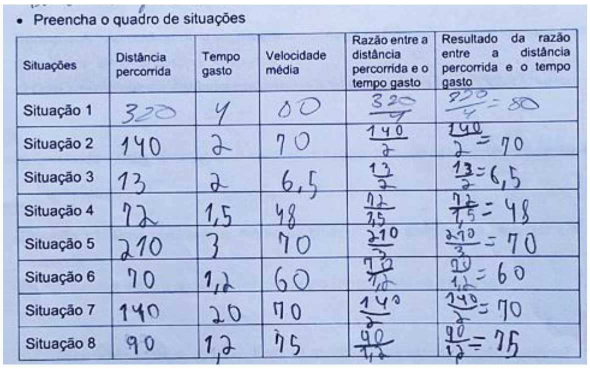
Parcialmente Válida

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>Observação</td><td rowspan="4">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>
Observação:
Observriamos que o distâncio percorrido e o tempo gasto descalumarios velacidade médio, e o razão entre o distâncio percorrido e do tempo gasto.</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Observamos que a distância percorrida e o tempo gasto descobrimos a velocidade média, e a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">G3</td><td rowspan="4">A11, A12, A13, A14 e A15</td><td>Quadro da atividade 06 preenchido pelos alunos</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
• Preencha o quadro de situações
<table>
<tr><th>Situações</th><th>Distância percorrida</th><th>Tempo gasto</th><th>Velocidade média</th><th>Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto</th><th>Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto</th></tr>
<tr><td>Situação 1</td><td>320km</td><td>4h</td><td>80</td><td>$\frac{320}{4}$</td><td>80</td></tr>
<tr><td>Situação 2</td><td>140Km</td><td>2h</td><td>70</td><td>$\frac{140}{2}$</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Situação 3</td><td>13Km</td><td>2h</td><td>6,5</td><td>$\frac{13}{2}$</td><td>6,5</td></tr>
<tr><td>Situação 4</td><td>72Km</td><td>1,5h</td><td>48</td><td>$\frac{72}{1,5}$</td><td>48</td></tr>
<tr><td>Situação 5</td><td>210km</td><td>3h</td><td>70</td><td>$\frac{210}{3}$</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Situação 6</td><td>72km</td><td>1,20h</td><td>60</td><td>$\frac{72}{1,20}$</td><td>60</td></tr>
<tr><td>Situação 7</td><td>140Km</td><td>2h</td><td>70</td><td>$\frac{140}{2}$</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Situação 8</td><td>90</td><td>1,2h</td><td>75</td><td>$\frac{90}{1,2}$</td><td>75</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><th>Situações</th><th>Distância percorrida</th><th>Tempo gasto</th><th>Velocidade média</th><th>Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto</th><th>Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto</th></tr>
<tr><td>Situação 1</td><td>320 km</td><td>4 h</td><td>80</td><td>$\frac{320}{4}$</td><td>80</td></tr>
<tr><td>Situação 2</td><td>140 km</td><td>2 h</td><td>70</td><td>$\frac{140}{2}$</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Situação 3</td><td>13 km</td><td>2 h</td><td>6,5</td><td>$\frac{13}{2}$</td><td>6,5</td></tr>
<tr><td>Situação 4</td><td>72 km</td><td>1,5 h</td><td>48</td><td>$\frac{72}{1,5}$</td><td>48</td></tr>
<tr><td>Situação 5</td><td>210 km</td><td>3 h</td><td>70</td><td>$\frac{210}{3}$</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Situação 6</td><td>72 km</td><td>1,2 h</td><td>60</td><td>$\frac{72}{1,2}$</td><td>60</td></tr>
<tr><td>Situação 7</td><td>140 km</td><td>2 h</td><td>70</td><td>$\frac{140}{2}$</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Situação 8</td><td>90</td><td>1,2 h</td><td>75</td><td>$\frac{90}{1,2}$</td><td>75</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>Observações</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
Observação:
A velocidade media e igual o o Resultado da Razão entre a ditancia percorrida e o tempo gasto</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>A velocidade média é igual ao resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto</td></tr>
</table>

G4

A16, A17, A18, A19, A20 e A21

Quadro da atividade 06 preenchido pelos alunos

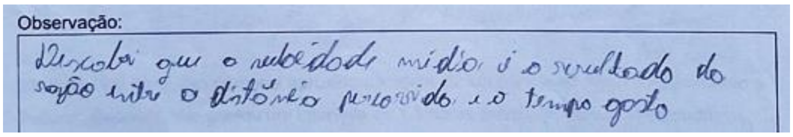


Transcrição

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1	320	4	80	$\frac{320}{4}$	$\frac{320}{4} = 80$
Situação 2	140	2	70	$\frac{140}{2}$	$\frac{140}{2} = 70$
Situação 3	13	2	6,5	$\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2} = 6{,}5$
Situação 4	72	1,5	48	$\frac{72}{1{,}5}$	$\frac{72}{1{,}5} = 48$
Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	$\frac{210}{3} = 70$
Situação 6	70	1,2	60	$\frac{70}{1{,}2}$	$\frac{70}{1{,}2} = 60$
Situação 7	140	20	70	$\frac{140}{2}$	$\frac{140}{2} = 70$
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1{,}2}$	$\frac{90}{1{,}2} = 75$

Válida

Observação



Observação:

Descobri que a velocidade média é o resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto

Transcrição

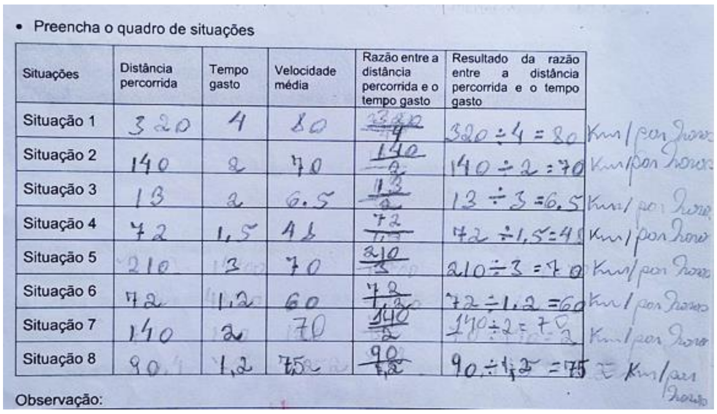
Descobri que a velocidade média é o resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto

Válida

G5

A22, A23, A24, A25 e A26

Quadro da atividade 06 preenchido pelos alunos



- Preencha o quadro de situações

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	
Situação 1	320	4	80	$\frac{320}{4}$	320 ÷ 4 = 80	Km/por hora
Situação 2	140	2	70	$\frac{140}{2}$	140 ÷ 2 = 70	Km/por hora
Situação 3	13	2	6.5	$\frac{13}{2}$	13 ÷ 3 = 6.5	Km/por hora
Situação 4	72	1,5	48	$\frac{72}{1{,}5}$	72 ÷ 1,5 = 48	Km/por hora
Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	210 ÷ 3 = 70	Km/por hora
Situação 6	72	1,2	60	$\frac{72}{1{,}2}$	72 ÷ 1,2 = 60	Km/por hora
Situação 7	140	2	70	$\frac{140}{2}$	140 ÷ 2 = 70	Km/por hora
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1{,}2}$	90 ÷ 1,2 = 75	= Km/por hora

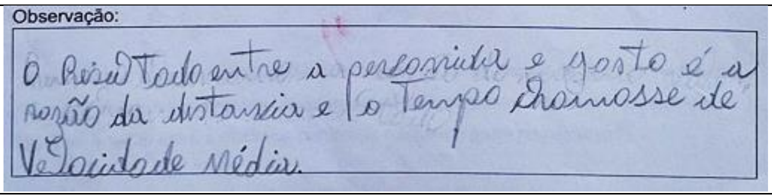
Observação:

Válida

Transcrição

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1	320	4	80	$\frac{320}{4}$	320÷4=80km/por hora
Situação 2	140	2	70	$\frac{140}{2}$	140÷2=70km/por hora
Situação 3	13	2	6,5	$\frac{13}{2}$	13÷2=6,5km/por hora
Situação 4	72	1,5	48	$\frac{72}{1,5}$	72÷1,5=48km/por hora
Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	210÷3=70km/por hora
Situação 6	72	1,2	60	$\frac{72}{1,2}$	72÷1,2=60km/por hora
Situação 7	140	2	70	$\frac{140}{2}$	140÷2=70km por hora
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1,2}$	90÷1,2=75km/por hora

Observação



Observação:

O ResulTado entre a percorrida e gasto é a razão da distancia e | o Tempo chamasse de Velocidade média.

Válida

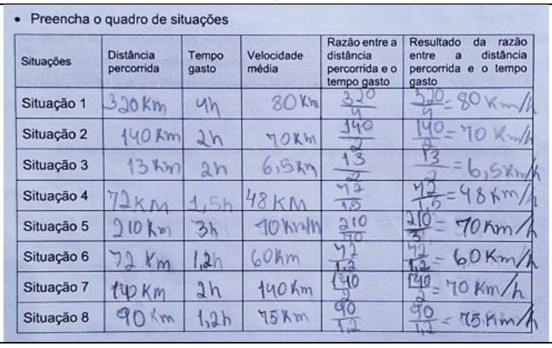
Transcrição

O resultado entre a percorrida e o gasto é a razão da distância e / o tempo chamasse de Velocidade Média

G6

A27, A28, A29, A30, A31 e A32

Quadro da atividade 06 preenchido pelos alunos



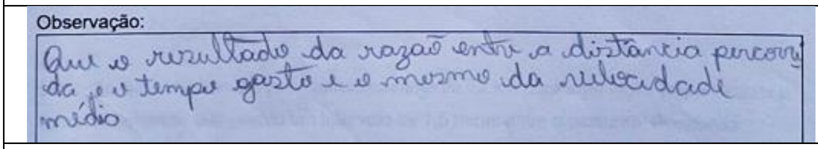
- Preencha o quadro de situações

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1	320Km	4h	80Km	$\frac{320}{4}$	$\frac{320}{4}$=80Km/h
Situação 2	140Km	2h	70Km	$\frac{140}{2}$	$\frac{140}{2}$=70Km/h
Situação 3	13Km	2h	6,5Km	$\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2}$=6,5Km/h
Situação 4	72KM	1,5h	48KM	$\frac{72}{1,5}$	$\frac{72}{1,5}$=48Km/h
Situação 5	210Km	3h	70Km/h	$\frac{210}{3}$	$\frac{210}{3}$=70Km/h
Situação 6	72 Km	1,2h	60Km	$\frac{72}{1,2}$	$\frac{72}{1,2}$=60Km/h
Situação 7	140Km	2h	140Km	$\frac{140}{2}$	$\frac{140}{2}$=70Km/h
Situação 8	90Km	1,2h	75Km	$\frac{90}{1,2}$	$\frac{90}{1,2}$=75Km/h

Transcrição

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1	320	4	80	$\frac{320}{4}$	$\frac{320}{4} = 80km/h$
Situação 2	140	2	70	$\frac{140}{2}$	$\frac{140}{2} = 70km/h$
Situação 3	13	2	6,5	$\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2} = 6{,}5km/h$
Situação 4	72	1,5	48	$\frac{72}{1,5}$	$\frac{72}{1,5} = 48km/h$
Situação 5	210	3	70	$\frac{210}{3}$	$\frac{210}{3} = 70km/h$
Situação 6	70	1,2	60	$\frac{70}{1,2}$	$\frac{70}{1,2} = 60km/h$
Situação 7	140	20	70	$\frac{140}{2}$	$\frac{140}{2} = 70km/h$
Situação 8	90	1,2	75	$\frac{90}{1,2}$	$\frac{90}{1,2} = 75km/h$

Válida

		Observação	
		 Observação: Que o resultado da razaõ entre a distância percorri da e o tempo gasto e o mesmo da velocidade médio	Válida
		Transcrição	
		Que o resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto é o mesmo da velocidade média	

Fonte: Experimentação, 2023.

Após irem finalizando a atividade 06 realizamos a institucionalização de acordo com as observações que cada grupo escrevia na lousa, formalizando o conceito geral para a turma. Então, considerando o objetivo da atividade e as observações dos alunos, formalizamos o conceito que “A velocidade Média é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto”.

De acordo com os resultados apresentados no quadro 15, referente a atividade 06 no que que tange a um primeiro momento ao preenchimento do quadro das situações/problemas que os alunos responderam na atividade 06, tiveram validação para os grupos G1 e G2, parcialmente válidas, já os grupos G3, G4, G5 e G6 foram, válidas.

Consideramos que embora os valores dos cálculos numéricos estivessem corretos, percebemos que o grupo G1 e G2 não correlacionaram as razões na atividade como velocidade média, pois, ao analisarmos qual o significado da divisão da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, como mostramos no quadro 15, o grupo G1 expressou o seguinte “situação 1: Que ele percorre 80km em 1 hora; situação 2: que ele percorreu 70 km a cada hora; situação 3: Que ele percorreu 6,5 km em 1 hora” e assim se sucederam as situações seguintes do G1, e o grupo G2 expôs que “ situação 1: Pois a cada 1 h ele(ela) corre 80 km; Situação 3: A cada 1h ele percorre a pé 6,5km” e assim segue as considerações do grupo , portanto esses significados apresentados nos faz perceber que estariam considerando o resultado como se fosse a distância percorrida de forma fracionada de uma em uma hora exatamente, para alcançar o destino.

Ainda de acordo com o quadro 15, referente a atividade 06 e ao que tange ao um segundo momento da validação das observações dos grupos de alunos, os grupos de alunos G1 tiveram validação inválida, os grupos G2, parcialmente válidas e válidas os grupos G3, G4, G5 e G6.

Em nossa avaliação o grupo G1, não conseguiu compreender que a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto resultaria na velocidade média, talvez não tenham feito a análise de seus resultados de forma atenta, pois a maioria dos alunos do grupo, estavam bastantes desatentos nesse dia.

A observação do grupo de alunos G2, validada como, parcialmente válida, foi considerada dessa forma, pois, entendemos que os alunos não conseguiram organizar uma coerência em suas ideias durante o desenvolvimento da atividade para poderem escrever uma observação completamente válida, para favorecer uma relação direta com o objetivo da atividade, entretanto, a observação que o grupo faz, em nossa análise é justamente a sequência das ações realizadas durante a atividade, conforme eles reproduziram ao preencherem o quadro com as situações/problemas respondidas, mas foi considerado para fazer a conceituação da Velocidade Média.

As observações dos grupos G3, G4, G5 e G6 foram consideradas válidas, pois de acordo com a nossas expectativas os grupos expressaram de forma satisfatória suas observações.

A seguir na tabela 27, exibiremos os resultados em percentual da frequência das validades do preenchimento do quadro da atividade 06, respondido pelos grupos de alunos e foram validadas conforme os procedimentos orientados e respostas com cálculos favoráveis, bem como o entendimento para o significado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em cada situação respondida.

Tabela 27 – Validade das respostas do quadro das situações/problemas da atividade 06

VALIDADE DAS RESPOSTAS	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	4	66,67%
Parcialmente válida	2	33,33%
Inválida	0	0,00%
Não preencheu o quadro	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Portanto, o resultado apresentado na tabela 27 revela que 66,66% dos grupos de alunos conseguiram resultados válidos ao preencherem o quadro da atividade 06, enquanto que 33,33% dos grupos tiveram resultados, parcialmente válidos. Consideramos esses resultados, embora saibamos que ainda há o que melhorar para um maior aprendizado, favorável ao aproveitamento da atividade que realizamos.

A tabela 28, evidenciará a frequência da validade das observações da atividade 06, representada em percentual, considerando o que os seis grupos de alunos expressaram em suas observações após suas análises e durante a atividade de forma coerente, favorecendo o alcance do objetivo da atividade.

Tabela 28 – Validade das observações da atividade 06

VALIDADE DA OBSERVAÇÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	4	66,66%
Parcialmente válida	1	16,67%
Inválida	1	16,67%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Logo, de acordo com o resultado apresentado na tabela 28, as observações dos grupos de alunos alcançaram um percentual de 66,66% de observações, válidas, 16,67% de observações, parcialmente válidas e apenas 16,67% das observações foram consideradas, inválidas.

Esses resultados, em nossa avaliação mostra que os alunos estão evoluindo no desenvolvimento das atividades, até mesmo porque nesta atividade em especial, os alunos foram mais independentes na organização de seus registros.

5.1.7 Sétimo encontro: sexta sessão de ensino

No dia 03/11/2023, ocorreu o sétimo encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:15h, e finalizou à 14:35, participaram da aula todos os 32 alunos e foi aplicado a Atividade 07 – Porcentagem e a Atividade 08 – Razão e proporção. A aplicação da atividade 07 durou cerca de 35 min para ser finalizada por todos os grupos.

No início da aula os alunos se organizaram em seus grupos e antes de distribuir os roteiros, comuniquei a eles que provavelmente na aula deste dia iriam realizar duas atividades se o tempo da aula fosse o suficiente. Um aluno do grupo G6 disse “*acho que não vai dar não, deixa só uma mesmo*”, pedi que não se preocupassem, se o tempo não desse não teria problema faríamos outro dia e que eles não tinham como saber se dava ou não pra terminar, já que eles ainda nem sabiam do que se tratava a atividade, porque ainda não tinha entregue o roteiro.

Distribuí os roteiros da atividade, assim que os alunos terminaram de se organizar em grupos. Os grupos à medida que iam respondendo as atividades chamavam e perguntavam se estavam fazendo correto, observava os procedimentos e os resultados dos cálculos realizados e percebi que os grupos estavam respondendo com tranquilidade e até com uma certa agilidade nos cálculos mentais, mas também usavam a calculadora, observava seus resultados e se houvesse erro pedíamos que refizesse.

Ao observar o andamento nas atividades percebi que a partir da questão 11 que perguntava quanto era por exemplo “quanto é dois por cento de 100”, alguns grupos estavam usando apenas a calculadora para obter o resultado ou não estavam conseguindo resolver. Fomos à frente da lousa chamamos atenção em geral e disse que estava percebendo que alguns grupos não estavam conseguindo seguir respondendo ou só usavam a calculadora pra chegar direto no valor da porcentagem pedida, disse que não está errado usar a calculadora, mas que devem pensar em como iriam saber resolver se não tivesse uma calculadora.

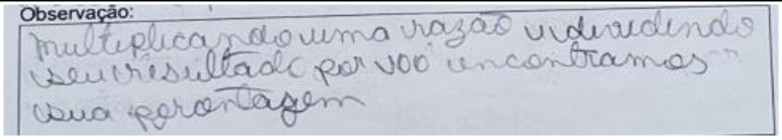
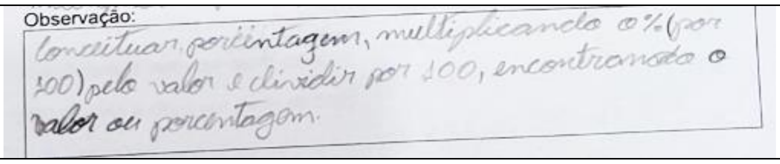
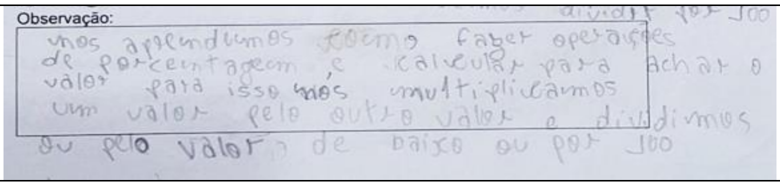
Uma aluna A8 do grupo G2 disse “*não precisa é só apertar na calculadora os números e o símbolo do porcento e pronto*”, então perguntamos e se não tivesse a calculadora como poderíamos pensar em escrever pra achar o resultado? A mesma aluna disse “*é fácil professora, só multiplicar o valor que é dado e dividir o resultado por 100*”. Aproveitei e perguntei em como podíamos resolver então a questão 12? Questão 12 - “quanto é quatro por cento de 200?

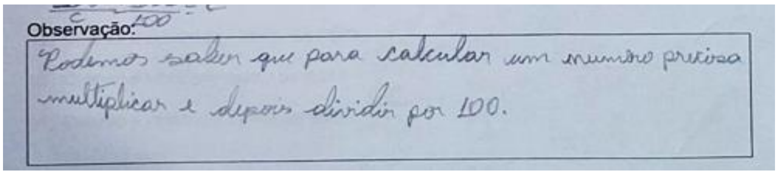
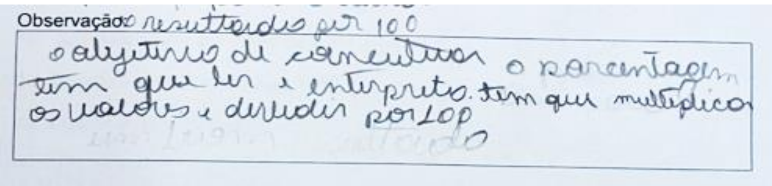
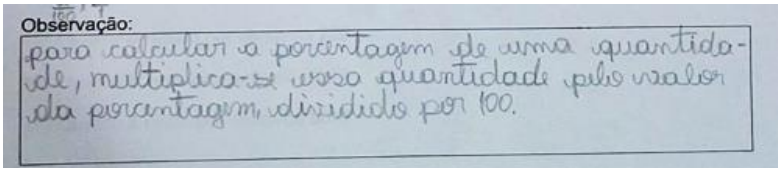
Um aluno A18 do grupo G4 disse “*só multiplicar 4×200 e pegar o 800 que deu e dividir por 100, que encontramos 8*”, continuei questionando se alguém conseguia explicar porque dividir por 100. Outro aluno A27 do grupo 6 falou “*por causa que é porcentagem, então ´se divide por 100*”, perguntei se concordavam e se estavam entendendo, alguns diziam que sim e outros acenavam positivo com a cabeça. Então pedimos que prosseguissem a atividade e mantivessem a atenção ao que estavam realizando e assim que finalizassem já podiam escrever na lousa as observações.

Quando os grupos escreviam as observações em seus roteiros, pediam que víssemos se estava bom, preferia não intervir no texto em si, mas direcionávamos a se questionarem se suas observações faziam sentido ao que estavam fazendo na atividade, se a observação era capaz de dizer como representavam uma porcentagem ou como resolvem uma porcentagem.

Esta atividade 07, tem como objetivo, conceituar porcentagem. O quadro 16 mostrará resultados dos dados coletados das observações referente a atividade 07, as transcrições e a validação dos registros das observações, expressas pelos grupos de alunos. As validações das observações ocorreram de acordo com as análises da coerência na linguagem escrita em relação a atividade desenvolvida, os procedimentos orientados e se a partir dessas observações podem alcançar o objetivo da atividade.

Quadro 16 – Observações dadas pelos alunos na atividade 07

GRUPO	ALUNOS	Observações dos alunos	VALIDAÇÃO
G1	A1, A2, A3, A4 e A5	 Observação: multiplicando uma razão e dividindo seu resultado por 100 encontramos sua porcentagem Transcrição Multiplica-se uma razão e dividindo seu resultado por 100 encontramos sua porcentagem	Válida
G2	A6, A7, A8, A9, e A10	 Observação: conceituar porcentagem, multiplicando o %(por 100) pelo valor e dividir por 100, encontrando o valor ou porcentagem. Transcrição Multiplicando o % (por 100) pelo valor e dividir por 100, encontramos o valor ou porcentagem	Válida
G3	A11, A12, A13, A14 e A15	 Observação: nós aprendemos como fazer operações de porcentagem e calcular para achar o valor para isso nós multiplicamos um valor pelo outro valor e dividimos ou pelo valor de baixo ou por 100 Transcrição Nós aprendemos como fazer operações de porcentagem e calcular para achar o valor para isso nós multiplicamos um valor pelo outro valor e dividimos ou pelo valor de baixo ou por 100	Válida

G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	 Observação: Podemos saber que para calcular um numero precisa multiplicar e depois dividir por 100. Podemos saber que para calcular um número precisa multiplicar e depois dividir por 100	Válida
G5	A22, A23, A24, A25 e A26	 Observação: resultado por 100 o objetivo di conceituar o porcentagem tem que ler e interpreto. tem que multiplicar os valores e dividir por 100 Transcrição O objetivo de conceituar a porcentagem tem que ler e interpretar tem que multiplicar os valores e dividir por 100	Válida
G6	A27, A28, A29, A30, A31 e A32	 Observação: para calcular a porcentagem de uma quantidade, multiplica-se essa quantidade pelo valor da porcentagem, dividido por 100. Para calcular a porcentagem de uma quantidade, multiplica-se essa quantidade pelo valor da porcentagem e dividi por 100	Válida

Fonte: Experimentação, 2023.

Assim que os alunos finalizaram a atividade 07 realizamos a institucionalização de acordo com as observações que cada grupo escrevia na lousa, formalizando o conceito geral para a turma que “A fração de denominador 100 é considerada uma razão denominada porcentagem” e pedimos que anotassem em seus cadernos.

Os resultados, apresentados no quadro 16, mostram que todos os grupos de alunos tiveram validações, válidas para seus registros das observações. Entendemos que as análises que os alunos fizeram para conseguirem elaborar uma observação, foi suficiente para que pudessem a partir disso entender o objetivo da atividade, discutido e formalizado por nós, ao final da atividade no momento da institucionalização.

Exporemos na tabela 29, resultados da frequência das observações dadas pelos 6 (seis) grupos de alunos que realizaram a atividade, em percentual, que foram validadas por nós, a partir das análises coerência da linguagem escrita da observação, se serviam para alcançar o objetivo da atividade.

Tabela 29 – Validade das observações da atividade 07

VALIDADE DA OBSERVAÇÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	6	100,00%
Parcialmente válida	0	0,00%
Inválida	0	0,00%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Então, de acordo com o resultado da tabela 29, as observações dos grupos de alunos alcançaram um percentual de observações, 100% válidas. E por isso acreditamos que a atividade teve resultado satisfatório ao aprendizado dos alunos.

Em seguida distribuímos o roteiro da a Atividade 08 - Razão e proporção, essa atividade teve duração aproximada de 35 min, os grupos começaram a realizar a leitura e posteriormente preencheram o primeiro quadro da atividade que deveriam ser a quantidade dos ingredientes das receitas. Um aluno chamou, apontou no espaço do quadro e perguntou "*como é que acha o valor desses aqui?*", perguntei se haviam lido com bastante atenção a receita disseram que já mas não dava de saber. Nesse momento percebi que na receita de bolo que fazia parte da atividade ficou oculta a informação "Rendimento: 20 porções", fomos à frente da lousa chamamos a atenção da turma em geral e informamos que faltava uma informação para poder conseguirem responder a atividade, pedimos desculpas, escrevemos na lousa e pedimos que anotassem em seus roteiros, nesse momento algum aluno falou "*agora vai dá certo de fazer*".

Um aluno A2 em tom de zombaria disse "*por isso que nem comecei fazer*", pedi que prosseguissem. Observava constantemente a evolução dos grupos e uma das observações era no preenchimento do último quadro onde deveriam escrever as razões pedidas de forma simplificada, os grupos que não simplificavam não conseguiam perceber a equivalência ou igualdade das razões e por isso marcavam que as razões não eram iguais, ao perceber esse erro mostrava que faltava eles simplificarem ao máximo como pedia pra fazer e depois analisassem pra dizer se as razões eram iguais ou não.

Não deu tempo para fazermos a institucionalização da atividade 08- combinamos que me entregariam a atividade e na próxima aula retomaríamos para escreverem as suas observações na lousa.

5.1.8 Oitavo encontro: sétima sessão de ensino

No dia 06/11/2023, ocorreu o oitavo encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:15h e finalizou à 14:35, participaram da aula todos os 32 alunos. Neste dia não tínhamos aula nessa turma, no entanto, como iriam se suceder alguns feriados não teríamos oportunidade para aplicar todas as atividades programadas, então, conversamos com duas professoras "P" ela nos cedeu uma hora/aula e a professora "A" que nos cedeu também uma hora/aula.

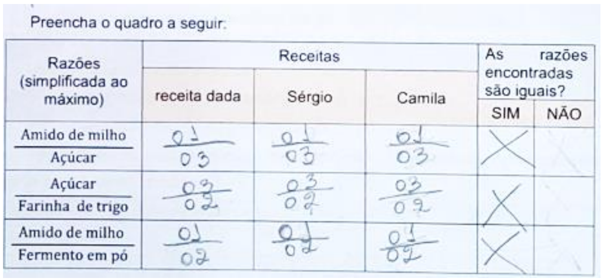
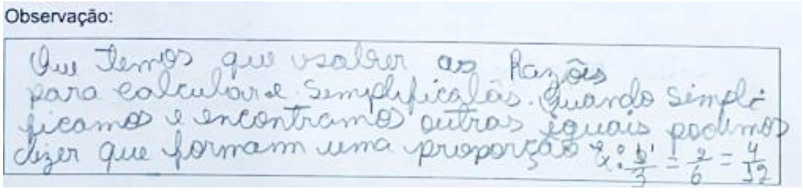
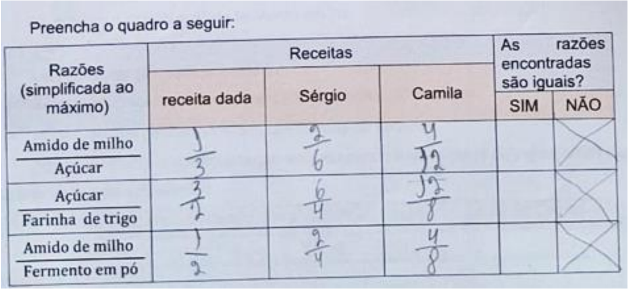
Ao entrarmos, logo os alunos começaram a perguntar "*o que a senhora tá fazendo aqui hoje professora?*", "*não acredito que é a senhora de novo*", "*professora a gente gosta da senhora, mas todo dia matemática não dá*". Expliquei-lhes que haverá alguns feriados que será no dia das nossas aulas com isso não teríamos tempo suficiente pra fazer as atividades que faltam, então as professoras permitiram que eu entrasse no horário delas, mas que hoje iríamos concluir suas observações da Atividade-08 e fazer uma atividade individual pra aprofundar o que haviam estudado, sem necessidade de escreverem a observação desta atividade. Uma aluna disse "*ainda bem*".

Então pedi que se organizassem em seus grupos, entreguei as atividades que haviam respondido na aula anterior, pedi que revisassem o que fizeram e assim que terminassem escrevessem na lousa as observações.

O objetivo da atividade 08 é conceituar proporção, e o ensino desenvolvido através desta atividade nos gerou diversos dados, no quadro 17 será evidenciado o resultado de um quadro da atividade, preenchido pelos alunos, importante para que pudessem condensar as informações das ações realizadas, ainda traremos as observações enunciada pelos grupos de alunos, as transcrições e a validação.

A validação, dos registros do quadro preenchido pelos grupos de alunos, ocorreu conforme analises dos procedimentos realizados com cálculos devidos e respostas correta a pergunta. Já as observações expressas pelos grupos de alunos, foram validadas a partir da coerência na linguagem escrita ao relacionarem, organizarem um pensamento da atividade desenvolvida e se a partir dessas observações podem alcançar o objetivo da atividade.

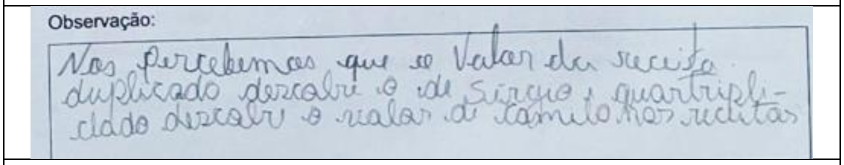
Quadro 17 – Quadro preenchido/Observações da atividade 08

<table>
<tr><th>GRUPO</th><th>ALUNOS</th><th>Quadro da atividade preenchido/Observações</th><th>VALIDADE</th></tr>
<tr><td rowspan="8">G1</td><td rowspan="8">A1,
A2,
A3,
A4
e
A5</td><td>Quadro da atividade 08 preenchido pelos alunos</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
Preencha o quadro a seguir:
<table>
<tr><th rowspan="2">Razões (simplificada ao máximo)</th><th colspan="3">Receitas</th><th colspan="2">As razões encontradas são iguais?</th></tr>
<tr><th>receita dada</th><th>Sérgio</th><th>Camila</th><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$</td><td>$\frac{01}{03}$</td><td>$\frac{01}{03}$</td><td>$\frac{01}{03}$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$</td><td>$\frac{03}{02}$</td><td>$\frac{03}{02}$</td><td>$\frac{03}{02}$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$</td><td>$\frac{01}{02}$</td><td>$\frac{01}{02}$</td><td>$\frac{01}{02}$</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><th rowspan="2">Razões (simplifique ao máximo)</th><th colspan="3">Receitas</th><th colspan="2">As razões encontradas são iguais?</th></tr>
<tr><th>Receita dada</th><th>Sérgio</th><th>Camila</th><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$</td><td>$\frac{01}{03}$</td><td>$\frac{01}{03}$</td><td>$\frac{01}{03}$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$</td><td>$\frac{03}{02}$</td><td>$\frac{03}{02}$</td><td>$\frac{03}{02}$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$</td><td>$\frac{01}{02}$</td><td>$\frac{01}{02}$</td><td>$\frac{01}{02}$</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Observações</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
Observação:
Que temos que saber as razões para calcular e simplificalás. Quando simplificamos e encontramos outras iguais podemos dizer que formam uma proporção Ex: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Que temos que saber as razões para calcular e simplificalás. Quando simplificamos e encontramos outras iguais podemos dizer que formam uma proporção Ex: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G2</td><td rowspan="2">A6,
A7,
A8,
A9,
e
A10</td><td>Quadro da atividade 08 preenchido pelos alunos</td><td rowspan="2">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>
Preencha o quadro a seguir:
<table>
<tr><th rowspan="2">Razões (simplificada ao máximo)</th><th colspan="3">Receitas</th><th colspan="2">As razões encontradas são iguais?</th></tr>
<tr><th>receita dada</th><th>Sérgio</th><th>Camila</th><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{2}{6}$</td><td>$\frac{4}{12}$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{6}{4}$</td><td>$\frac{12}{8}$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{2}{4}$</td><td>$\frac{4}{8}$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Transcrição

Razões (simplifique ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	Receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{12}$		X
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{12}{8}$		X
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$		X

Observação



Observação:

Nos percebemos que o Valor da receita duplicado descobri o de Sergio i quartriplicado descobri o valor di Camila nos receitas

Transcrição

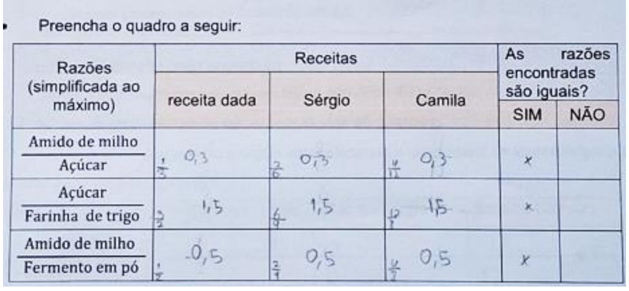
Nós percebemos que o valor da receita duplicado descobre o de Sérgio e quadruplicado descobre o valor de Camila nas receitas

Válida

G3

A11, A12, A13, A14 e A15

Quadro da atividade 08 preenchido pelos alunos



- Preencha o quadro a seguir:

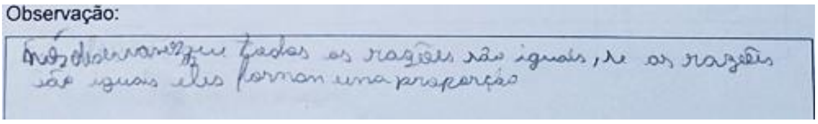
Razões (simplificada ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$	$\frac{1}{3}$ 0,3	$\frac{2}{6}$ 0,3	$\frac{4}{12}$ 0,3	x	
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$	$\frac{3}{2}$ 1,5	$\frac{6}{4}$ 1,5	$\frac{12}{8}$ 1,5	x	
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$	$\frac{1}{2}$ 0,5	$\frac{2}{4}$ 0,5	$\frac{4}{8}$ 0,5	x	

Transcrição

Razões (simplifique ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	Receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$	0,3 $\frac{1}{3}$	0,3 $\frac{2}{6}$	0,3 $\frac{4}{12}$	X	
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$	1,5 $\frac{3}{2}$	1,5 $\frac{6}{4}$	1,5 $\frac{12}{8}$	X	
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$	0,5 $\frac{1}{2}$	0,5 $\frac{2}{4}$	0,5 $\frac{4}{8}$	X	

Válida

Observações



Observação:

Nós observamos que todas as razões são iguais, se as razões são iguais eles formam uma proporção

Transcrição

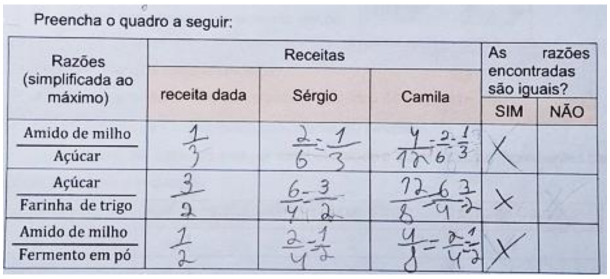
Nós observamos que todas as razões são iguais, se todas as razões são iguais eles formam uma proporção

Válida

G4

A16, A17, A18, A19, A20 e A21

Quadro da atividade 08 preenchido pelos alunos



Preencha o quadro a seguir:

