UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

Resolução de equações polinomiais de grau até quatro

Elisangela Danielli de Lima

Sandro Marcos Guzzo

Cascavel - Pr
Novembro de 2024

1 Introdução

Na busca por resolver problemas de ordem prática ocorreram os primeiros avanços da matemática. Desde muito cedo os problemas exigiam habilidades de se encontrar valores desconhecidos, daí a necessidade de se resolver equações. De acordo com Garbi "Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações."(Garbi, 2009, p.1).

Obviamente que no início as equações não eram escritas da maneira simples e prática de hoje. Para chegarmos ao formato atual houve muita evolução ao longo dos anos, como pode ser visto em Baumgart (1992), que explica como ocorreu a evolução da escrita matemática. A busca pela resolução de equações promoveu avanços na escrita matemática e na própria elaboração de conceitos, pois houve tempos em que os maiores matemáticos estavam em busca de soluções para equações polinomiais.

Na realização desse trabalho estudamos técnicas e procedimentos resolutivos por radicais para equações polinomiais até o grau 4. Dizemos que uma equação polinomial é solúvel por radicais quando sua solução pode ser escrita como uma expressão que inclui apenas somas, subtrações, multiplicações, divisões, potências e raízes envolvendo seus coeficientes numéricos. Assim, nosso trabalho não está interessado em resoluções aproximadas por métodos computacionais.

Uma equação polinomial de grau n, na incógnita x, é uma equação na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{1}$$

sendo $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ coeficientes constantes reais ou complexos, com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Um número α real ou complexo é chamado de raiz, ou de solução, de uma equação polinomial se ao substituir a variável por α, a igualdade permanecer verdadeira, ou seja, quando

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Um resultado conhecido da matemática nos permite dizer que toda equação polinomial de grau n possui no máximo n raízes ou soluções distintas. O Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado por Gauss em 1799, afirma que dada uma equação polinomial na forma (1), existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais ou complexos de forma que

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{2}$$

Nestes termos, os números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as n raízes da equação polinomial, já que

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

é agora o mesmo que

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0,$$

donde segue que os valores de x que tornam a igualdade verdadeira são precisamente $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Ocorre que alguns destes valores podem ser iguais e portanto uma equação polinomial de grau n possui no máximo n raízes distintas.

Dada então uma equação polinomial de grau n, desejamos encontrar algum método ou alguma técnica que nos permita encontrar suas n soluções ou raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mesmo que alguns destes valores venham a ser repetidos. Nas quatro próximas seções faremos esta abordagem para as equações polinomiais de graus um, dois, três e quatro respectivamente.

2 Equação polinomial do primeiro grau

Uma equação polinomial de primeiro grau, ou de grau 1, ou de ordem 1, é uma equação na forma

$$ax + b = 0,$$

em que a e b são os coeficientes (reais ou complexos) e $a \neq 0$.

Procedimentos: Calcular diretamente a única raiz

$$x_1 = -\frac{b}{a}.$$

Justificativa dos Procedimentos: Basta manipular algebricamente a equação e isolar a incógniga x,

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Note ainda que podemos escrever, em analogia com a igualdade (2),

$$ax + b = a(x + \tfrac{b}{a}),$$

donde $x_1 = -\frac{b}{a}$ é a raiz procurada.

3 Equação polinomial do segundo grau

Uma equação polinomial de segundo grau, ou de grau 2, ou de ordem 2, é uma equação na forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que a, b e c são os coeficientes (reais ou complexos) e $a \neq 0$.

Procedimentos: Calcular diretamente as duas raízes

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Justificativa dos Procedimentos: A ideia essencial é buscar um método para isolar a incógnita x no primeiro membro da equação.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Note também que podemos escrever, em analogia com a igualdade (2),

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

donde $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ são as duas raízes procuradas.

4 Equação polinomial do terceiro grau

Uma equação polinomial de terceiro grau, ou de grau 3, ou de ordem 3, é uma equação na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

em que a, b, c e d são os coeficientes (reais ou complexos) e $a \neq 0$.