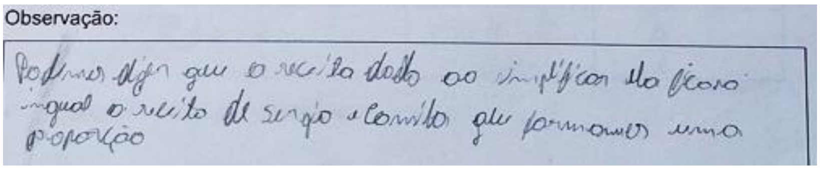
Razões (simplificada ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	X	
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	$\frac{12}{8}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	X	
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	X	

Transcrição

Razões (simplifique ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	Receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	X	
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	$\frac{12}{8}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	X	
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	X	

Válida

Observação



Observação:

Podemos dizer que a receita dada ao simplificar ela ficara igual a receita de sergio e Camila que formamos uma proporção

Transcrição

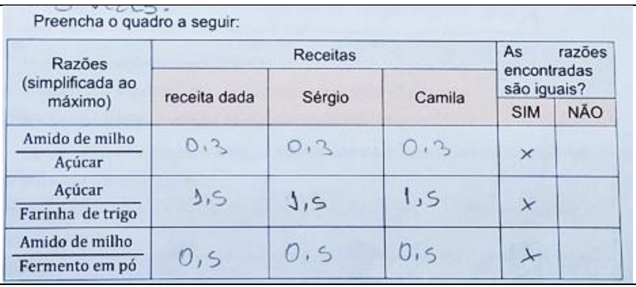
Podemos dizer que a receita ao simplificar ela ficará igual a receita de Sérgio e Camila que formamos uma proporção

Válida

G5

A22, A23, A24, A25 e A26

Quadro da atividade 08 preenchido pelos alunos



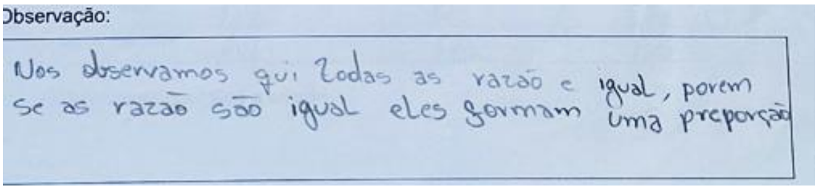
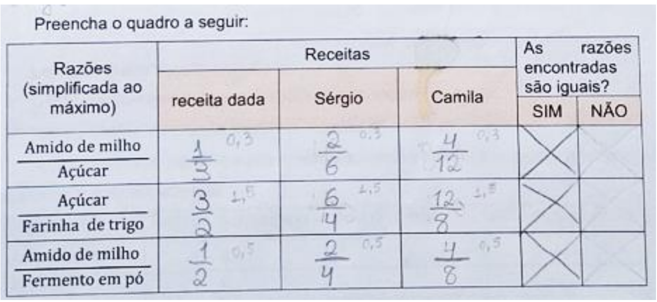
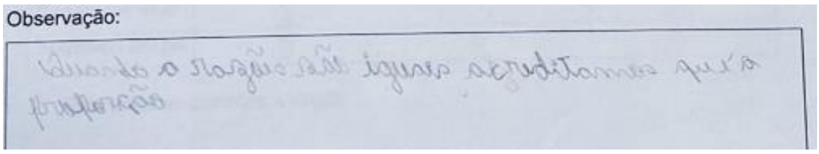
Preencha o quadro a seguir:

Razões (simplificada ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$	0,3	0,3	0,3	x	
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$	1,5	1,5	1,5	x	
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$	0,5	0,5	0,5	x	

Transcrição

Razões (simplifique ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	Receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$	0,3	0,3	0,3	X	
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$	1,5	1,5	1,5	X	
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$	0,5	0,5	0,5	X	

Válida

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>Observação</td><td></td></tr>
<tr><td>
Observação:
Nos observamos qui todas as razão e igual, porem se as razão são igual eles formam uma preporção</td><td rowspan="3">Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Nós observamos qui todas as razão e igual porém se as razão são igual eles formam uma proporção</td></tr>
<tr><td rowspan="8">G6</td><td rowspan="8">A27, A28, A29, A30, A31 e A32</td><td>Quadro da atividade 08 preenchido pelos alunos</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
Preencha o quadro a seguir:
<table>
<tr><td rowspan="2">Razões (simplificada ao máximo)</td><td colspan="3">Receitas</td><td colspan="2">As razões encontradas são iguais?</td></tr>
<tr><td>receita dada</td><td>Sérgio</td><td>Camila</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$</td><td>$\frac{1}{3}$ 0,3</td><td>$\frac{2}{6}$ 0,3</td><td>$\frac{4}{12}$ 0,3</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$</td><td>$\frac{3}{2}$ 1,5</td><td>$\frac{6}{4}$ 1,5</td><td>$\frac{12}{8}$ 1,5</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$</td><td>$\frac{1}{2}$ 0,5</td><td>$\frac{2}{4}$ 0,5</td><td>$\frac{4}{8}$ 0,5</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td rowspan="2">Razões (simplifique ao máximo)</td><td colspan="3">Receitas</td><td colspan="2">As razões encontradas são iguais?</td></tr>
<tr><td>Receita dada</td><td>Sérgio</td><td>Camila</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$</td><td>$\frac{1}{3}^{0,3}$</td><td>$\frac{2}{6}^{0,3}$</td><td>$\frac{4}{12}^{0,3}$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$</td><td>$\frac{3}{2}^{1,5}$</td><td>$\frac{6}{4}^{1,5}$</td><td>$\frac{12}{8}^{1,5}$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$</td><td>$\frac{1}{2}^{0,5}$</td><td>$\frac{2}{4}^{0,5}$</td><td>$\frac{4}{8}^{0,5}$</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Observação</td><td></td></tr>
<tr><td>
Observação:
Quando a razão são iguais acreditamos que'a proporção</td><td rowspan="3">Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Quando a razão são iguais acreditamos que é a proporção</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação, 2023.

Após os grupos escreverem as observações na lousa realizamos a institucionalização de acordo com as observações, formalizando um conceito geral para a turma, que “Quando temos igualdade entre duas ou mais razões, podemos dizer que formam uma proporção” e pedimos que anotassem em seus cadernos, reforçamos nesse momento o fato de alguns grupos poderiam não ter conseguido identificar se as razões eram equivalentes, pois não realizaram as simplificações ou multiplicaram por um mesmo valor as razões para que alcançassem o resultado esperado.

Como vimos no quadro 17, 05 (cinco) grupos de alunos conseguiram obter validação no preenchimento do quadro da atividade, válidas, e 01(um) grupo, parcialmente válida. Em relação as observações relatadas pelos grupos, todas os 06 (seis) grupos de alunos tiveram validação, válidas.

No preenchimento do quadro da atividade o grupo G2, que foi o grupo que obteve validação, parcialmente válida, infelizmente não simplificou as razões que apresentaram. Em nossa análise, esse motivo provavelmente contribuiu significativamente para que não respondessem de forma correta, que sim, as razões encontradas, eram iguais.

Entretanto, notamos em suas observações apresentadas, que até perceberam uma relação entre as quantidades dos ingredientes da receita dada e as demais receitas, pois, citaram que “Nós percebemos que o valor da receita duplicado descobre o de Sérgio e quadruplicado descobre o valor de Camila nas receitas”, porém não foram capazes de relacionar a equivalência, igualdade entre a razões. Mas, ainda assim suas observações foram válidas para chegarmos ao objetivo da atividade no momento da institucionalização.

A tabela 30, apresentará a validação da frequência, em percentual, dos resultados do quadro preenchido pelos alunos, que levou em consideração analises dos procedimentos realizados, com cálculos devidos e resposta correta a pergunta realizada.

Tabela 30 – Validade do preenchimento do quadro da atividade 08

VALIDADE DO QUADRO PREENCHIDO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	5	83,33,00%
Parcialmente válida	1	16,67%
Inválida	0	0,00%
Não preencheu quadro da atividade	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Como vemos na tabela 30, os resultados inferem que 83,33% dos grupos de alunos, realizaram de forma válidas o preenchimento do quadro da atividade

08, enquanto 16,67% dos grupos de alunos realizaram o preenchimento de forma, parcialmente válidas. Com isso consideramos que estes resultados são indicativos de um bom desempenho na atividade proposta.

A tabela 31, mostra em percentual, a frequência da validade das observações da atividade 08, validadas a partir da coerência na linguagem escrita ao relacionarem, analisarem, organizarem um pensamento da atividade desenvolvida e se a partir dessas observações podem alcançar o objetivo da atividade.

Tabela 31 – Validade das observações da atividade 08

VALIDADE DA OBSERVAÇÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	6	100%
Parcialmente válida	0	0,00%
Inválida	0	0,00%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

De acordo com o que está apresentado na tabela 31, temos que 100% dos grupos de alunos tiveram as observações elaboradas, válidas. O que nos faz acreditar que o desenvolvimento da atividade proporcionou os alunos encontrarem resultados que os levaram ao alcance do objetivo desejado na atividade, portanto, consideramos que esta atividade 08 teve um desempenho satisfatório.

Em seguida entregamos uma lista com questões para cada aluno e orientei a resolverem individualmente, pedi que iniciassem a partir da segunda questão, pois a primeira ainda não havíamos estudado conteúdo e talvez tivessem dificuldades para compreender, mas que retomaríamos a questão na próxima lista, me perguntaram se podiam continuar fazendo em grupo, respondi que podiam, mas cada grupo assim que responderem uma questão, vai colocando na lousa a resposta. E assim ficou combinado.

Os alunos ao passo que iam resolvendo e tendo suas dúvidas eram orientados e assim que respondiam escreviam na lousa e antes de finalizar a aula corrigimos 4 questões e as demais discutimos como poderiam fazer pra respondê-las, e que finalizasse na casa deles.

5.1.9 Nono encontro: oitava sessão de ensino

No dia 08/11/2023, ocorreu o nono encontro que durou um tempo total de 1 h/a, iniciou às 13:15h e finalizou às 15:55, participaram da aula 27 alunos e foi finalizado as questões de aprofundamento, com a resolução na lousa das questões que faltaram ser respondidas na aula anterior, passamos observando se haviam feito na casa, alguns não tinham finalizado, aguardamos cerca de 20 min, orientamos em alguns momentos e posteriormente fomos a lousa pra responder e esclarecer alguma dúvida, os alunos foram bastantes participativos no momento da resolução das atividades de aprofundamento.

Está aula teve bastante participação dos alunos que interagiam respondendo a perguntas ou indagando algo referente a atividade.

5.1.10 Décimo encontro: nona sessão de ensino

No dia 09/11/2023, ocorreu o décimo encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 14:35h, com um intervalo e finalizou à 16:10, participaram da aula 26 alunos e foi aplicado a Atividade 09 – Grandezas Diretamente Proporcionais, Grandezas Inversamente Proporcionais. Esta atividade durou cerca de 60 min.

De início foi organizado os grupos e em seguida entregamos o roteiro da atividade a cada grupo, percebemos que haviam faltado muitos alunos, perguntamos se sabiam o que tinha acontecido, pois alguns desses alunos que não vieram nesse dia não tinham vindo na aula anterior. Um aluno falou "*um bocado desses aí, o A2, e o A31 não podem vim essa semana, tem advertência porque pegaram eles com bebida na quadra*".

Os grupos começaram seguir os procedimentos da atividade, nesse dia foi mais silencioso que os outros dias. Observei alguns grupos que já haviam realizado o preenchimento da primeira tabela na situação 1, os que observei o valor estava correto, então perguntei ao grupo G1 como descobriram que o resultado era correto, a aluna A4 disse "*é porque tá aumentando de 1 em um e aqui de 11 em 11*", fiz a mesma pergunta ao grupo G2 e disseram "*é fácil, aqui aumenta de 1 em 1 e nesse outra vai assim, 11, 22, 33, 44, 55, então o outro é 66, 77 e 88*".

Fui à frente da lousa, chamei a atenção de todos e disse que percebi que já estavam adiantados na atividade, mas queria saber se conseguiam comparar as duas grandezas, desenhei a tabela na lousa com os resultados que os grupos haviam escritos, já havia me certificado que todos escreveram a mesma resposta.

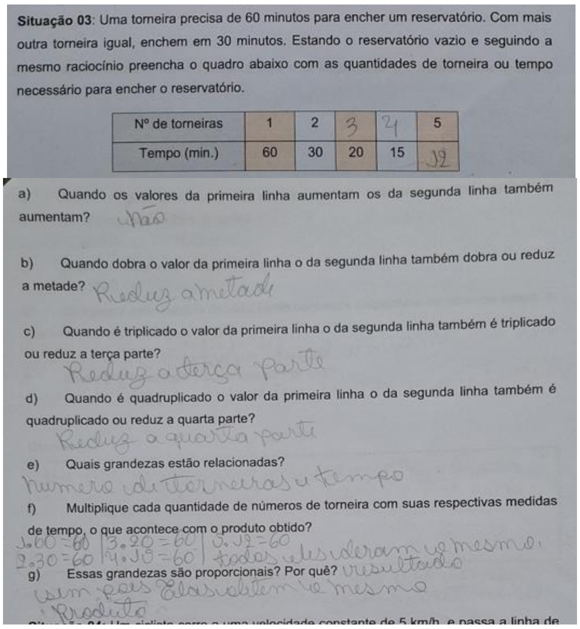
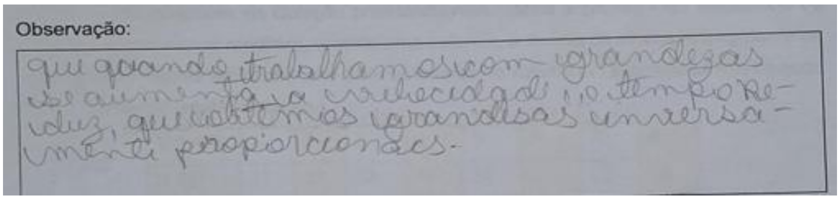
Argumentei que havia percebido que estavam somando para encontrar o resultado que faltada e pedir que quando fossem comparar os valores de duas grandezas que nesse caso eram volume e massa, ao observarem que aumentando ou diminuindo ambas, pensassem na ideia de "aumentar quantas vezes" ou "diminuir quantas vezes", por exemplo no caso dessa tabela que estava os valores em cada linha, na linha do volume e na linha da massa podemos comparar da seguinte forma, a cada 1 cm³ tem-se 11 g e se eu dobrar o volume para 2 cm³ vou dobrar também a massa para 22 g, pensando na ideia de equivalência de razão, proporção no caso se aumentou de 1 cm³ para 3cm³ de quantas vezes foi o aumento? Alguns alunos responderam "*3 vezes*", e disse assim se sucedem outros valores das grandezas.

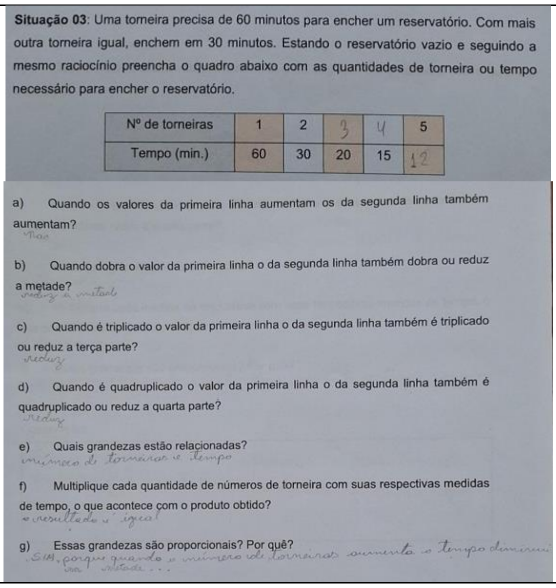
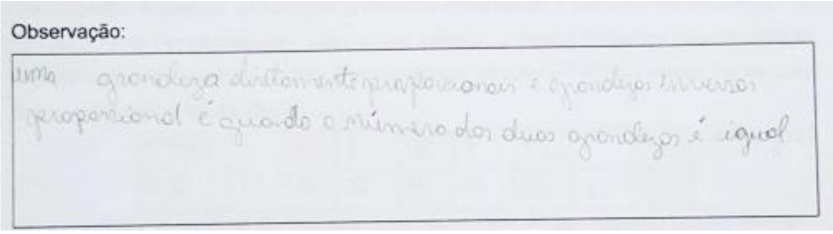
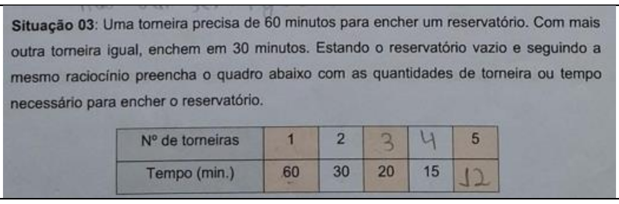
Os grupos seguiram resolvendo a atividade e assim que percebíamos alguma dificuldade ou erro de cálculo orientávamos.

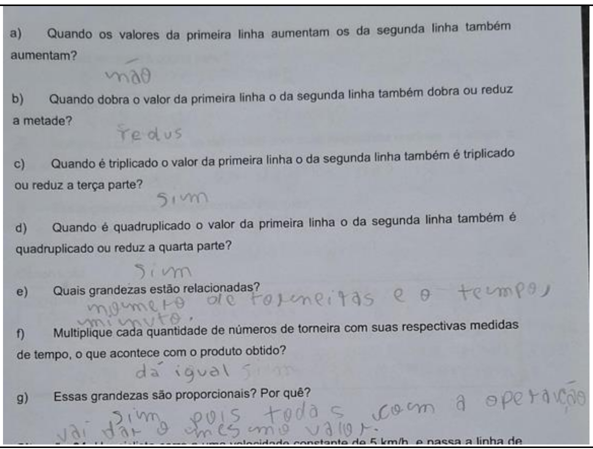
Apresentaremos no quadro 18, os resultados das respostas dadas pelos grupos de alunos em uma situação-problema referente a atividade 09, ainda as observações que cada grupo de alunos elaborou, a transcrição e a validação dos resultados. O desenvolvimento dessa atividade tem como objetivo conceituar grandezas diretamente Proporcionais e Grandezas Inversamente Proporcionais.

Os registros das respostas da situação-problema dadas pelos alunos foram validados de acordo com o desenvolvimento dos procedimentos da atividade, respostas corretas em cada item respondido da situação-problema. Para validarmos as observações realizadas pelos grupos de alunos, consideramos a organização do texto escrito de forma que tivesse coerência, relação com a atividade desenvolvida e de uma forma geral pudesse direcionar ou alcançar o objetivo da atividade.

Quadro 18 – Situação-Problema respondido /Observações, da atividade 09

<table>
<tr><th>GRUPO</th><th>ALUNOS</th><th>Situação-Problema respondido /Observações</th><th>VALIDADE</th></tr>
<tr><td rowspan="8">G1</td><td rowspan="8">A1, A3, A4 e A5</td><td>Situação-Problema da atividade 09, respondido pelos alunos</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo a mesmo raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.
<table>
<tr><td>Nº de torneiras</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tempo (min.)</td><td>60</td><td>30</td><td>20</td><td>15</td><td>12</td></tr>
</table>
a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam? Não
b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade? Reduz a metade
c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte? Reduz a terça parte
d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte? Reduz a quarta parte
e) Quais grandezas estão relacionadas? numero de torneiras e tempo
f) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?
1.60=60 | 3.20=60 | 5.12=60
2.30=60 | 4.15=60 | todos eles deram o mesmo resultado
g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê? sim pois elas obtem o mesmo produto
Situação 04: Um ciclista corre a uma velocidade constante de 5 km/h e passa a linha de</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Nº de torneiras</td><td>1</td><td>2</td><td>**3**</td><td>**4**</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tempo (min)</td><td>60</td><td>30</td><td>20</td><td>15</td><td>**12**</td></tr>
</table>
a) Não
b) Reduz a metade
c) Reduz a terça parte
d) Reduz a quarta parte
e) Números de torneira e tempo
f) 1·60=60 3·20=60 5·12=60
2·30=60 4·15=60 Todos eles deram o mesmo resultado
g) Sim pois elas obtém o mesmo produto</td></tr>
<tr><td>Observação</td><td rowspan="4">Válida</td></tr>
<tr><td>
Observação:
que quando trabalhamos com grandezas se aumenta a velecidadi, o tempo Re-duz, que obtemos grandesas inversa-mente proporcionais.</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Que quando trabalhamos com grandezas se aumenta a velocidade e o tempo reduz, que obtemos grandezas inversamente proporcionais.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="8">G2</td><td rowspan="8">A6,
A7,
A9,
e
A10</td><td>Situação-Problema da atividade 09, respondido pelos alunos</td><td rowspan="4">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>
Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo a mesmo raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.
<table>
<tr><td>Nº de torneiras</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tempo (min.)</td><td>60</td><td>30</td><td>20</td><td>15</td><td>12</td></tr>
</table>
a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?
Não
b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?
reduz a metade
c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte?
reduz
d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?
reduz
e) Quais grandezas estão relacionadas?
número de torneiras e tempo
f) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?
o resultado é igual
g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
SIM, porque quando o número de torneiras aumenta o tempo diminui na metade...</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Nº de torneiras</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tempo (min)</td><td>60</td><td>30</td><td>20</td><td>15</td><td>12</td></tr>
</table>
a) Não
b) Reduz a metade
c) Reduz
d) Reduz
e) Números de torneira e tempo
f) O resultado é igual
g) SIM. Porque quando o número de torneira aumenta o tempo reduz na metade</td></tr>
<tr><td>Observação</td><td rowspan="4">Inválida</td></tr>
<tr><td>
Observação:
uma grandeza diretamente proporcionais e grandezas inversas proporcional é quando o número das duas grandezas é igual</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Uma grandeza diretamente proporcionais e grandezas inversas proporcional é quando o número das duas grandezas é igual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G3</td><td rowspan="2">A11,
A13,
A14
e
A15</td><td>Situação-Problema da atividade 09, respondido pelos alunos</td><td rowspan="2">Válida</td></tr>
<tr><td>
Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo a mesmo raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.
<table>
<tr><td>Nº de torneiras</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tempo (min.)</td><td>60</td><td>30</td><td>20</td><td>15</td><td>12</td></tr>
</table></td></tr>
</table>



a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

não

b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?

redus

c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte?

sim

d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?

sim

e) Quais grandezas estão relacionadas?

numero de torneitas e o tempo, minuto.

f) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?

dá igual ~~sim~~

g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

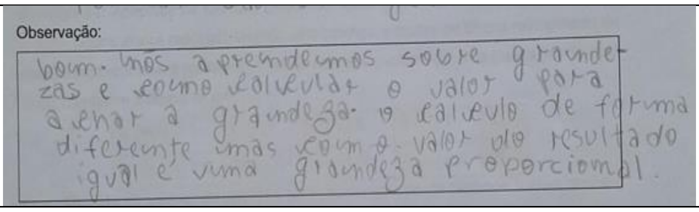
sim pois todas com a operação vai dar o mesmo valor.

Transcrição

Nº de torneiras	1	2	**3**	**4**	5
Tempo (min)	60	30	20	15	**12**

a) Não
b) Redus
c) Sim
d) Sim
e) Números de torneira e o tempo minuto.
f) dá igual
g) Sim pois todos com a operação vai dar o mesmo valor

Observação



Observação:

bom. nos aprendemos sobre grandezas e como calcular o valor para achar a grandeza. o calculo de forma diferente mas com o valor do resultado igual é uma grandeza proporcional.

Transcrição

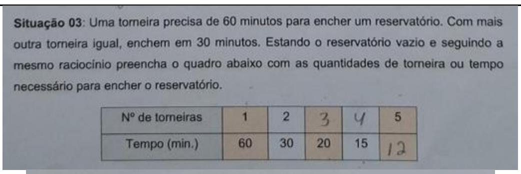
Bom. Nós aprendemos sobre grandezas e como calcular o valor para achar a grandeza. O cálculo de forma diferente mas com o valor do resultado igual é uma grandeza proporcional

Parcialmente Válida

G4

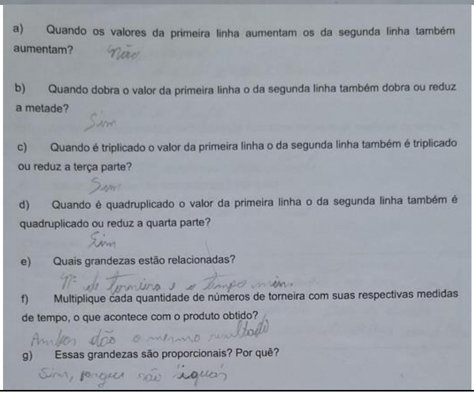
A16, A17, A18, A19 e A20

Situação-Problema da atividade 09, respondido pelos alunos



Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo o mesmo raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.

Nº de torneiras	1	2	3	4	5
Tempo (min.)	60	30	20	15	12



a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

Não

b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?

Sim

c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte?

Sim

d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?

Sim

e) Quais grandezas estão relacionadas?

Nº de torneira e o tempo min.

f) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?

Ambos dão o mesmo resultado

g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Sim, porque são iguais

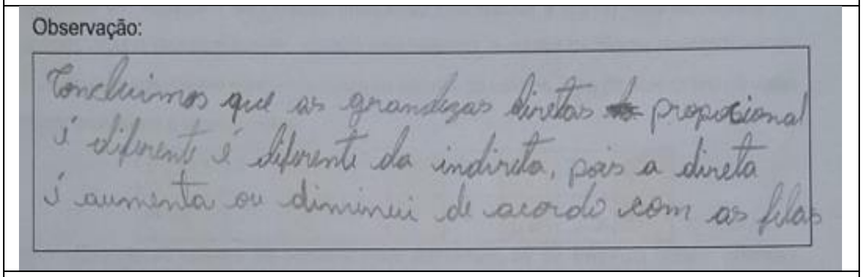
Válida

Transcrição

Nº de torneiras	1	2	**3**	**4**	5
Tempo (min)	60	30	20	15	**12**

a) Não
b) Sim
c) Sim
d) Sim
e) N° de torneira e o tempo min.
f) Ambos dão o mesmo resultado
g) Sim, porque são iguais

Observação



Observação:

Concluimos que as grandezas diretas proporcional é diferente é diferente da indirita, pois a direta é aumenta ou diminui de acordo com as filas

Transcrição

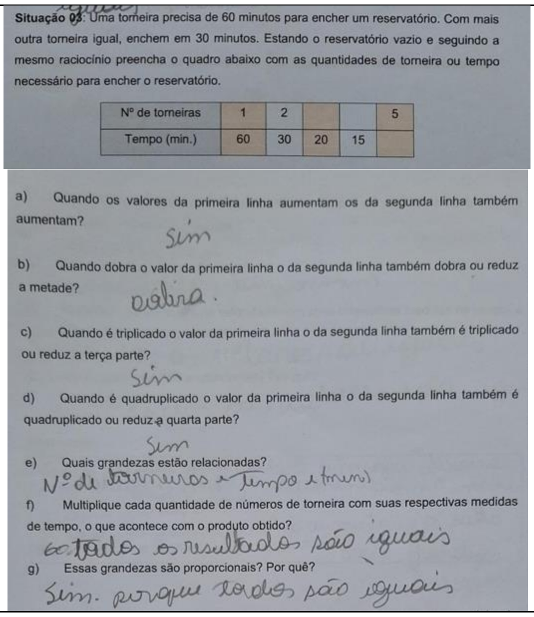
Concluímos que as grandezas diretas proporcional é diferente é diferente da indireta, pois a direta é aumenta ou diminui de acordo com as filas

Válida

G5

A22, A23, A25 e A26

Situação-Problema da atividade 09, respondido pelos alunos



Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo a mesmo raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.

Nº de torneiras	1	2			5
Tempo (min.)	60	30	20	15	

a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?
Sim

b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?
dobra.

c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte?
Sim

d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?
Sim

e) Quais grandezas estão relacionadas?
Nº de torneiras e Tempo (min)

f) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?
60. todos os resultados são iguais

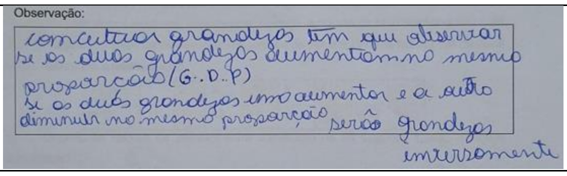
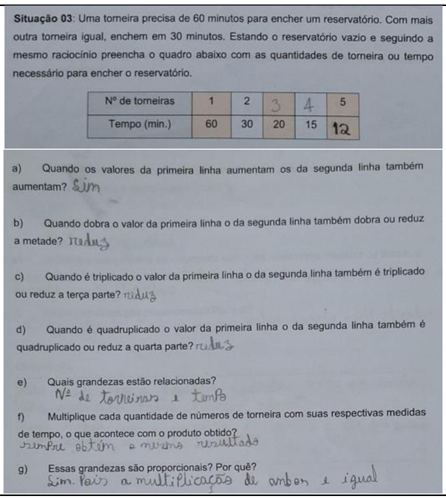
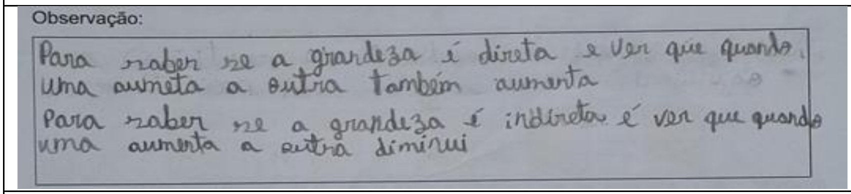
g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
Sim. porque todos são iguais

Transcrição

Nº de torneiras	1	2			5
Tempo (min)	60	30	20	15	

a) Sim
b) Dobra
c) Sim
d) Sim
e) N° de torneira e tempo (min)
f) 60. Todos os resultados são iguais
g) Sim porque todos são iguais

Parcialmente Válida

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>Observação</td><td></td></tr>
<tr><td>
Observação:
comceituar grandezas tem que observar
se os duas grandezas aumentamno mesmo
proporcão (G..D..P)
se os duas grandezas uma aumenta e a outro
diminuir no mesmo proporção serão grandezas
inversamente</td><td rowspan="3">Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Conceituar grandezas tem que observar se as duas grandezas aumentam na mesma proporção (G.D.P)
Se as duas grandezas uma aumenta e a outra diminui na mesma proporção serão grandezas inversamente</td></tr>
<tr><td rowspan="8">G6</td><td rowspan="8">A27,
A28,
A29,
A30
e
A32</td><td>Situação-Problema da atividade 09, respondido pelos alunos</td><td rowspan="4">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>
Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo a mesmo raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.
<table>
<tr><td>Nº de torneiras</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tempo (min.)</td><td>60</td><td>30</td><td>20</td><td>15</td><td>12</td></tr>
</table>
a) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam? Sim
b) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade? reduz
c) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte? reduz
d) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte? reduz
e) Quais grandezas estão relacionadas? Nº de torneiras e tempo
f) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido? sempre obtém o mesmo resultado
g) Essas grandezas são proporcionais? Por quê? Sim. Pois a multiplicação de ambos e igual</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>Nº de torneiras</td><td>1</td><td>2</td><td>**3**</td><td>**4**</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tempo (min)</td><td>60</td><td>30</td><td>20</td><td>15</td><td>**12**</td></tr>
</table>
a) Sim
b) Reduz
c) Reduz
d) Reduz
e) N° de torneira e tempo
f) Sempre obtém o mesmo resultado
g) Sim. Pois a multiplicação de ambos e igual</td></tr>
<tr><td>Observação</td><td></td></tr>
<tr><td>
Observação:
Para saber se a grandeza é direta e ver que quando
uma aumeta a outra também aumenta
Para saber se a grandeza é indireta é ver que quando
uma aumenta a outra diminui</td><td rowspan="3">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td></tr>
<tr><td>Para saber se a grandeza é direta e ver que quando uma aumenta e a outra também aumenta
Para saber se a grandeza é indireta é ver que quando uma aumenta a outra diminui</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação, 2023.

Após os grupos irem finalizando a Atividade 09, escreviam suas observações na lousa e a partir das observações realizadas por cada grupo, formalizamos o conceito geral para a turma que “Duas grandezas de variáveis dependentes são diretamente proporcionais quando o valor de uma delas causa aumento da outra em proporções equivalentes ou quando a redução no valor de uma das grandezas causa redução no valor da outra em proporções iguais. Duas grandezas de variáveis dependentes são inversamente proporcionais quando o valor de uma delas aumenta e o valor da outra diminui na mesma proporção” então pedimos que anotassem em seus cadernos. Vale ressaltar que no momento da formalização destacamos que os resultados que haviam encontrado, “iguais” para cada situação que pedia para multiplicar ou dividir as grandezas das tabelas, eram o que chamamos de quociente ou constante da proporcionalidade.

O resultado apresentado no quadro 18, nos revela que dois grupos de alunos, os grupos G1, G3 e G4 tiveram a validade em suas respostas da situação-problema respondida de forma, válida, pois conseguiram desenvolver a atividade com êxito nos procedimentos e respostas favoráveis a um bom desempenho. No entanto, os grupos de alunos, G2, G5 e G6 tiveram validade de forma, parcialmente válidas, o grupo G2 ao responder se as grandezas apresentadas eram proporcionais disseram “SIM. Porque quando o número de torneira aumenta o tempo reduz na metade” a justificativa que expressaram não corresponde perfeitamente ao que ocorre, uma vez que em determinados momentos a grandeza dobra e o tempo reduz a metade, em outros a grandeza triplica e o tempo reduz a terça parte e assim por diante, entretanto podemos considerar que houve um entendimento, mesmo que parcial durante a busca da solução para a situação proposta.

Já o grupo G5 não seguiu todo o procedimento, não realizou o preenchimento da tabela com os espaços em branco, ainda responderam no item *a* que “Sim” as duas grandezas aumentavam, mas o que ocorre é que ao passo que uma grandeza aumenta a outra reduz na mesma proporção, porém os outros itens foram respondidos de forma correta, inclusive ao analisarmos sua resposta do item *f* supomos que realizaram o cálculo correto e que sabiam quais valores deveriam estar nos espaços em branco da tabela, pois o resultado é devidamente correspondente ao esperado, acreditamos que seus equívocos ocorreram por falta de maior atenção ao registrarem suas respostas.

O grupo G6, também avaliamos ser falta de maior atenção ao responder o item *a* de forma errônea, pois os outros itens foram respondidos de forma esperada, entendemos que as situações anteriores possam ter contribuído para esse erro uma vez que os valores das grandezas nas três situações anteriores aumentavam e isso fez com que não se atentassem e percebessem no momento que essa situação não ocorria da mesma forma.

Ainda analisando o quadro 18, percebemos que as observações dadas pelos grupos de alunos, G1, G4 e G5 foram consideradas válidas, os grupos de alunos G3 e G6, tiveram as suas observações parcialmente válidas e a observação do grupo de alunos G2 foram consideradas, inválidas.

Os grupos G1, G4 e G5 tiveram suas observações consideradas válidas, pois percebeu-se organização no texto escrito, coerência e relação com a atividade desenvolvida e de uma forma geral contribuiu para alcançar e formalizar o objetivo da atividade. Já os grupos G3 e G6 obtiveram validação de suas observações parcialmente válidas, percebemos que não houve uma coesão ao elaborarem a escrita da observação.

O grupo G3 fez a seguinte observação, “Bom. Nós aprendemos sobre grandezas e como calcular o valor para achar a grandeza. O cálculo de forma diferente mas com o valor do resultado igual é uma grandeza proporcional”, entendemos que o grupo G3 conseguiu relacionar o que realizaram ao dizer que “Nós aprendemos sobre grandezas”, pois, de fato no item *e* da situação mostrada no quadro 18 a pergunta refere-se a que grandeza está envolvida, e ainda essa mesma pergunta há nas demais situações da atividade, ao citar “O cálculo de forma diferente mas com o valor do resultado igual é uma grandeza proporcional”, acreditamos que o grupo percebeu que quando as grandezas eram diretamente proporcional, como em um item pedia-se que dividissem as grandezas e em outro quando as grandezas eram inversamente proporcionais pedia-se que as multiplicassem, assim entendiam que os cálculos eram diferentes, e de fato eram, como encontravam para cada situação o mesmo valor ao realizarem o cálculo, então, consideravam que nessa condição as grandezas seriam proporcionais faltando apenas elaborarem uma observação coesa as ações realizadas para que fosse completamente válida.

O grupo de alunos G6, ao observarem que em determinadas situações as grandezas só aumentam e em outras uma aumenta e a outra diminui, e ao relacionar o que observaram escreveram “Para saber se a grandeza é direta e ver que quando uma aumenta e a outra também aumenta. Para saber se a grandeza é indireta é ver que quando uma aumenta a outra diminui” e em nossa análise o aluno utilizou a expressão “indireta” em oposição a expressão para grandeza “direta”, no entanto os alunos deviam utilizar expressões como grandezas diretamente proporcional, grandezas inversamente proporcionais ou até mesmo grandezas diretas ou grandezas inversas para poder dar melhor sentido e entender o objetivo da atividade.

Porém, o grupo G2, não consegui elaborar uma observação que fosse válida, apesar de realizar a atividade com bastante êxito acreditamos que a falta de domínio na escrita dificultou a organização de uma observação válida.

Apresentaremos na tabela 32, a validação da frequência em percentual, dos registros de situação/problema dadas pelos alunos que levou em consideração o desenvolvimento dos procedimentos da atividade e respostas corretas em cada item respondido da situação-problema.

Tabela 32 – Validade da Situação/Problema da atividade 09

VALIDADE DA SITUAÇÃO/PROBLEMA	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	3	50%
Parcialmente válida	3	50%
Inválida	0	0,00%
Não preencheu quadro da atividade	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

A tabela 32 mostra que 50% dos grupos de alunos tiveram resultados válidos, em suas respostas para a situação analisada. E 50% dos grupos de alunos encontraram respostas, parcialmente válidas. Portanto, podemos considerar que houve um bom desempenho por partes dos alunos no procedimento desenvolvido, conforme validade da situação realizada.

Apresentaremos na tabela 33, em percentual, a frequência da validade das observações da atividade 09, foram consideradas para validade a organização do texto escrito de forma que tivesse coerência, relação com a atividade desenvolvida e de uma forma geral pudesse direcionar ou alcançar o objetivo da atividade.

Tabela 33 – Validade das observações da atividade 09

VALIDADE DA OBSERVAÇÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	3	50%
Parcialmente válida	2	33,33%
Inválida	1	16,67%
Não formulou observação	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Considerando os dados apresentado na tabela 33, onde tem-se que 50% dos grupos de alunos tiveram as observações expressadas e consideradas válidas, 33,33% parcialmente válidas e apenas 16,67% das observações realizadas foram consideradas, inválidas. Podemos entender que a atividade realizada pelos alunos teve resultado promissor, pois, contribuiu para o desenvolvimento conceitual e procedimental de grandezas diretamente e inversamente proporcional dos alunos que realizaram a atividade, alcançando o objetivo da atividade.

5.1.11 Décimo primeiro encontro: décima sessão de ensino

No dia 16/11/2023, ocorreu o décimo primeiro encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 14:35h, com um intervalo e finalizou à 16:10, participaram da aula 25 alunos matriculados e foi aplicado a Atividade 10 – Propriedade fundamental das proporções, a aplicação da atividade 10 teve duração de 45 min.

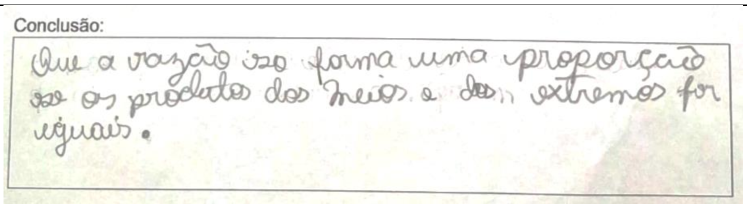
De início alguns grupos já estavam organizados, mas ainda tinha alguns alunos que não estavam em nenhum grupo, então tivemos que orientar para que se organizarem em seus grupos, após isto, entregamos o roteiro da atividade a cada grupo.

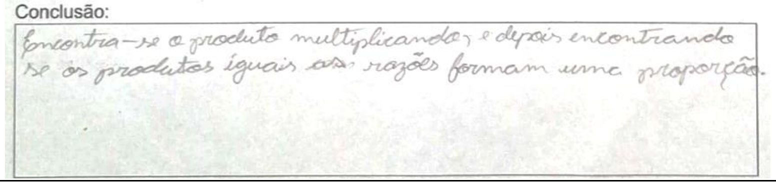
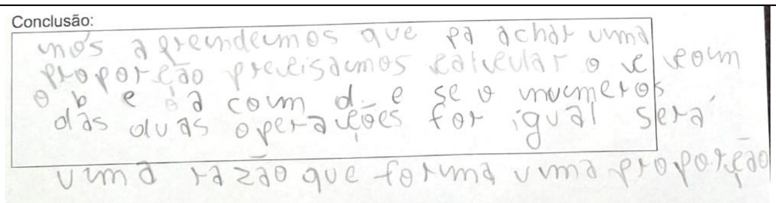
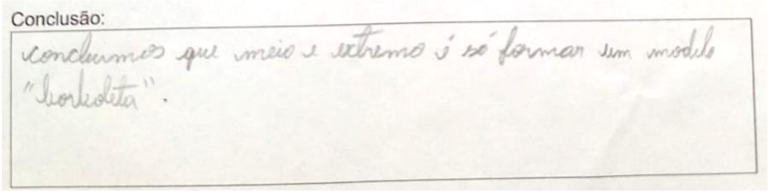
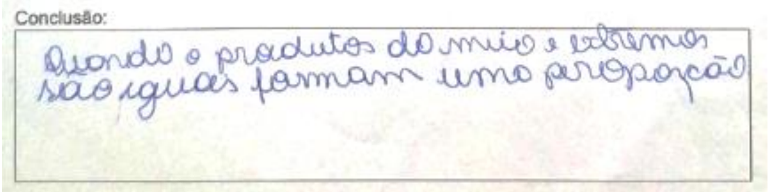
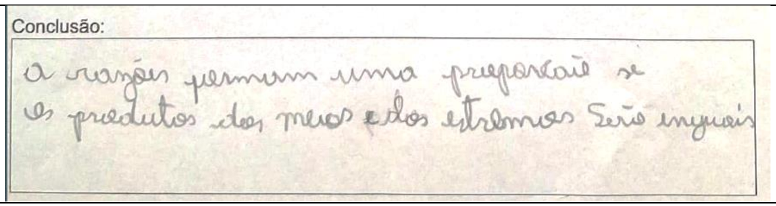
Observamos que nessa atividade os alunos realizaram-nas rapidamente, talvez pelo fato de a atividade trazer uma informação adicional muito útil em relação aos termos da razão, a qual indicava os meios e os extremos de duas razões em forma algébrica e em cada questão as razões estavam representadas em forma numérica e com a devida atenção conseguiam perceber e relacionar quais termos escrever e assim conhecer quais eram os extremos e os meios.

Os alunos responderam as questões e ainda preencheram o quadro com facilidade, no entanto observamos erros na hora de encontrar o produto dos meios e extremos, o grupo G3 por exemplo ao passarmos observando vimos erros preenchido no quadro com os valores incorretos, então percebemos que não teriam multiplicado os valores correspondentes aos meios e extremos, pedimos que observassem com cuidado e refizessem os cálculos com mais atenção aos números que eram os termos da razão que o quadro pede para escrever, perguntamos ao grupo que valores representavam os meios (b e c) e os extremos (a e d) fizemos isso para os três primeiros casos do quadro e então eles perceberam que os resultados que escreveram estavam incorreto, disseram que iam refazer, mostramos a eles que faltava atenção, pois em alguns momentos utilizavam os termos corretos pra encontrar o produto em outros não. O grupo G2 teve erro similar ao do grupo G3, no entanto em todas os casos do quadro consideraram o produto dos meios ($a \cdot b$) e o extremo ($c \cdot d$), indagamos o grupo se eles sabiam quem eram os valores dos meios e dos extremos nos dois primeiro casos no quadro, responderam apontando os valores de forma correta e então perguntamos se eles achavam que o resultado que eles encontraram representava o produto deles, a aluna A8 disse “ *a tá, trocamos tudo, vai ter que fazer de novo*”.

O objetivo desta atividade é descobrir uma propriedade fundamental das proporções. No quadro 19 trazemos a transcrição das conclusões dadas pelos alunos e a validade de cada conclusão de acordo com a institucionalização formalizada.

Quadro 19 – Conclusões dadas pelos alunos na Atividade 10

GRUPO	ALUNOS	Conclusões dos alunos	VALIDAÇÃO
G1	A1, A3, A4 e A5	 Conclusão: Que a razão ira forma uma proporção se os produtos dos meios e dos extremos for iguais.	Válida

		Transcrição	
		Que a razão só forma uma proporção se os produtos dos meios e dos extremos forem iguais.	
G2	A6, A7, A8, A9, e A10	 Conclusão: Encontra-se o produto multiplicando, e depois encontrando se os produtos iguais as razões formam uma proporção.	Parcialmente Válida
		Transcrição	
		Encontra-se o produto multiplicando e depois encontrando se os produtos iguais as razões formam uma proporção	
G3	A11, A13, A14 e A15	 Conclusão: nós aprendemos que pa achar uma proporção precisamos calcular o c com o b e o a com d e se o numeros das duas operações for igual será uma razão que forma uma proporção	Parcialmente Válida
		Transcrição	
		Nós aprendemos que pa[ra] achar uma proporção precisamos calcular o *c* com o *b* e *a* com o *d* e se o números das duas operações for igual será uma razão que forma uma proporção	
G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	 Conclusão: concluimos que meio e extremo é só formar um modelo "borboleta".	Inválida
		Concluímos que meio e extremo é só formar um modelo “borboleta”	
G5	A22 e A26	 Conclusão: Quando o produtos do meio e extremos são iguas formam uma proporção	Válida
		Transcrição	
		Quando o produto dos meios e extremos são iguais forma uma proporção	
G6	A27, A28, A29 e A32	 Conclusão: a razões formam uma proporcão se os produtos dos meios e dos extremos Serão inguais	Válida
		Transcrição	
		A razões formam uma proporção se o produto dos meios e dos extremos são iguais	

Fonte: Experimentação, 2023.

Após finalizarem a atividade 10, realizamos a institucionalização de acordo com as conclusões que cada grupo escrevia na lousa, então formalizamos a conclusão geral com a propriedade “Em uma proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos ou seja ou seja se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então teremos que $a \cdot d = b \cdot c$” e pedimos que anotassem em seus cadernos.

Estes resultados do quadro 19 revelam que a maioria dos grupos conseguiu realizar uma conclusão válida, apenas um grupo o G4, não conseguiu elaborar uma conclusão que fosse válida, o grupo conforme observamos em seus registros no roteiro da atividade conseguiram realizar o cálculo correto e encontrar o produto dos meios e o produtos dos extremos e observar que ao encontrarem resultados dos produtos dos extremos e dos meios, iguais, então as razões formavam proporção e ao encontrarem produtos diferentes não formavam proporção, portanto, acreditamos que apenas não conseguiram elaborar uma conclusão conforme a institucionalização para a turma, porém na hora de formalizar a conclusão foi feito a relação do objetivo com a atividade desenvolvida.

A validação das conclusões ocorreu de forma que as conclusões escritas pelos grupos de alunos deviam estar em conformidade com a institucionalização. Assim, a frequência do resultado da validade das conclusões da atividade 10 é tratada em percentual, na tabela 34.

Tabela 34 – Validade das conclusões da atividade 10

VALIDADE DA CONCLUSÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	3	50%
Parcialmente válida	2	33,33%
Inválida	1	16,67%
Não formulou conclusão	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Portanto a tabela 34, nos mostra que 50% dos alunos expressaram conclusões válidas, 33,33% apresentaram conclusões parcialmente válidas e apenas 16,67% dos alunos apresentaram conclusões inválidas. O que nos faz acreditar que o resultado da atividade desenvolvida, de forma geral, teve um bom desempenho.

Em seguida conversamos que iríamos entregar mais uma lista com questões de aprofundamento, mas que provavelmente não daria tempo de finalizarmos nesta aula. Um aluno disse "*isso não acaba não professora*", respondi que não deviam se preocupar em quantas atividades farão, mas se estão conseguindo compreender melhor, não ia demorar pra finalizarmos não, até porque o ano letivo já iria encerrar final do mês.

Então entregamos uma lista com questões de aprofundamento a cada aluno, e pedimos que resolvessem individualmente e em caso de necessidade de ajuda estaríamos disponíveis pra ajudá-los, mas que deviam fazer esforço pra tentar responder as questões.

Minutos antes da aula terminar, orientamos que guardasse com cuidado a lista de questões, levassem e terminassem de responder em casa e trouxessem na próxima aula a lista para discutirmos a validade das respostas.

5.1.12 Décimo segundo encontro: décima primeira sessão de ensino

No dia 17/11/2023, ocorreu o décimo segundo encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:15h e finalizou à 14:35, participaram da aula 30 alunos e nesta aula foi aplicado a Atividade 11 – Propriedade aditiva da proporção I, esta atividade teve duração aproximada de 45 min.

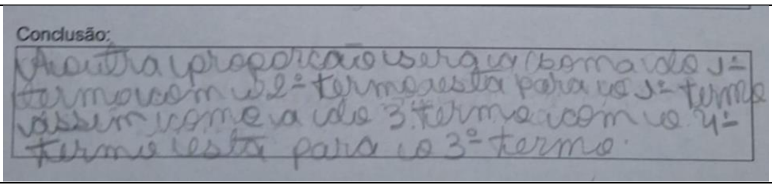
De início pedimos que pegassem a lista que haviam levado para casa e que deveriam ter respondido, para se iniciar a discussão e resolução na lousa de cada questão, as questões foram respondidas na lousa e esclarecido dúvidas sobre o desenvolvimento das questões no momento da resolução.

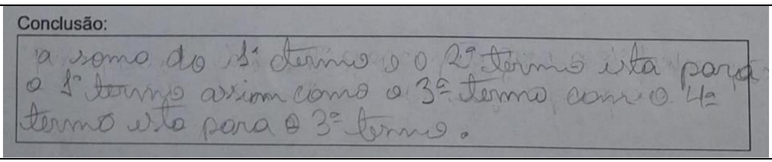
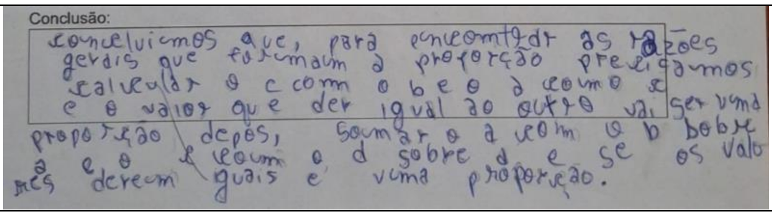
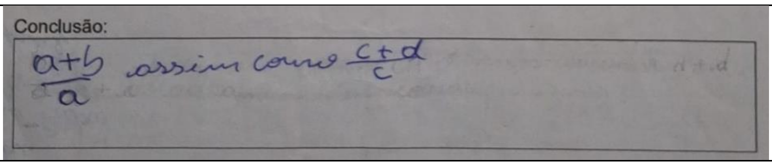
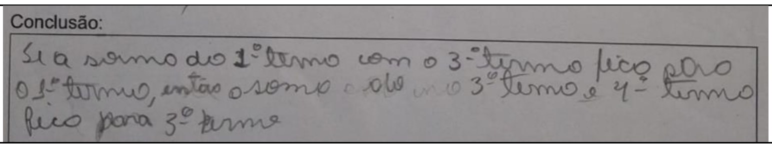
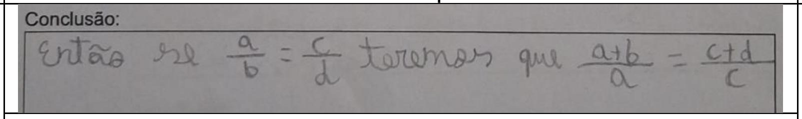
Posteriormente pedimos que os alunos se organizassem em grupos, os mesmos que estavam sendo formado nas aulas anteriores, então entregamos o roteiro da atividade 11. Os grupos, ao passo que iniciavam suas respostas, chamava para que observássemos se estavam fazendo correto, ao percebermos algum equívoco em cálculos pedíamos que refizessem, aproveitávamos a oportunidade ao perceber que alguns grupos não marcavam corretamente o espaço que perguntava se as duas razões (em cada caso específico) que estava representada no quadro, formavam ou não proporção, e perguntávamos se lembravam como saber se duas razões formavam ou não proporção.

O grupo G3 por exemplo ao ser perguntado se lembravam que na aula anterior descobrimos uma propriedade das proporções, se lembravam como fizeram a atividade pra saber se formavam proporções, o aluno A 14 disse "*a gente tem que multiplicar, se der igual forma proporção*", o aluno apontou com o dedo os números que deveriam ser multiplicados, disse que o raciocínio estava correto e que podiam continuar a fazer com atenção em cada caso. No entanto o grupo G5 disse não lembrar, então pedimos que revisassem em seus cadernos a conclusão da atividade 10 que mostrava a propriedade fundamental das proporções, esperamos encontrarem o que anotaram e ajudamos a relembrar a essência da propriedade que ao multiplicar os meios e os extremos e os resultados derem iguais então teremos uma proporção entre as duas razões, pra identificar se haviam entendido perguntamos apontando para o primeiro caso da proporção que escreveram no quadro que no caso eram (1/2 e 2/3) quais eram os meios e os extremos, os alunos A23 e A26 responderam "*meios 2 e 2 e extremos 1 e 3*" confirmei que estavam corretos e pedi para fazerem o cálculo e descobrir se formava ou não proporção em cada caso.

O objetivo desta atividade é descobrir uma propriedade da soma dos termos de uma proporção. No quadro 20 trazemos a transcrição das conclusões dadas pelos alunos e a validade de cada conclusão de acordo com a institucionalização formalizada.

Quadro 20 – Conclusões dadas pelos alunos na atividade 11

GRUPO	ALUNOS	Conclusões dos alunos	VALIDAÇÃO
G1	A1, A2, A3, A4 e A5	 Conclusão: A outra proporcão será a soma do 1º termo com o 2º termo esta para o 1º termo assim como a do 3º termo com o 4º termo esta para o 3º termo.	Válida
		Transcrição	
		A outra proporção será a soma do 1º termo com o 2º termo está para o 1ª termo assim como a do 3º termo com o 4º termo está para o 3º termo.	

G2	A6, A9, e A10	 Conclusão: a soma do 1º termo e o 2º termo esta para o 1º termo assim como o 3º termo com o 4º termo esta para o 3º termo. Transcrição A soma do 1º termo e o 2º termo está para o 1º termo assim como o 3º termo com o 4º termo está para o 3º termo.	Parcialmente Válida
G3	A11, A12, A13, A14 e A15	 Conclusão: concluimos que, para encomtrar as razões gerais que formam a proporção precisamos calcular o c com o b e o d como e e o valor que der igual ao outro vai ser uma proporção depois, somar o a com o b sobre a e o c com o d sobre d e se os valores derem iguais é uma proporção. Transcrição Concluímos que, para encontrar as razões gerais que formam a proporção precisamos calcular o *c* com *b* e o *d* com o *c* e o valor que der igual ao outro vai ser uma proporção depois, somar o *a* com o *b* sobre *a* e o *c* com o *d* sobre *d* e se os valores derem iguais é uma proporção.	Parcialmente Válida
G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	 Conclusão: $\frac{a+b}{a}$ assim como $\frac{c+d}{c}$ Transcrição $\frac{a+b}{a}$ assim como $\frac{c+d}{c}$	Parcialmente Válida
G5	A22, A23, A24, A25 e A26	 Conclusão: Se a soma do 1º termo com o 3º termo fica para o 1º termo, então a soma do 3º termo e 4º termo fica para 3º termo Transcrição Se a soma do 1º termo com o 3º termo fica para o 1º termo, então a soma do 3º termo e 4º termo fica para 3º termo	Parcialmente Válida
G6	A27, A28, A29, A30, A31 e A32	 Conclusão: Então se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ teremos que $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$ Transcrição Então se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ então teremos que $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$	Válida

Fonte: Experimentação, 2023.

Realizamos a institucionalização da atividade 11 de acordo com as conclusões que cada grupo escrevia na lousa, formalizamos a conclusão geral, com a propriedade “Quando duas razões formam uma proporção, então teremos outra proporção na qual a soma dos dois primeiros termos está para o 1º termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o 3º termo, ou seja, se

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então teremos que $\frac{a+d}{a} = \frac{c+d}{c}$" e pedimos que anotassem em seus cadernos.

Portanto, de acordo com os resultados apresentados no quadro 20, inferimos que todos os grupos conseguiram realizar conclusões válidas, mesmo que ainda houvesse necessidade de melhorar o texto escrito por alguns grupos, ressaltado na institucionalização, para que pudessem melhor compreender e internalizar as ações que realizaram na atividade.

A validação das conclusões ocorreu de forma que as conclusões escritas pelos alunos deviam estar em conformidade com a institucionalização. Assim, a tabela 35, sinaliza a frequência da validade das conclusões e tratada em percentual.

Tabela 35 – Validade das conclusões da atividade 11

VALIDADE DA CONCLUSÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	2	33,33%
Parcialmente válida	4	66,67%
Inválida	0	0,00%
Não formulou conclusão	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

De acordo com a tabela 35, constatamos que 33,3% dos alunos criaram conclusões válidas, entretanto, 66,67% criaram conclusões parcialmente válidas. O que revela um bom rendimento ao analisarem seus registros para chegarem a uma conclusão da atividade.

5.1.13 Décimo terceiro encontro: décima segunda sessão de ensino

No dia 22/11/2023, ocorreu o décimo terceiro encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 13:15h, e finalizou à 14:35, participaram da aula 29 alunos e foi aplicado as Atividade 12 – Propriedade aditiva da proporção II e Atividade 13 – Propriedade aditiva da proporção III.

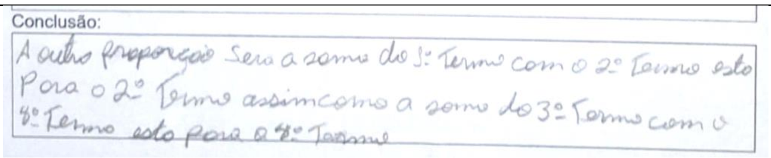
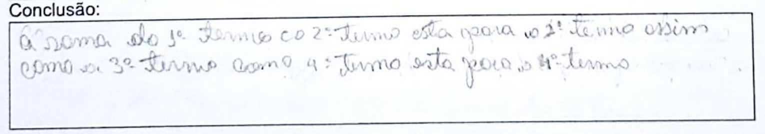
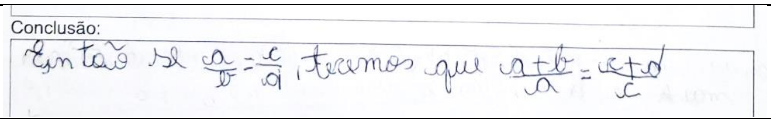
No início, expliquei que nessa aula teriam duas atividades para realizar, mas seria entregue primeiro uma e após terminarem entregávamos a outra. Após os grupos se organizarem entregamos o roteiro da Atividade 12 que teve duração aproximada de 35 min.

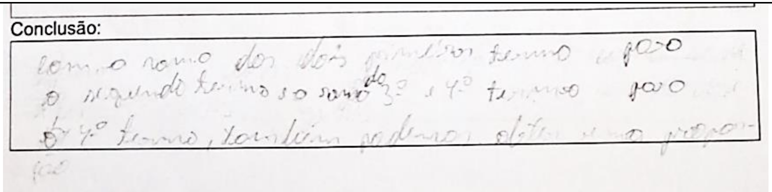
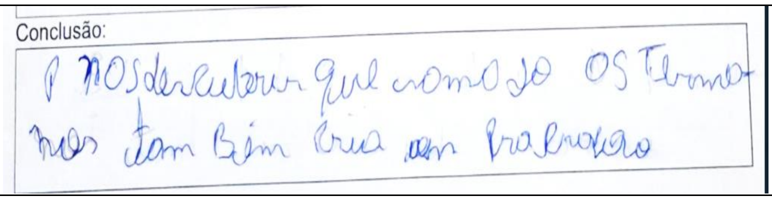
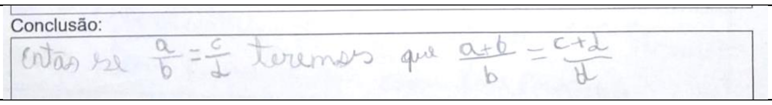
Ao iniciarem a execução da atividade a aluna A1 do grupo G1 chamou e disse “*professora essa atividade não é a mesma que fizemos outro dia?*”, disse que não era embora o objetivo da atividade fosse o mesmo, e falou novamente “mas acho que faz a mesma coisa, vai somar aqui” a aluna apontou com o dedo para o sinal de adição que estava no quadro que era pra preencher, falei concordando que o raciocínio nesse momento estava correto.

Observei os grupos realizando as atividades e quando percebia que havia erro no resultado devido, questionava-os com perguntas do tipo: qual operação usaram para encontrar o resultado? quais valores (do 1º termo, 2º termo, 3º termo ou 4º termo) usaram no cálculo? Como fazem pra verificar se as razões formam uma proporção, para conseguirem verificar e perceberem seus erros.

O objetivo desta atividade é descobrir uma propriedade da soma dos termos de uma proporção. No quadro 21 trazemos a transcrição das conclusões dadas pelos alunos e a validade de cada conclusão de acordo com a institucionalização formalizada.

Quadro 21 – Conclusões dadas pelos alunos na atividade 12

GRUPO	ALUNOS	Conclusões dos alunos	VALIDAÇÃO
G1	A1, A3, A4 e A5	 Conclusão: A outra proporção sera a soma do 1º Termo com o 2º Termo esto Para o 2º Termo assimcomo a soma do 3º Termo com o 4º Termo esto Para o 4º Termo	Válida
		Transcrição	
		A outra proporção será a soma do 1º termo com o 2º termo está para o 2º assim como a soma do 3º termo com o 4º termo está para o 4º termo	
G2	A6, A7, A8, A9, e A10	 Conclusão: a soma do 1º termo co 2º termo esta para o 2º termo assim como o 3º termo como 4º termo esta para o 4º termo	Válida
		Transcrição	
		A soma do 1º termo e o 2º termo está para o 2º assim como o 3º termo com o 4º termo está para o 4º termo	
G3	A11, A12, A13	 Conclusão: Então se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, teremos que $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$	Inválida

	e A15	Transcrição Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos que $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$	
G4	A16, A17, A18, A19 e A20	 Conclusão: Com o soma dos dois primeiros termo para o segundo termo so soma do 3º e 4º termo para o 4º termo, também podemos obter uma proporção Com a soma dos dois primeiros termos para o segundo termo e a soma do 3º e 4º termo para o 4º termo, também podemos obter uma proporção	Parcialmente Válida
G5	A22, A23, A24, A25 e A26	 Conclusão: P nos descubriu que somando os termos nos tambem cria um proporção Transcrição Nos descobriu que somando os termos nos também cria uma proporção	Parcialmente Válida
G6	A27, A28, A29, A30, A31 e A32	 Conclusão: Entas se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos que $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ Transcrição Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos que $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$	Válida

Fonte: Experimentação, 2023.

Finalizaram a atividade 12, e então realizamos a institucionalização de acordo com as conclusões que cada grupo escreveu na lousa formalizando a conclusão geral para a turma, com a propriedade “Quando duas razões formam uma proporção, então teremos outra proporção na qual a soma dos dois primeiros termos está para o 2º termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o 4º termo, ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então teremos que $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$” e pedimos que anotassem em seus cadernos.

O dados do quadro 21, apontam que apenas um grupo, o grupo G3, não obteve conclusão válida, percebemos que após análise de seus registros no roteiro da atividade não elaboraram uma conclusão capaz de demonstrar uma relação da atividade com o procedimentos realizado, talvez tenham, apenas confundido os termos dos consequente das razões que formavam a outra proporção com a soma dos dois primeiros termos e a soma dos dois últimos termos da razão, pois a atividade anterior teve o mesmo objetivo, no entanto os procedimentos levariam a resultados diferentes. É importante destacar que a conclusão é inválida para essa atividade que direcionava a formação de uma proporção com termos específicos.

A validação das conclusões ocorreu de forma que as conclusões escritas pelos alunos deviam estar em conformidade com a institucionalização. Assim, a tabela 36 abaixo irá mostrar a frequência do resultado da validade das conclusões da atividade 12, tratada em percentual.

Tabela 36 – Validade das conclusões da atividade 12

VALIDADE DA CONCLUSÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	3	50%
Parcialmente válida	2	33,33%
Inválida	1	16,67%
Não formulou conclusão	0	0,00%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Observamos então que, 66,66% dos grupos de alunos expressaram conclusões válidas, 16,67% conclusões parcialmente válidas e apenas 16,6% dos alunos expressaram conclusões inválidas. O que representa um bom desempenho nas análises que fizeram para chegar a uma conclusão da atividade.

Posteriormente entregamos o roteiro da atividade 13, que teve duração de 35 min, observamos o grupo G4 cada aluno responsável por fazer uma resposta e alguém preenchia no quadro. O aluno A 10 do grupo G2 chamou e perguntou “professora é o resultado dessa razão que foi somada que tá aqui e essa outra razão aqui que vamos ver se forma proporção, tá certo?” apontando para o primeiro caso do quadro que foi preenchido no espaço que estava as razões “(36/8 e 9/2)” e depois “essa com essa?” apontando com o dedo para a razão “(36/8 e 27/6)”, confirmei que estavam certos no raciocínio até o momento e que podiam continuar com cuidado para não confundirem as razões que irão usar na hora do cálculo.

Alguns grupos G1, G3, G4 e G5 conseguiram finalizar a observações, no entanto, não daria tempo para formalizarmos uma conclusão para a turma, então combinamos que iria recolher as atividades e na próxima aula devolveria para que finalizassem e escrevessem na lousa as observações e assim formalizarmos a conclusão da turma.

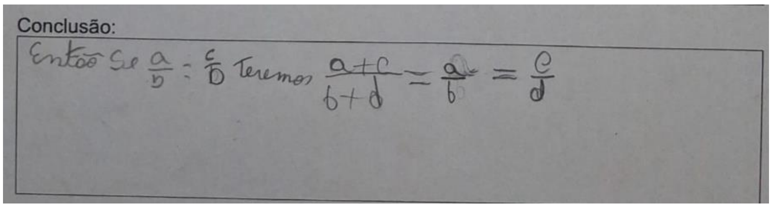
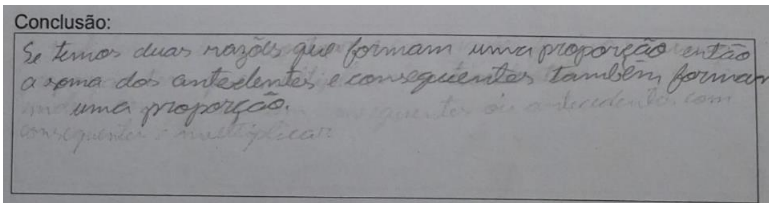
5.1.14 Décimo quarto encontro: décima terceira sessão de ensino

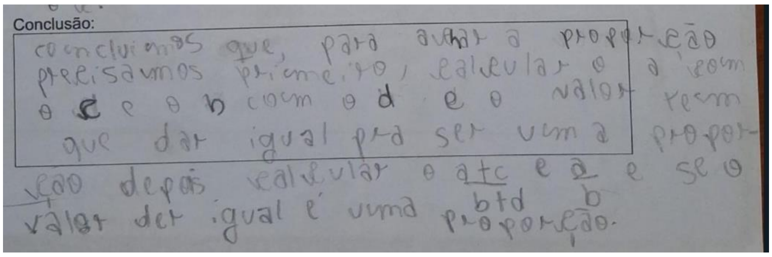
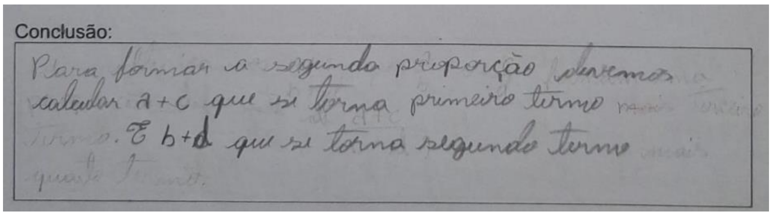
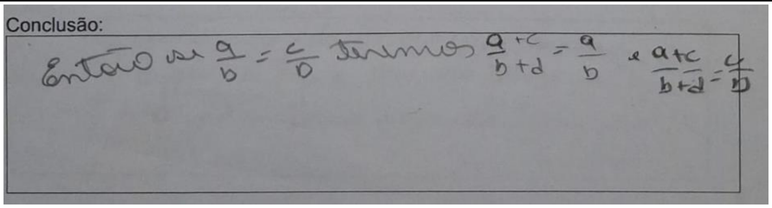
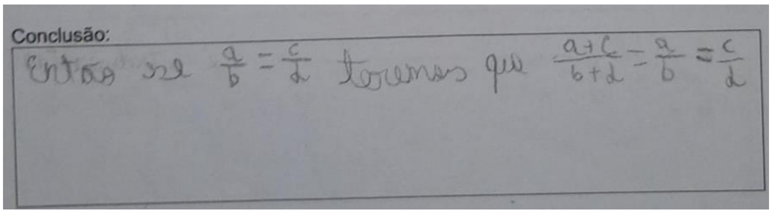
No dia 23/11/2023, ocorreu o décimo quarto encontro que durou um tempo total de 2 h/a, iniciou às 14:35h, com um intervalo e finalizou à 16:10, participaram da aula todos os 32 alunos.

No início da aula os alunos perguntaram se já iam escrever na lousa as observações, pedi que primeiro se organizassem em grupos, após se organizarem, devolvi a atividade 13, pedi que os alunos observassem novamente o que haviam realizado na aula anterior e escrevessem na lousa as observações e os grupos G2 e G6 deviam observar também os procedimentos da aula anterior pra fazerem suas observações no roteiro.

O objetivo desta atividade é descobrir uma propriedade da soma dos termos de uma proporção. No quadro 22 trazemos a transcrição das conclusões dadas pelos alunos e a validade de cada conclusão de acordo com a institucionalização formalizada.

Quadro 22 – Conclusões dadas pelos alunos na atividade 13

GRUPO	ALUNOS	Conclusões dos alunos	VALIDAÇÃO
G1	A1, A2, A3, A4 e A5	 Conclusão: Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Teremos $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Transcrição Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	Válida
G2	A6, A7, A8, A9, e A10	 Conclusão: Se temos duas razões que formam uma proporção então a soma dos antecedentes e consequentes tambem formam uma proporção. Transcrição Se temos duas razões que formam uma proporção então a soma dos antecedentes e consequentes também formam uma proporção.	Parcialmente Válida

G3	A11, A12, A13 A14 e A15	 Conclusão: concluimos que, para achar a proporção precisamos primeiro, calcular o a com o c e o b com o d e o valor tem que dar igual pra ser uma proporção depois calcular o $\frac{a+c}{b+d}$ e $\frac{a}{b}$ e se o valor der igual é uma proporção. Transcrição Concluímos que, para achar a proporção precisamos primeiro, calcular o *a* como *c* e o *b* com o *d* e o valor tem que dá igual para ser uma proporção depois calcular o $\frac{a+c}{b+d}$ e $\frac{a}{b}$ e se o valor der igual é uma proporção.	Parcialmente Válida
G4	A16, A17, A18, A19, A20 e A21	 Conclusão: Para formar a segunda proporção devemos calcular a+c que se torna primeiro termo e b+d que se torna segundo termo Transcrição Para formar a segunda proporção devemos calcular $a + c$ que se torna primeiro termo e $b + d$ que se torna segundo termo	Parcialmente Válida
G5	A22, A23, A24, A25 e A26	 Conclusão: Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ e $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ Transcrição Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ e $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$	Válida
G6	A27, A28, A29, A30, A31 e A32	 Conclusão: Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Transcrição Então se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	Válida

Fonte: Experimentação, 2023.

Depois de finalizarem a atividade 13 realizamos a institucionalização de acordo com as conclusões que cada grupo escrevia na lousa, então formalizamos a conclusão geral para a turma, com a propriedade “Quando duas razões formam uma proporção, então a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como está para cada razão, ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

então teremos que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ” e pedimos que anotassem em seus cadernos.

Os resultados do quadro 22 indicam que todos os grupos conseguiram realizar uma conclusão válida, embora alguns grupos tenham efetivado uma conclusão parcialmente válida, ainda assim chegaram em um raciocínio plausível. A conclusão do grupo G2 e G4 foram consideradas parcialmente válida, pois, faltou os grupos analisarem melhor seus registros já que sabiam que somando os antecedentes e consequentes iriam ter a razão entre eles e que formaria uma proporção com cada uma das razões dadas, como está em seus registros, no roteiro da atividade que realizaram. Consideramos a conclusão do grupo G3 parcialmente válida, pois utilizaram a palavra “cálculo” de forma que não explicitava a operação que realizaram, no entanto, notamos que utilizaram o “cálculo” em dois momentos para designar, ora operação de soma e outrora operação de multiplicação, entretanto, entendemos dessa forma, pois, o registro no quadro da atividade e nosso acompanhamento durante o desenvolvimento dava de perceber como chegaram aos resultados.

A validação das conclusões ocorreu de forma que as conclusões escritas pelos alunos deviam estar em conformidade com a institucionalização. Daí mostraremos na tabela 37, o resultado da frequência da validade das conclusões da atividade 13, tratada em percentual.

Tabela 37 - Validade das conclusões da atividade 13

VALIDADE DA CONCLUSÃO	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
Válida	3	50%
Parcialmente válida	3	50%
Inválida	0	0,0%
Não formulou observação	0	0,0%
Total	6	100,00%

Fonte: Experimentação, 2023.

Então, constatamos que 50% dos grupos de alunos representaram conclusões válidas e 50% dos grupos conclusões parcialmente válidas. O que representa um desempenho satisfatório nas análises que fizeram para chegar a uma conclusão da atividade.

Posteriormente entreguei a cada aluno uma lista de atividade de aprofundamento contendo 4 questões, pedi que respondessem e conforme as dúvidas fossem surgindo ou percebesse a necessidade de intervenção iria ajudá-los direcionando para uma possível solução e que posteriormente iria formalizar na lousa uma solução possível e esclarecer alguma dúvida a respeito das soluções encontradas, e caso não houvesse tempo pra finalizar e dialogar sobre a resolução das questões iria conseguir um outro horário pra finalizar.

Observei que a maioria dos alunos conseguiram resolver apenas a questão 1, como a aula já estava pra terminar, combinamos que iriam levar e responder na casa que na segunda-feira (dia 27/11/23) se algum professor cedesse alguma aula iríamos verificar a resolução e esclarecer as dúvidas que houvessem.