Note qua nos dois casos anteriores foi mais fácil isolar x no primeiro membro. Mas agora isto não é tão simples, pois temos 4 parcelas no primeiro membro. A ideia aqui será a tentarmos reescrever a equação na forma

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

para obtermos as raízes x_1, x_2 e x_3.

Procedimentos: Dada a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

calcular

$$\begin{aligned}
p &= \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \\
q &= \frac{d}{a} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}
\end{aligned}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e as três raízes procuradas x_1, x_2 e x_3 são

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - \frac{b}{3a}, \\
x_2 &= -\frac{b}{3a} - \frac{y_1 - \sqrt{-4p - 3y_1^2}}{2}, \\
x_3 &= -\frac{b}{3a} - \frac{y_1 + \sqrt{-4p - 3y_1^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Note os valores calculados neste procedimento podem ser números complexos com parte imaginária não nula. Mesmo que não sejam números complexos, pode ser que as raízes quadradas e cúbicas envolvidas não resultem em valores racionais. Desta forma, embora a ideia seja simples, pode não ser simples executar este procedimento manualmente.

Justificativa dos Procedimentos: Dada a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{3}$$

primeiro vamos dividir todos os membros de (3) por $a \neq 0$ e reescrever

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0. \tag{4}$$

No início do século XVI, o matemático italiano Scipione del Ferro, encontrou uma técnica para resolver uma equação de grau 3 sem o termo quadrático. Vamos então elimiar o termo quadrático da equação (4). O método para a eliminação do termo quadrático de uma equação de grau 3 é devido ao matemático, também italiano, Ludovico Ferrari. Fazendo a mudança de incógnitas $x = y - \frac{b}{3a}$, em (4), obtemos

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0.$$

Efetuando as potências vem

$$y^3 - 3y^2\frac{b}{3a} + 3y\frac{b^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}y^2 - 2y\frac{b^2}{3a^2} + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{c}{a}y - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0.$$

e somando os termos semelhantes

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0,$$

que pode ser então escrita na forma

$$y^3 + py + q = 0, \tag{5}$$

com os valores p e q escolhidos. Note que agora esta equação na incógnita y é uma equação de grau 3 sem o termo quadrático. Agora usaremos a técnica devida a Scipione del Ferro para esta equação.

Scipione del Ferro notou que para quaisquer números reais, é válida a expressão

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3),$$

e portanto

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0, \tag{6}$$

que também é uma equação cúbica sem o termo quadrático. Comparando (6) com (5), Scipione del Ferro viu que $(u+v)$ seria uma raiz de (5) desde que

$$\begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Calculando então os valores de u e v, solução deste sistema (não linear) obtemos

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e} \qquad v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

e portanto

$$y_1 = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

é uma raiz da equação (5).

Agora que temos uma raiz da equação (5), vamos dividir o polinômio $y^3 + py + q$ pelo polinômio $(y - y_1)$. Claramente a igualdade

$$y^3 + py + q = (y - y_1)(y^2 + y_1 y + p + y_1^2) + (q + py_1 + y_1^3), \tag{7}$$

é verdadeira e como y_1 é raiz de $y^3 + py + q = 0$ então do Teorema do Resto, o resto da divisão, $(q + py_1 + y_1^3)$ de ve ser igual a zero. De fato,

$$\begin{aligned} y_1^3 = (u+v)^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= (u^3 + v^3) + 3uv(u+v) = -q + (-p)y_1 = -q - py_1, \end{aligned}$$

donde $y_1^3 + py_1 + q = 0$.