5.1.15 Décimo quinto encontro: décima quarta sessão de ensino

No dia 27/11/2023, ocorreu o décimo quinto encontro que durou um tempo total de 1 h/a, iniciou às 13:15h e finalizou à 13:55h, participaram da aula todos os 32 alunos, os alunos estavam em véspera de avaliação, perguntaram quando e como seria nossa prova, se seria em grupo, aproveitei pra esclarecer para todos que no dia de hoje só iria está com eles uma aula que conseguir com a professora “M” pra finalizar as questões de aprofundamento da aula anterior.

Pedi que pegassem a lista para corrigirmos e tirar as últimas dúvidas, esclareci ainda que a prova de matemática seria individual por meio do teste que já havíamos conversado que teria depois de terminar todas as atividades e que seria no dia 29/11 de acordo com o calendário das avaliações finais que está no quadro de avisos, e os conteúdos são referentes a razão e proporção, estudados durante a aplicação das atividades que realizaram.

Verifiquei se todos haviam respondidos as questões da lista e observei que poucos responderam, e como havia poucos minutos apenas para finalizara a aula, então aproveitei pra esclarecer a resolução das duas primeiras questões, uma que tratava de distribuição em partes diretamente proporcionais e a outra inversamente proporcionais.

5.1.16 Décimo sexto encontro: Pós-Teste

No dia 29/11/23, ocorreu a aplicação do pós-teste. Todos os 32 alunos estavam presentes. O pós-teste teve duração de um tempo aproximado de 80 minutos.

Como não haveria outro dia para aplicarmos o pós-teste e o conteúdo trabalhado na nossa pesquisa fazia parte da grade curricular para a turma de 9º ano, propusemos a direção e coordenação pedagógica da escola que iríamos aplicar o pós-teste da nossa pesquisa no dia da avaliação bimestral conforme está no calendário escolar, e que o resultado poderia se integrar as atividades realizadas e avaliadas antes de iniciarmos nossa pesquisa, concordaram e assim foi feito.

Antes de iniciar o pós-teste um aluno perguntou se eles poderiam usar calculadora, autorizamos com a condição que cada aluno usasse a sua, sem empréstimos do colega pra não gerar confusão ou bagunça. Aproveitei também pra pedir que realizassem o teste com compromisso e atenção pra conseguirem um bom aproveitamento. Um aluno falou "*relaxe professora só preciso tirar 2,0 (dois) pontos pra passar, tá aqui no meu boletim, quer ver*?" os colegas sorriram, mas pedi novamente que não se preocupassem com a nota em si, mas que não tivessem pressa e fizessem o teste com atenção e máximo de dedicação.

A avaliação neste dia foi com duas disciplinas (Matemática e Geografia), sendo entregue ao aluno primeiro a de matemática e após um tempo mínimo de 60 min poderiam caso estivessem finalizados, entregar e receber a de Geografia em sequência e tempo máximo de 180 min para concluir e devolver as duas avaliações.

Deu o sinal pra entregarmos as avaliações para os alunos, e assim o fizemos. Após entregarmos o teste de matemática os alunos tiveram um tempo mínimo de 60 min para poderem devolver a primeira avaliação/teste que deveriam ser seguidos conforme o regimento da escola. Entretando, conforme deu o tempo mínimo de permanência com o primeiro teste, alguns alunos começaram a devolver e iniciar a avaliação da outra disciplina, alguns alunos continuaram a fazer o teste de matemática e só em seguida entregaram e iniciaram o da outra disciplina.

6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta seção, trataremos da fase 4 da engenharia didática, a análise a posteriori e validação. De posse dos dados recolhidos na fase da experimentação durante as observações nas sessões de ensino, faremos a análise individual, do grau de aproveitamento nos testes aplicados (pré-teste e pós-teste) e daí faremos uma comparação ou relação entre si.

Iremos comparar os possíveis resultados esperados com as respostas dadas pelos alunos nas atividades para fazermos as análises a priori e a posteriori que servirão para a validação.

Faremos os tratamentos estatístico dessas informações vindas dos questionários, observações, enfim, das fases anteriores da engenharia didática para validar com a sistematização em gráficos, quadros e tabelas. Utilizaremos o Teste Exato de Fisher para verificar se há alguma associação entre variáveis.

6.1 ANÁLISES A POSTERIORI DOS TESTES AVALIATIVOS

De acordo com os resultados do pré-teste e pós teste dos estudantes, aplicados na fase da experimentação, iremos apresentar neste momento as análises do desempenho dos estudantes por questão e também por aluno, comparamos o desempenho dos estudantes nos pré-teste e pós-teste para saber se o resultado foi satisfatório ou não, se as atividades aplicadas ajudaram no alcance do resultado.

Para analisarmos o desempenho dos estudantes nos testes classificamos suas respostas de acordo como mostramos no quadro 23. As análises dos resultados de desempenho serão apresentadas na tabela 38 e gráfico 23, em percentuais.

Quadro 23 – Classificação das respostas do Pré-teste e Pós-teste

CATEGORIAS	CARACTERÍSTICAS
ACERTO	Quando o estudante apresentou uma resolução desenvolvida com exatidão de procedimentos necessários ou explicitou seu raciocínio com coerência e encontrou resultado correto
ACERTO PARCIAL	Quando o estudante desenvolveu uma resolução cabível, no entanto cometeu erros procedimentais que o levou ao resultado incorreto
ERRO	Quando o estudante apresentou resolução completamente incorreta
EM BRANCO	Quando o estudante não apresentou nenhum resultado

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

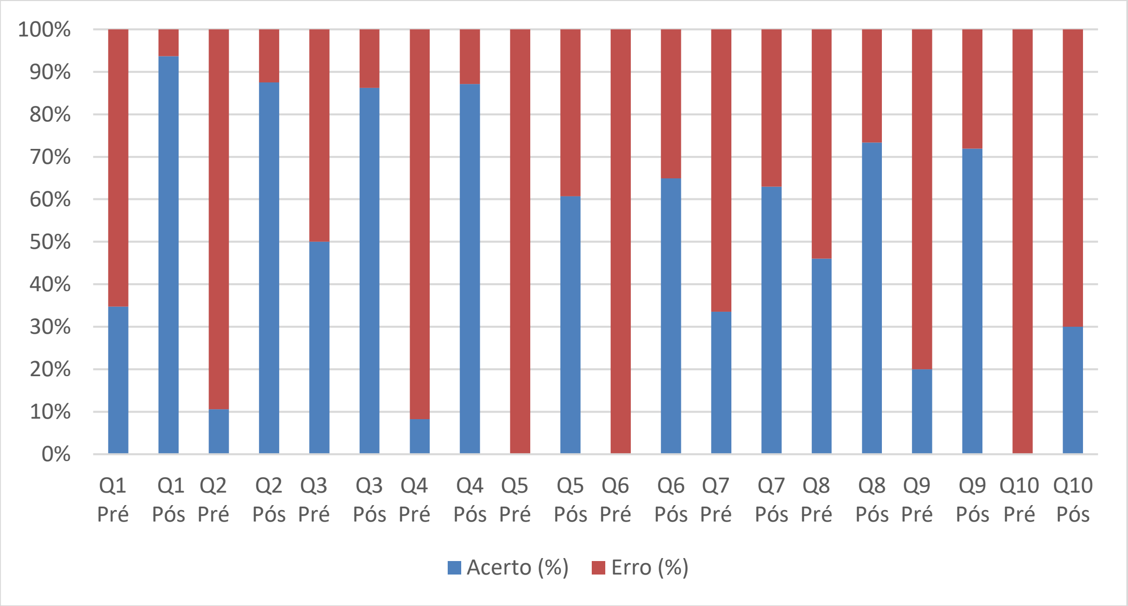
Na tabela 38 e gráfico 23 mostraremos o resultado comparativo entre o resultado do pré-teste e pós-teste dos estudantes pesquisados.

Tabela 38 – Comparativo do desempenho dos estudantes por questão nos testes

	Acerto (%)		**Acerto parcial (%)**		**Erro (%)**		**Em branco (%)**	
Questão	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste
Q1	25,0%	93,7%	0,0%	0,0%	46,9%	6,3%	28,1%	0,0%
Q2	6,3%	87,5%	0,0%	0,0%	53,1%	12,5%	40,6%	0,0%
Q3	25,0%	78,1%	0,0%	9,4%	25,0%	12,5%	50,0%	0,0%
Q4	3,1%	84,4%	0,0%	3,1%	34,4%	12,5%	62,5%	0,0%
Q5	0,0%	53,1%	0,0%	6,3%	40,6%	34,4%	59,4%	6,3%
Q6	0,0%	40,6%	0,0%	37,5%	31,2%	21,9%	68,8%	0,0%
Q7	6,3%	53,1%	0,0%	6,3%	12,5%	31,2%	81,2%	9,4%
Q8	18,7%	68,7%	0,0%	0,0%	21,9%	25,0%	59,4%	6,3%
Q9	15,6%	71,9%	0,0%	0,0%	62,5%	28,1%	21,9%	0,0%
Q10	0,0%	28,1%	0,0%	3,1%	15,6%	65,6%	84,4%	3,1%

Fonte: Experimentação, 2023.

Gráfico 23 – Comparativo do desempenho dos estudantes por questão nos testes



Fonte: Experimentação, 2023.

A tabela 38 e o gráfico 23, mostram resultados do pré-teste em que as quantidades de questões deixadas em branco, ou seja, questões que os alunos não responderam, tiveram percentual de um total de 10 questões, onde mais de 50% delas foram deixadas em branco, apenas as questões Q1, Q2 e Q9 tiveram percentual abaixo de 50% de questões em branco. Seguindo a análise percebemos que das questões que foram respondidas, em todas as questões o percentual de erro superou o percentual de acertos. As questões Q5, Q6 e Q10 nenhum aluno conseguiu acertar, a questão 4 apenas 1 (um) aluno – 3,1%

acertou, a questão Q2 e Q7 teve acerto por 2 (dois) alunos – 6,3% em cada questão, já as questões Q8 e 9 tiveram respectivamente, 6 (seis) alunos –18,7% e 5 (cinco) alunos – 15,6% de acertos, e com um percentual mais alto de acerto nas questões Q1 e Q3, porém apenas 8 (oito) alunos – 25% acertaram cada questão.

Vale destacar que estimulamos bastante os alunos a tentarem buscar forma de responder todas as questões e isso pode ter influenciado em um número maior de questões respondidas, pois muitos que já haviam decidido devolver seus testes tentaram responder novamente, no entanto isso pode ter ocasionado também um maior número de erros ou acertos, mas por outro lado se tivessem desistido de responder, certamente o número de questões em branco seriam maiores.

Ademais a análise da tabela 38 e gráfico 23 nos revelam resultados importantes, como o percentual de questões as quais os alunos resolveram no pós-teste aumentou significativamente ao compararmos com o resultado do pré-teste. No pré-teste todas as questões houve percentual de questões deixadas em branco, já no pós-teste esse fato não ocorreu, apenas as questões Q5, Q7, Q8 e Q10 tiveram um percentual bem pequeno de estudantes que deixaram de responder tais questões do teste. O número de acertos teve em percentual, aumento, mesmo a questão Q10 por exemplo ter tido um percentual de acerto de 28,1% e considerado baixo, mas ainda assim, entendemos que é um avanço significativo, pois, no pré-teste essa mesma questão não teve nenhum acerto e ainda por ser uma questão de maior dificuldade.

O percentual de erros, na maioria das questões do pós-teste diminuiu e os acerto parciais que no pré-teste não ocorreu, no pós-teste esse resultado foi considerado relevante, a questão Q6 foi a que mais obteve acertos considerados parciais, 37,5%. Já as questões que mais tiveram respostas consideradas erradas, foram as questões Q10 com 84,4% de erro, Q5 com 34,4% e Q7 com 31,2%.

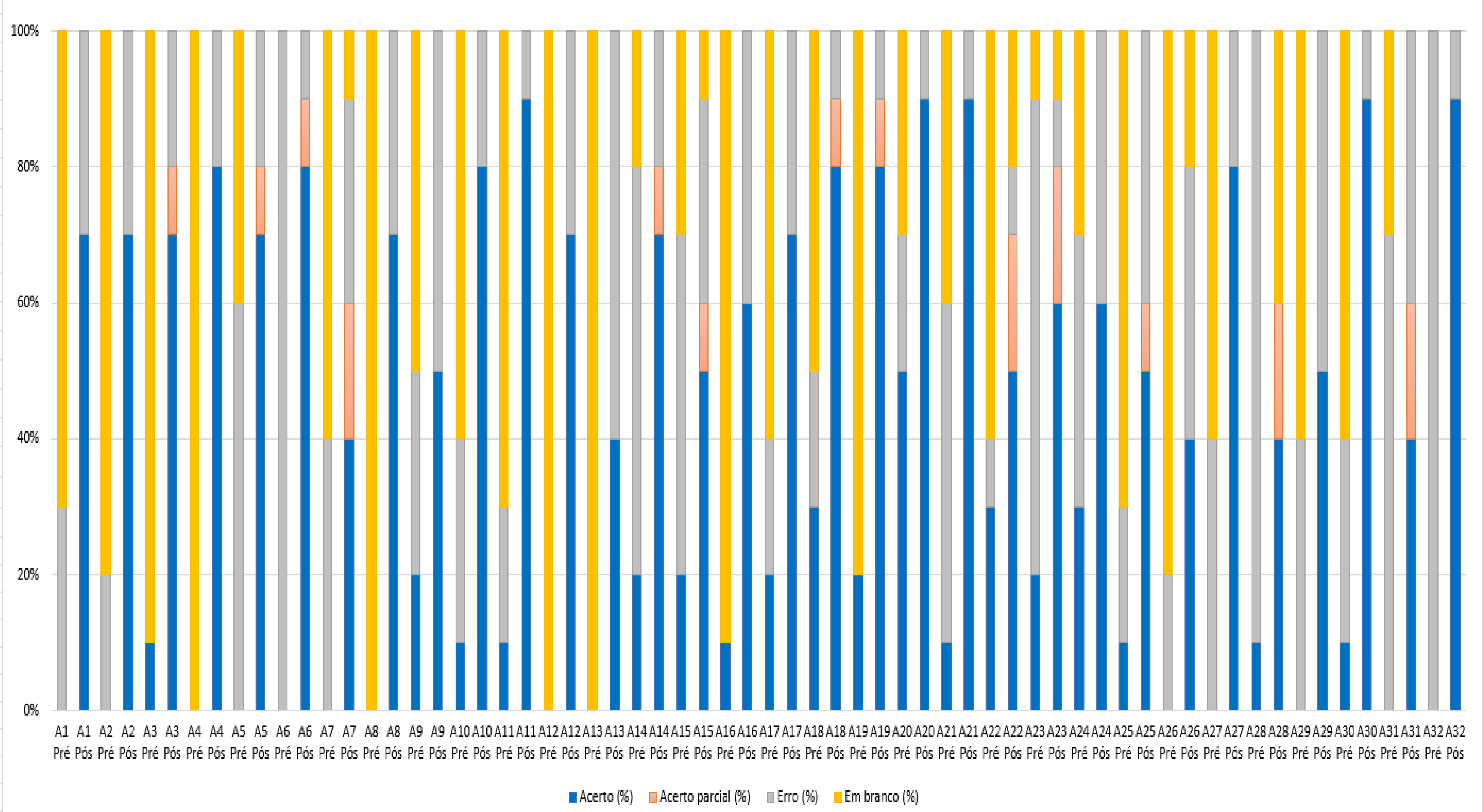
Na tabela 39 e gráfico 24 mostraremos um comparativo entre o resultado do pré-teste e pós-teste, de cada estudante pesquisado. Em seguida destacaremos a faixa de acerto dos estudantes nos testes.

Tabela 39 – Comparação do desempenho dos estudantes nos Testes

	Acerto (%)		**Acerto parcial (%)**		**Erro (%)**		**Em branco (%)**	
Estudante	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste
A1	0%	70%	0%	0%	30%	30%	70%	0%
A2	0%	70%	0%	0%	20%	30%	80%	0%
A3	10%	70%	0%	10%	0%	20%	90%	0%
A4	0%	80%	0%	0%	0%	20%	100%	0%
A5	0%	70%	0%	10%	60%	20%	40%	0%
A6	0%	80%	0%	10%	100%	10%	0%	0%
A7	0%	40%	0%	20%	40%	30%	60%	10%
A8	0%	70%	0%	0%	0%	30%	100%	0%
A9	20%	50%	0%	0%	30%	50%	50%	0%
A10	10%	80%	0%	0%	30%	20%	60%	0%
A11	10%	90%	0%	0%	20%	10%	70%	0%
A12	0%	70%	0%	0%	0%	30%	100%	0%
A13	0%	40%	0%	0%	0%	60%	100%	0%
A14	20%	70%	0%	10%	60%	20%	20%	0%
A15	20%	50%	0%	10%	50%	30%	30%	10%
A16	10%	60%	0%	0%	0%	40%	90%	0%
A17	20%	70%	0%	0%	20%	30%	60%	0%
A18	30%	80%	0%	10%	20%	10%	50%	0%
A19	20%	80%	0%	10%	0%	10%	80%	0%
A20	50%	90%	0%	0%	20%	10%	30%	0%
A21	10%	90%	0%	0%	50%	10%	40%	0%
A22	30%	50%	0%	20%	10%	10%	60%	20%
A23	20%	60%	0%	20%	70%	10%	10%	10%
A24	30%	60%	0%	0%	40%	40%	30%	0%
A25	10%	50%	0%	10%	20%	40%	70%	0%
A26	0%	40%	0%	0%	20%	40%	80%	20%
A27	0%	80%	0%	0%	40%	20%	60%	0%
A28	10%	40%	0%	20%	90%	0%	0%	40%
A29	0%	50%	0%	0%	40%	50%	60%	0%
A30	10%	90%	0%	0%	30%	10%	60%	0%
A31	0%	40%	0%	20%	70%	40%	30%	0%
A32	0%	90%	0%	0%	100%	10%	0%	0%

Fonte: Experimentação, 2023

Gráfico 24 – Comparação do desempenho dos estudantes nos Testes



Fonte: Experimentação, 2023.

A fim de facilitarmos a análise dos resultados dos testes, classificamos a faixa de acertos dos estudantes, conforme mostra o quadro 24. Na tabela 40, apresentaremos os resultados do desempenho, por faixa de acertos conforme classificamos.

Quadro 24: Classificação da faixa de acertos dos estudantes nos testes

CATEGORIA	**CARACTERÍSTICA**
INSUFICIENTE	Quando o estudante tenha obtido entre 0% a 49% de acerto
REGULAR	Quando o estudante tenha obtido entre 50% a 69% de acerto
BOM	Quando o estudante tenha obtido entre 70% a 89% de acerto
EXCELENTE	Quando o estudante tenha obtido entre 90% a 100% de acerto

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Tabela 40 – Faixa de acertos dos estudantes nos testes

Faixa de Acerto (%)	Pré-Teste	Pós-Teste
0-49	96,9%	15,6%
50-69	3,1%	25,0%
70-89	0,0%	43,8%
90-100	0,0%	15,6%

Fonte: Experimentação, 2023.

A análise da tabela 40, nos faz inferir que houve um quantitativo significante de evolução dos estudantes, ao observarmos os resultados do pré-teste e pós-teste, percebemos que o quantitativo de estudantes que tiveram desempenho insuficiente diminuiu consideravelmente, o quantitativo com desempenho regular aumentou significativamente, o desempenho bom teve um aumento consideravelmente satisfatório e o desempenho excelente também foi um resultado significativo.

Da análise da tabela 39 e gráfico 24, nos revelam que o percentual de acertos no pré-teste, variou entre (0% a 50%), já no pós-teste o percentual de acerto variou entre (40% a 90%). Além disso percebemos que no pré-teste, os alunos não tiveram nenhuma questão avaliada parcialmente certa, situação que apareceu no pós-teste. Ademais, não houve nenhum estudante que deixou em branco todas as questões do pós-teste, como ocorreu no pré-teste.

Ao compararmos o percentual de acertos no pré-teste, com exceção dos estudantes (A9, A26 e A31) os quais o percentual de acerto foi igual ao de erro e o estudante (A13), o único que teve percentual de acerto no pós-teste menor, os demais 28 estudantes, (87,5%), tiveram percentual de acertos superiores ao percentual de erro.

É importante destacar, que o estudante (A13) apesar de ter tido um percentual de erro (60%), maior que o de acerto (40%), consideramos que houve um desempenho favorável ao aprendizado, pois o estudante não havia respondido nenhuma questão no pré-teste e respondeu todas as questões no pós-teste, embora tenha acertado apenas 40% ainda assim conseguimos despertar seu interesse embora saibamos que ainda ficou lacunas a melhorar em relação ao ensino.

Da mesma forma entendemos a evolução de outros alunos, ao analisarmos o desempenho dos estudantes (A7, A26 e A31) que assim como o estudante A13, obtiveram percentual de questões certas de apenas 40% no pós-teste, estes alunos não haviam tido nenhum acerto no pré-teste, entretanto, ainda os estudantes (A7 e A31) tiveram percentual de 20% de questões do pós-teste que estavam parcialmente certas. Ainda o aluno A28 teve percentual de acerto no pós-teste de 40%, no entanto, percebemos que este aluno respondeu apenas 60% das questões do pós-teste e 40% estavam certas e 20% estavam parcialmente certas, deixando 40% em branco.

Acreditamos que a evolução que houve com a crescente de questões certas ou parcialmente certas e ainda a diminuição no quantitativo de questões deixadas em branco, foi resultado de um bom desempenho nas atividades de ensino, colaborou num amadurecimento cognitivo em relação ao conteúdo de razão e proporção, favoreceu a autoconfiança para resolverem as questões seja em grupo ou individualmente.

Mostraremos a seguir resultados de resoluções das questões do pós-teste que consideramos como ERRADA, bem como a classificado por tipo de erro cometido.

6.1.1 Tipos de erros nos testes

Neste momento apresentaremos uma avaliação dos tipos de erros que os estudantes cometeram nas resoluções dos testes, bem como a análise dos fatores que podem ter os levados a tais ocorrências errôneas. Organizamos os exemplos em quadros, de acordo com cada questão e para não nos estendermos a exemplificar exemplos semelhantes juntamos a contagem desses erros conforme similaridade nos procedimentos realizados.

Buscamos nos ater a uma análise esclarecedora que nos permita compreender e classificar os erros encontrados, para isso dispusemos os erros encontrados em categorias, como destacamos no quadro 25 a seguir.

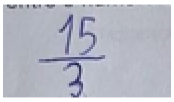
Quadro 25 – Classificação de Erros cometidos pelos estudantes

CATEGORIAS	**CARACTERÍSTICAS**
Erro Conceitual - **E.C**	Quando o estudante demonstra não possuir compreensão do conceito nas situações e não possui habilidades com o significado do problema
Erro Procedimental - **E.P**	Ocorre quando o aluno apresenta algum conhecimento conceitual, mas apresentou solução incorreta, pois, não soube utilizar os cálculos algoritmos adequadamente, apesar de ter escolhido a operação adequada
Erro Relacional - **E.R**	Ocorre quando o aluno apresentou solução incorreta devido ter escolhido a operação inadequada, mesmo que tenha acertado o resultado da operação escolhida
Erro de Escrita/Registro - **E.E**	Ocorre quando o aluno não apresentou a solução correta devido não ter utilizado os dados do enunciado corretamente, efetuando troca de valores ou dos termos.
Erro de Atenção - **E.A**	Quando o estudante desconsidera que o problema exigiu mais de um questionamento a ser respondido Quando o aluno não possui habilidade de perceber ou solucionar problemas a partir da relação lógica entre as informações resultantes do procedimento executado

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Nos quadros a seguir mostraremos resultados de erros cometidos nas resoluções das questões do pós-teste pelos estudantes que participaram da experimentação.

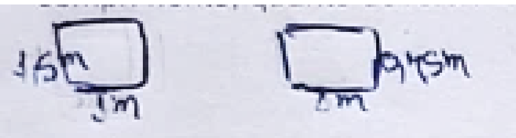
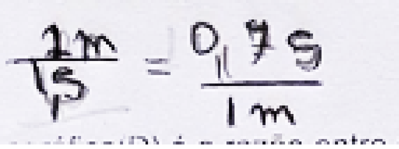
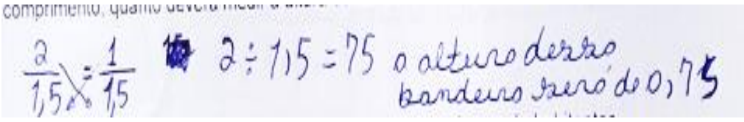
Quadro 26 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 01

QUESTÃO 01			
Um estojo de maquiagem tem 12 tonalidades de batom, sendo 3 tonalidades cintilantes e as restantes cremosas. Qual a representação da razão entre o número de batom cintilante e o número de batons no estojo?			
Exemplos de resolução		Categorias de erros apresentados	Nº de erros
1		E.P e E.E	2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

O quadro 26, apresenta os tipos de erros que os estudantes cometeram na resolução da questão 2, constatamos que os erros cometidos foram: procedimentais e de escrita/registro. Entendemos que o fato de os alunos terem errado, ocorreu por que não utilizaram os dados corretamente do problema que estavam implícitos, realizaram a soma dos batons cintilantes com o total do estojo de forma equivocada e ainda trocaram a ordem dos termos que iriam representar a razão, pois o consequente devia ser o valor total de batons e no caso não seria o 3 (três).

Quadro 27 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 02

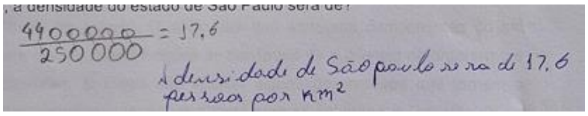
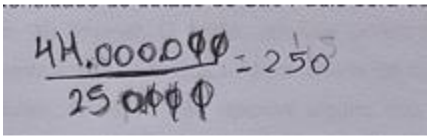
QUESTÃO 02			
O tamanho máximo das bandeiras autorizadas para entrarem em um estádio de futebol na copa do mundo de 2022, segundo o padrão da FIFA foi de 2m de comprimento por 1,5m de largura. Considerando que uma Bandeira Nacional possui 1 m de comprimento, quanto deverá medir a largura dessa bandeira, seguindo a proporcionalidade dos padrões FIFA?			
Exemplos de resolução		Categorias de erros apresentados	Nº de erros
1		E.A	1
2	$\frac{2m}{1,5} = \frac{0,75}{1m}$	E.E	1
3	$\frac{2}{1,5} = \frac{1}{1,5}$ $2 \div 1,5 = 75$ o altura dessa bandeira será de 0,75	E.E e E.P	2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Como mostra no quadro 27, os estudantes na resolução da questão 02 cometeram erros de: atenção; escrita/registro e procedimental. No exemplo 1, observamos que o aluno expressou uma representação proporcional dos tamanhos, no entanto errou ao escrever os valores iguais para o comprimento proporcional da bandeira, fato que poderia ter sido evitado com maior atenção na hora de solucionar o problema. No exemplo 2, percebemos que o aluno escreveu na ordem errada os valores ao representar as razões em proporção, trocando os termos. O exemplo 3, nos faz inferir que o aluno errou ao escrever os valores da proporção que expressou, o resultado da divisão que realizou indica que trocou a ordem dos valores ao efetuar o cálculo e ainda não soube representar a igualdade do resultado em decimal adequadamente.

A seguir o quadro 28, traz resultados de erros cometidos pelos estudantes na questão 03.

Quadro 28 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 03

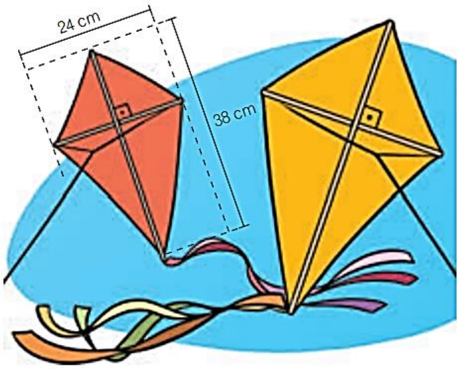
QUESTÃO 03			
Densidade demográfica(D) é a razão entre o número de habitantes e a área que é ocupada por eles, ou seja, $D = \frac{número\ de\ habitantes}{área\ em\ km^2}$, e serve para comparar a população com a área ocupada. No Brasil há lugares pouco povoados e outros com grande concentração de pessoas. No estado de São Paulo, por exemplo, temos uma população de aproximadamente 44 milhões de pessoas, para uma área também aproximada de 250 000 km². (IBGE, 2022). Com isso, a densidade do estado de São Paulo será de?			
Exemplos de resolução		Categorias de erros apresentados	Nº de erros
1	 $\frac{4400000}{250000} = 17.6$ A densidade de São paulo sera de 17.6 pessoas por km^2	E.E	3
2	 $\frac{44.000000}{250000} = 250$	E.P	1

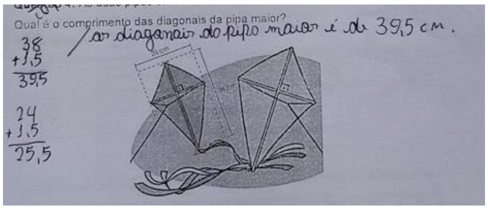
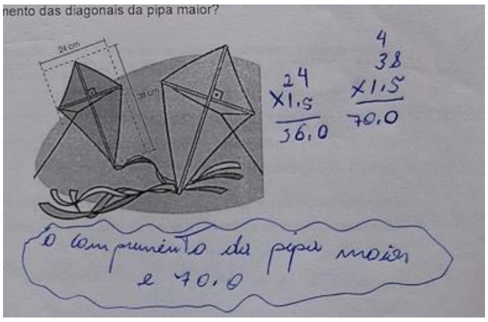
Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

O quadro 28, mostra que os erros cometidos pelos estudantes foram de: escrita/registro e erro procedimental. Notamos que os estudantes se equivocaram ao escreverem o valor do número de pessoa com quantidade de algarismos a menos e por isso o resultado do problema foi incorreto. É importante nos atentarmos para esta situação, pois pode ser que os alunos estejam com dificuldades para representar números com classe de milhões. Vemos no exemplo 2, que o erro cometido foi no procedimento do cálculo, pois o resultado da igualdade apresentado não corresponde ao resultado devido.

Adiante no quadro 29, apresentamos resultados de erros cometidos pelos estudantes na questão 04.

Quadro 29 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 04

QUESTÃO 04
As duas pipas são semelhantes, sendo 1,5 a razão de semelhança. Qual é o comprimento das diagonais da pipa maior? 

Exemplos de resolução		Categorias de erros apresentados	Nº de erros
1	 Qual é o comprimento das diagonais da pipa maior? as diagonais do pipo maior é de 39,5 cm. 	E.C	1
2	 nento das diagonais da pipa maior? o comprimento da pipa maior e 70.0 	E.P	3

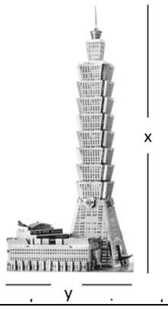
Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

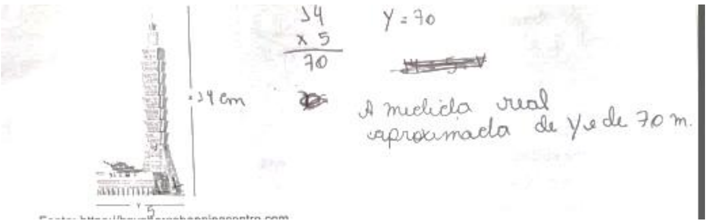
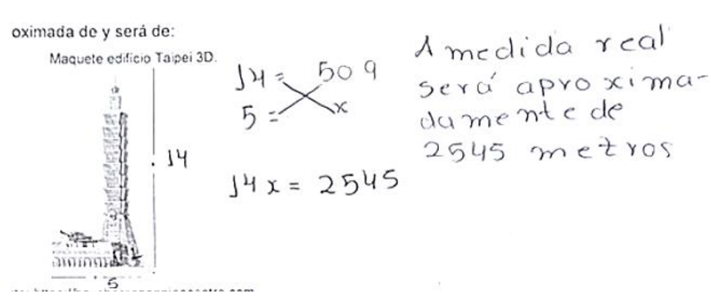
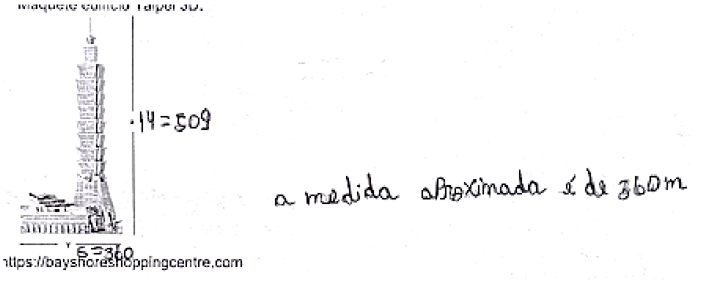
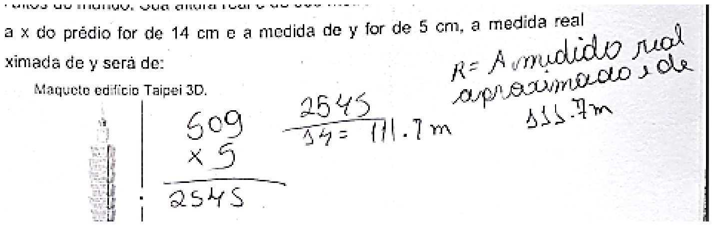
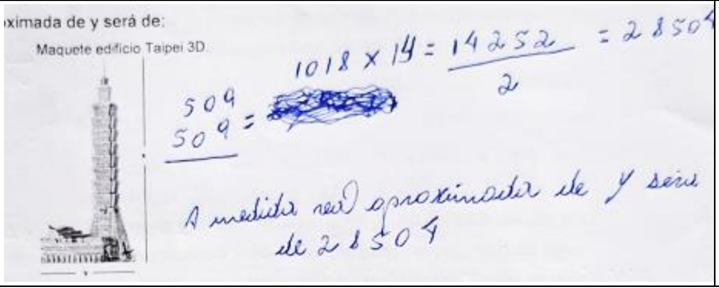
O quadro 29, mostra que os erros cometidos na questão 04 foram: conceitual e procedimental. A questão poderia ser respondida por meio de uma multiplicação entre a razão de semelhança das diagonais da pipa menor e a medida de cada diagonal da pipa maior para encontrar o valor proporcional desejado de cada diagonal.

Entretanto, observamos que os estudantes confundiram o tamanho da maior diagonal como sendo o maior valor que encontraram em seus cálculos, no exemplo 1 também ocorreu equivoco ao utilizarem a operação de adição para solucionar o problema e no exemplo 2 a escolha da operação foi correta, no entanto, o resultado foi incorreto.

A seguir no quadro 30, traremos resultados dos tipos de erros cometidos pelos estudantes na questão 5.

Quadro 30 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 05

QUESTÃO 5
O edifício da foto abaixo foi construído em Taipei e é um dos dez mais altos do mundo. Sua altura real é de 509 metros. Se, na foto, a medida da altura x do prédio for de 14 cm e a medida de y for de 5 cm, a medida real aproximada de y será de: 

Exemplos de resolução		Categorias de erros apresentados	N° de erros
1	 ·14 cm 14 x 5 70 y = 70 A medida real aproximada de y é de 70 m. y 5	E.C	5
2	 oximada de y será de: Maquete edifício Taipei 3D. ·14 14 = 509 5 = x 14 x = 2545 A medida real será aproximadamente de 2545 metros y 5	E.P	1
3	 Maquete edifício Taipei 3D. ·14 = 509 a medida aproximada é de 360m y 5 = 360 https://bayshoreshoppingcentre.com	E.P	1
4	 a x do prédio for de 14 cm e a medida de y for de 5 cm, a medida real ximada de y será de: Maquete edifício Taipei 3D. 509 x 5 2545 2545 / 14 = 111.7m R= A medido real aproximado é de 111.7m	E.P	3
5	 ximada de y será de: Maquete edifício Taipei 3D. 509 509 = 1018 x 14 = 14252 / 2 = 28504 A medida real aproximada de y será de 28504	E.R	1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

O quadro 30, nos trouxe resultado de resoluções da questão 5 que tratava sobre razão e proporção, e para solucionar os alunos poderiam utilizar os conhecimentos de escala, proporção, equivalência, etc. Os erros cometidos na resolução desta questão pelos estudantes foram: conceitual, procedimental e de escrita/registro.

Entendemos que no exemplo 1, faltou compreensão do conceito necessário para solucionar o problema, percebemos que realizaram um cálculo que não os faria chegar à resposta correta, pois não houve um entendimento do da relação que deveria ter entre os dados das grandezas apresentadas para realizar o cálculo, apenas multiplicaram-nas e consideram que o resultado do produto seria a resposta do problema.

No exemplo 2 analisamos que os estudantes conseguiram fazer a relação entre a medida do tamanho na maquete e o tamanho real, embora tenha utilizado a letra x ao invés de y, os estudantes não chegaram ao resultado, pois não seguiram adiante com o procedimento supomos não dominarem pois o registro mostra até onde realizaram, o procedimento deveria consistir em uma divisão entre 2545 e 14 que resultaria no resultado do problema. O exemplo 3, tras uma solução que incorreu em um resultado erronêo, pois provavelmente o estudante não soube realizar o cálculo da divisão corretamente como vemos no resultado.