Desta forma, a igualdade (7) fica

$$y^3 + py + q = (y - y_1)(y^2 + y_1 y + p + y_1^2),$$

e com isso, y_1 é uma raiz de (5) e as outras duas raízes são obtidas da equação

$$y^2 + y_1 y + p + y_1^2 = 0,$$

e são precisamente

$$y_2 = \frac{-y_1 + \sqrt{-4p - 3y_1^2}}{2}$$

$$y_3 = \frac{-y_1 - \sqrt{-4p - 3y_1^2}}{2}.$$

Voltando para a variável x, como $x = y - \frac{b}{3a}$, então

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - \frac{b}{3a}, \\
x_2 &= y_2 - \frac{b}{3a} = -\frac{b}{3a} + \frac{-y_1 + \sqrt{-4p - 3y_1^2}}{2}, \\
x_3 &= y_3 - \frac{b}{3a} = -\frac{b}{3a} + \frac{-y_1 - \sqrt{-4p - 3y_1^2}}{2}.
\end{aligned}$$

5 Equação polinomial do quarto grau

Uma equação polinomial de quarto grau, ou de grau 4, ou de ordem 4, é uma equação na forma

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

em que a, b, c, d e e são os coeficientes (reais ou complexos) e $a \neq 0$.

Procedimentos: Dada a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

calcular

$$\begin{aligned}
p &= \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2} \\
q &= \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3} \\
r &= \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}, \\
m &= -4r - \frac{p^2}{3} \\
n &= -\frac{2p^3}{27} + \frac{8pr}{3} - q^2 \\
\alpha &= \sqrt[3]{\frac{-n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}
\end{aligned}$$

e as quatro raízes procuradas x_1, x_2, x_3 e x_4 são

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\alpha - 2p - \frac{2q}{\alpha}}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\alpha - 2p - \frac{2q}{\alpha}}\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\alpha - 2p + \frac{2q}{\alpha}}\right),$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\alpha - 2p + \frac{2q}{\alpha}}\right).$$

Note os valores calculados neste procedimento podem ser números complexos com parte imaginária não nula. Como comentado no caso da equação de terceiro grau, pode não ser tarefa simples a execução destes cálculos manualmente.

Justificativa dos Procedimentos: Dada a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{8}$$

primeiro vamos dividir todos os membros de (3) por $a \neq 0$ e reescrever

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0. \tag{9}$$

Vamos agora elimiar o termo cúbico da equação (9), usando a técnica de redução de Ferrari. Fazendo a mudança de incógnitas $x = y - \frac{b}{4a}$, em (9), obtemos

$$\left(y - \frac{b}{4a}\right)^4 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right)^3 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right)^2 + \frac{d}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right) + \frac{e}{a} = 0.$$

Efetuando as potências vem

$$\begin{aligned} y^4 - \frac{y^3b}{a} + \frac{3y^2b^2}{8a^2} - \frac{yb^3}{16a^3} + \frac{b^4}{256a^4} + \frac{by^3}{a} + \frac{3b^3y}{16a^3} - \frac{3b^2y^2}{4a^2} - \frac{b^4}{64a^4} \\ + \frac{cy^2}{a} - \frac{bcy}{2a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{dy}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a} = 0. \end{aligned}$$

e somando os termos semelhantes

$$y^4 + \left(\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}\right)y^2 + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}\right)y + \left(\frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}\right) = 0,$$

que pode ser então escrita na forma

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{10}$$

com os valores p, q e r escolhidos adequadamente. Note que agora esta equação na incógnita y é uma equação de grau 4 sem o termo cúbico.

A ideia agora é reescrever a equação (10) na forma

$$y^4 + py^2 + r = -qy, \tag{11}$$

e acrescentar termos em ambos os membros para que ambos os membros se tornem quadrados perfeitos.

Note que somando em ambos os membros da equação (11) os termos αy^2 e $\frac{q^2}{4\alpha}$ temos

$$y^4 + (p+\alpha)y^2 + \left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = \alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha}, \tag{12}$$

e o membro da direita já se torna um quadrado perfeito qualquer que seja o valor de α (real ou complexo). Mas queremos também que o membro da esquerda da igualdade seja também um quadrado perfeito. Para isso, notemos que uma equação $z^2 + mz + n = 0$ é um quadrado perfeito se e somente se $\Delta = m^2 - 4n = 0$, e portanto queremos obter α de modo que

$$(p+\alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0,$$

ou equivalentemente
$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0. \tag{13}$$

Esta é agora uma equação de grau 3 em α da qual queremos apenas um valor de α que a torne verdadeira. Usando agora as técnicas usadas para uma equação polinomial de grau 3, tomamos
$$\begin{aligned} m &= -4r - \frac{p^2}{3} \\ n &= -\frac{2p^3}{27} + \frac{8pr}{3} - q^2, \end{aligned}$$
para reescrever a equação (13) na forma
$$\alpha^3 + m\alpha + n = 0,$$
e uma das raízes pode ser calculada como
$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{-n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}.$$

Este valor de α nos permite reescrever a equação (12) na forma
$$\left(y^2 + \frac{p+\alpha}{2}\right)^2 = y^4 + (p+\alpha)y^2 + \left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = \alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha} = \left(\sqrt{\alpha}y - \frac{q}{2\alpha}\right)^2,$$
e extraindo raiz quadrada em ambos os membros obtemos
$$y^2 + \frac{p+\alpha}{2} = \pm\left(\sqrt{\alpha}y - \frac{q}{2\alpha}\right),$$
que fornecem agora duas equações quadráticas em y. Cada uma das equações quadráticas determina duas soluções em y.

Para a equação
$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \frac{p+\alpha}{2} + \frac{q}{2\alpha} = 0,$$
temos as soluções
$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\alpha - 2p - \frac{2q}{\alpha}}\right) \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\alpha - 2p - \frac{2q}{\alpha}}\right), \end{aligned}$$
e para a equação
$$y^2 + \sqrt{\alpha}y + \frac{p+\alpha}{2} - \frac{q}{2\alpha} = 0,$$
temos as soluções
$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\alpha - 2p + \frac{2q}{\alpha}}\right) \\ y_4 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\alpha - 2p + \frac{2q}{\alpha}}\right), \end{aligned}$$

Voltando agora para a variável x, como $x = y - \frac{b}{4a}$, temos

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{4a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\alpha - 2p - \frac{2q}{\alpha}}\right),$$

$$x_2 = y_2 - \frac{b}{4a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\alpha - 2p - \frac{2q}{\alpha}}\right),$$

$$x_3 = y_3 - \frac{b}{4a} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\alpha - 2p + \frac{2q}{\alpha}}\right),$$

$$x_4 = y_4 - \frac{b}{4a} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\alpha - 2p + \frac{2q}{\alpha}}\right).$$

6 Considerações Finais

Encontramos equações polinomiais em diversas ocasiões e diversas áreas da ciência. Portanto é muito importante que saibamos resolvê-las. Hoje em dia, com a obtenção de métodos numéricos avançados e softwares cada vez mais precisos a resolução das equações é feita, na prática, buscando aproximações através de cálculos computacionais. Porém se faz muito importante para as novas gerações mostrar como é feita a resolução das equações por radicais.

Além disso, a busca por raízes de equações polinomiais resultou em avanços matemáticos para certas épocas. Por exemplo toda a álgebra de números complexos teve início na descoberta da fórmula resolutiva para equações do terceiro grau, onde conhecendo uma raiz real os matemáticos chegavam a resultados que envolviam raízes quadradas de números negativos. Sabendo que a equação tinha pelo menos uma raiz real era impossível ignorar o resultado estranho obtido. Durante mais de um século as maiores mentes matemáticas tentarem explicar esse fenômeno até conseguir formular as regras para se trabalhar com esse número completamente novo, criando assim o conjunto dos números complexos.

E importante novamente citar que essas fórmulas não são muito simples, sendo que algumas vezes é mais difícil resolver uma equação pela fórmula que mostramos do que utilizando outros métodos, como agrupamento ou substituição de variáveis.

7 Referências

Baumgart, John K. *Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula - Álgebra.* Editora Atual. São Paulo, 1992.

Garbi, Gilberto G. *O Romance das Equações Algébricas.* 3^a edição revista e ampliada. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2009.