Ainda no exemplo 4, percebemos que os alunos conseguiram identificar o possível uso de proporcionalidade para solucionar o problema, acreditamos que conseguiram perceber a relação entre a medida na maquete e a mediada real ao relacionarem (imaginamos que o sinal da igualdade indica a relação) as grandezas, no entanto ao efetuarem os cálculos não o fizeram com eficiência como vemos.

Ademais, acreditamos que o resultado que encontraram decorre de um equivoco na aproximação decimal do resultado da divisão entre o tamanho da altura real do prédio e o da maquete, que supomos que escreveram com um zero a mais no resultado (ficando 360) e acabaram considerando como a solução do problema, talvez se não tivessem se equivocado no resultado aproximado poderiam perceber que deveriam relacionar com a medida y que seria a largura do prédio e encontrato o valor desejado ao problema.

Ao analisarmos o exemplo 5, identificamos que o equívoco ocorreu ao tentarem solucionar a questão utilizando o seguinte procedimento, somou-se duas vezes a altura real do prédio, multiplicou o resultado da soma pela altura do prédio na maquete e representou a razão entre o produto e 2, e ainda encontrou o resultado da razão com cálculo de multiplicação, portanto errou desde o no início com a escolha da operação de adição e no final erraram no cálculo da operação representado pela razão.

Quadro 31 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 06

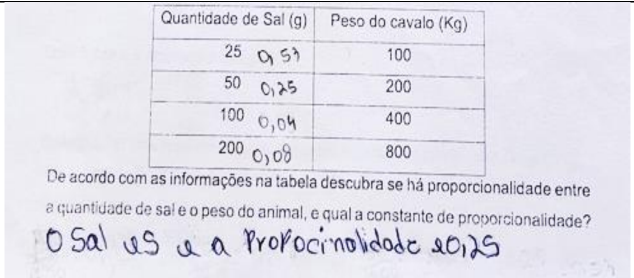
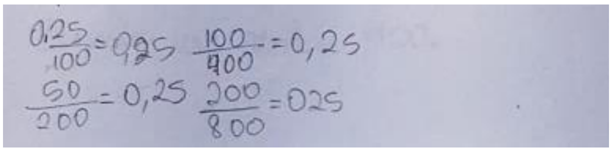
QUESTÃO 06

O sal mineral, ou suplemento mineral para cavalo é uma mistura composta por macro e micronutrientes extremamente importantes para a manutenção da saúde do animal. Os minerais são essenciais para o bom funcionamento de qualquer organismo. No caso dos cavalos, os minerais são imprescindíveis para a **boa performance de atividades**, bem como para a **longevidade do animal**. O sódio, um dos principais componentes do sal mineral para cavalo, possui funções de transporte de nutrientes no organismo e funções cerebrais. E esses são apenas alguns dos motivos que tornam a ingestão desse suplemento tão importante para os equídeos. A ingestão do sal mineral para cavalo deve ser diária e de acordo com peso do animal. Veja a tabela abaixo:

Quadro 7 - Consumo de Sal mineral diário de alguns cavalos, considerando o peso do **animal.**

Quantidade de Sal (g)	Peso do cavalo (Kg)
25	100
50	200
100	400
200	800

De acordo com as informações na tabela descubra se há proporcionalidade entre a quantidade de sal e o peso do animal, e qual a constante de proporcionalidade?

Exemplos de resolução		Categorias de erros apresentados	Nº de erros
1	 Quantidade de Sal (g) — Peso do cavalo (Kg) 25 0,57 — 100 50 0,25 — 200 100 0,04 — 400 200 0,08 — 800 De acordo com as informações na tabela descubra se há proporcionalidade entre a quantidade de sal e o peso do animal, e qual a constante de proporcionalidade? O Sal eS e a ProPocinolidade e0,25	E.P	2
2	 $\frac{0,25}{100}=0,25$ $\frac{100}{400}=0,25$ $\frac{50}{200}=0,25$ $\frac{200}{800}=025$	E.A	5

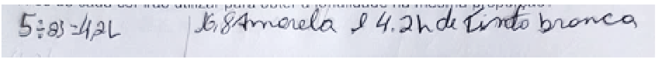
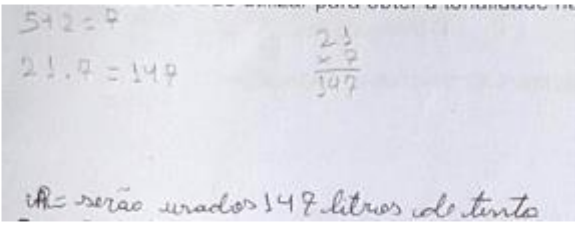
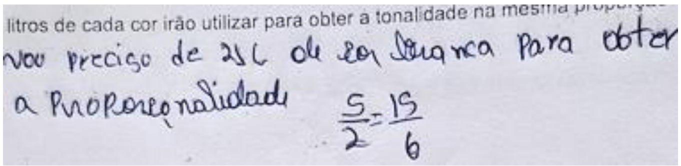
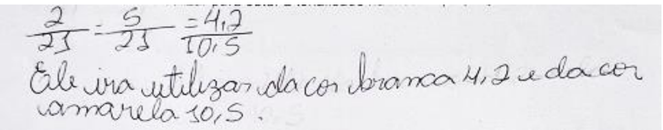
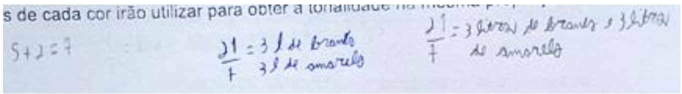
Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

O quadro 31, revela que os erros que os estudantes cometeram ao efetuarem a resolução da questão 4, foram erros procedimentais e erros de atenção. Verificamos no exemplo 1 que os estudantes não conseguiram efetuar de forma correta os cálculos, como vemos diversos foram os valores expressos ao lado da grandeza, quantidade de sal, e a partir daí um dos valores o aluno considerou ser a constante de proporcionalidade como vemos na resposta dada.

No exemplo 2, percebemos que os estudantes conseguiram perfeitamente escrever a razão entre a quantidade de sal e o peso do animal de forma correta e encontraram um resultado correto para a representação feita, no entanto não conseguimos inferir se o aluno descobriu se esse é o valor da constante e se há proporcionalidade para essa situação uma vez que não expressou a resposta como queríamos e termos a certeza que o procedimento realizado não decorreu de uma aprendizagem apenas mecânica.

No quadro 32, traremos resultados de erros cometidos pelos estudantes na questão 7.

Quadro 32 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 07

<table>
<tr><td colspan="4">QUESTÃO 7</td></tr>
<tr><td colspan="4">Uma loja que vende tintas tem uma máquina que efetua misturas de variadas cores para obter diferentes tonalidades. Um cliente irá comprar uma tonalidade de tinta com a mistura das cores amarelo e branco, na proporção de 5 para 2, respectivamente. O cliente, irá precisar de 21 l, nesse caso quantos litros de cada cor irão utilizar para obter a tonalidade na mesma proporção?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplos de resolução</td><td>Categorias de erros apresentados</td><td>Nº de erros</td></tr>
<tr><td>1</td><td>
5÷85=4,2L
16,8 Amarela l 4.2L de tinta branca</td><td>E.P e E.A</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
5+2=7
21.7=147
21
×7
147
R= serão usados 147 litros de tinta</td><td>E.C</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
litros de cada cor irão utilizar para obter a tonalidade na mesma
vou preciso de 21L de cor branca para obter a Proporcionalidad
$\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$</td><td>E.A</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
$\frac{2}{21}=\frac{5}{21}=\frac{4,2}{10,5}$
Ele ira utilizar da cor branca 4,2 e da cor amarela 10,5.</td><td>E.E</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
s de cada cor irão utilizar para obter a tonalidade
5+2=7
$\frac{21}{7}$ = 3 l de branco 3 l de amarelo
$\frac{21}{7}$ = 3 litros de branco e 3 litros de amarelo</td><td>E.A</td><td>2</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

O quadro 32, mostra resultados de resoluções consideradas erradas da questão 7, encontramos erros do tipo: procedimental, atenção, conceitual e escrita/registro. Vale destacar que a solução dessa questão poderia ser encontrada utilizando conceitos de razão, proporção e equivalência.

No exemplo 1, o estudante representou a quantidade de tintas amarelas e a quantidade de tinta que iria precisar por meio de divisão/razão, no entanto imaginamos que o cálculo foi realizado com os termos de forma invertida, logo o resultado não corresponde com a igualdade representada, de toda forma não seria esse o procedimento a ser seguido para chegar ao resultado correto. Entendemos que o erro decorreu por não se atentarem suficiente e perceber que deveriam fazer a comparação entre as cores de tinta de forma mais cuidadosa, pois, os resultados que encontraram não correspondem proporcionalmente a razão 5/2.

Ao observarmos o exemplo 2, inferimos que o estudante não compreendeu o devido conceito para a situação/problema proposto, pois o resultado que expressou e disse equivocadamente ser a solução, não fazem sentido por que a quantidade de tinta a ser usada mesmo que não tenha dito a quantidade para uma cor específica, ultrapassou a quantidade que iria precisar.

Ao analisarmos o exemplo 3, notamos que o erro incorreu pela falta de atenção ao expressar a resposta para a situação/problema, pois, como vemos o exemplo 3 o aluno expressou corretamente a proporção, no entanto não se atentou que os 21 litros de tintas como escreveu não seriam apenas de tinta branca, mas se dividiria de forma proporcional como representou. Faltou mais atenção na releitura da proporcionalidade para dá uma resposta adequada.

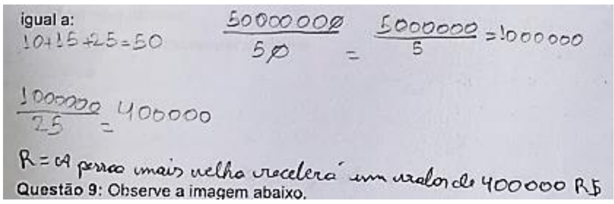
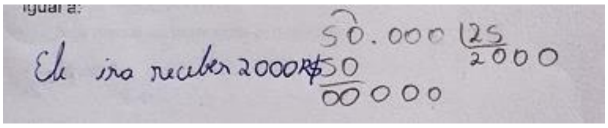
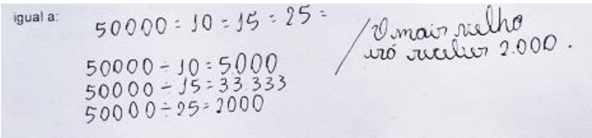
O exemplo 4, apesar de terem tentado utilizar o procedimento para chegar ao resultado utilizando proporção, não fizeram de forma correta, utilizaram os valores incorretos ao representar as razões para formar a proporção, expressaram em proporção as razões entre os valores das partes de tinta de cada cor necessária para obter uma certa tonalidade com o quantitativo total que iria precisar, e o resultado da divisão de cada razão colocaram em uma nova razão e consideram as quantidades proporcional a nova mistura necessária, não obtendo resultado desejado.

Acreditamos que se o estudante tivesse representado os valores da proporcionalidade, conforme enunciado, provavelmente perceberia uma relação entre a quantidade que era preciso e o quantitativo na razão entre as misturas das cores na proporção enunciada e chegariam ao resultado desejado.

Observamos no exemplo 5, e entendemos que o aluno pegou a quantidade de litros de tinta que iria precisar e dividiu o total de litros que tinha de tintas misturada, então o resultado da razão/divisão encontrado poderia ser a constante da proporcionalidade, mas não podemos garantir isso já que o aluno considerou que cada cor de tinta seria de três litros o que não faz sentido uma vez que a razão entre as cores de tinta seriam de 5/2, logo as cores não teriam a mesma quantidade de tinta para fazer uma mistura e ter 21L na mesma proporção. Acreditamos que se os estudantes tivessem maior atenção poderiam ter o pensamento lógico no momento e chegar ao resultado desejado, já que realizaram um procedimento correto e necessário para chegarem à solução adequada.

A seguir no quadro 33, apresentaremos exemplos dos tipos de erros que encontramos na resolução da questão 8.

Quadro 33– Exemplos de resoluções, com erros – Questão 08

QUESTÃO 08			
Considerando que uma herança de R$ 50.000,00 será dividida em partes diretamente proporcionais à idade de três pessoas (10, 15 e 25 anos, respectivamente), é correto afirmar que a pessoa mais velha receberá um valor igual a:			
Exemplos de resolução		Categorias de erros apresentados	Nº de erros
1	 igual a: 10+15+25=50 $\frac{50000000}{50} = \frac{5000000}{5} = 1000000$ $\frac{1000000}{25} = 400000$ R = A pessoa mais velha receberá um valor de 400000 R$ Questão 9: Observe a imagem abaixo.	E.E e E.R	2
2	 igual a: Ele irá receber 2000R$ 50.000 |25 50 2000 00000	E.R e E.A	4
3	 igual a: 50000 : 10 : 15 : 25 = 50000 ÷ 10 = 5000 50000 ÷ 15 = 33.333 50000 ÷ 25 = 2000 O mais velho irá receber 2.000.	E.R e E.A	2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Ao analisarmos o quadro 33, vimos no exemplo 1 que o estudante compreendeu que devia realizar a soma das idades das pessoas e o fez corretamente, mas em seguida o procedimento realizado consistiu na representação em forma de razão do valor da herança a ser dividida sem considerar a vírgula como separador decimal e o valor da soma das idades, o resultado que encontrou da razão ao invés de multiplicar pela idade da pessoa mais velha ele dividiu. Consideramos então que para o aluno ter êxito na resolução da situação/problema devia registrar de forma precisa as informações e analisar a escolha da operação a ser realizada.

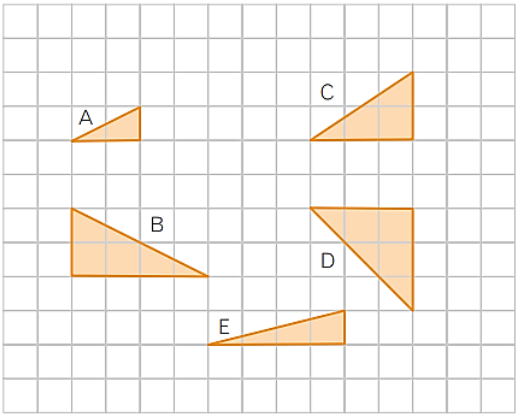
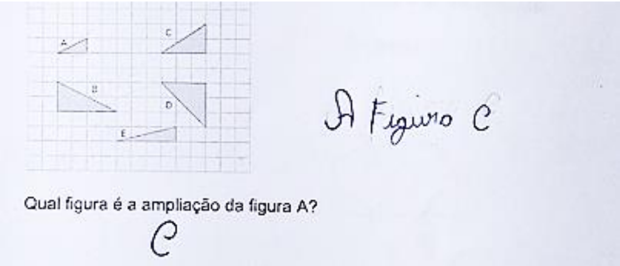
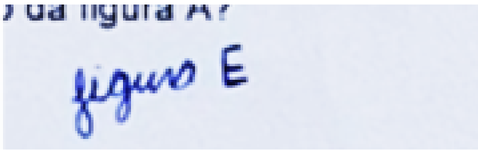
Já no exemplo 2, foi verificado que o aluno utilizou o valor da herança e dividiu pela idade da pessoa mais velha e considerou o resultado encontrado a solução para o problema, no entanto, a pesar do cálculo realizado está correto o procedimento expressado não o levaria a correta solução para a situação/problema. Para que o aluno pudesse chegar ao resultado desejado, poderia ter utilizado a operação da multiplicação do valor da herança pela soma das idades e posteriormente dividisse o resultado da multiplicação pela idade da pessoa mais velha e podia concluir a solução. Todavia, ainda acreditamos que cometeu erro de atenção, por não se atentar que sua resposta teria um valor muito pequeno para a idade da pessoa mais velha se comparado ao total da herança.

O exemplo 3, possui os mesmos erros do exemplo anterior com o diferencial de que expressaram o valor para as três idades, para chegarem ao resultado também utilizaram o valor da herança e dividiram por cada idade, no entanto além de se equivocarem no procedimento não se atentaram e passou despercebido que o valor que o mais velho iria receber, conforme escreveram, seria o menor valor e assim não estaria garantindo uma divisão diretamente proporcional, acreditamos que se houvesse maior atenção provavelmente teriam condições de chegarem a solução adequada.

Notamos que existe a dificuldade de expressar de forma escrita o pensamento matemático e até mesmo de refletir logicamente uma situação, contudo, devemos sempre está influenciado que nossos alunos reflitam sobre suas respostas, se fazem sentido, se tem relação com a pergunta a ser respondida para que possam expressar respostas mais coerentes.

No quadro 34 a seguir, apresentaremos os tipos de erros cometido pelos estudantes ao resolverem a questão 09.

Quadro 34 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 09

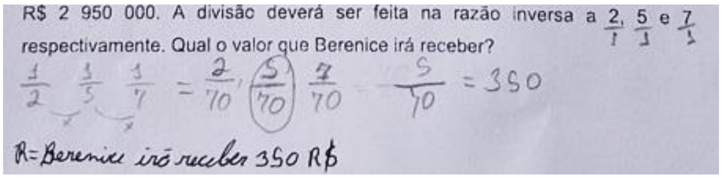
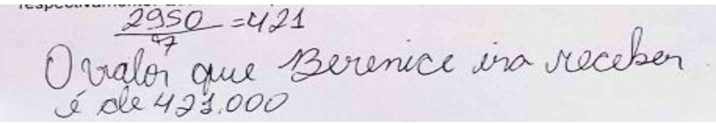
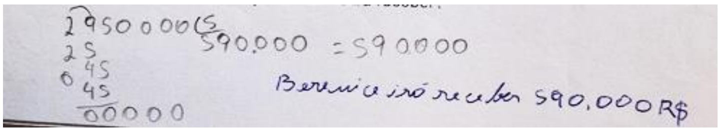
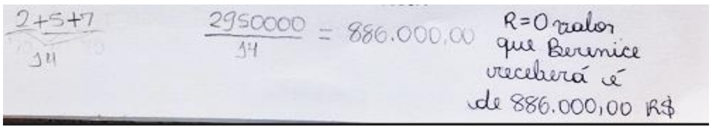
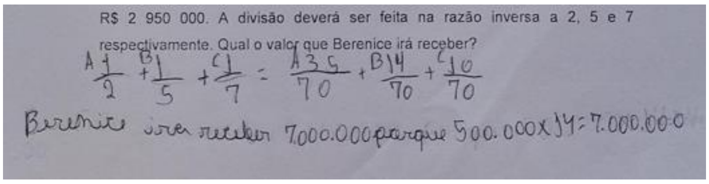
<table>
<tr><td colspan="4">QUESTÃO 09</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observe a imagem abaixo.

Fonte: Coleção praticando matemática, v. 9, 2015, p. 171.
Qual figura é a ampliação da figura A?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplos de resolução</td><td>Categorias de erros apresentados</td><td>Nº de erros</td></tr>
<tr><td>1</td><td>A Figura C
Qual figura é a ampliação da figura A?
C</td><td>E.A</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>da figura A?
figura E</td><td>E.A</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

O quadro 33, nos revela que os erros cometidos na questão 09 são erros de atenção. De acordo com nossa análise o estudante apenas observou a semelhança na disposição do triângulo e não se atentou que para haver uma ampliação da figura deveria haver proporcionalidade entre os tamanhos dos lados dos triângulos e que se contassem os lados pela malha quadriculada poderiam perceber a relação para a ampliação, que ao dobrar um lado o outro também dobra, o que não ocorre com a sua escolha, no exemplo 1 e 2, dobrou apenas um dos lados, levando-os ao erro que poderia ser evitado se houvesse atenção.

A diante no quadro 35, mostraremos os tipos de erros cometidos pelos estudantes ao resolverem a questão 10.

Quadro 35 – Exemplos de resoluções, com erros – Questão 10

<table>
<tr><td colspan="4">QUESTÃO 10</td></tr>
<tr><td colspan="4">Questão 10: Três herdeiros André, Berenice e Caio, receberam uma herança de R$ 2 950 000. A divisão deverá ser feita na razão inversa a 2, 5 e 7 respectivamente. Qual o valor que Berenice irá receber?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplos de resolução</td><td>Categorias de erros apresentados</td><td>Nº de erros</td></tr>
<tr><td>1</td><td>
R$ 2 950 000. A divisão deverá ser feita na razão inversa a $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{1}$ e $\frac{7}{1}$ respectivamente. Qual o valor que Berenice irá receber?
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{7}$ = $\frac{2}{70}$, $\frac{5}{70}$ $\frac{7}{70}$ $\frac{5}{70}$ = 350
R=Berenice irá receber 350 R$</td><td>E.P</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
$\frac{2950}{7}$ = 421
O valor que Berenice ira receber é de 421.000</td><td>E.C</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
2950000 |5
25 590.000 = 590000
45
0 45
00000
Berenice irá receber 590,000 R$</td><td>E.P</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
$\frac{2+5+7}{14}$ $\frac{2950000}{14}$ = 886.000,00
R=O valor que Berenice receberá é de 886.000,00 R$</td><td>E.P</td><td>5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
R$ 2 950 000. A divisão deverá ser feita na razão inversa a 2, 5 e 7 respectivamente. Qual o valor que Berenice irá receber?
A $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{5}$ + C $\frac{1}{7}$ = A $\frac{35}{70}$ + B $\frac{14}{70}$ + C $\frac{10}{70}$
Berenice irá receber 7.000.000 porque 500.000 x 14 = 7.000.000</td><td>E.E</td><td>4</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Os resultados do quadro 35, nos mostraram erros que os estudantes cometeram ao elaborarem as resoluções, destacamos os erros cometidos foram: conceitual, procedimental e de escrita/registro. É importante esclarecer que a questão de maior dificuldade foi a questão 10, pois, para que o aluno conseguisse solucionar a situação/problema proposta era necessário que tivesse domínio da propriedade das proporções, grandezas inversamente proporcionais, multiplicação e divisão para poder conseguir chegar ao resultado da distribuição das partes de forma inversa.

O exemplo 1, indica que o aluno compreendeu o problema e conseguiu representar as razões de forma inversa para cada valor que iriam receber, no entanto, não realizou os procedimentos dos cálculos algorítmicos corretos para chegar ao resultado esperado, entendemos que a dificuldade pode ter ocorrido por falta de domínio das propriedades operatórias de adição de frações necessária para aplicar a propriedade da proporção e chegar ao resultado desejado.

No exemplo 2, percebemos que o aluno não compreendeu adequadamente o conceito a ser aplicado na situação proposta, acreditamos que a dificuldade se deu em razão do aluno não ter compreendido o conceito de distribuição em partes inversamente proporcionais, entretanto, o aluno esquematizou a representação de uma razão, mas não corresponde a nenhuma razão inversa que poderia gerar a partir da compreensão do problema.

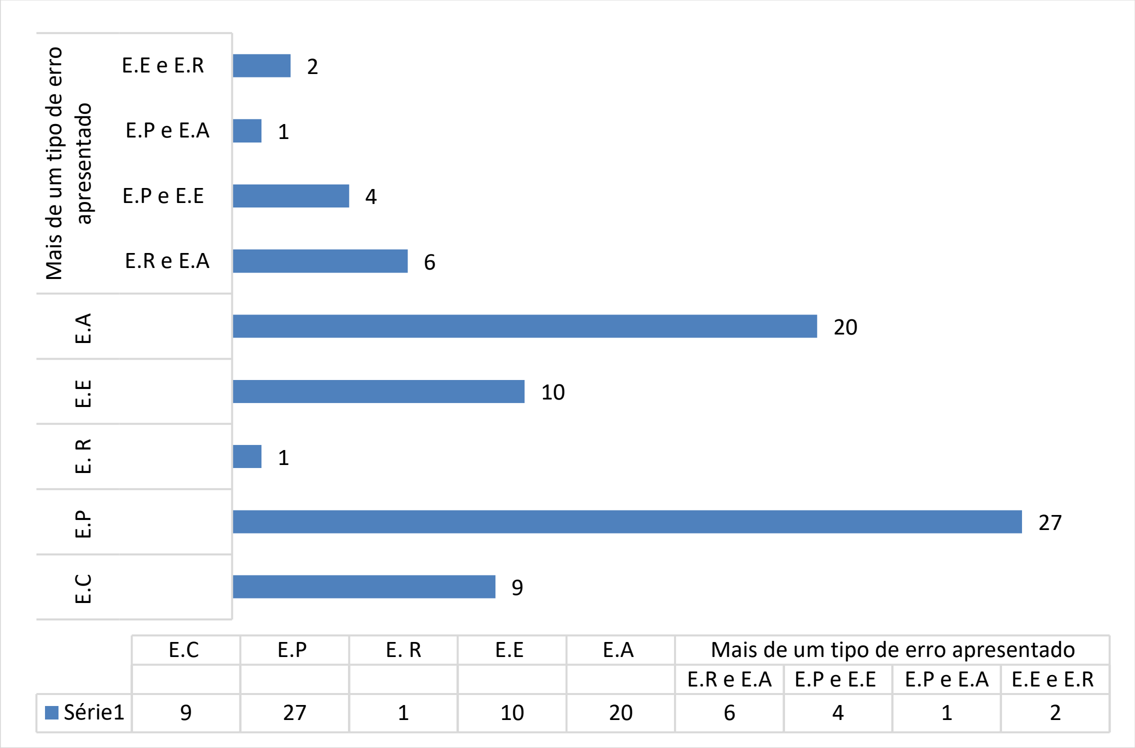
Considerando as observações do exemplo 3, inferimos que o estudante, apesar de ter encontrado um resultado correto para a operação apresentada não é a solução do problema como expressou, acreditamos que isso aconteceu por que não considerou que a herança devia ser dividida de forma inversas, equivocando-se ao utilizar o valor da herança e dividir com o valor que seria para Berenice.

Ao analisarmos o exemplo 4, notamos que o erro ocorreu, pois considerou a solução, o resultado da razão entre o valor total (2 950 000) e a soma dos termos 2, 5 e 7, no entanto não foi de forma inversa como deveria e ainda obteve o resultado incorreto da razão que apresentou. O que nos leva a crer que o aluno deva ter associado a situação proposta como se fosse distribuição em partes diretamente proporcionais e sendo assim mesmo que estivesse correto seu cálculo não chegaria à solução da situação/problema.

As análises do exemplo 5, correspondem a um erro de atenção, ao que indica os registros da solução, embora percebemos que alguns procedimentos estejam ocultos imaginamos terem ocorridos, como a representação da razão entre o valor da herança e a soma das razões inversas, pois sem o resultado dessa razão não seria possível chegarem ao resultado expresso, entendemos que o aluno se distraiu equivocando-se ao escrever o valor com um zero a mais seja no resultado da razão que está oculta ou no resultado final, levando-o a uma solução incorreta para o problema a pesar de ter realizado os procedimentos adequados.

Como vimos nos quadros apresentados anteriormente em cada questão houve pelo menos dois erros na resolução que foram classificadas conforme as características analisadas de acordo com quadro 25 apresentado anteriormente. A seguir mostraremos no gráfico 25, a frequência dos tipos de erros cometidos nas resoluções das questões que analisamos.

Gráfico 25 – Frequência dos erros cometidos



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

O gráfico 25 mostra que a maior quantidade considerando os tipos de erros ocorreu devido erros procedimentais seguido de erros de atenção, erros de escrita/registro, erro conceitual e erro relacional. Mas ainda se destacou situações em que houve mais de um tipo de erro na resolução de questões.

Com isso podemos inferir que os estudantes em sua maioria, apresentam algum conhecimento de proporcionalidade, entretanto, tiveram dificuldades nos procedimentos com cálculos algorítmicos o que os levou a uma solução equivocada e ainda a falta de atenção colaborou no erro, pois, entendemos que alguns erros poderiam não ter ocorrido ou serem corrigidos ao se atentarem e utilizarem o pensamento lógico para responderem as questões a partir de uma relação que poderia ser estabelecida com maior atenção ao procedimento que executaram.

6.1.2 Relações entre as variáveis do questionário socioeconômico e as notas dos testes

Nesta sessão apresentaremos resultados da associação entre variáveis do questionário sócio econômico, e também com o resultado dos testes. E para garantir a confiabilidade da significância da associação entre as variáveis que iremos relacionar, utilizaremos o Teste Exato de Fisher.

Teste Exato de Fisher

O Teste Exato de Fisher é um teste de significância estatística utilizado na análise de tabela de contingência/associação quando os tamanhos das amostras são pequenos, foi desenvolvido por Sir Ronald Fisher, um dos pais da estatística moderna, em 1920.

De acordo com Cabral (2017, p.22) esse teste “é chamado de exato porque a sua estatística permite encontrar diretamente os *p*-valores sem a necessidade de se recorrer a nenhuma tabela.”, ademais Cabral (2017, p.23) considera que o Teste Exato de Fisher “consegue manter a precisão independente dos tamanhos das amostras”. Além do que Cabral (2017, p.23) diz que “Embora possa ser utilizado para análise em tabelas com dimensões generalizadas para $m \times n$ o teste exato de Fisher é, normalmente, recomendado para tabelas de contingência com tamanho 2×2 [...]”

Para analisarmos se existe associação entre os resultados das questões/variáveis do questionário socioeconômico (APENDICE – A) e também com os resultados dos testes aplicado aos estudantes, utilizaremos o Teste Exato de Fisher, por meio do programa *JAMOVI*, que é um *software* estatístico gratuito com interface gráfica que permite pesquisadores e analistas a realizarem análises estatística. Em seguida apresentaremos no quadro 29 as variáveis que consideraremos para a associação

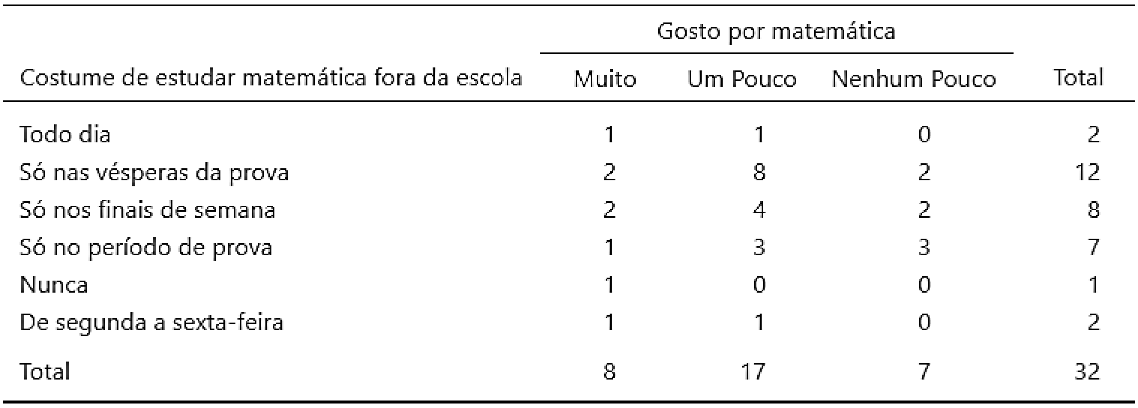
Quadro 36 – Variáveis que foram associadas

Variável 1	Variável 2
Costume de estudar matemática fora da escola	Gosto por Matemática
Gosto por Matemática	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática
Dificuldade para aprender matemática	Gosto por Matemática
Costume de estudar matemática fora da escola	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática
Resultado do pré-teste	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática
Resultado do pós-teste	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática
Costume de estudar matemática fora da escola	Resultado do pré-teste
Costume de estudar matemática fora da escola	Resultado do pós-teste
Gosto por Matemática	Resultado do pré-teste
Gosto por Matemática	Resultado do pós-teste
Frequência durante o experimento	Resultado do pré-teste
Frequência durante o experimento	Resultado do pós-teste
Resultado do pré-teste	Resultado do pós-teste

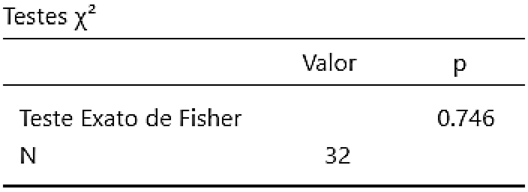
Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Adiante mostraremos, em tabelas as associações e expressaremos as respectivas análises das associações de acordo com o resultado do Teste Exato de Fisher.

Tabela 41: Costume de estudar matemática fora da escola *versus* Gosto por Matemática



	Gosto por matemática			
Costume de estudar matemática fora da escola	Muito	Um Pouco	Nenhum Pouco	Total
Todo dia	1	1	0	2
Só nas vésperas da prova	2	8	2	12
Só nos finais de semana	2	4	2	8
Só no período de prova	1	3	3	7
Nunca	1	0	0	1
De segunda a sexta-feira	1	1	0	2
Total	8	17	7	32



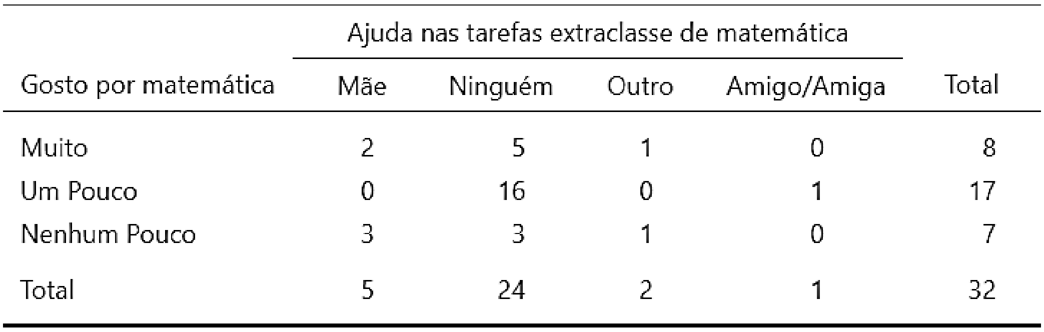
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.746
N	32	

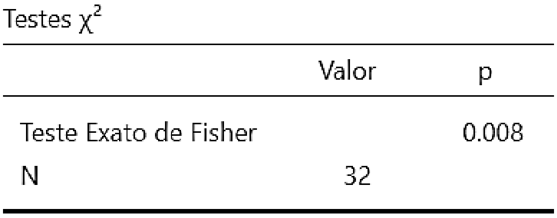
Fonte: Experimentação, 2023.

Portanto, resultado mostrado na tabela 41 do Teste exato de Fisher apresentou valor p maior do que o nível de significância (0,05), então, podemos concluir que não existe uma associação estatisticamente significante entre o costume de estudar matemática fora da escola e o gosto por matemática.

Tabela 42: Gosto por Matemática *versus* Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática



	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática				
Gosto por matemática	Mãe	Ninguém	Outro	Amigo/Amiga	Total
Muito	2	5	1	0	8
Um Pouco	0	16	0	1	17
Nenhum Pouco	3	3	1	0	7
Total	5	24	2	1	32



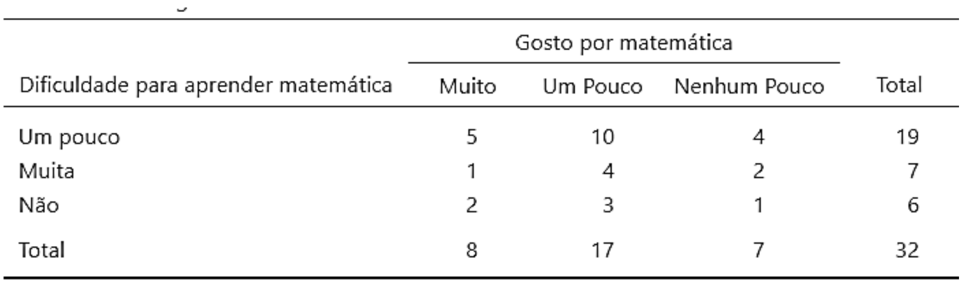
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.008
N	32	

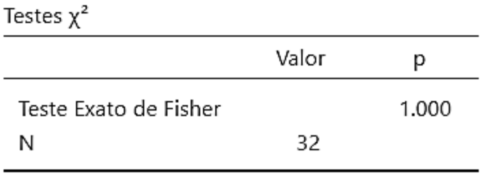
Fonte: Experimentação, 2023.

O resultado do Teste exato de Fisher na tabela 42, apresenta o valor de p menor do que o nível de significância (0,05), portanto podemos concluir que existe uma associação estatisticamente significante entre o gosto por matemática e a ajuda nas tarefas extraclasse de matemática.

Tabela 43: Dificuldade para aprender matemática *versus* Gosto por Matemática



	Gosto por matemática			
Dificuldade para aprender matemática	Muito	Um Pouco	Nenhum Pouco	Total
Um pouco	5	10	4	19
Muita	1	4	2	7
Não	2	3	1	6
Total	8	17	7	32



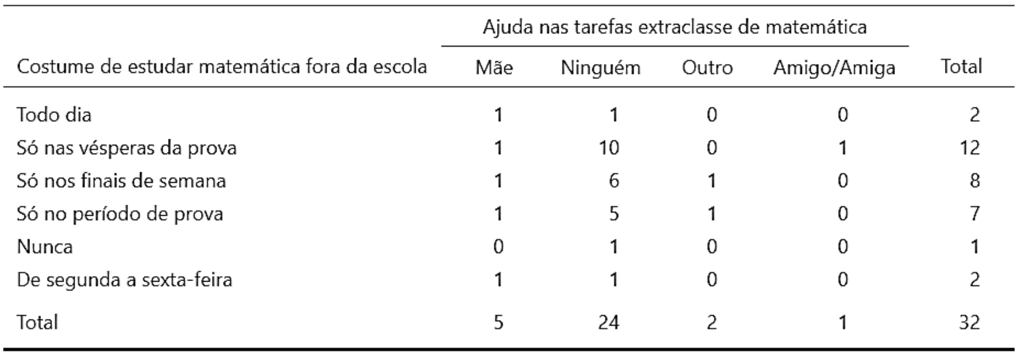
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		1.000
N	32	

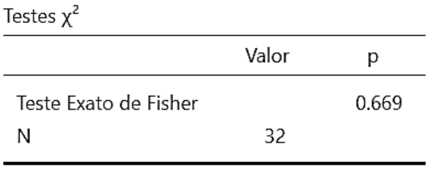
Fonte: Experimentação, 2023.

O Teste exato de Fisher, como mostra a tabela 43 deu valor de p maior do que o nível de significância (0,05), logo, podemos concluir que não existe uma associação estatisticamente significante entre a dificuldade para aprender matemática e o gosto por matemática.

Tabela 44: Costume de estudar matemática fora da escola versus ajuda nas tarefas extraclasse de matemática



	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática				
Costume de estudar matemática fora da escola	Mãe	Ninguém	Outro	Amigo/Amiga	Total
Todo dia	1	1	0	0	2
Só nas vésperas da prova	1	10	0	1	12
Só nos finais de semana	1	6	1	0	8
Só no período de prova	1	5	1	0	7
Nunca	0	1	0	0	1
De segunda a sexta-feira	1	1	0	0	2
Total	5	24	2	1	32



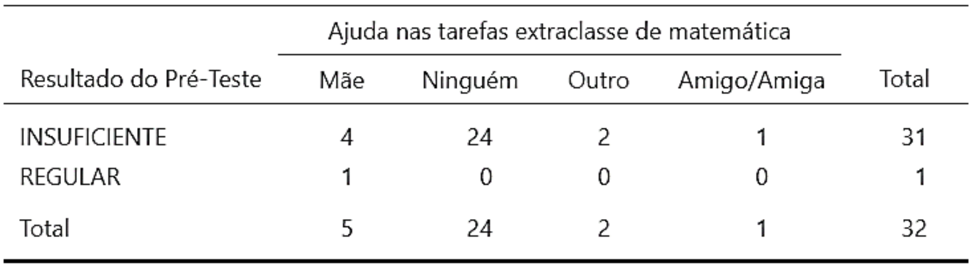
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.669
N	32	

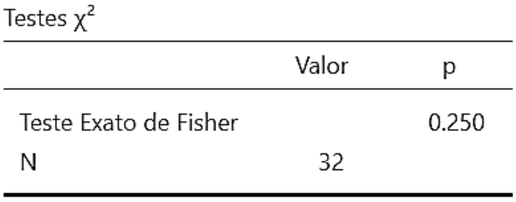
Fonte: Experimentação, 2023.

A tabela 44, mostra que o resultado do Teste exato de Fisher apresentou valor de p maior do que o nível de significância (0,05), com isso, podemos concluir que não existe uma associação estatisticamente significante entre o costume de estudar matemática fora da escola e a ajuda nas tarefas extraclasse de matemática.

Tabela 45: Resultado do pré-teste *versus* Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática



	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática				
Resultado do Pré-Teste	Mãe	Ninguém	Outro	Amigo/Amiga	Total
INSUFICIENTE	4	24	2	1	31
REGULAR	1	0	0	0	1
Total	5	24	2	1	32



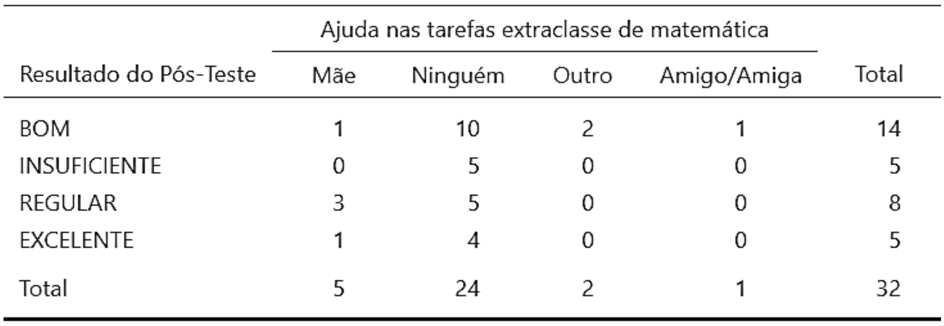
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.250
N	32	

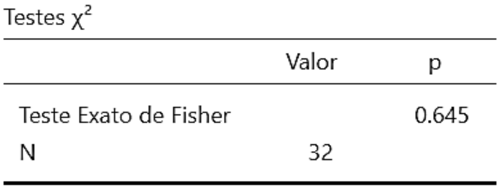
Fonte: Experimentação, 2023.

O resultado do Teste exato de Fisher apresentado na tabela 45, mostra que o valor de p é maior do que o nível de significância (0,05), daí concluímos que não existe uma associação estatisticamente significante entre o resultado do pré-teste e a ajuda nas tarefas extraclasse de matemática.

Tabela 46: Resultado do pós-teste *versus* Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática



	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática				
Resultado do Pós-Teste	Mãe	Ninguém	Outro	Amigo/Amiga	Total
BOM	1	10	2	1	14
INSUFICIENTE	0	5	0	0	5
REGULAR	3	5	0	0	8
EXCELENTE	1	4	0	0	5
Total	5	24	2	1	32



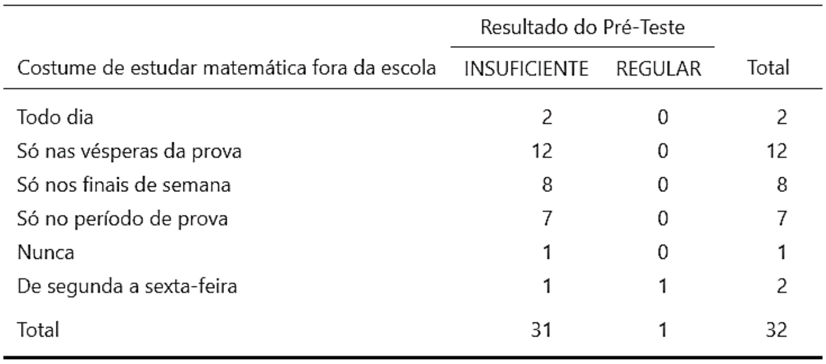
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.645
N	32	

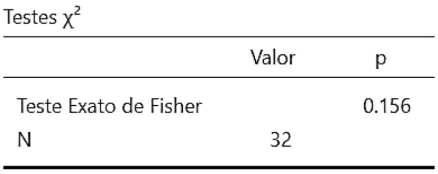
Fonte: Experimentação, 2023.

Na tabela 46, o resultado do Teste exato de Fisher apresentou valor de p maior do que o nível de significância (0,05), então a partir deste resultado podemos concluir que não existe uma associação estatisticamente significante entre o resultado do pós-teste e a ajuda nas tarefas extraclasse de matemática.

Tabela 47: Costume de estudar matemática fora da escola *versus* Resultado do pré-teste



	Resultado do Pré-Teste		
Costume de estudar matemática fora da escola	INSUFICIENTE	REGULAR	Total
Todo dia	2	0	2
Só nas vésperas da prova	12	0	12
Só nos finais de semana	8	0	8
Só no período de prova	7	0	7
Nunca	1	0	1
De segunda a sexta-feira	1	1	2
Total	31	1	32



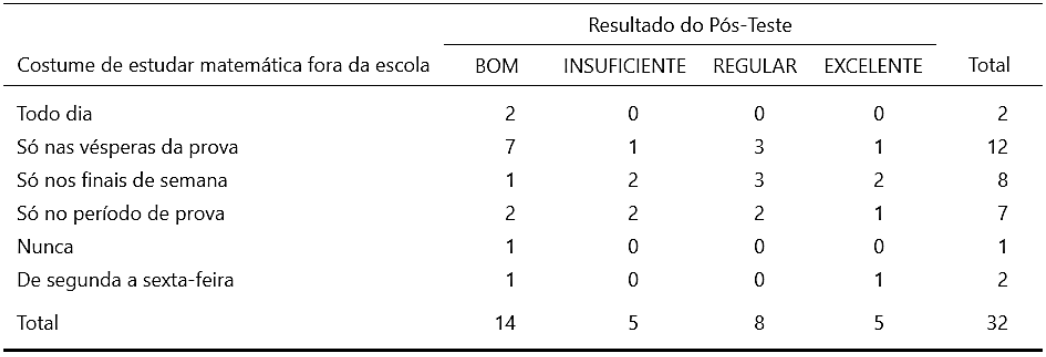
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.156
N	32	

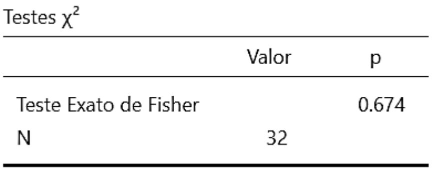
Fonte: Experimentação, 2023.

Vimos na tabela 47 que o resultado do Teste exato de Fisher apresentou valor de p maior do que o nível de significância (0,05), então, podemos concluir que não existe uma associação estatisticamente significante entre costume de estudar matemática fora da escola e o resultado do pré-teste.

Tabela 48: Costume de estudar matemática fora da escola *versus* Resultado do pós-teste



	Resultado do Pós-Teste				
Costume de estudar matemática fora da escola	BOM	INSUFICIENTE	REGULAR	EXCELENTE	Total
Todo dia	2	0	0	0	2
Só nas vésperas da prova	7	1	3	1	12
Só nos finais de semana	1	2	3	2	8
Só no período de prova	2	2	2	1	7
Nunca	1	0	0	0	1
De segunda a sexta-feira	1	0	0	1	2
Total	14	5	8	5	32



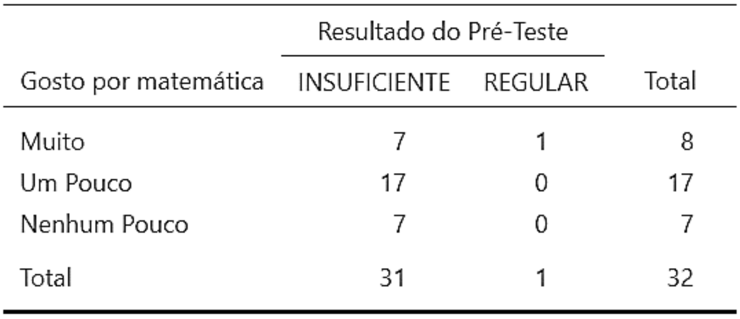
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.674
N	32	

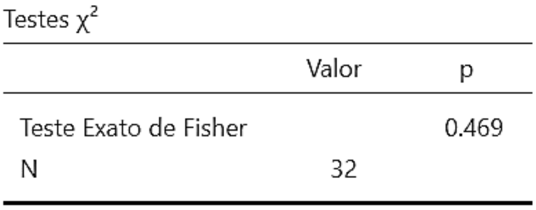
Fonte: Experimentação, 2023.

O resultado do Teste exato de Fisher apresentado na tabela 48, indica que o valor de p é maior do que o nível de significância (0,05), daí podemos concluir que não existe uma associação estatisticamente significante entre o costume de estudar matemática fora da escola e o resultado do pós-teste.

Tabela 49: Gosto por Matemática *versus* Resultado do pré-teste



	Resultado do Pré-Teste		
Gosto por matemática	INSUFICIENTE	REGULAR	Total
Muito	7	1	8
Um Pouco	17	0	17
Nenhum Pouco	7	0	7
Total	31	1	32



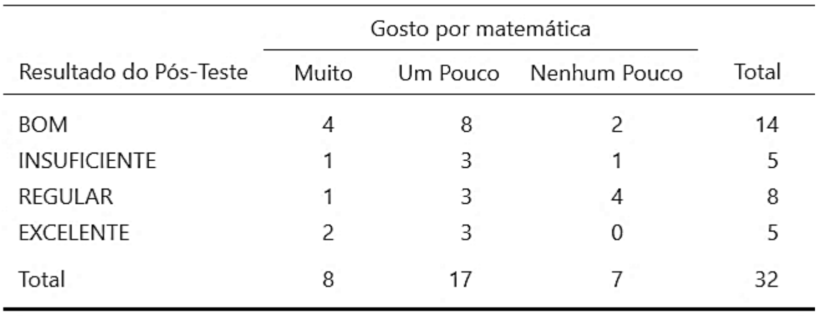
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.469
N	32	

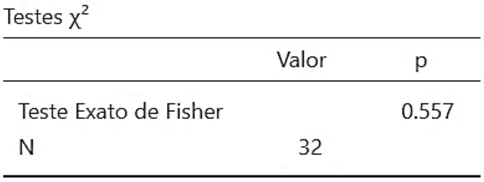
Fonte: Experimentação, 2023.

A tabela 49 apresenta o resultado do Teste exato de Fisher cujo valor de p é maior do que o nível de significância (0,05), então a partir desse resultado concluímos que não existe uma associação estatisticamente significante entre o gosto por matemática e o resultado do pré-teste.

Tabela 50: Gosto por Matemática *versus* Resultado do pós-teste



	Gosto por matemática			
Resultado do Pós-Teste	Muito	Um Pouco	Nenhum Pouco	Total
BOM	4	8	2	14
INSUFICIENTE	1	3	1	5
REGULAR	1	3	4	8
EXCELENTE	2	3	0	5
Total	8	17	7	32



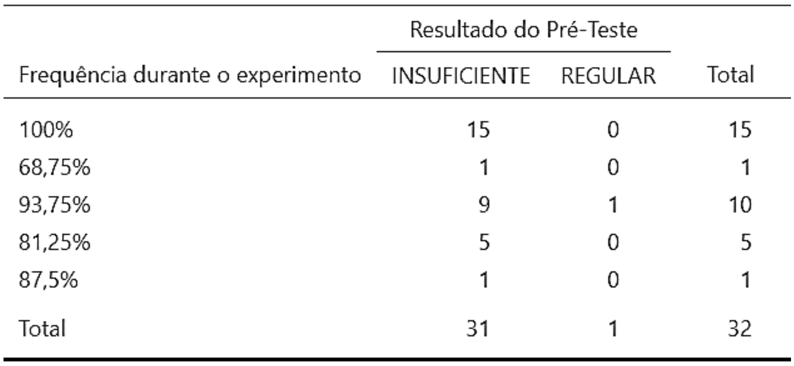
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.557
N	32	

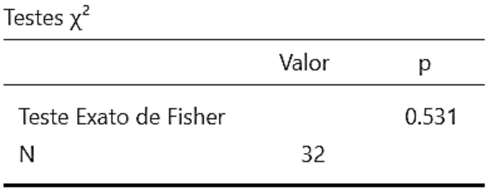
Fonte: Experimentação, 2023.

O resultado do Teste exato de Fisher apresentado na tabela 50 tem valor de p maior do que o nível de significância (0,05), sendo assim podemos dizer que não existe uma associação estatisticamente significante entre o gosto por matemática e o resultado do pós-teste.

Tabela 51: Frequência durante o experimento *versus* resultado do pré-teste



	Resultado do Pré-Teste		
Frequência durante o experimento	INSUFICIENTE	REGULAR	Total
100%	15	0	15
68,75%	1	0	1
93,75%	9	1	10
81,25%	5	0	5
87,5%	1	0	1
Total	31	1	32



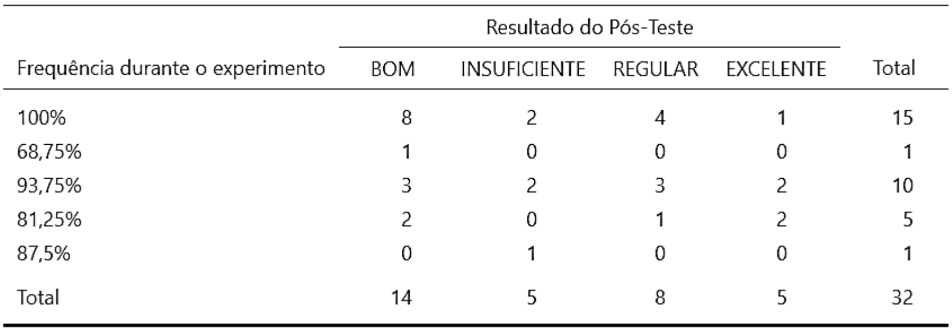
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.531
N	32	

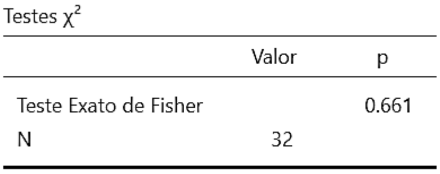
Fonte: Experimentação, 2023.

Como mostra na tabela 51, o resultado do Teste exato de Fisher apresenta valor de p maior do que o nível de significância (0,05), logo, inferimos que não existe uma associação estatisticamente significante entre a frequência durante o experimento e o resultado do pré-teste.

Tabela 52: Frequência durante o experimento *versus* resultado do pós-teste



	Resultado do Pós-Teste				
Frequência durante o experimento	BOM	INSUFICIENTE	REGULAR	EXCELENTE	Total
100%	8	2	4	1	15
68,75%	1	0	0	0	1
93,75%	3	2	3	2	10
81,25%	2	0	1	2	5
87,5%	0	1	0	0	1
Total	14	5	8	5	32



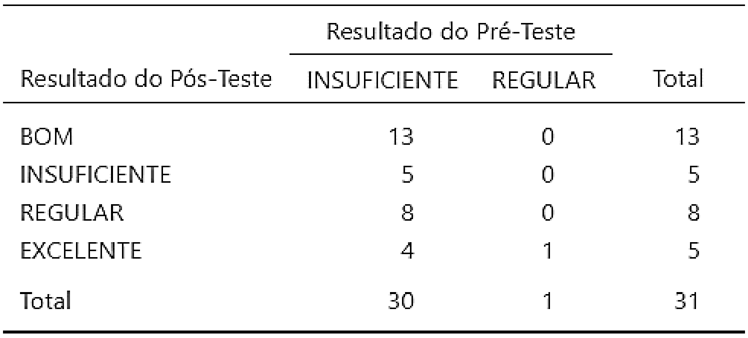
Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.661
N	32	

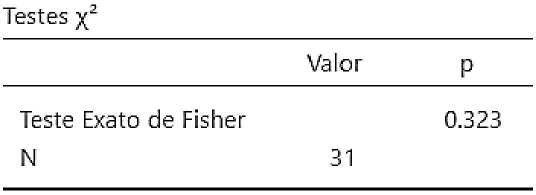
Fonte: Experimentação, 2023.

A tabela 52, mostra o resultado do Teste exato de Fisher com valor de p maior do que o nível de significância (0,05), o que nos faz concluir que não existe uma associação estatisticamente significante entre a frequência durante o experimento e o resultado do pós-teste.

Tabela 53: Resultado do pré-teste *versus* Resultado do pós-teste



	Resultado do Pré-Teste		
Resultado do Pós-Teste	INSUFICIENTE	REGULAR	Total
BOM	13	0	13
INSUFICIENTE	5	0	5
REGULAR	8	0	8
EXCELENTE	4	1	5
Total	30	1	31



Testes χ^2

	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.323
N	31	

Fonte: Experimentação, 2023.

O resultado do Teste exato de Fisher apresentado na tabela 53, mostra que o valor de p é maior do que o nível de significância (0,05), portanto a partir deste resultado concluímos que não existe uma associação estatisticamente significante entre o resultado do pré-teste e o resultado do pós-teste.

6.1.2 Síntese das Associações do Teste Exato de Fisher

Apresentaremos a seguir um quadro síntese contendo os resultados dos testes que realizamos.

Quadro 37 – Resultado sintetizado dos testes realizados

Teste	Variável 1	Variável 2	Resultado
1	Costume de estudar matemática fora da escola	Gosto por Matemática	Não houve associação
2	Gosto por Matemática	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática	Houve associação
3	Dificuldade para aprender matemática	Gosto por Matemática	Não houve associação
4	Costume de estudar matemática fora da escola	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática	Não houve associação
5	Resultado do pré-teste	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática	Não houve associação
6	Resultado do pós-teste	Ajuda nas tarefas extraclasse de matemática	Não houve associação
7	Costume de estudar matemática fora da escola	Resultado do pré-teste	Não houve associação
8	Costume de estudar matemática fora da escola	Resultado do pós-teste	Não houve associação
9	Gosto por Matemática	Resultado do pré-teste	Não houve associação
10	Gosto por Matemática	Resultado do pós-teste	Não houve associação
11	Frequência durante o experimento	Resultado do pré-teste	Não houve associação
12	Frequência durante o experimento	Resultado do pós-teste	Não houve associação
13	Resultado do pré-teste	Resultado do pós-teste	Não houve associação

Fonte: Elaborado pelos autores, 2024.

Ao analisarmos os resultados dos testes das associações apresentados no quadro 37, constatamos que apenas uma associação, “gosto por matemática *versus* ajuda nas tarefas extraclasse de matemática” tiveram nível de significância que mostra que o gosto por matemática tem relação com a ajuda que os estudantes recebem nas tarefas extraclasse de matemática, portanto, apenas estes fatores externos ao ensino realizado, constatou probabilidade de influência.

Ademais, as outras associações entre as variáveis do questionário socioeconômico, entre as variáveis dos questionários e os resultados dos testes, bem como as associações com os resultados dos testes tiveram, de acordo com o resultado do Teste Exato de Fisher, nível de significância com probabilidade de 95% de chances de não existir associação entre as variáveis.

Com isso, acreditamos que o resultado do desempenho dos estudantes nos testes decorra do fato de um bom desenvolvimento nas sequências de atividades de ensino aplicadas durante a experimentação.

6.2 ANÁLISES A POSTERIORI DAS ATIVIDADES DE RAZÃO E PROPORÇÃO

Nossas atividades de ensino foram compostas por 13 atividades que nos orientaram no ensino do objeto matemático razão e proporção, distribuídas de forma ramificada e sequenciada para um melhor ensino e aprendizado, todas as atividades continham um título e faziam relação tanto com o conteúdo matemático, quanto com objetivo a serem alcançado, distribuímos as atividades da seguinte forma mostrada no quadro 38 a seguir:

Quadro 38 – Distribuição das atividades conforme relação à razão e proporção

Atividade de Ensino	Assunto		Objeto matemático relacionado
Atividade 01	Conceito de razão		Razão
Atividade 02	Razões inversas		
Atividade 03	Razões equivalentes		
Atividade 04	Razões especiais:	Escalas	
Atividade 05		Densidade demográfica	
Atividade 06		Velocidade Média	
Atividade 07	Porcentagem como uma razão.		
Atividade 08	Conceito de proporção		Proporção
Atividade 09	Proporcionalidade (grandezas diretamente proporcional e inversamente proporcional)		
Atividade 10	Propriedade fundamental das proporções		
Atividade 11	Propriedade aditiva da proporção I		
Atividade 12	Propriedade aditiva da proporção II		
Atividade 13	Propriedade aditiva da proporção III		

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Após a aplicação das atividades de ensino e da análise de cada atividade realizamos o confronto entre as *análises a priori* e *posteriori*, a fim de verificarmos se se alcançamos nosso objetivo que foi, “ analisar possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada em atividades experimentais para o ensino de razão e proporção sobre o aprendizado de resolução de problemas de estudantes do 9º ano do ensino fundamental”. Para isto, apresentamos no quadro 31 o resultado da análise que obtivemos, bem como a validação.

Quadro 39– Confronto das análises priori e análises posteriori, e Validação das atividades de razão e proporção

ATIVIDADES		O QUE ESPERAR DE RESULTADO	VALIDAÇÃO
1	Análise a priori	Esperávamos que os alunos identificassem uma semelhança entre as diferentes notícias apresentadas que trabalham com a ideia de razão, as quais estão sempre comparando as medidas de duas grandezas, que o aluno conseguisse assimilar razão como sendo uma fração na qual tem-se a comparação da parte e o todo como duas grandezas, ou quociente. Os alunos poderiam sentir dificuldades quanto a ordem na representação de uma razão.	Positivo
	Análise a posteriori	Os alunos conseguiram identificar que as notícias apresentadas trabalhavam ideias de razão, perceberam que cada notícia comparava medidas de duas grandezas, assimilaram a razão como sendo uma fração na qual tem-se a comparação da parte e o todo como duas grandezas, ou quociente.	
2	Análise a priori	Esperávamos que os alunos verificassem a regularidade quando o produto de duas razões é igual a 1 dizemos que as razões são inversas. Os alunos poderiam sentir dificuldades quanto a ordem na representação de uma razão.	Positivo
	Análise a posteriori	Como previmos, houve momentos em que os alunos se equivocaram na operação de multiplicação, cometendo erros quanto ao produto dos antecedentes ou consequentes. Entretanto conseguiram verificar a relação quando o produto de duas razões é igual a 1, as razões eram inversas.	
3	Análise a priori	Esperávamos que os alunos identificassem que a partir de cada situação é proposta dois problemas para serem representadas por razões e que ao simplificarem estas ao máximo chegarão a uma mesma razão, percebam que ao relacionarem uma razão com a outra multiplicando ou dividindo todas as partes da razão pelo mesmo número, terão duas razões equivalentes. Os alunos poderiam sentir dificuldade em representar a razão na ordem em que é enunciado nas questões	Positivo
	Análise a posteriori	Como previmos, os alunos tiveram dificuldades ao representar a razão na ordem em que foi enunciado e ainda tiveram dificuldades na simplificação. No entanto, ao conseguirem representar as razões e simplificá-las perceberam que as razões eram equivalentes.	
4	Análise a priori	Esperávamos que os alunos identificassem em cada situação a relação existente entre a distância no mapa e a distância na realidade, comparando o comprimento real com o comprimento na ampliação ou redução no desenho. E que a partir disso descobrissem a relação de que a razão entre	Positivo

		a medida linear no mapa e a medida linear real é denominada escala do mapa.	
	Análise a posteriori	Os alunos conseguiram comparar o comprimento no mapa com o comprimento na realidade, e perceberam que a comparação na ordem da razão entre a medida linear no mapa e a medida linear real é denominada escala do mapa.	
5	Análise a priori	Esperávamos que os alunos identificassem, em cada situação, a razão entre o número de habitantes e a área ocupada, e ao ver esta ocorrência estabelecessem uma relação entre a razão especial: Densidade demográfica. Acreditamos que se houvesse dificuldade nessa atividade seria para fazer a simplificação dos termos da razão.	Positivo
	Análise a posteriori	Como previmos, ainda houve um pouco de dificuldades para realizarem as simplificações das razões. Ainda assim, os alunos conseguiram perceber que em cada situação a razão entre o número de habitantes e a área ocupada era denominada densidade demográfica.	
6	Análise a priori	Esperávamos que os alunos identificassem em cada situação a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, e estabeleça uma relação entre a distância percorria e o tempo gasto de um determinado objeto móvel além de descobrir como se calcula a distância percorrida por determinado móvel e o tempo gasto em determinado percurso, de acordo com cada situação e por isso estas razões são denominadas razão especial: Velocidade Média. Acreditamos que nessa atividade a dificuldade que os alunos poderiam encontrar seria na operação de divisão ou multiplicação que deverão efetuar para encontrarem o resultado esperado.	Positivo
	Análise a posteriori	Alguns alunos tiveram dificuldades em apresentar a razão na ordem certa, dificultando o resultado esperado. Entretanto ao superarem esta dificuldade, conseguiram identificar em cada situação a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto de um determinado objeto móvel denomina-se Velocidade Média.	
7	Análise a priori	Esperávamos nessa atividade que os alunos identificassem que a fração de denominador 100 é considerada uma razão denominada porcentagem, e que percebessem que para realizar o cálculo percentual basta multiplicar a quantidade pelo numerador(antecedente) e dividir por 100. Acreditamos que se houvesse dificuldades nessa atividade seria, errando a ordem em que se deveria operar a multiplicação no caso em questão, multiplica-se o antecedente com o valor dado e depois divide pelo consequente no caso o 100 ou esqueçam de dividir por 100.	Positivo
	Análise a posteriori	Os alunos conseguiram perceber que a porcentagem é um valor dividido por 100 e para encontrar uma porcentagem de um valor desejado, basta multiplicar o valor desejado que é a quantidade total pela porcentagem que deseja e dividir por 100.	

8	Análise a priori	Esperávamos que os alunos identificassem a equivalência de razões presentes nas duas situações apresentadas acima e que com isso possamos introduzir a ideia de proporção a partir da equivalência de razões, ou seja, consigam compreender quando duas razões formam uma proporção e então conceituar que uma proporção é a igualdade entre duas ou mais razões. Acreditamos que se houvesse dificuldade seria no momento de simplificarem as razões, podendo não realizarem os cálculos corretos.	Positivo
	Análise a posteriori	Os alunos conseguiram identifica a equivalência de duas razões e compreender que proporção é a igualdade de duas razões.	
9	Análise a priori	Esperávamos que os alunos pudessem estabelecer uma relação entre os valores de cada coluna ou linha dos quadros apresentados, percebendo que “duas grandezas de variáveis dependentes são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da 1ª grandeza é igual a razão entre os valores correspondentes da 2ª grandeza, que “duas grandezas de variáveis dependentes são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da 1ª grandeza é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da 2ª. Acreditávamos que a dificuldade que poderia haver, seria na percepção do aumento ou redução dos valores das linhas ou colunas, podendo confundirem com aumento no sentido de adição ou redução no sentido de subtração dos valores ao invés de multiplicação ou divisão.	Positivo
	Análise a posteriori	Como previmos, os alunos tiveram dificuldades de relacionar o aumento ou redução com a quantidade de vezes que aumentou ou reduziu as grandezas. Contudo, os estudantes perceberam que as grandezas eram diretamente proporcionais quando as grandezas aumentavam ou diminuíam e o quociente das duas grandezas eram iguais ou grandezas inversamente proporcionais quando as grandezas uma aumentava a outra diminuía e a multiplicação das duas grandezas eram iguais.	
10	Análise a priori	Esperávamos com essa atividade que os alunos pudessem perceber que ao realizar o cálculo do produto dos extremos e o produto dos meios das razões dadas, descobrissem que os resultados são iguais quando as razões formam uma proporção ou que em uma proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Acreditávamos que a dificuldade que poderiam ter nessa atividade seria na realização da operação de multiplicação ou trocar os valores dos termos: extremos e meios na hora de realizarem os cálculos.	Positivo
	Análise a posteriori	Como previmos, os alunos em alguns momentos tiveram dificuldades em multiplicar na ordem correta, os meios e os extremos e com isso o resultado do produto que encontravam, nem sempre era o esperado.	

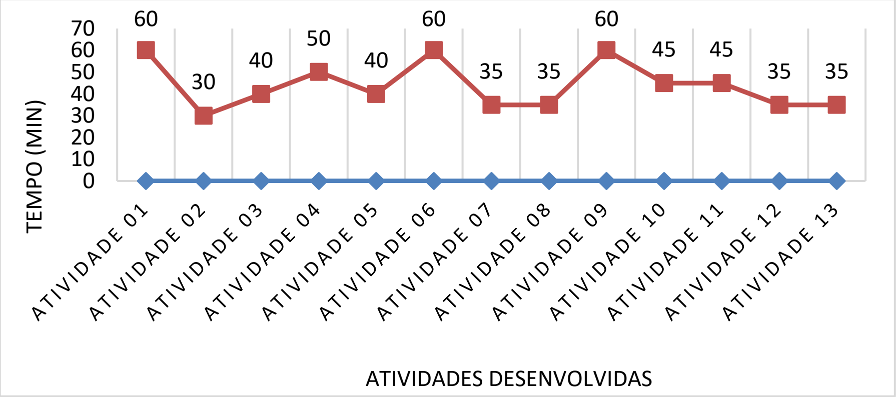
		Entretanto, conseguiram perceber que quando o produto dos meios e extremos eram iguais as duas razões formavam uma proporção.	
11	Análise a priori	Esperávamos que os alunos descobrissem que quando duas razões formam uma proporção, então podemos ter outra proporção na qual a soma dos dois primeiros termos está para o 1º termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o 3º termo. Acreditamos que a se houvesse dificuldade nessa atividade seria na troca dos valores dos termos das razões.	Positivo
	Análise a posteriori	Como previmos, houve alguns equívocos ao trocarem alguns valores dos termos das razões ainda os nomes dos termos. Contudo conseguiram perceber seja observando a equivalência das razões ou a propriedade fundamental que quando as duas razões eram proporção, a soma do primeiro e segundo termos estava para o primeiro, também formava proporção com a soma do terceiro e quarto termo estando par o terceiro termo.	
12	Análise a priori	Esperávamos com essa atividade que os alunos descobrissem que quando duas razões formam uma proporção, então podemos ter outra proporção na qual a soma dos dois primeiros termos está para o 2º termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o 4º termo. Acreditamos que se houver dificuldade nessa atividade será na troca dos valores dos termos das razões.	Positivo
	Análise a posteriori	Os alunos conseguiram perceber seja observando a equivalência das razões ou a propriedade fundamental que quando as duas razões eram proporção, a soma do primeiro e segundo termos estava para o segundo termo, também formava proporção com a soma do terceiro e quarto termo estando par o quarto termo.	
13	Análise a priori	Esperávamos nessa atividade que os alunos descubram que dadas duas razões proporcionais, ao somarmos os antecedentes e os consequentes dessas razões, a soma entre eles também forma uma proporção com cada uma das duas razões dadas inicialmente. Acreditamos que se houvesse dificuldade nessa atividade seria na troca dos valores dos termos das razões.	Positivo
	Análise a posteriori	Como previmos, houve alguns equívocos ao trocarem alguns valores dos termos das razões, também os nomes dos termos. Contudo conseguiram perceber seja observando a equivalência das razões ou a propriedade fundamental que quando as duas razões eram proporção, a soma dos antecedentes estava para a soma dos consequentes, também formava proporção com a cada uma das razões.	

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

O quadro 39, mostrou o confronto entre a *análise a priori* e a *análise a posteriori* em relação as sequências de atividades que foram desenvolvidas para ensinar razão e proporção. Percebemos que os estudantes tiveram um desenvolvimento na solução de problemas em relação ao conceito de razão e proporção, mesmo em alguns momentos tivéssemos que mediar um erro procedimental, seja de cálculo incorreto, organização de dados ainda assim o resultado positivo com a aplicação das atividades é resultado da metodologia de ensino – *EMAE*– que proporcionou ao estudante estímulo na descoberta do objeto matemático através dos diálogos e ações, levando-os a compreensão conceitual e de argumentação.

Observamos no desenvolvimento das atividades que as ações coletivas que os estudantes realizavam com as atividades se tornavam motivação para buscar os resultados, o tempo de duração das atividades também é indício de evolução conceitual na resolução de problemas pelos estudantes. O gráfico 26 a seguir, mostra a variação do tempo aproximadamente de realização de cada atividade.

Gráfico 26 – Variação do tempo de realização das atividades experimentais



Fonte: Experimentação, 2023

Percebemos no gráfico 26 que o tempo de realização das atividades em nenhum momento foi superior ao tempo da primeira atividade realizada, ocorreu uma oscilação no tempo de desenvolvimento das atividades e percebemos que dá Atividade 01 a Atividade 07 o tempo de realização de cada atividade, hora aumentava e hora diminuía alternadamente, acreditamos que esse fato ocorra devido em um primeiro momento não terem confiança para realizarem as atividades de forma autônoma e após se sentirem capazes o tempo diminuía, mas também o tempo mais elevado em relação as atividades podem ter relação com o quantitativo de situações proposta em cada atividade.

A partir da Atividade 08, momento em que se introduziu o conceito de proporção o desenvolvimento desta atividade teve pouco tempo de execução, aumentando o tempo na Atividade 09, e acreditamos que isso correu devido ao volume de situações/problemas proposto, acreditamos nessa possibilidade pois, percebíamos maior confiança em realizarem as atividades, entusiasmo em argumentar as observações e conclusões, além disso as atividades seguintes que tinham quase um mesmo padrão para realizarem as ações e alcançarem o resultado tiveram um decrescimento no tempo de realização das atividades.

Portanto, podemos considerar que a experimentação da sequência de atividades que elaboramos e aplicamos tiveram efeitos POSITIVOS no ensino de razão e proporção dos estudantes do 9° ano do ensino fundamental, pois, os estudantes foram capazes de executarem as atividades de forma colaborativa, melhorando seu comportamento, sua concentração, a autoconfiança e principalmente a autonomia para realizar os procedimentos confiante e descobrirem um conceito do objeto matemático. Então, ao seguirmos os procedimentos da metodologia de pesquisa – *Engenharia Didática* – podemos considerar que a sequência de atividades experimentais é potencialmente favorável ao ensino aprendizado de razão e proporção, sendo assim VALIDADO como um produto educacional, que poderá ser utilizado por professores de matemática da educação básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa buscou responder a seguinte problemática: como o ensino de razão e proporção pode contribuir sobre o aprendizado de resolução de problemas dos estudantes do 9º ano de uma escola pública de ensino fundamental no município de Novo Repartimento/PA? Para tanto, objetivamos analisar possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada em atividades experimentais para o ensino de razão e proporção sobre o aprendizado de resolução de problemas de estudantes do 9º ano do ensino fundamental.

O estudo utilizou a metodologia de pesquisa, Engenharia didática, aporte importante para respondermos e validarmos os resultados desta pesquisa, aliado a metodologia de ensino, EMAE, que contribuiu para a elaboração da sequência de atividades, composta por 13 atividades de ensino/aprendizagem, mais 3 listas com questões de aprofundamento, todas relacionadas ao objeto matemático razão e proporção.

A experimentação da sequência de atividades ocorreu em 16 encontros, na ocasião também foi aplicado o questionário socioeconômico, o pré-teste e o pós-teste, bem como a coleta de dados referentes ao comportamento, tempo de execução das atividades, registros fotográficos e falas.

Após a experimentação realizamos as análises dos resultados escritos das observações e conclusões, e percebemos que os estudantes conseguiram demonstrar entendimento em seus argumentos, válidos para formalização de conceitos por meio de registros escritos mesmo que em alguns casos ainda houvesse a necessidade de melhorar a coerência no texto.

Ainda analisamos o desempenho dos estudantes em cada atividade desenvolvida comparando as análises a priori e posteriori, validando como, positivo a sequência de atividades aplicadas. Fizemos as análises quantitativas do resultado dos testes (pré-teste e pós-teste) e os comparamos, constatando que no pré-teste a maioria dos resultados foram insuficientes para quase o total de estudantes pesquisados, e no pós-teste tivemos uma evolução, significativa para a maioria dos estudantes que tiveram desempenho satisfatório.

Ademais, analisamos resultados das associações entre variáveis e constatamos por meio do resultado do Teste Exato de Fisher que apenas uma associação teve nível de significância, mostrando que o gosto por matemática tem relação com a ajuda que os estudantes recebem nas tarefas extraclasse de matemática, sendo, apenas estes fatores externos ao ensino realizado com probabilidade de influência, outras associações entre as variáveis do questionário socioeconômico, as variáveis dos questionários e os resultados dos testes, bem como as associações com os resultados dos testes, não existiu nível de significância que influenciasse as associações das variáveis.

Além disso cabe destacar que os principais tipos de erros cometidos ao resolverem as situações/problemas do teste decorreu de erros procedimentais e erros de atenção. O tempo de evolução das atividades aplicadas, em nenhum momento foram superiores ao tempo da primeira atividade desenvolvida, indicando que a tendência é a diminuição do tempo na realização de atividades se desenvolvidas nos moldes do *EMAE*.

Com isso, acreditamos que o resultado satisfatório dos estudantes no pós-teste decorra do efetivo desempenho qualitativo, diante dos efeitos do desenvolvimento da sequência de atividades de ensino aplicadas durante a experimentação que contribuiu com um amadurecimento cognitivo em relação ao conteúdo de razão e proporção, favoreceu a motivação, a elaboração de reflexões, a autoconfiança para chegarem aos resultados das situações/problemas por meio de redescoberta, seja em grupo ou individualmente, como mostramos nos resultados das análises qualitativas em tabelas e gráficos.

Por fim esperamos que essa pesquisa e as atividades da sequência didática que transformamos em um produto educacional – Caderno de Atividades - possam orientar os professores de Matemática da Educação Básica a desenvolverem aulas com atividades experimentais, contribuindo assim na eficácia da gestão de ensino e aprendizagem dos estudantes no ensino de razão e proporção. E para uma pesquisa futura acreditamos ser interessante e importante buscarmos realizar um estudo dos produtos educacionais disponíveis que tem *EMAE* como metodologia de ensino.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v. 14, n. 3, p. 386-397, 2012.

ALVES, José Matias; PALMEIRÃO, Cristina (coord.). **Construir a Autonomia e a Flexibilização Curricular:** os desafios da escola e dos professores. Universidade Católica Editora Porto. Porto - Portugal. Novembro de 2017.

ANDRINI, M. J. V Álvaro. **Praticando matemática.** São Paulo: Editora do Brasil, 2015. (Coleção praticando matemática; v. 7)

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

BARBOSA, Cira Naiá Campos. **O ensino do princípio fundamental da contagem por atividades experimentais**. Universidade Estadual do Pará. Belém, 2021.

BATISTA, Jakelline de Aquino. **O ensino de razão e proporção por meio de atividades**. Universidade Estadual do Pará. Belém, 2018.

BATISTA, Jairo Emerson Santana. **Um estudo documental sobre a matriz de referência do ENEM e dos itens de matemática das edições de 2014 e 2015**. Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Centro Acadêmico do Agreste - CAA. 2017.

BERBEL, Neusi Aparecida Narvas. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciência Sociais e Humanas**. Londrina, v.32, p. 25-40, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**: Documentos de Referência. Versão 1.0. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - Inep. Brasília, 2018.

BRASIL. Constituição Federativa do Brasil, Brasília, 5 de out de 1988.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. – Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 542p.

BRASIL. **Matriz de Referência ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - Inep. Brasília: INEP/MEC, 2023.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: 1996.

BRASIL. **Plano Nacional de Educação 2014-2024** [recurso eletrônico]: Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014, que aprova o *Plano Nacional de Educação (PNE*) e dá outras providências. – Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2014. 86 p. – (Série legislação; n. 125).

BRASIL. **Relatório de Resultados do Saeb 2021**. Volume 1. Brasília-DF: Inep/MEC, 2023.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática - Bianchini**: manual do professor. 9. ed. – São Paulo: Moderna, 2018.

BLOOM, B. S. et al. **Taxonomy of educational objectives**. New York, 1956. 262 p. (v. 1)

BORASI, R. On the nature of problems. **Educational Studies in Mathematics**, v. 17, n. 2, p. 125-141, 1986.

BRANDEMBERG, J. C. Um estudo do *epitome arithmeticae practicae* de Christoph Clavius (1538-1612): potencialidades de um texto histórico para o ensino de matemática. *In*: FOSSA, John A (Org.). **O Olho do Mestre**: dez livros-textos historicos. Campina Grande: EDUEPB, 2021. cap. 3, p. 87-113.

BRAZ, Lúcia H. C; et al. ENEM matemática: 2009 a 2016. Formiga, MG.: Departamento de Matemática–IFMG- Campus Formiga, MG.,2020. 303p.:il.

CABRAL, Danilo Rafael de Lima **Testes estatísticos e detecções de mudanças de conceitos em fluxos de dados**. Universidade Federal de Pernambuco. CIn, Ciência da Computação, Recife, 2017.

CAJORI, F.A. **History of mathematical notation**. Vol I, Dover Publications, 1993.

CAMPOS, Raul Bueno Lins. **Análise técnica da matriz de referência do ENEM e dos itens de matemática das edições de 2012 a 2014**. Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE. Departamento de Matemática, Recife, 2015.

CENCI, A.; DAMIANI, M. F. Desenvolvimento da Teoria Histórico-Cultural da Atividade em três gerações: Vygotsky, Leontiev e Engeström. **Roteiro**, [S. l.], v. 43, n. 3, p. 919–948, 2018. DOI: 10.18593/r.v43i3.16594. Disponível em: https://periodicos.unoesc.edu.br/roteiro/article/view/16594. Acesso em: 21 jul. 2023.

CORRÊA, João Nazareno Pantoja. **O ensino de poliedros por atividades**. Universidade do Estado do Pará - UEPA, Belém, 2019.

COSTA, M. dos S; *et al*. Ensino e aprendizagem de proporcionalidade a partir da resolução de problemas: discussões com professores e futuros professores de matemática. **CUADERNOS DE EDUCACIÓN Y DESARROLLO**. v.15, n.4, p. 3435-3452, 2023.

COTRADO, B., Burgos, M., BELTRÁN-PELLICER, P.; CASTRO, A. Análisis didáctico de materiales curriculares por futuros profesores. **Cad. Pesqui. São Paulo, v.** *53*, 2023. Acesso em: <https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/10031>. Acesso em 09/10/2023

DELLATORRE, **Razão e Proporção:** Uma proposta de ensino explorando problemas do cotidiano. Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul Campus de Três Lagoas. Três Lagoas – MS, 2021.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

ENGESTRÖM, Y. **Aprendizagem por expansão na prática:** em busca de uma reconceituação a partir da teoria da atividade. Tradução de: D. Vilas Boas e M. Damiani. In: **Cadernos de Educação**. Pelotas: Ed. UFPel, 2002, n. 19, p.31-64, 2002.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP,2009.

BOLETIM Agropecuária Paraense 2022. Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará. 2022.

FARIAS, Monique Helen Cravo Soares et al. Impact of rural settlements on the deforestation of the Amazon. **Mercator**, Fortaleza, v. 17, apr. 2018. ISSN 1984-2201. Available at: <http://www.mercator.ufc.br/mercator/article/view/e17009>. Date accessed: 02 may 2024. doi: https://doi.org/10.4215/rm2018.e17009.

FEIRA Agropecuária de Novo Repartimento reúne artistas nacionais, rodeios e premiação em dinheiro. g1. Belém. 10/09/2023. Disponível em: https://g1.globo.com/pa/para/noticia/2023/09/10/feira-agropecuaria-de-novo-repartimento-reune-artistas-nacionais-rodeios-e-premiacao-em-dinheiro.ghtml. Acesso em: 02-05-2024.

FELIX, Ana Paula Nunes. **O ensino de problemas aditivos com mais de uma operação**. Universidade do Estado do Pará - UEPA, Belém, 2021.

FERRAZ, A. P. do C. M. e BELHOT, R. V. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. **Gest. Prod**., São Carlos, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010.

FERREIRA, Pamela E. Alves; BURIASCO, Regina L. Corio de. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 452-472, ago. 2015.

FOSSA, John A. Razão e Proporção: A Herança Antiga**. Revista Brasileira de História da Matemática**, Vol. 11, no23, Anais IX SNHM, 2011, p.1-6

FUNDO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A INFÂNCIA – UNICEF. **Panorama da distorção idade-série no Brasil**. 2018.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática. **REMATEC**, *[S. l.]*, v. 17, n. 41, p. 20–32, 2022. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/434>. Acesso em: 10 jan. 2024.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. O cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de matemática. **Revista Práxis Educacional**, Vitória da Conquista, v. 8, n. 13, p. 253-280. jul./dez. 2012.

GUINNESS, Ivor Grattan. Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's. **Historia Mathematica**. Inglaterra, v. 23, n. 38, p. 355–375, 1996

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**. Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

IEZZI, Gelson, et al. **Matemática e realidade:** 9º ano**.** 10 ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **História e Fotos**. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/novo-repartimento/historico>. Acesso em: 30/04/24.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Produção Agrícola Municipal 2022**. Rio de Janeiro: IBGE, 2023.

KNECHTEL, M. R. **Metodologia da pesquisa em educação**: uma abordagem teórico-prática dialogada. Curitiba, PR: Intersaberes, 2014.

LACERDA, Vitor Hugo Bonfim. **O jogo de tabuleiro como recurso didático para o ensino do conceito de proporcionalidade**. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza – Ceará, 2019.

LAZZARETTI, Raiana. **Uma Análise do Conteúdo de Razão e Proporção em Livros Didáticos do Ensino Fundamental.** Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria - RS, 2022.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Tradução de: Rubens Eduardo Frias, 2ª edição. São Paulo: Centauro, 2004.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia, personalidad**. Havana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

LIMA, José Roberto; FERREIRA, Helaine. Contribuições da Engenharia Didática como elemento norteador no Ensino de Física: estudando o fenômeno de Encontro de Corpos com atividades da Robótica Educacional. **Revista Brasileira de Ensino de Física**<https://www.scielo.br/j/rbef/a/LCMHMfGDTkYcKfd8GKK8tMh/?lang=pt> Disponível em: Acesso em: 09/09/2023.

LOBATO JÚNIOR, José Maria dos Santos. **O ensino de razão e proporção por meio de atividades**. Universidade do Estado do Pará - UEPA, Belém, 2018.

LOPES, Thiago Beirigo; SÁ, Pedro Franco de. Por que a Engenharia Didática em sala de aula? **Gnosis Carajás.** v. 1, n. 2, e012, julho-dezembro, 2021.

MAFRA, José R. e S.; SÁ, P. F. de. Uma perspectiva teórica para o ensino de matemática por atividades experimentais. **Revista Exitus**. Santarém/PA, Vol. 13, p. 01 - 21, e023003, 2023.

MARX, K. Grundrisse: **Foundations of the critique of political economy (rough draft)**. Harmondsworth: Penguin Books. 1973.

MELLO**,** Guiomar Namo de**. Currículo da Educação Básica no Brasil:** concepções e políticas**.** 2014. Acesso em: <https://movimentopelabase.org.br/?s=Curriculo+da+educacao+basica+no+brasil>. Acesso em: 10/04/2023.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social**: Teoria, método e criatividade. 21 ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

MORAES, Maria Candida. O paradigma educacional emergente: implicações na formação do professor e nas práticas pedagógicas. **Em Aberto**. Brasilia, v. 16 n. 70, 1996.

MOREIRA, A. F; PEDROSA, J.G. e PONTELO, I. O conceito de atividade e suas possibilidades na interpretação de práticas educativas. **Revista Ensaio**. v. 13, n. 3, p: 13-29, set-dez, 2011.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

NOVO REPARTIMENTO. **Documento Curricular do Município de Novo Repartimento**: Educação infantil e ensino fundamental. Novo Repartimento/Pa, 2020.

NUNES, Terezinha. É hora de ensinar proporção. [Entrevista concedida a] Ricardo Falzetta. **Nova Escola**. São Paulo, 01 de abril, 2003. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/958/e-hora-de-ensinar-proporcao>. Acesso em: 29/04/2024.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **In: Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico**.** 2ª Edição, São Paulo: Scipione, 1995. Série: Pensamento e ação no magistério; v.21. Mestres da educação.

PARÁ. **Documento Curricular do Estado do Pará**: Educação infantil e ensino fundamental. 2ª edição. Belém/Pa: CONSED/UNDIME Pará, 2019.

PATARO, Patrícia Moreno. **Matemática essencial 9° ano**: ensino fundamental, anos finais. 1ª Ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PIZARRO, Sara Pascual. Una secuencia didáctica para la enseñanza de la transformación lineal: unificación de métodos y problemas, modelización y explicitación del aprendizaje. ***Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa****. Vol. 23. novembro de 2020. p.* 271-310.

PORTELLA, A. L. BUSSMANN, T. B. OLIVEIRA, Ana Maria H. de. A relação de fatores individuais, familiares e escolares com a distorção idade-série no ensino público brasileiro. **Nova Economia.** v.27, n.3, p.477-509, 2017.

PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO. E.M.E.F. Prof.ª Raimunda Tavares. Novo Repartimento/Pa, 2023.

QUITEMBO, Alberto D. J; DOMINGAS, Augusta. A proporcionalidade na 9ª classe do 1º ciclo do ensino secundário: uma análise sobre as competências desenvolvidas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat)**, Florianópolis, v. 15, p. 01-21, jan./dez., 2020. Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e77540

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação (Reveduc)**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311, mai. 2012.

SÁ, P. F. de. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades**. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I)

SÁ, P. F. de. As atividades experimentais no ensino de matemática. **REMATEC.** Número 35, p.143-162, Belém, 2020.

SÁ, P. F. de. **Possibilidades da resolução de problemas em aulas de matemática**. Belém: IFPA, 2021. (Coleção II SINEPEM; vol.2)

SOUZA, C. A.; GARNICA, A. V. M. Sobre a Dinâmica de Circulação de Ideias (em Educação Matemática). **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 20, 27 dez. 2016.

SILVA, Matheus Feliciano da. **Razão, Proporção e Resolução de Problemas**: uma proposta para o ensino fundamental. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 66 f. 2022.

SILVA. Luiz Carlos Soares da. **O ensino de relações trigonométricas por atividades**. Universidade do Estado do Pará - UEPA, Belém, 2019.

TINOCO, Dayane Cristina Rocha. **Uma Abordagem Ecológica Envolvendo Proporcionalidade na Educação Básica**. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora - MG, 2016.

TOURÃO, Benedito Junior Corrêa. **O Ensino de Prismas por Atividade Ensino de esfera por meio de applets do software geogebra**. Universidade do Estado do Pará UEPA, Belém, 2020.

TRAJANO, Antônio. **Arithmetica Progressiva.** 68º edição, 1935.

VYGOTSKY, L.S. **A formação social da mente:** O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**.** Tradução de: José Cipolla Neto, Luis

Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes. 7ª edição, 2007.

VIEIRA, Maria Sônia Leitão Melo. **Estudo da Ecologia do Saber Proporcionalidade no Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático** Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2020.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A: QUESTIONÁRIO SÓCIO-ECONÔMICO PARA O DISCENTE

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
QUESTIONÁRIO SÓCIO-ECONÔMICO

1- Idade: _______ 2- Gênero:( ) Masculino ( ) Feminino Data: ____/____/____

3- Você trabalha? ( ) Não ( ) Sim

4- Quem é o seu responsável masculino? ( ) Pai ( ) Padrasto ( ) Avô ( ) Tio ( ) Irmão () Não tenho ( ) Outro: ______________

5- Quem é o seu responsável feminino? ( ) Mãe ( ) Madrasta ( ) Avó ( ) Tia ( ) Irmã ( ) Não tenho ( ) Outro:______________

6- Até que ano/série estudou o seu responsável masculino? ____________ E o seu responsável feminino? _________________

7- Qual a profissão de seu responsável masculino? _____________________________ E a profissão de seu responsável feminino? ___________________________________

8- Você gosta de Matemática? ( ) Nenhum pouco ( )Um Pouco ( ) Muito

9- Você está repetindo o 9º ano? ( ) Não ( ) Sim

10- Você tem dificuldade para aprender Matemática? ( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muita

11- Além do horário escolar, você costuma estudar Matemática fora da escola: ( ) Só no período de prova ( ) Só na véspera da prova ( ) De segunda a sexta-feira ( ) Só nos finais de semana ( ) Todo dia

12- Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de Matemática?
( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão/Irmã ( ) Amigo/Amiga ( ) Ninguém ( ) Outro:___________________

13- A maioria das aulas de matemática é desenvolvida:
( ) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios

( ) Começando uma situação problema para depois introduzir o assunto
( ) Começando com um experimento para chegar ao conceito
( ) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos
( ) Outro: ____

14- Para fixar o conteúdo, o seu professor costuma:
( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos.

( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto.
( ) Solicitar que você resolvesse os exercícios do livro didático.
( ) Solicitar que você procurasse questões sobre o assunto para resolver em outras fontes (internet, outros livros)
( ) Não propor questões de fixação.
( ) Outro: ____

15- Você entende matemática da forma como seu professor ensina? ( ) Sim ( ) Não
( ) Ás vezes. Quando: ____

16- Você lembra de algum experimento desenvolvido pelo seu professor para ensinar matemática?
( ) Não ( ) Sim. Qual?________________________________

APÊNDICE B: TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAR PESQUISA NA INSTITUIÇÃO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAR PESQUISA NA INSTITUIÇÃO

Caro(a) Senhor (a) Diretor (a) da Escola Prof.ª Raimunda Tavares,

O Programa de Mestrado em Ensino da UEPA está realizando a pesquisa “**Ensino de razão e proporção por meio de atividades experimentais**” relacionada ao ensino de matemática do 9º ano que visa avaliar uma proposta de ensino da referida disciplina. Pelo exposto viemos pedir autorização para realizar a pesquisa que está sob responsabilidade dos pesquisadores Tatiane Tenório Gonçalves, RG nº 5052594 – Policia Civil/PA, CPF nº 902.561.402-78 e Pedro Franco de Sá, ambos da Universidade do Estado do Pará. Com base, nas informações descritas, eu____, diretor (a) da Escola Municipal de Ensino Fundamental Prof.ª Raimunda Tavares, uma instituição localizada em Novo Repartimento no Estado do Pará, em exercício, RG nº____________________, CPF nº ______________________________, AUTORIZO os pesquisadores, a realizarem observação, registro fotográfico e/ou gravações em áudio, realizar entrevistas, com os participantes da pesquisa que frequentam a referida instituição. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o Programa de Mestrado em Educação da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Travessa Djalma Dutra s/n. Belém-Pará- CEP: 66113-010; Fone: (91)4009-9552. Os pesquisadores acima citados se comprometem a:

1. Obedecer às disposições éticas de proteger os participantes da pesquisa, garantindo-lhes o máximo de benefícios.
2. Assegurar a privacidade das pessoas citadas nos documentos institucionais e/ou contatadas diretamente, de modo a proteger suas imagens, bem como garante que não utilizará as informações coletadas em prejuízo dessas pessoas e/ou da instituição, respeitando deste modo as Diretrizes Éticas da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, nos termos estabelecidos na Resolução CNS N° 466/2012, e obedecendo as disposições legais estabelecidas na Constituição Federal Brasileira, artigo 5°, incisos X e XIV e no Novo Código Civil, artigo 20.

Belém, ________ de ____________________de 2023

____

Assinatura de um dos pesquisadores

____

Diretor (a) da Escola Municipal de Ensino Fundamental Prof.ª Raimunda Tavares, em exercício.

APÊNDICE C: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caro(a) Senhor (a) responsável,

O Programa de Mestrado em Ensino da UEPA está realizando a pesquisa "**Ensino de razão e proporção por meio de atividades experimentais"** relacionada ao ensino de matemática para o 9º ano e que visa avaliar uma proposta metodológica de ensino da referida disciplina. Pelo exposto viemos convidar o aluno ____ para participar como voluntário (a) da referida pesquisa, sob responsabilidade dos pesquisadores Profa. Tatiane Tenório Gonçalves e Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, ambos da Universidade do Estado do Pará.

A participação de seu filho (a) à pesquisa será realizada nas dependências da Escola de Ensino Fundamental Prof.ª Raimunda Tavares e não atrapalhará no andamento de suas atividades regulares, a participação dele ocorrerá por meio das seguintes atividades: responder a questionários e participar de atividades elaboradas relacionadas ao conhecimento matemático do 9º ano, planejadas com o objetivo de tornar o processo de aprendizagem deste conteúdo mais significativo. Em nenhum momento seu (sua) filho (a) será identificado (a). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade dele (a) será mantida em sigilo. Você ou seu filho (a) não terão gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Não há riscos aos participantes de nenhuma natureza, seja ela física ou psicológica. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo sobre o ensino de matemática. Seu filho (a) é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Aos pais é garantido o livre acesso as informações e esclarecimentos referentes à pesquisa.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o Programa de Mestrado em Ensino da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Travessa Djalma Dutra s/n. Belém-Pará- CEP: 66113-010; Fone: (91)4009-9552.

Belém, ________de ______________________de 2023.

____

Assinatura de um dos pesquisadores

Eu,____a ceito ou autorizo meu filho (a), a participar da pesquisa citada acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido (a).

____

Responsável pelo Participante da pesquisa

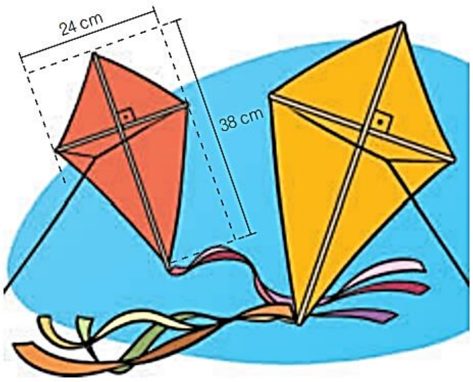
APÊNDICE D: PRÉ-TESTE e PÓS-TESTE

Questão 1: (Adaptada Saresp 2013) - Um estojo de maquiagem tem 12 tonalidades de batom, sendo 3 tonalidades cintilantes e as restantes cremosas. Qual a representação da razão entre o número de batom cintilante e o número de batons no estojo?

Questão 2: O tamanho máximo das bandeiras autorizadas para entrarem em um estádio de futebol na copa do mundo de 2022, segundo o padrão da FIFA foi de 2m de comprimento por 1,5m de largura. Considerando que uma Bandeira Nacional possui 1 m de comprimento, quanto deverá medir a altura dessa bandeira, seguindo a proporcionalidade dos padrões FIFA?

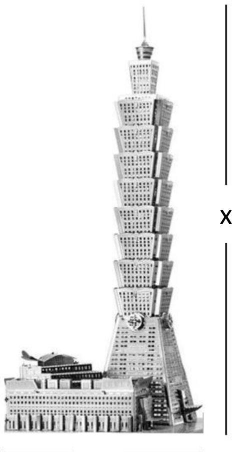
Questão 3: Densidade demográfica(D) é a razão entre o número de habitantes e a área que é ocupada por eles, ou seja, $D = \frac{número\ de\ habitantes}{área\ em\ km^2}$, e serve para comparar a população com a área ocupada. No Brasil há lugares pouco povoados e outros com grande concentração de pessoas. No estado de São Paulo, por exemplo, temos uma população de aproximadamente 44 milhões de pessoas, para uma área também aproximada de 250 000 km^2. (IBGE, 2022). Com isso, a densidade do estado de São Paulo será de?

Questão 4: As duas pipas são semelhantes, sendo 1,5 a razão de semelhança. Qual é o comprimento das diagonais da pipa maior?



Fonte: Coleção praticando matemática, v. 9, 2025, p. 181.

Questão 5: (Saresp 2013) - O edifício da foto abaixo foi construído em Taipei e é um dos dez mais altos do mundo. Sua altura real é de 509 metros. Se, na foto, a medida da altura x do prédio for de 14 cm e a medida de y for de 5 cm, a medida real aproximada de y será de:



Fonte: https://bayshoreshoppingcentre.com.

Questão 6: O sal mineral, ou suplemento mineral para cavalo é uma mistura composta por macro e micronutrientes extremamente importantes para a manutenção da saúde do animal. Os minerais são essenciais para o bom funcionamento de qualquer organismo. No caso dos cavalos, os minerais são imprescindíveis para a **boa performance de atividades**, bem como para a **longevidade do animal**. O sódio, um dos principais componentes do sal mineral para cavalo, possui funções de transporte de nutrientes no organismo e funções cerebrais. E esses são apenas alguns dos motivos que tornam a ingestão desse suplemento tão importante para os equídeos. A ingestão do sal mineral para cavalo deve ser diária e de acordo com peso do animal. Veja a tabela abaixo:

Quadro 7 - Consumo de Sal mineral diário de alguns cavalos, considerando o peso do **animal.**

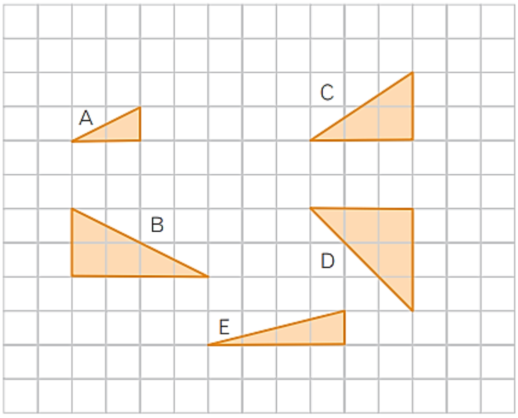
Quantidade de Sal (g)	Peso do cavalo (Kg)
25	100
50	200
100	400
200	800

De acordo com as informações na tabela descubra se há proporcionalidade entre a quantidade de sal e o peso do animal, e qual a constante de proporcionalidade?

Questão 7: Uma loja que vende tintas tem uma máquina que efetua misturas de variadas cores para obter diferentes tonalidades. Um cliente irá comprar uma tonalidade de tinta com a mistura das cores amarelo e branco, na proporção de 5 para 2, respectivamente. O cliente, irá precisar de 21 l, nesse caso quantos litros de cada cor irão utilizar para obter a tonalidade na mesma proporção?

Questão 8: (ABCP 2022) - Considerando que uma herança de R$ 50.000,00 será dividida em partes diretamente proporcionais à idade de três pessoas (10, 15 e 25 anos, respectivamente), é correto afirmar que a pessoa mais velha receberá um valor igual a:

Questão 9: Observe a imagem abaixo.



Fonte: Coleção praticando matemática, v. 9, 2015, p. 171.

Qual figura é a ampliação da figura A?

APÊNDICE E: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Atividade 01

Título: Razão em matemática

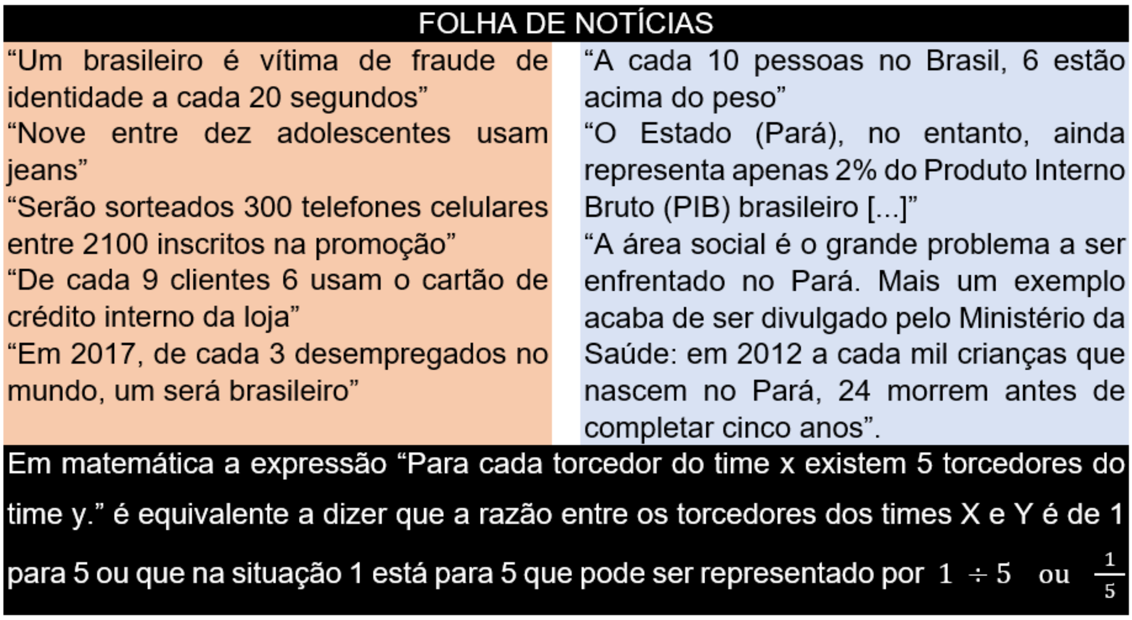
Objetivo: Introduzir o conceito de razão

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta

Hora de Início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimentos:

- Leia a folha de notícias juntamente com o quadro informativo e faça o que se pede em seguida.



FOLHA DE NOTÍCIAS

“Um brasileiro é vítima de fraude de identidade a cada 20 segundos”
“Nove entre dez adolescentes usam jeans”
“Serão sorteados 300 telefones celulares entre 2100 inscritos na promoção”
“De cada 9 clientes 6 usam o cartão de crédito interno da loja”
“Em 2017, de cada 3 desempregados no mundo, um será brasileiro”

“A cada 10 pessoas no Brasil, 6 estão acima do peso”
“O Estado (Pará), no entanto, ainda representa apenas 2% do Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro [...]”
“A área social é o grande problema a ser enfrentado no Pará. Mais um exemplo acaba de ser divulgado pelo Ministério da Saúde: em 2012 a cada mil crianças que nascem no Pará, 24 morrem antes de completar cinco anos”.

Em matemática a expressão “Para cada torcedor do time x existem 5 torcedores do time y.” é equivalente a dizer que a razão entre os torcedores dos times X e Y é de 1 para 5 ou que na situação 1 está para 5 que pode ser representado por $1 \div 5$ ou $\frac{1}{5}$

- Analise as situações a seguir e escreva a razão correspondente entre os elementos envolvidos em cada situação.

Situação 1: Santa Catarina tem a maior sobra de homens solteiros. Para cada 100 mulheres solteiras existem 122 homens na mesma condição.

Razão correspondente:

Situação 2: Em Novo Repartimento de cada 1000 crianças que nascem aproximadamente 25 não sobrevivem.

Razão correspondente:

Situação 3: Três de cada dez brasileiros são ateus.

Razão correspondente:

Situação 4: A gasolina teve um aumento de 7%.

Razão correspondente:

Situação 5: Em uma cidade, 30% dos moradores são estrangeiros.

Razão correspondente:

Situação 6: 94% dos brasileiros que tem contato com notícias ou informação na rotina, consideram importante checar as notícias.

Razão correspondente:

Situação 7: As principais fontes de informações atuais, para 7% das pessoas são as fontes digitais como: Twitter, Instagram, Facebook, LinkedIn e YouTube.

Razão correspondente:

Situação 8: A cada 4 brasileiros, 1 se declara portador de alguma deficiência.

Razão correspondente:

Situação 9: Nove entre dez crianças assistem desenho animado.

Razão correspondente:

Situação 10: No Brasil o número de mulheres supera o de homens, em média de 95,6 homens para cada 100 mulheres.

Razão correspondente:

- Dê 05 exemplos de situações que envolvem a ideia de razão.

Na razão $\frac{3}{4}$ o três é denominado de **antecedente** e o quatro de **consequente**.

- Para cada razão a seguir identifique o antecedente e o consequente

1) Na razão $\frac{2}{5}$, o antecedente é__________ e o consequente é __________

2) Na razão $\frac{1}{2}$, o antecedente é__________ e o consequente é __________

3) Na razão $\frac{4}{5}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

4) Na razão $\frac{7}{8}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

5) Em $\frac{11}{13}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

6) Em $\frac{3}{6}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

7) Em $\frac{3}{7}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

8) Em $\frac{11}{25}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

9) Em $\frac{6}{7}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

10) Em $\frac{7}{9}$, o antecedente é __________ e o consequente é __________

- Preencha as lacunas:

b) Ao comparar a medida de duas grandezas estou trabalhando a ideia de __________. A ordem na representação de uma razão é importante e recebem o nome de _________________ e __________________ que podem ser representados na forma de ___________________.

Observações:

Atividade 02

Título: Razões Inversas

Objetivo: Descobrir uma relação entre as razões que tem seus termos invertidos.

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta e se achar necessário podem fazer uso de calculadora.

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia a o roteiro de atividade com o quadro abaixo e faça o que se pede.
- Preencha o quadro a seguir:

Razão 1	Razão 2	Produto das razões
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	
$\frac{9}{3}$	$\frac{3}{9}$	
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	
$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	
$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{2}$	
$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{7}$	
$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{8}$	
$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{7}$	

Observação:

Conclusão:

- De 5 exemplos de pares de razões inversas.
- De 5 exemplo de pares de razões que não são inversas.

Atividade 03

Título: Razões equivalentes

Objetivo: Introduzir o conceito de razões equivalentes

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Considere cada situação apresentada e responda o que lhe é solicitado

Situação 01: Num grupo de 10 torcedores do time o Cruzeiro, 06 são homens e de cada grupo de 20 torcedores do time do Vasco, 12 são homens. Qual dos times tem mais torcedores homens?

a) Qual é a razão entre os torcedores do Cruzeiro que são homens e o total do grupo de torcedores do Cruzeiro? Simplifique ao máximo esta razão.

b) Qual é a razão entre os torcedores do Vasco que são homens e o total do grupo de torcedores do Vasco? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Qual dos times tem mais torcedores homens?

Situação 02: De cada 08 profissionais da construção civil, 02 são mulheres e de cada 24 engenheiros, 06 são mulheres. Qual das profissões tem mais mulheres?

a) Qual é a razão entre as profissionais da construção civil e os profissionais da construção civil de ambos os sexos? Simplifique ao máximo esta razão.

b) Qual é a razão entre as engenheiras e os engenheiros de ambos os sexos? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Qual das profissões tem mais mulheres?

Situação 03: De cada 12 mulheres que tem câncer de mama, 02 morrem e de cada 06 mulheres que tem câncer de colo do útero, 01 morre. Qual dos dois tipos de câncer é mais mortal?

a) Qual é a razão entre a mortalidade das mulheres e o câncer de mama? Simplifique ao máximo esta razão.

b) Qual é a razão entre a mortalidade das mulheres e o câncer de colo do útero? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Qual dos dois tipos de câncer é mais mortal?

Situação 04: Três de cada dez brasileiros são ateus e nove de cada trinta italianos são ateus. Há mais ateus entre brasileiros ou italianos?

a) Qual é a razão entre o número de brasileiros ateus e o número de brasileiros? Simplifique ao máximo esta razão.

b) Qual é a razão entre o número de italianos ateus e o número de italianos? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Há mais ateus entre brasileiros ou italianos?

Situação 05: Nove entre dez crianças acessam a internet todos os dias e dezoito entre vinte adolescentes acessam a internet diariamente. Quem acessa mais a internet diariamente, as crianças ou os adolescentes?

a) Qual é a razão entre o número de crianças que acessam a internet diariamente e o número de crianças? Simplifique ao máximo esta razão.

b) Qual é a razão entre o número de adolescentes que acessam a internet diariamente e o número de adolescente? Simplifique ao máximo esta razão.

c) Quem acessa mais a internet, diariamente, as crianças ou os adolescentes?

- Preencha o quadro a seguir:

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	Razão $\frac{a}{b}$ simplificada ao máximo	Razão $\frac{c}{d}$ simplificada ao máximo	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais?	
					SIM	NÃO
$a = 1; b = 2; c = 4; d = 8$						
$a = 12; b = 18; c = 12; = 16$						
$a = 2; b = 4; c = 8; d = 16$						
$a = 2; b = 6; c = 4; d = 12$						
$a = 6; b = 15; c = 4; d = 10$						
$a = 1; b = 2; c = 4; d = 8$						
$a = 4; b = 8; c = 3; d = 6$						

- Verifique quais dos pares de razões são equivalentes ou iguais:

11) $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$

12) $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{20}$

13) $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$

14) $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$

15) $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{10}$

16) $\frac{10}{15}$ e $\frac{3}{30}$

17) $\frac{7}{14}$ e $\frac{1}{7}$

18) $\frac{6}{12}$ e $\frac{4}{24}$

19) $\frac{9}{10}$ e $\frac{18}{20}$

20) $\frac{9}{18}$ e $\frac{3}{6}$

Observação:

Atividade 04

Título: Escalas

Objetivo: Conceituar escala

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta e se achar necessário podem fazer uso de calculadora.

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia com atenção o texto apresentado a seguir
- Em seguida responda o que lhe é solicitado em cada situação

Um pouco sobre Escala: mapa do Brasil

Um mapa, como, por exemplo, o do Brasil, é uma representação do país, visto de cima, em tamanho reduzido e que preserva as relações de tamanho. Ou seja, as distâncias nos mapas são diretamente proporcionais às distâncias correspondentes na realidade. Qualquer mapa, planta ou maquete tem uma escala. A escala do mapa indica a razão ou o coeficiente de proporcionalidade entre as distâncias representadas e as distâncias reais. No mapa abaixo, a escala é de 1 cm para 485 km, isto é, cada 1 cm no mapa corresponde a 485 km (ou 48 500 000 cm) na realidade. Indica-se essa escala assim: 1 ÷ 48 500 000 ou $\frac{1}{48\,500\,000} = 1\,cm \div 485\,km$ (Lê-se: um centímetro para quatrocentos e oitenta e cinco quilômetros.)

Nesse mapa, por exemplo, a distância em linha reta de Porto Alegre a Cuiabá é de 3,5 cm. Como calcular a distância real entre essas duas capitais?

Situação 01: Em um mapa cada cm linear corresponde a 10 m na realidade.

a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância na realidade?

b) Se a distância entre duas cidades A e B no mapa é 3 cm qual é a distância real entre as cidades?

c) Como você fez para descobrir a distância real?

Situação 02: Em um mapa cada 2 cm linear corresponde a 10 km na realidade.

a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância na realidade?

b) Se a distância entre duas cidades A e B no mapa é 5 cm qual é a distância real entre as cidades?

c) Como você fez para descobrir a distância real?

Situação 03: A distância entre duas cidades A e B é de 20.000 m. Sabendo que a cada 2 cm linear no mapa corresponde a 200 m na realidade. Responda:

a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância na realidade?

b) Qual é a distância no mapa entre as cidades A e B?

c) Como você fez para descobrir a distância no mapa?

Situação 04: A distância entre duas cidades A e B é de 90 km. Sabendo que a cada 3 cm linear no mapa corresponde a 10 km na realidade. Responda:

a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância linear na realidade?

b) Qual é a distância linear no mapa entre as cidades A e B?

c) Como você fez para descobrir a distância no mapa?

Situação 05: A distância entre a cidade A e a cidade B é de 400 km. Sabendo que em um mapa essa distância está representada por 20 cm. Responda:

a) Qual é a razão entre a distância linear no mapa e a distância linear na realidade? Simplifique ao máximo.

b) Se a distância entre duas cidades A e B no mapa é 10 cm qual é a distância real entre as cidades?

c) Como você fez para descobrir a distância real?

- Preencha o quadro a seguir com base nas informações das situações apresentadas.

Situações	distância no mapa	distância real	$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			
Situação 5			

Observação:

Atividade 05

Título: Densidade demográfica

Objetivo: Conceituar densidade demográfica.

Material: Folha de atividade, lápis ou caneta, calculadora

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia com atenção o texto apresentado a seguir
- Responda o que lhe é solicitado em seguida preencha a tabela de situações

Densidade demográfica

Para saber quantidade de pessoas em certos eventos, são usados aparelhos próprios para este fim, como catracas, que registram a entrada das pessoas em estádios de futebol, em shows, etc. No entanto, no caso de missas em praça pública, comícios políticos, manifestações populares, feiras, etc., não é possível fazer a contagem com esses aparelhos. Como calcular então o número de presentes nesses eventos? Conhecendo a área em que o evento foi realizado e supondo o número de pessoas em cada metro quadrado, podemos estimar o número de pessoas presente. Chamamos de **densidade demográfica a razão entre a população de uma determinada região e a área dessa mesma região**. Esse dado permite calcular a distribuição da população residente em um determinado território, permitindo a verificação das áreas mais e menos povoadas.

Fonte: Adaptado, coleção ideias e relações, 2002.

Situação 01: Um comício político foi realizado em uma praça que tem 4 500 m². Supondo que havia, em média, 8 pessoas por metro quadrado.

b) Qual o número aproximado de pessoas nesse comício?

b) Qual a razão entre o número de pessoas nesse comício e a área que foi realizado?

Situação 02: Na Feira de Exposição Agropecuária de Novo Repartimento (Fexpoanr) de 2022, na cidade de Novo Repartimento, realizada no Parque de Exposição do município ocupou aproximadamente 4000 m². Sabendo que havia, em média, 10 brincantes por metro quadrado.

c) Qual o número aproximado de brincantes nessa feira?

d) Qual a razão entre o número de brincantes e a área dessa Avenida?

Situação 03: Um ninho de formiga é habitado por cerca de 300 mil formigas em uma área de 100 m².

c) Qual a razão entre a população de formigas e a área ocupada?

d) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

Situação 04: Na escola “Prof.ª Raimunda Tavares” o espaço da quadra de esportes possui 500 m², para cantar os Hinos em homenagem a semana da pátria reuniu em uma tarde 250 alunos nessa quadra.

c) Qual a razão entre o número de alunos e a área da quadra da escola “Prof.ª Raimunda Tavares”?

d) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

Situação 05: Em uma missa realizada em praça pública compareceram cerca de 5 mil pessoas e ocuparam uma área de aproximadamente 900 m².

c) Qual a razão entre o número de pessoas e a área dessa praça?

d) Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

Situação 06: Em uma cidade há aproximadamente 90 mil habitantes e sua área territorial são de 30 mil km².

b) Qual a razão entre o número de habitantes e a área da cidade?

Simplifique ao máximo a razão anterior, o que significa para você o resultado encontrado?

- Preencha o quadro de situações

Situações	Número de habitantes	Área territorial	$\frac{\text{nº de habitantes(população)}}{\text{área}}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			
Situação 5			
Situação 6			

Observação:

Atividade 06

Título: Velocidade Média de um corpo em movimento

Objetivo: Conceituar Velocidade Média

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Leia com atenção a situação apresentada
- Responda o que lhe é solicitado

Situação 01: Um automóvel percorreu 320 km em 4 horas de viagem. Responda:

c) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

d) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 02: Ao realizar uma viajem em um carro por 140 quilômetros, demorarei 2 horas para chegar em meu destino. Responda:

c) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

d) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 03: Uma pessoa com hábito de praticar trilha percorre 13 km a pé em 2 h. Responda:

c) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

d) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 04: Uma van percorre aproximadamente 72 km para ir de Novo Repartimento a Tucuruí. Sabendo que gastou um intervalo de 1,5 horas entre o percurso. Responda:

c) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?

d) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 5: Roberto saiu de casa dirigindo seu automóvel e fez uma viagem de 210 km por uma estrada praticamente retilínea. Chegando ao seu destino, reclamou de um trecho da estrada em que teve de viajar com velocidade de 70 km/h, que ele considerou baixa, por causa dos buracos. Responda:

d) Qual o tempo que Roberto gastou para chegar ao seu destino?
e) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?
f) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 06: Um ônibus percorre 72 km para ir de Novo Repartimento a Tucuruí. Sabendo que andou a uma velocidade de 60km/h entre o percurso. Responda:

d) Qual o tempo o ônibus levou para fazer o percurso?
e) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?
f) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido em horas? O que esse resultado significa?

Situação 07: Josafá saiu de sua casa, em Novo Repartimento dirigindo seu automóvel para ir até Marabá. Antes de chegar ao seu destino o pneu do carro furou, tendo que parar para trocar o pneu, ao olhar no painel do automóvel sua velocidade média marcava 70km/h e já havia percorrido 2horas de tempo na estrada. Responda:

d) Quantos quilômetros de distância Josafá percorreu até parar para trocar o pneu?
e) Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso?
f) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

Situação 8: Um carro fez um percurso a uma velocidade média de 75km/h em um tempo 1,2h. Responda:

d) Quantos quilômetros de distância o carro percorreu?
e) Qual a razão entre a distância percorrida e a velocidade média do carro?
f) Divida a razão anterior, qual resultado foi obtido? O que esse resultado significa?

- Preencha o quadro de situações

Situações	Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média	Razão entre a distância percorrida e o tempo gasto	Resultado da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto
Situação 1					
Situação 2					
Situação 3					
Situação 4					
Situação 5					
Situação 6					
Situação 7					
Situação 8					

Observação:

Atividade 07

Título: Porcentagem

Objetivo: Conceituar porcentagem

Material: Folha de atividade, lápis, caneta e calculadora.

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Responda as questões abaixo:

36) Quanto é $\frac{1}{2} \times \frac{70}{1}$ é?

37) Quanto é $\frac{1}{3} \times \frac{150}{1}$ é?

38) Quanto é $\frac{2}{4} \times \frac{1000}{1}$ é?

39) Quanto é $\frac{2}{4} \times \frac{1240}{2}$ é?

40) Quanto é $\frac{3}{2} \times \frac{560}{2}$ é?

41) Quanto é $\frac{2}{5} \times \frac{2145}{1}$ é?

$\frac{1}{2} \times \frac{70}{1}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$ de 70.

42) Quanto é $\frac{1}{4}$ de 1200?

43) Quanto é $\frac{2}{5}$ de 1600?

44) Quanto é $\frac{2}{3}$ de 2100?

45) Quanto é $\frac{1}{100}$ de 1000?

$\frac{1}{100}$ de 1000 é equivalente a “um por cento de 1000”

46) Quanto é dois por cento de 100?

47) Quanto é quatro por cento de 200?

48) Quanto é vinte por cento de 300?

49) Quanto é cinco por cento de 500?

50) Quanto é dez por cento de 250?

51) Quanto é por trinta por cento de 400?

A expressão “um por cento” é representada por 1%

52) Quanto é 5% de 400?

53) Quanto é 10% de 200?

54) Quanto é 15% de 500?

55) Quanto é 25% de 300?

56) Quanto é 20% de 100?

57) Quanto é 4% de 800?

58) Como se calcula 2% de 50?

59) Como se calcula 5% de 700?

60) Como se calcula 8% de 400?

61) Como se calcula 10% de 20?

62) Como se calcula 15% de 200?

63) Como se calcula 20% de 80?

64) Como se calcula 5% de uma quantidade C?

65) Como se calcula 10% de uma quantidade C?

66) Como se calcula 20% de uma quantidade C?

67) Como se calcula i% de 100?

68) Como se calcula i% de 200?

69) Como se calcula i% de 700?

70) Como se calcula i% de uma quantidade C?

Observação:

Atividade 08

Título: Razão e proporção

Objetivo: Conceituar proporção

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de Início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento

- Leia com atenção o texto a seguir referente a receita de um bolo de chocolate

Receita de Bolo de Chocolate

Bolo de Chocolate

Ingredientes
08 ovos
12 xícara (chá) de óleo
01 xícara (chá) de água
01 colher (sobremesa) de essência de baunilha
02 xícaras (chá) de farinha de trigo
12 xícara (chá) de chocolate ou cacau em pó
03 xícaras (chá) de açúcar
01 xícara (chá) de amido de milho
02 colheres (sobremesa) de fermento em pó

Rendimento: 20 porções

- Leia com atenção cada enunciado:
  - ✓ Sérgio vai comemorar seu aniversário e convidou 40 pessoas.
  - ✓ No aniversário de Camila foram convidadas 80 pessoas.
- Agora, preencha o quadro a seguir estabelecendo a quantidade de ingredientes para preparar cada bolo em questão.

Ingredientes	Bolo da receita dada	Bolo de Sérgio	Bolo de Camila
Amido de milho			
Açúcar			
Farinha de trigo			
Fermento em pó			

Responda as questões a seguir:

a) Qual a quantidade de amido de milho é necessária para fazer um bolo para 40 pessoas? E para 80 pessoas?

b) Qual a quantidade de açúcar é necessária para fazer um bolo para 40 pessoas? E para 80 pessoas?

c) Qual a quantidade de farinha de trigo é necessária para fazer o bolo de Sérgio, sabendo que ele convidou 40 pessoas? E o bolo de Camila?

d) Se Sérgio convidasse 60 pessoas para sua festa de aniversário, como você calcularia a quantidade de ingredientes para que fosse preparado o bolo para 60 pessoas?

e) Ao "dobrarmos" ou "triplicarmos" uma receita, o que acontecerá com a quantidade de ingredientes "dobram" ou "triplicam"?

- Preencha o quadro a seguir:

Razões (simplificada ao máximo)	Receitas			As razões encontradas são iguais?	
	Receita dada	Sérgio	Camila	SIM	NÃO
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Açúcar}}$					
$\frac{\text{Açúcar}}{\text{Farinha de trigo}}$					
$\frac{\text{Amido de milho}}{\text{Fermento em pó}}$					

Observação:

Atividade 09

Título: Grandezas Diretamente Proporcionais, Grandezas Inversamente Proporcionais

Objetivo: Conceituar grandezas diretamente Proporcionais e Grandezas Inversamente Proporcionais

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de Início: Hora de Término:

Procedimento:

- Leia cada uma das situações apresentadas.
- Preencha os espaços em branco dos quadros de cada situação.
- Responda as questões propostas.

Situação 01: Adaptada da Coleção praticando matemática 9 (2015) - No laboratório do colégio, alguns alunos mediram, usando uma balança, a massa de blocos retangulares de chumbo cujo volume era conhecido. Com os valores do volume (*V*) e da massa (*m*) de cada bloco, montaram a tabela abaixo.

V (cm³)	1	2	3		5	6	7	8
m (g)	11	22	33	44	55			88

h) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

i) Quando dobra o valor da primeira linha dobra o da segunda linha também dobra?

j) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado?

k) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado?

l) Quais grandezas estão relacionadas?

m) Divida cada medida do volume com suas respectivas massas, o que acontece com o quociente obtido?

n) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Situação 02: Um atleta dá 5 voltas numa pista em 20 minutos, ao dá 10 voltas ele leva 40 minutos, mantendo a velocidade constante. Relacione o quadro abaixo ao número de voltas com o tempo percorrido em minutos?

Nº de voltas	Tempo (min.)
5	20
10	40
	60
20	
25	

h) Quando os valores da primeira coluna aumentam os da segunda coluna também aumentam?

i) Quando dobra o valor da primeira coluna o da segunda coluna também dobra?

j) Quando é triplicado o valor da primeira coluna o da segunda coluna também é triplicado?

k) Quando é quadruplicado o valor da primeira coluna o da segunda coluna também é quadruplicado?

l) Quais grandezas estão relacionadas?

m) Divida cada quantidade do número de voltas com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o quociente obtido?

n) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Situação 03: Uma torneira precisa de 60 minutos para encher um reservatório. Com mais outra torneira igual, enchem em 30 minutos. Estando o reservatório vazio e seguindo a mesma raciocínio preencha o quadro abaixo com as quantidades de torneira ou tempo necessário para encher o reservatório.

Nº de torneiras	1	2			5
Tempo (min.)	60	30	20	15	

h) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

i) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?

j) Quando é triplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é triplicado ou reduz a terça parte?

k) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?

l) Quais grandezas estão relacionadas?

m) Multiplique cada quantidade de números de torneira com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?

n) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Situação 04: Um ciclista corre a uma velocidade constante de 5 km/h. e passa a linha de chegada em 16 minutos, se esse atleta aumentar a velocidade para 10 km/h. irá alcança a linha de chegada em 8 minutos. Seguindo o mesmo raciocínio, preencha o quadro abaixo com o tempo em minutos ou a velocidade constante em km/h. a ser desenvolvida pelo ciclista para que o mesmo percurso seja realizado nas condições dadas.

Velocidade (km/h)	5	10	20		80
Tempo (minutos)	16	8		2	

g) Quando os valores da primeira linha aumentam os da segunda linha também aumentam?

h) Quando dobra o valor da primeira linha o da segunda linha também dobra ou reduz a metade?

i) Quando é quadruplicado o valor da primeira linha o da segunda linha também é quadruplicado ou reduz a quarta parte?

j) Quais grandezas estão relacionadas?

k) Multiplique cada medida de velocidade com suas respectivas medidas de tempo, o que acontece com o produto obtido?

l) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Observação:

Atividade 10

Título: Propriedade fundamental das proporções

Objetivo: Descobrir uma propriedade fundamental das proporções

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta.

Hora de Início: Hora de Término:

Procedimento:

- Leia a seguinte informação:

Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ chamamos os termos ***c*** e ***b*** de meios ***a*** *e* ***d*** de extremos.

- Para cada razão a seguir identifique os extremos e o meios

11) Em $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{2}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são: ____ ; ____

12) Em $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

13) Em $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

14) Em $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{5}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

15) Em $\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{3}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

16) Em $\frac{6}{24}$ e $\frac{1}{4}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são: ____ ; ____

17) Em $\frac{1}{3}$ e $\frac{6}{18}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

18) Em $\frac{4}{12}$ e $\frac{2}{6}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são: ____ ; ____

19) Em $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

20) Em$\frac{5}{20}$ e $\frac{1}{2}$, os meios são ____ ; ____ e os extremos são:____ ; ____

- Preencha o quadro a seguir de acordo com a informações e responda as perguntas:

●

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	Produto dos meios $b \cdot c$	Produto dos extremos $a \cdot d$	Os produtos dos meios e extremos são iguais?		A razões formam uma proporção?	
					SIM	NÃO	SIM	NÃO
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 3$								
$a = 1; b = 3; c = 1; d = 3$								
$a = 2; b = 5; c = 4; d = 10$								
$a = 2; b = 6; c = 3; d = 9$								
$a = 7; b = 10; c = 5; d = 6$								
$a = 2; b = 9; c = 6; d = 27$								
$a = 3; b = 5; c = 6; d = 10$								
$a = 4; b = 7; c = 3; d = 8$								
$a = 8; b = 16; c = 1; d = 2$								
$a = 1; b = 5; c = 4; d = 20$								

Observação:

Conclusão:

Atividade 11

Título: Propriedade aditiva da proporção I

Objetivo: Descobrir uma propriedade da soma dos termos de uma proporção

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Preencha com atenção o quadro abaixo e responda as perguntas cuidadosamente colocando ao final suas observações e conclusão a respeito da atividade.

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?		$\frac{a+b}{a}$	$\frac{c+d}{c}$	A razões $\frac{a+b}{a}$ e $\frac{c+d}{c}$ formam uma proporção?	
			SIM	NÃO			SIM	NÃO
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 3$								
$a = 1; b = 3; c = 1; d = 3$								
$a = 2; b = 5; c = 4; d = 10$								
$a = 2; b = 6; c = 3; d = 9$								
$a = 7; b = 10; c = 5; d = 6$								
$a = 2; b = 9; c = 6; d = 27$								
$a = 3; b = 5; c = 6; d = 10$								
$a = 4; b = 7; c = 3; d = 8$								
$a = 8; b = 16; c = 1; d = 2$								
$a = 1; b = 5; c = 4; d = 20$								

Observação:

Conclusão:

Atividade 12

Título: Propriedade aditiva da proporção II

Objetivo: Descobrir a propriedade da soma dos termos de uma proporção

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, calculadora se achar necessário

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Preencha o quadro abaixo

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?		$\frac{a+b}{b}$	$\frac{c+d}{d}$	A razões $\frac{a+b}{b}$ e $\frac{c+d}{d}$ formam uma proporção?	
			SIM	NÃO			SIM	NÃO
$a = 2; b = 3; c = 1; d = 6$								
$a = 1; b = 4; c = 2; d = 8$								
$a = 2; b = 5; c = 4; d = 10$								
$a = 2; b = 6; c = 3; d = 9$								
$a = 8; b = 10; c = 5; d = 6$								
$a = 1; b = 7; c = 6; d = 42$								
$a = 3; b = 5; c = 6; d = 10$								
$a = 5; b = 7; c = 3; d = 2$								
$a = 8; b = 12; c = 2; d = 3$								
$a = 1; b = 5; c = 2; d = 3$								

Observação:

Conclusão:

Atividade 13

Título: Propriedade aditiva de uma proporção III

Objetivo: Descobrir uma propriedade da soma dos antecedentes e consequentes de uma proporção

Material: Folha de atividade, lápis ou caneta

Hora de início da atividade: Hora de término da atividade:

Procedimento:

- Preencha o quadro abaixo

Valores	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?		$\frac{a+c}{b+d}$	As razões $\frac{a+c}{b+d}$ e $\frac{a}{b}$ formam uma proporção?		As razões $\frac{a+c}{b+d}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção?	
			SIM	NÃO		SIM	NÃO	SIM	NÃO
$a = 9; b = 2; c = 27; d = 6$									
$a = 7; b = 3; c =; 35; d = 15$									
$a = 4; b = 3; c = 6; d = 8$									
$a = 38; b = 2; c = 19; d = 1$									
$a = 7; b = 8; c = 5; d = 6$									
$a = 1; b = 7; c = 6; d = 7$									
$a = 3; b = 9; c = 8; d = 24$									
$a = 4; b = 5; c = 16; d = 20$									
$a = 9; b = 12; c = 2; d = 3$									
$a = 1; b = 4; c = 3; d = 12$									

Observação:

Conclusão:

APÊNDICE F: ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

Lista de questões 1.

Título: Lista de questões sobre Razão

Objetivo: Exercitar os conhecimentos acerca de grandezas proporcionais ou não proporcionais, representação de razões e razões especiais (escala, velocidade média densidade demográfica, etc.)

Material: Roteiro de atividade de fixação, lápis ou caneta e calculadora.

Procedimentos:

- Resolva as seguintes questões

8) (Pataro, 2018) **-** Verifique se em cada item as grandezas em destaque são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

e) A **massa** de carne a ser comprada em um açougue e o **preço** a ser pago.

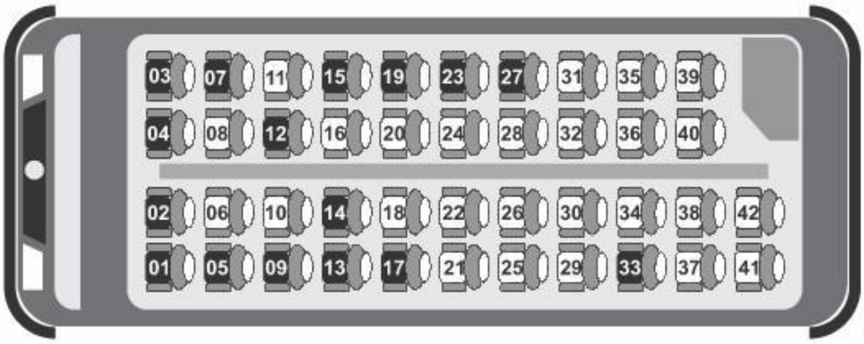
f) A **velocidade média** obtida ao se deslocar de uma cidade a outra e a **distância** entre essas cidades.

g) A **vazão** da mangueira de um caminhão-pipa e o **tempo** necessário para esvaziar o reservatório.

h) A **idade** e a **altura** de uma pessoa.

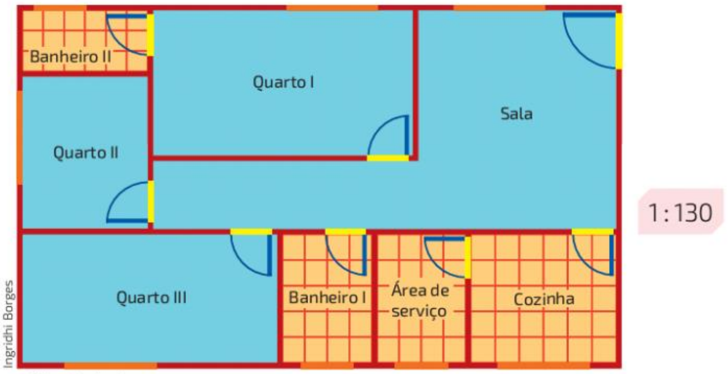
9) (ENEM -2020) Uma empresa de ônibus utiliza um sistema de vendas de passagens que fornece a imagem de todos os assentos do ônibus, diferenciando os assentos já vendidos, por uma cor mais escura, dos assentos ainda disponíveis. A empresa monitora, permanentemente, o número de assentos já vendidos e compara-o com o número total de assentos do ônibus para avaliar a necessidade de alocação de veículos extras.

Na imagem tem-se a informação dos assentos já vendidos e dos ainda disponíveis em um determinado instante.



A razão entre o número de assentos já vendidos e o total de assentos desse ônibus, no instante considerado na imagem, é:

10) (Pataro, 2018) - No encarte de propaganda do lançamento de um condomínio residencial, foi apresentada a planta baixa dos apartamentos.



Planta baixa.

De acordo com as informações, resolva as questões.

c) Nessa planta baixa, 5 cm correspondem a quantos metros do apartamento?

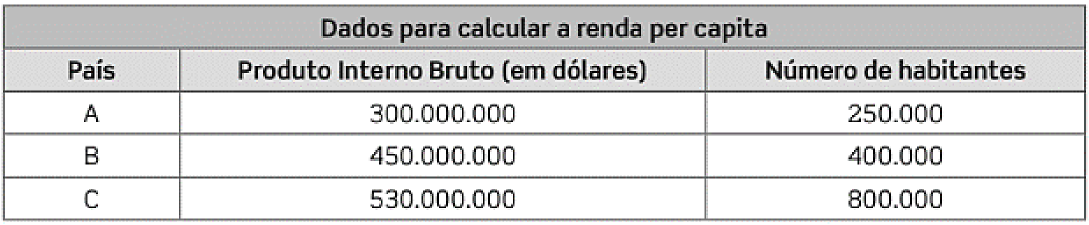
d) Para representar 5,2 m do apartamento, quantos centímetros da planta baixa são utilizados?

11) (Andrini, 2015) - No estado de São Paulo, por exemplo, temos uma população de aproximadamente 40 milhões de pessoas, para uma área também aproximada de 250 000 km². (IBGE, 2010). Qual a densidade Demográfica do estado de são Paulo?

12) (Pataro, 2018) - Em termos de velocidade, o guepardo, um felino típico das savanas africanas, é considerado um dos animais terrestres mais velozes do mundo. Qual é a medida da velocidade média, em metros por segundo(m/s), obtida por um guepardo que percorreu 266 m em 10 s?

13) (Bianchini 2018) - O **Produto Interno Bruto** (PIB) é o total de bens e serviços produzidos por um país durantes um ano. A razão entre o PIB e o número de habitantes de um país é chamada **renda *per capita***. A renda *per capita* de um país equivale à quantia em dólar, que cada habitante receberá caso o PIB fosse dividido igualmente por toda a população.

Considere os dados da tabela a seguir e calcule a renda *per capita* de cada um desses países.

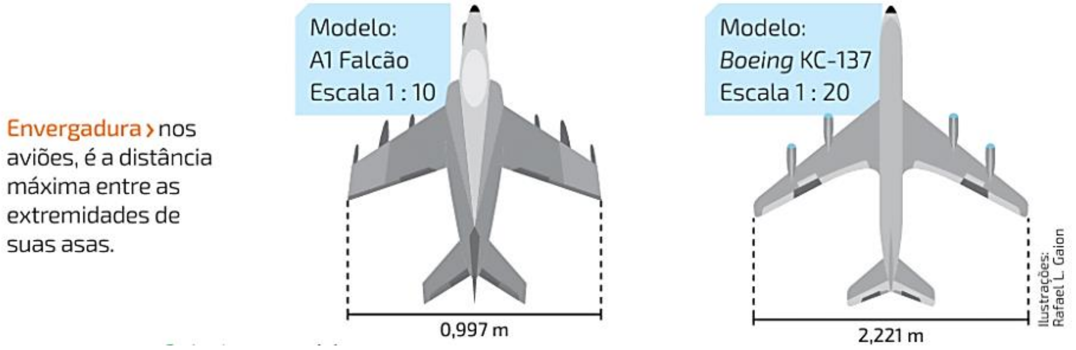


Dados para calcular a renda per capita		
País	**Produto Interno Bruto (em dólares)**	**Número de habitantes**
A	300.000.000	250.000
B	450.000.000	400.000
C	530.000.000	800.000

Agora responda:

b) Comparando as rendas *per capita* calculada acima, qual dos países é mais rico?

14) (Pataro, 2018) - Os aeromodelos são miniaturas de aviões e helicópteros construídos com base em uma escala de verdadeiras dimensões da aeronave.



Com base nas escalas indicadas e nas medidas das **envergaduras** dos aeromodelos a seguir, determine a medida em metros, das envergaduras dos aviões em tamanho real.

Lista de questões 2.

Título: Lista de questões sobre Proporção

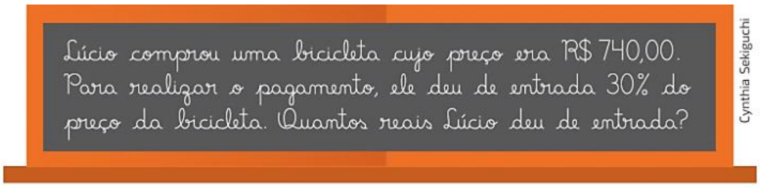
Objetivo: Exercitar os conhecimentos acerca de grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, proporção e as propriedades da proporção.

Material: Roteiro de atividade de fixação, lápis ou caneta e calculadora.

Procedimentos:

- Resolva as seguintes questões

10) (Pataro, 2018) - Leia o problema e em seguida responda-o:



Lúcio comprou uma bicicleta cujo preço era R$ 740,00. Para realizar o pagamento, ele deu de entrada 30% do preço da bicicleta. Quantos reais Lúcio deu de entrada?

Cynthia Sekiguchi

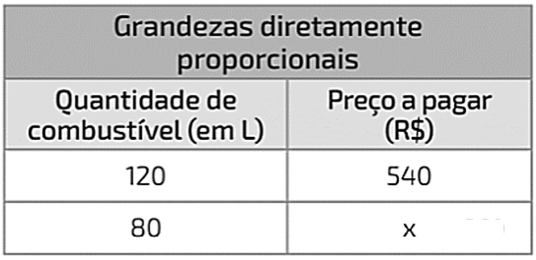
11) (Pataro, 2018) - Na bula de um determinado medicamento pediátrico, recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do “peso” da criança. Quantas gotas desse medicamento Mariana deverá dar à sua filha, cujo medida de massa é igual a 20 kg?

12) (Andrini, 2015) - No baile de formatura da escola, a razão entre o número de alunos formandos e demais pessoas presentes é de 2 para 3, nessa ordem. Do total de pessoas presentes, os formandos representam quantos por cento?

13) (Andrini, 2015) - O jornal Folha de S.Paulo publicou, em 19 de abril de 2013, a seguinte informação: “4 em cada 5 semáforos de São Paulo têm defeito” Sabendo-se que o número de semáforos com defeito é 4 800, então o número de semáforos que não precisam de reparos é de quantos?

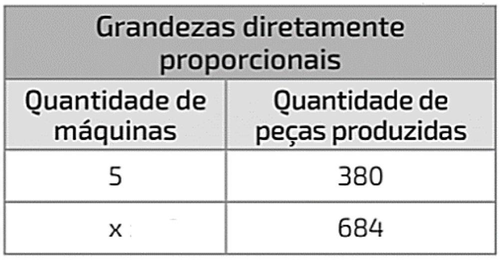
14) (Pataro, 2018) - Em cada quadro, realize os cálculos necessários e determine o valor de ***x***.

a)



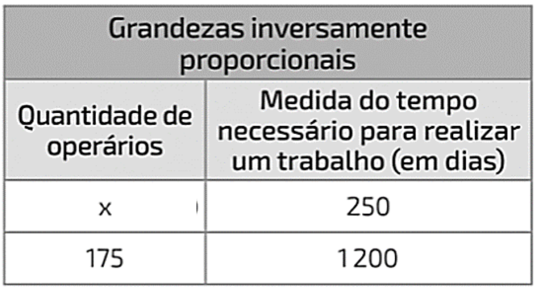
Grandezas diretamente proporcionais	
Quantidade de combustível (em L)	Preço a pagar (R$)
120	540
80	x

c)



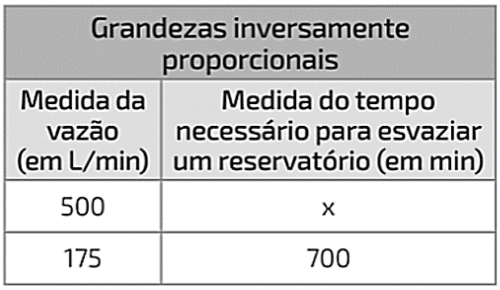
Grandezas diretamente proporcionais	
Quantidade de máquinas	Quantidade de peças produzidas
5	380
x	684

b)



Grandezas inversamente proporcionais	
Quantidade de operários	Medida do tempo necessário para realizar um trabalho (em dias)
x	250
175	1 200

d)



Grandezas inversamente proporcionais	
Medida da vazão (em L/min)	Medida do tempo necessário para esvaziar um reservatório (em min)
500	x
175	700

15) (Bianchini 2018) - O relógio de Márcio está com defeito. Ele atrasa 4 minutos a cada 2 dias. Nos últimos 14 dias. Márcio esqueceu de acertar o relógio e, por esse motivo, chegou atrasado ao encontro com a namorada.

f) Construa uma tabela que indique o tempo de atraso, em minuto, correspondente a cada 2 dias que Márcio esqueceu de acertar o relógio.

g) Quantos minutos o relógio atrasa em 10 dias?

h) Quantos minutos Márcio chegou atrasado ao encontro?

i) As grandezas apresentadas (tempo de atraso e número de dias) são diretas ou inversamente proporcionais?

j) Suponho que o defeito continue, quantos minutos o relógio estará atrasado no 22º dia?

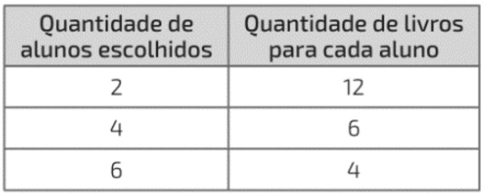
16) Os dados do quadro a seguir referem-se ao número de máquinas (iguais) e ao tempo necessário para a produção de 36 litros de sorvete.

Número de máquinas	1	2	b	6
Tempo (em minuto)	60	a	15	c

b) Determine os valores de *a, b* e *c.*

17) (Pataro, 2018) - Um professor de matemática tem 24 livros para distribuir igualmente entre alguns de seus alunos. De acordo com o quadro a seguir, se ele escolher apenas 2 alunos, cada um deles receberá 12 livros. Se ele escolher 4 alunos, cada um receberá 6 livros. Se ele escolher 6 alunos, cada um receberá 4 livros.

Nesse caso, as duas grandezas envolvidas, quantidades de alunos e quantidade de livros, são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?



Quantidade de alunos escolhidos	Quantidade de livros para cada aluno
2	12
4	6
6	4

18) (Pataro, 2018) - Douglas tem 6 calopsitas e paneja ter mais. Para alimentá-la, um pacote de ração é o suficiente para 12 dias. Se Douglas tivesse oito calopsitas, um pacote de ração poderia alimentá-las por quantos dias?

Débora Kamogawa

Lista de questões 3

Título: Lista de questões sobre Proporção

Objetivo: Exercitar os conhecimentos acerca de distribuição em partes proporcionais e as propriedades da proporção.

Material: Roteiro de atividade de fixação, lápis ou caneta e calculadora.

Procedimentos:

- Resolva as seguintes questões

5) (Pataro, 2018) - Em certo ano o dono de uma loja dividiu uma bonificação salarial de R$ 12 000 ,00 entre seus três vendedores de maneira proporcional a quantidade de anos de trabalho nessa loja como indicado no quadro a seguir. Quantos reais recebeu cada funcionário?

Vendedor	Mel	Raul	Zeca
Quantidade de anos de trabalho	1	2	3

6) (Pataro, 2018) - No ano seguinte o dono dessa loja decidiu dividir a bonificação salarial de R$ 18 000,00 entre seus três vendedores de maneira inversamente proporcional à quantidade de faltas de cada um deles naquele ano. As faltas estão indicadas no quadro a seguir. Quanto recebeu, cada funcionário?

Vendedor	Mel	Raul	Zeca
Quantidade de faltas	3	4	6

7) (Pataro, 2018) - O gerente de um setor de uma empresa vai presentear os seus três funcionários com 11 diárias em um hotel-fazenda da região, baseando a distribuição em seus salários. Para que a divisão seja justa, o gerente determinou que o funcionário com o menor salário deverá receber a quantidade maior de diárias e aquele com o maior salário deverá receber a quantidade menor de diárias.

Funcionário	Salário
A	1000
B	2000
C	3000

Quantas diárias no hotel-fazenda cada funcionário ganhará?

8) (Pataro, 2018) - Três amigos fizeram um investimento juntos, no qual receberam no final R$ 3 500,00. Sabendo que Júlia contribuiu com R$ 400,00, Débora com R$ 600,00 e Igor com R$ 1 000,00, calcule a quantia recebida no final, sabendo que a divisão deve ser diretamente proporcional ao valor do investimento.

APÊNDICE G: FICHA DE FREQUÊNCIA

Estudante	Outubro/2023				Novembro/2023												Frequência (%)
	24	25	26	27	01	02	03	06	08	09	16	17	22	23	27	29	
A1	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A2	P	F	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	F	P	P	P	68,75%
A3	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A4	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A5	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A6	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A7	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	93,75%
A8	F	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	81,25%
A9	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A10	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A11	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A12	P	P	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	81,25%
A13	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A14	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	93,75%
A15	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A16	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A17	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A18	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A19	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A20	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A21	F	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	F	P	P	P	81,25%
A22	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A23	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	93,75%
A24	P	P	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	81,25%
A25	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	93,75%
A26	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A27	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A28	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A29	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%
A30	P	F	P	P	P	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	81,25%
A31	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	87,5%
A32	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	93,75%

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem