CONSTRUÇÃO DE DEDEKIND DO SISTEMA DOS NÚMEROS REAIS

JEAN FERNANDES BARROS

RESUMO. Estas notas têm a finalidade de construir o sistema dos números reais a partir do sistema dos números racionais, usando *os cortes de Dedekind*.

1. O Ínfimo e o Supremo

A referência básica para esta seção é o livro [1].
Inicialmente, consideremos a seguinte definição:

Definição 1. Uma relação $<$ sobre S que satisfaz as condições

1. a não está em relação $<$ com a, para cada $a \in S$.
2. Dados $a, b \in S$, se $a < b$, então b não está em relação $<$ com a.
3. $<$ é transitiva.

é dita uma *relação de ordem estrita sobre S*.

É fácil mostrar que a definição de ordem estrita acima é equivalente a definição de ordem estrita abaixo. De fato, basta mostrar que as condições (1) e (2) da definição 1 é equivalente a condição (1) da definição 2, que é *a lei da tricotomia*. Mostremos isso.

Demonstração. Suponhamos que S satisfaz a lei da tricotomia. Se $a \neq b$, então ou $a < b$ ou $b < a$. Então, a não pode ser menor do que a. Além disso, se $a < b$, então b não pode ser menor do que a. Reciprocamente, suponhamos que $a \neq b$ e $a < b$. Então, pelo segundo item, b não é menor do que a. Sendo assim, dados $a, b \in S$, ou $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$. Logo, S satisfaz a lei da tricotomia. $\square$

Definição 2. Seja S um conjunto. Uma *relação de ordem estrita sobre S*, denotemo-na por $<$, é uma relação que satisfaz as seguintes duas propriedades:

1. Dados $x, y \in S$ uma, e somente uma, das seguintes afirmações
$$x < y,\ x = y,\ y < x \qquad \text{(\textit{Lei da Tricotomia})}$$
é verdadeira.
2. Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

Neste caso, dizemos que S é um *conjunto ordenado*.

Observação 1. A relação $\leq$ significa $<$ ou $=$.

Por exemplo, já sabemos que a relação sobre $\mathbb{Q}$ dada por
$$x < y \text{ se, e somente se, } 0 < y - x$$
é uma relação de ordem estrita sobre $\mathbb{Q}$.

Date: 13/11/2024.

Definição 3. Sejam S um conjunto ordenado e $E \subset S$. Dizemos que E é *limitado superiormente (limitado inferiormente)* se, existe $b \in S$ tal que $x \leq b$ ($b \leq x$), para todo $x \in S$. Neste caso, dizemos que b é um *limitante superior (inferior) de* E.

Definição 4. Sejam S um conjunto ordenado, $E \subset S$ limitado superiormente (inferiormente). Dizemos que $s \in S$ é *o supremo (ínfimo) de* E se

(1) s é um limitante superior (inferior) de E;
(2) s é o menor (maior) limitante superior (inferior) de E, isto é, se $x < s$ ($s < x$), existe $y \in E$ tal que $x < y \leq s$ ($s \leq y < x$).

Neste caso, denotamos $s = \sup E$ ($s = \inf E$).

Definição 5. Seja S um conjunto ordenado. Dizemos que S *tem a propriedade do supremo (ínfimo)* se, *todo subconjunto não-vazio de* S *limitado superiormente (inferiormente) tem supremo (ínfimo) em* S.

Teorema 6. *Sejam S um conjunto ordenado que tem a propriedade do supremo, e $\emptyset \neq B \subset S$ limitado inferiormente. Considere L o conjunto de todos limitantes inferiores de B. Então, existe o supremo de L em S, que é o ínfimo de B em S.*

Demonstração. Observemos que $L \neq \emptyset$, já que B é limitado inferiormente. Como L é o conjunto dos limitantes inferiores de B, temos que todo $y \in L$ é tal que $y \leq x$, para todo $x \in B$. Isto implica que todo elemento de B é um limitante superior de L. Consequentemente, L é um subconjunto não-vazio de S limitado superiormente. Pela propriedade do supremo de S, existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha = \sup L$. Afirmamos que $\alpha \in L$. Vejamos, se $\gamma < \alpha$, temos que γ não é um limitante superior de L. Isto implica que $\gamma \notin B$. Segue-se que $\alpha \leq x$, para todo $x \in B$. E então, $\alpha \in L$, isto é, α é um limitante inferior de B.

Agora, nosso interesse é demonstrar que $\alpha = \inf B$. Para tanto, precisamos mostrar que α é o maior dos limitantes inferiores de B, isto é, se $\alpha < \beta$, então $\beta \notin L$. E isto, segue-se do fato de que α é um limitante superior de L. $\square$

2. O Sistema dos Números Reais

A principal referência para esta seção é [5]. Outras referências utilizadas foram [2, 3].

Definição 7. Um subconjunto α de $\mathbb{Q}$ é dito *um corte de Dedekind*, ou simplesmente *corte*, se satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;
(2) se $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ e $q < p$, então $q \in \alpha$;
(3) se $p \in \alpha$, então $p < r$, para algum $r \in \alpha$.

Observação 2. A terceira propriedade da definição de corte, mostra-nos que α não tem um maior elemento.

Observação 3. A segunda propriedade da definição de corte implica que

(1) Se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.
(2) Se $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.

Vejamos um exemplo de um corte.

Exemplo 1. Seja $p \in \mathbb{Q}$. Afirmamos que o conjunto

$$p^\star = \{x \in \mathbb{Q} : x < p\}$$

é um corte, denominado de *um corte racional*. Primeiramente, como $\mathbb{Q}$ não tem um menor elemento nem um maior elemento, temos que existem $r, q \in \mathbb{Q}$ tais que $r < p$ e $p < q$. Sendo assim, $p^\star \neq \emptyset$ e $\mathbb{Q} \neq p^\star$.

Agora, se $r \in p^\star$, $q \in \mathbb{Q}$ e $q < r$, então $q < r < p$. E então, $q \in p^\star$.

Finalmente, se $r \in p^\star$, então, pela densidade de $\mathbb{Q}$, existe $q \in p^\star$ tal que $r < q$.

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os cortes. Definamos sobre $\mathbb{R}$ a seguinte relação

$\alpha < \beta$ se, e somente se, α é *um subconjunto próprio* de β, isto é, $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$.

Mostremos que

Proposição 1. *$<$ é uma relação de ordem estrita sobre $\mathbb{R}$*

Demonstração. É imediato que $<$ é transitiva, isto é,

$$\text{se } \alpha < \beta \text{ e } \beta < \gamma, \text{ então } \alpha < \gamma.$$

Agora, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mostremos que uma, e somente uma, dentre as seguintes relações

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta \quad \text{e} \quad \beta < \alpha$$

ocorre. Para tanto, suponhamos que as duas primeiras não se verificam. Sendo assim, como $\alpha \not\subset \beta$, temos que existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin \beta$. Desta forma, se $q \in \beta$, como $p \notin \beta$, pela observação 3, item (1), concluímos que $q < p$. Pela definição 7, item (2), temos que $q \in \alpha$. Segue-se que $\beta \subset \alpha$. Como $\alpha \neq \beta$, temos que $\beta < \alpha$. □

Teorema 8. *O conjunto ordenado $\mathbb{R}$ tem a propriedade do supremo.*

Demonstração. Seja $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Consideremos $\beta \in \mathbb{R}$ um limitante superior de A.

Definamos $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha$. Isto significa que

$$p \in \gamma \text{ se, e somente se, existe } \alpha \in A \text{ tal que } p \in \alpha.$$

Afirmamos que $\gamma = \sup A$. Inicialmente, precisamos mostrar que γ é um corte. Como $A \neq \emptyset$, temos que existe $\alpha_0 \in A$. Sendo assim, $\alpha_0 \neq \emptyset$, já que α_0 é um corte. Segue-se que $\gamma \neq \emptyset$. Observamos que $\gamma \subset \beta$, desde que $\alpha \subset \beta$, para todo $\alpha \in A$. Desde que $\beta \neq \mathbb{Q}$, tem-se que $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Disto, tem-se que γ satisfaz a primeira propriedade na definição de um corte. Vejamos as outras propriedades.

Seja $p \in \gamma$. Sendo assim, existe $\alpha_1 \in A$ tal que $p \in \alpha_1$. Bem, se $q < p$, pela definição de corte, $q \in \alpha_1$. Consequentemente, $q \in \gamma$, isto é, γ satisfaz a segunda propriedade.

Agora, se $r \in \alpha_1$ é tal que $p < r$, temos que $r \in \gamma$, já que $\alpha_1 \subset \gamma$. Logo, γ é um corte, isto é, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Pela definição de γ, temos que $\alpha \leq \gamma$, para todo $\alpha \in A$, ou seja, γ é um limitante superior de A. Vamos mostrar que γ é o menor limitante superior de A. Para tanto, suponhamos que $\delta < \gamma$. Então, como $\delta \neq \gamma$, existe $s \in \gamma$ tal que $s \notin \delta$. Como $s \in \gamma$, existe $\alpha \in A$ tal que $s \in \alpha$. Pela lei da tricotomia, $\delta < \alpha$, já que $\alpha \not\subset \delta$ e $\alpha \neq \delta$. E então, δ não é um limitante superior de A. Portanto, $\gamma = \sup A$. □

2.1. **Operações sobre $\mathbb{R}$.**

2.1.1. *Adição.* Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Define-se $\alpha + \beta$ por

$$\alpha + \beta = \{r + s : r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}.$$

(1) A adição é *fechada* em $\mathbb{R}$, isto é, $\alpha + \beta$ é um corte. Mostremos isto. Como α e β são subconjuntos não vazios de $\mathbb{Q}$, temos que $\alpha + \beta$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Q}$. Como $\alpha \neq \mathbb{Q}$ e $\beta \neq \mathbb{Q}$, temos que existem $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$ tais que $r_0 \notin \alpha$ e $s_0 \notin \beta$. Então, pela observação 3, item (1), dados $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, temos que $r < r_0$ e $s < s_0$. Então, concluímos que

$$r + s < r_0 + s_0, \text{ para todos } r \in \alpha \text{ e } s \in \beta.$$

Disto, segue-se que $r_0 + s_0 \notin \alpha + \beta$. Logo, $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$, satisfazendo a primeira propriedade da definição de corte. Vejamos as outras duas. Para a segunda, tome $p \in \alpha + \beta$. Sendo assim, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ tais que $p = r + s$. Seja $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < p$. Como $r \in \alpha$ e $q - s < r$, temos que $q - s \in \alpha$. Donde,

$$q = (q - s) + s \in \alpha + \beta,$$

verificando a segunda.

Seja $p = r + s$, onde $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como α é um corte, existe $t \in \alpha$ tal que $r < t$. Sendo assim, $p = r + s < t + s$.

Portanto, $\alpha + \beta$ é um corte.

(2) Dados $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$, vamos demonstrar que

$$(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta),$$

que é a propriedade *associativa da adição.* Vejamos, sejam $r \in \alpha$, $s \in \beta$ e $t \in \delta$, temos, pela associatividade da adição em $\mathbb{Q}$, que

$$(r + s) + t = r + (s + t).$$

Disto, segue-se que $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$.

(3) Seja

$$0^\star = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}.$$

O exemplo 1 mostra-nos que $0^\star$ é um corte.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, demonstremos que

$$\alpha + 0^\star = 0^\star + \alpha = \alpha,$$

isto é, $0^\star$ é *o elemento neutro.* É suficiente demonstrarmos que $\alpha + 0^\star = \alpha$, já que a outra igualdade tem demonstração totalmente análoga. Seja $r \in \alpha$. Dado $s \in 0^\star$, temos que $r + s < r$. Como $r \in \alpha$, temos que $r + s \in \alpha$. Sendo assim, $\alpha + 0^\star \subset \alpha$. Para a inclusão contrária, seja $p \in \alpha$ tal que $r < p$. Desta forma, $r - p \in 0^\star$ e

$$r = p + (r - p) \in \alpha + 0^\star.$$

Logo, $\alpha \subset \alpha + 0^\star$.

Portanto, $\alpha + 0^\star = \alpha$.

(4) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, demonstremos que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0^\star.$$

Para tanto, definimos

$$\beta = \{p \in \mathbb{Q} : \text{existe}\, r > 0 \,\text{tal que} \, -(p + r) \notin \alpha\}.$$

Afirmamos que β é um corte. Vejamos,

(a) Se $s \notin \alpha$ e $p = -s - 1$, então $s = -p - 1 \notin \alpha$. Consequentemente, $p \in \beta$. Segue-se que $\beta \neq \emptyset$. Além disso, se $q \in \alpha$, como $q - r < q$, para todo $r > 0$, temos que $q - r \in \alpha$. Sendo assim, $-q \notin \beta$. Então, $\beta \neq \mathbb{Q}$. E assim, a primeira propriedade da definição de corte está satisfeita.
(b) Seja $p \in \beta$. Sendo assim, existe $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$. Se $q < p$, temos que $-p - r < -q - r$. Segue-se que $-q - r \notin \alpha$, isto é, $q \in \beta$.
(c) Seja $p \in \beta$. Sendo assim, existe $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$. Considere $t = p + \dfrac{r}{2}$. Desta forma, $p < t$ e $-t - \dfrac{r}{2} = -p - r \notin \alpha$. Logo, existe $t \in \beta$ tal que $p < t$.

Portanto, β é um corte.

Próximo passo é demonstrarmos que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0^\star.$$

É suficiente demonstrarmos que $\alpha + \beta = 0^\star$, já que a outra igualdade tem demonstração totalmente análoga.

Por um lado, sejam $p \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como $s \in \beta$, existe $r > 0$ tal que $-s - r \notin \alpha$. E assim, como $-s - r < -s$, pela observação 3, segundo item, temos que $-s \notin \alpha$. Consequentemente, pela observação 3, primeiro item, $p < -s$. Logo, $p + s \in 0^\star$. E então, $\alpha + \beta \subset 0^\star$. Por outro lado, seja $v \in 0^\star$. Considere $w = -\dfrac{v}{2}$.

Afirmação 1. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w > 0$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z\,w \in \alpha$ e $(z + 1)\,w \notin \alpha$.

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Definamos

$$A = \big\{z \in \mathbb{Z} :\, z\,w \notin \alpha\big\}.$$

Mostremos que A tem um mínimo. Primeriamente, observemos que $A \neq \emptyset$, já que α é um corte. De fato, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \notin \alpha$. Como $\mathbb{Q}$ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\,w > q$. Como $q \notin \alpha$, temos que $n\,w \notin \alpha$. Agora, mostremos que A é limitado inferiormente. Vejamos, dado $z \in A$, temos que $z\,w > p$, para todo $p \in \alpha$. Sendo assim, dado $p \in \alpha$, como $w > 0$, temos que $z > \dfrac{p}{w} \geq \left[\dfrac{p}{w}\right]$, para todo $z \in A$, onde $[\cdot]$ é a *função parte inteira*, isto é, $[\cdot] : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é a função definida por

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} :\, z \leq x\}.$$

Donde, concluímos que A é limitado inferiormente. Da boa ordenação de $\mathbb{Z}$, existe $z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $z_0 + 1 = \min A$. Desta forma, existe $z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$z_0\,w \in \alpha \qquad \text{e} \qquad (z_0 + 1)\,w \notin \alpha,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Da afirmação acima, segue-se que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$z\,w \in \alpha \quad \text{e} \quad (z + 1)\,w \notin \alpha.$$

Tome $q = -(z + 1)\,w - w = -(z + 2)\,w$. Sendo assim, $q \in \beta$ e

$$v = -2\,w = z\,w + q \in \alpha + \beta.$$

Logo, $0^\star \subset \alpha + \beta$.

Portanto, $\alpha + \beta = 0^\star$.

Seguindo a notação padrão, denotamos o elemento simétrico de α por $-\alpha$.

(5) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, demonstremos a *comutatividade da adição em* $\mathbb{R}$, isto é,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Sejam $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Então, da comutatividade da adição em $\mathbb{Q}$, temos que $r + s = s + r$. Logo, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Agora, mostremos que

Proposição 2. *(Lei do Cancelamento) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\alpha+\beta = \alpha+\delta$, então $\beta = \delta$*

Demonstração. Vejamos, usando as propriedades da adição já vistas,

$$\begin{aligned} \beta &= \beta + [\alpha + (-\alpha)] \\ &= (\alpha + \beta) + (-\alpha) \\ &= (\alpha + \delta) + (-\alpha) \\ &= \delta + [\alpha + (-\alpha)] \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Logo, $\beta = \delta$. □

Nós já sabemos que os elementos neutro e simétrico são únicos. Estes fatos podem ser vistos como decorrentes da lei do cancelamento, como passamos a verificar.

Proposição 3. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,*

(1) *Se $\alpha + \beta = \alpha$, então $\beta = 0^\star$.*
(2) *Se $\alpha + \beta = 0^\star$, então $\beta = -\alpha$.*
(3) $-(-\alpha) = \alpha$.

Demonstração. Mostremos o primeiro item. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, suponhamos que $\alpha+\beta = \alpha$. Mostremos que $\beta = 0^\star$. Como $\alpha + 0^\star = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, pela lei do cancelamento, temos que $\beta = 0^\star$.

Mostremos o segundo item. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, suponhamos que $\alpha + \beta = 0^\star$. Como $\alpha + (-\alpha) = 0^\star$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, pela lei do cancelamento, temos que $\beta = -\alpha$.

Mostremos o terceiro item. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, como

$$\alpha + (-\alpha) = [-(-\alpha)] + (-\alpha),$$

temos que $-(-\alpha) = \alpha$. □

Proposição 4. *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\beta < \gamma$, então*

$$\alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma.$$

Além disso, pela lei do cancelamento, temos que $\alpha+\beta \neq \alpha+\gamma$, já que se $\alpha+\beta = \alpha+\gamma$, teríamos que $\beta = \gamma$. □

Sendo assim,

$$0^\star < \alpha \text{ se, e somente se } -\alpha < 0^\star,$$

como é fácil ver.

Observamos que $\alpha > 0^\star$ significa que $0^\star \subset \alpha$ *e que existe* $s \in \alpha$ *tal que* $s > 0$.

Antes de passarmos para a próxima operação, mostremos que

Proposição 5. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se que*

$$-(\alpha + \beta) = -\alpha + (-\beta).$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Como

$$\alpha + \beta + [-\alpha + (-\beta)] = [\alpha + (-\alpha)] + [\beta + (-\beta)] = 0^\star + 0^\star = 0^\star,$$

temos que $-(\alpha + \beta) = -\alpha + (-\beta)$. □

2.1.2. *Multiplicação.* Inicialmente, consideremos

$$\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0^\star\}.$$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, definimos

$$\alpha\,\beta = \{p \in \mathbb{Q} : \text{ existem } 0 < r \in \alpha \text{ } e \text{ } 0 < s \in \beta \text{ tais que } p \leq r\,s\}$$

Uma primeira afirmação é que

Proposição 6. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $\alpha\,\beta \in \mathbb{R}_+$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Inicialmente, precisamos mostrar que $\alpha\,\beta$ é um corte. É imediato que $0^\star \subset \alpha\,\beta$, já que $\alpha > 0^\star$ e $\beta > 0^\star$. Sendo assim, $\alpha\,\beta \neq \emptyset$. Além disso, $\alpha\,\beta \neq \mathbb{Q}$. Vejamos, como existem $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$ tais que $r_0 \notin \alpha$ e $s_0 \notin \beta$, temos que $r < r_0$ e $s < s_0$, para todos $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como $0^\star \subset \alpha \cap \beta$, temos que $r_0, s_0 > 0$. Afirmamos que $r_0\,s_0 \notin \alpha\,\beta$. De fato, dados $0 < r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$, como $r < r_0$ e $s < s_0$, temos que

$$r\,s < r_0\,s < r_0\,s_0.$$

Isto implica que $\alpha\,\beta \neq \mathbb{Q}$. Com isso, verificamos o primeiro requisito da definição de corte.

Verifiquemos o segundo requisito da definição de corte. Seja $p \in \alpha\,\beta$. Sendo assim, existem $0 < r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$ tais que $p \leq r\,s$. Desta forma, se $q < p$, temos que

$$q < p \leq r\,s.$$

Logo, $q \in \alpha\,\beta$.

Verifiquemos o terceiro requisito da definição de corte. Seja $p \in \alpha\,\beta$. Sendo assim, existem $0 < r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$ tais que $p \leq r\,s$. Como α e β são cortes, existem $\tilde{r} \in \alpha$ e $\tilde{s} \in \beta$ tais que $0 < r < \tilde{r}$ e $0 < s < \tilde{s}$. Então,

$$p \leq r\,s < \tilde{r}\,\tilde{s}.$$

Logo, $\tilde{r}\,\tilde{s} \in \alpha\,\beta$ e $p < \tilde{r}\,\tilde{s}$, como queríamos. □

(1) Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, mostremos que

$$(\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\,\gamma) \qquad \textbf{Associatividade}$$

Por um lado, dado $p \in (\alpha\,\beta)\,\gamma$, existem $0 < r \in \alpha\,\beta$ e $0 < s \in \gamma$ tais que $p \leq r\,s$. Como $r \in \alpha\,\beta$, existem $0 < t \in \alpha$ e $0 < u \in \beta$ tais que $r \leq t\,u$. Sendo assim,

$$p \leq r\,s \leq (t\,u)\,s = t\,(u\,s).$$

Logo, $p \in \alpha\,(\beta\,\gamma)$. E assim, $(\alpha\,\beta)\,\gamma \subset \alpha\,(\beta\,\gamma)$.

Por outro lado, demonstra-se analogamente que $\alpha\,(\beta\,\gamma) \subset (\alpha\,\beta)\,\gamma$.

Portanto, dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$,

$$(\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\,\gamma).$$

(2) Seja
$$1^\star = \{q \in \mathbb{Q} : \, q < 1\}.$$
Nós já mostramos que $1^\star$ é um corte, ver exemplo 1. Além disso, $1^\star > 0^\star$, já que $0^\star \subset 1^\star$ e $0^\star \neq 1^\star$.

A seguir, demonstraremos que $1^\star$ é o elemento identidade da multiplicação, isto é, dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, tem-se que

$\alpha\, 1^\star = 1^\star\, \alpha = \alpha$ **Existência do Elemento Identidade**

É suficiente mostrarmos a primeira igualdade, já que a segunda é demonstrada de forma análoga. Vejamos, por um lado, dado $p \in \alpha\, 1^\star$, existem $r \in \alpha$ e $q \in 1^\star$ tais que $p \leq r\, q$. Como $q < 1$, temos que $p < r$. E então, como $r \in \alpha$ e α é um corte, temos que $p \in \alpha$. Logo, $\alpha\, 1^\star \subset \alpha$.

Por outro lado, precisamos mostrar que $\alpha \subset \alpha\, 1^\star$. Seja $p \in \alpha$. Como α é um corte, temos que existe $0 < r \in \alpha$ tal que $p < r$. Sendo assim, $\dfrac{p}{r} < 1$. Da densidade de $\mathbb{Q}$, temos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q > 0$ e $\dfrac{p}{r} < q < 1$. E assim,
$$p = r\,\frac{p}{r} < r\, q.$$
Donde, $q \in 1^\star$ e $p \in \alpha\, 1^\star$. Segue-se que $\alpha \subset \alpha\, 1^\star$.

Portanto, $\alpha\, 1^\star = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

(3) Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, mostremos que existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tal que

$\alpha\, \beta = \beta\, \alpha = 1^\star$ **Existência do Elemento Inverso**

Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, definimos
$$\beta = \{p \in \mathbb{Q} : \text{ existe } a \notin \alpha \text{ tal que } p < a^{-1}\}.$$
Observamos que se $a \notin \alpha$ e $\alpha > 0^\star$, então $a > 0$. De fato, como $a \notin \alpha$ e existe $0 < r \in \alpha$, temos que $a > r > 0$. O que mostra que a^{-1} faz sentido.

Inicialmente, mostremos que $\beta \in \mathbb{R}_+$. Vejamos,

(a) Como α é um corte, existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a \notin \alpha$. Sendo assim, como $a > 0$ e $a < a+1$, temos que $(a+1)^{-1} < a^{-1}$. Donde, $(a+1)^{-1} \in \beta$. E assim, $\beta \neq \emptyset$. Além disso, dado $0 < r \in \alpha$, tem-se que $r < a$, para todo $a \notin \alpha$. Desta forma, $r^{-1} > a^{-1}$, para todo $a \notin \alpha$. Consequentemente, $r^{-1} \notin \beta$. Logo, $\beta \neq \mathbb{Q}$, que é o primeiro requerimento da definição de corte.

(b) Seja $p \in \beta$. sendo assim, existe $a \notin \alpha$ tal que $p < a^{-1}$. Então, se $r < p$, temos que $r < a^{-1}$. Donde, $r \in \beta$, que é o segundo requerimento.

(c) Seja $p \in \beta$. Sendo assim, existe $a \notin \alpha$ tal que $p < a^{-1}$. Pela densidade de $\mathbb{Q}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $p < q < a^{-1}$. Donde, existe $q \in \beta$ tal que $p < q$.

Portanto, $\beta \in \mathbb{R}$. E mais, dado $p < 0$, e tomando $a \notin \alpha$, temos que $a^{-1} > 0$ e $p < a^{-1}$. Logo, $\beta > 0^\star$. E assim, $\beta \in \mathbb{R}_+$.

A seguir, mostramos que β é o inverso aditivo de α, isto é,
$$\alpha\, \beta = \beta\, \alpha = 1^\star.$$
Basta mostrarmos a primeira igualdade, que é $\alpha\, \beta = 1^\star$, já que a segunda demonstra-se de forma análoga. Por um lado, dado $p \in \alpha\, \beta$, existem $0 <$

$r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$ tais que $p \leq r\,s$. Como $s \in \beta$, existe $a \notin \alpha$ tal que $a\,s < 1$. Sendo assim, como $0 < r < a$, temos que

$$p \leq r\,s < a\,s < 1.$$

Segue-se que $p \in 1^\star$ e que $\alpha\,\beta \subset 1^\star$.

Por outro lado, seja $v \in 1^\star$, isto é, $v < 1$. Analisemos duas situações.

(a) Se $v \leq 0$, dados $0 < r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$, temos que $v \leq 0 < r\,s$. Logo, $v \in \alpha\,\beta$.

(b) Se $v > 0$, temos que $v^{-1} > 1$.

Afirmação 2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, existe $0 < c \in \alpha$ tal que $v^{-1}\,c \notin \alpha$.

Demonstração. Consideremos $r = v^{-1}$. Como $r > 1$, temos que $r^n < r^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, como é fácil ver por indução. Dado $0 < q \in \alpha$, temos que

$$q < r\,q < r^2\,q < r^3\,q < \ldots < r^n\,q < \ldots$$

É evidente que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r^{n_0-1}\,q \in \alpha$ e $r^{n_0}\,q \notin \alpha$. Tomando $c = r^{n_0-1}\,q$, temos que $v^{-1}\,c = r^{n_0}\,q \notin \alpha$. □

Sendo assim, tomando $r \in \alpha$ tal que $c < r$, temos que

$$v\,r^{-1} < v\,c^{-1} = (c\,v^{-1})^{-1} = (v^{-1}\,c)^{-1}.$$

Segue-se que $v\,r^{-1} \in \beta$. E então, $v = r\,(v\,r^{-1}) \in \alpha\,\beta$. Logo, $1^\star \subset \alpha\,\beta$.
Portanto, $\alpha\,\beta = 1^\star$.
Seguindo a notação padrão, denotamos o elemento inverso de α por α^{-1}.

(4) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, tem-se que

$$\alpha\,\beta = \beta\,\alpha \qquad \textbf{Comutatividade}$$

Vejamos, dado $p \in \alpha\,\beta$, existem $0 < r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$ tais que $p \leq r\,s$. Como $r\,s = s\,r$, temos que existem $0 < r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$ tais que $p \leq s\,r$. Sendo assim, $p \in \beta\alpha$. Logo, $\alpha\,\beta \subset \beta\,\alpha$. Analogamente, mostramos que $\beta\,\alpha \subset \alpha\,\beta$. Portanto, $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$.

(5) Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, mostremos que

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)\,\alpha = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma \qquad \textbf{Distributuividade}$$

Pela comutatividade, basta mostrarmos que

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

Antes disso, mostramos a seguinte proposição

Proposição 7. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$.*

Demonstração. Como $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, basta mostrarmos que $\alpha + \beta > 0^\star$. Primeiramente, dado $p \in 0^\star$, como $p \in \alpha$ e $0 \in \beta$, temos que $p = p + 0 \in \alpha + \beta$. Sendo assim, $0^\star \subset \alpha + \beta$. Além disso, dados $0 \leq r \in \alpha$ e $0 \leq s \in \beta$, temos que $0 \leq r + s \in \alpha + \beta$. Logo, $0^\star \neq \alpha + \beta$. Portanto, $\alpha + \beta > 0^\star$. □

Da proposição acima, segue-se que $\alpha\,(\beta+\gamma) \in \mathbb{R}_+$ e que $\alpha\,\beta + \alpha\,\gamma \in \mathbb{R}_+$.

Passamos a demonstração da distributividade. Seja $p \in \alpha\,(\beta+\gamma)$. Sendo assim, existem $0 < r \in \alpha$, $0 < s \in \beta$ e $0 < t \in \gamma$ tais que $p \leq r\,(s+t)$. Como $r\,(s+t) = r\,s + r\,t$, $0 < r\,s \in \alpha\,\beta$ e $0 < r\,t \in \alpha\,\gamma$, temos que

$$r\,(s+t) = r\,s + r\,t \in \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

E assim, $\alpha\,(\beta+\gamma) \subset \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$. Verifiquemos a inclusão contrária. Dado $p \in \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$, temos que existem $0 < r_1, r_2 \in \alpha$, $0 < s \in \beta$ e $0 < t \in \gamma$ tais que

$$p \leq r_1\,s + r_2\,t \leq \max\{r_1, r_2\}(s+t).$$

Como $0 < \max\{r_1, r_2\} \in \alpha$, temos que $p \in \alpha\,(\beta+\gamma)$. Logo,

$$\alpha\,\beta + \alpha\,\gamma \subset \alpha\,(\beta+\gamma).$$

Portanto, $\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$.

(6) Do item anterior, segue-se que, dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha\,0^\star &= \alpha\,(0^\star + 0^\star) \\ &= \alpha\,0^\star + \alpha\,0^\star \end{aligned}$$

pela lei do cancelamento, $\alpha\,0^\star = 0^\star\,\alpha = 0^\star$.

A partir de agora, vamos estender a definição de multiplicação de $\mathbb{R}_+$ para $\mathbb{R}$.

Definição 9. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Define-se a multiplicação $\alpha\,\beta$ por

$$\alpha\,\beta = \begin{cases} 0^\star, \text{ se } \alpha = 0^\star \text{ ou } \beta = 0^\star, \\ (-\alpha)\,(-\beta), \text{ se } \alpha < 0^\star \text{ e } \beta < 0^\star, \\ -[(-\alpha)\,\beta], \text{ se } \alpha < 0^\star \text{ e } \beta > 0^\star, \\ -[\alpha\,(-\beta)], \text{ se } \alpha > 0^\star \text{ e } \beta < 0^\star. \end{cases}$$

Nossa intenção é demonstrar que a multiplicação em $\mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se que $\alpha\,\beta \in \mathbb{R}$. **Fechamento**

(2) Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$(\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\,\gamma). \quad \textbf{Associatividade}$$

(3) Existe um único elemento $1^\star \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha\,1^\star = 1^\star\,\alpha = \alpha, \quad \textbf{Existência do Elemento Identidade}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) Dado $0^\star \neq \alpha \in \mathbb{R}$, existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha\,\beta = \beta\,\alpha = 1^\star. \quad \textbf{Existência do Elemento Inverso}$$

(5) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\alpha\,\beta = \beta\,\alpha. \quad \textbf{Comutatividade}$$

(6) Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma. \quad \textbf{Distributividade}$$

Todas essas propriedades são demonstradas usando as propriedades correspondentes para $\mathbb{R}_+$ e a identidade $\alpha = -(-\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vejamos como funciona o argumento.

(1) Para o fechamento, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,
   (a) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, já mostramos.
   (b) Se $\alpha < 0^\star$ e $\beta < 0^\star$, temos que

$$-\alpha, -\beta \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \alpha\,\beta = (-\alpha)\,(-\beta) \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}.$$

(c) Se $\alpha < 0^\star$ e $\beta > 0^\star$, temos que

$$-\alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad (-\alpha)\,\beta \in \mathbb{R}_+.$$

Logo,

$$\alpha\,\beta = -[(-\alpha)\,\beta] \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha\,\beta < 0^\star.$$

(d) Se $\alpha > 0^\star$ e $\beta < 0^\star$, temos que

$$-\beta \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \alpha\,(-\beta) \in \mathbb{R}_+.$$

Logo,

$$\alpha\,\beta = -[\alpha\,(-\beta)] \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha\,\beta < 0^\star.$$

(2) Para a associatividade, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Mostraremos que

$$\alpha\,(\beta\,\gamma) = (\alpha\,\beta)\,\gamma.$$

Vejamos,

(a) Para $\alpha > 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\gamma > 0^\star$, já sabemos que vale a associatividade.

(b) Para $\alpha > 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\gamma < 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned}(\alpha\,\beta)\,\gamma &= -[(\alpha\,\beta)\,(-\gamma)]\\ &= -\{\alpha\,[\beta\,(-\gamma)]\}\\ &= \alpha\,\{-[\beta\,(-\gamma)]\}\\ &= \alpha\,(\beta\,\gamma).\end{aligned}$$

(c) Para $\alpha > 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\gamma > 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned}(\alpha\,\beta)\,\gamma &= -[-(\alpha\,\beta)\,\gamma]\\ &= -\{[\alpha\,(-\beta)]\,\gamma\}\\ &= -\{\alpha\,[(-\beta)\,\gamma)]\}\\ &= \alpha\,\{-[(-\beta)\,\gamma]\}\\ &= \alpha\,(\beta\,\gamma).\end{aligned}$$

(d) Para $\alpha > 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\gamma < 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned}\alpha\,(\beta\,\gamma) &= \alpha\,[(-\beta)\,(-\gamma)]\\ &= [\alpha\,(-\beta)]\,(-\gamma)\\ &= -(\alpha\,\beta)\,(-\gamma)\\ &= (\alpha\,\beta)\,\gamma.\end{aligned}$$

(e) Para $\alpha < 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\gamma > 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned}\alpha\,(\beta\,\gamma) &= -[(-\alpha)\,(\beta\,\gamma)]\\ &= -\{[(-\alpha)\,\beta]\,\gamma\}\\ &= -[-(\alpha\,\beta)\,\gamma)]\\ &= (\alpha\,\beta)\,\gamma).\end{aligned}$$

(f) Para $\alpha < 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\gamma < 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned}\alpha\,(\beta\,\gamma) &= (-\alpha)\,[-(\beta\,\gamma)]\\ &= (-\alpha)\,[(-\beta)\,\gamma]\\ &= [(-\alpha)\,(-\beta)]\,\gamma\\ &= (\alpha\,\beta)\,\gamma.\end{aligned}$$

(g) Para $\alpha < 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\gamma > 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha\,(\beta\,\gamma) &= (-\alpha)\,[-(\beta\,\gamma)] \\ &= (-\alpha)\,[(-\beta)\,\gamma] \\ &= [(-\alpha)\,(-\beta)]\,\gamma \\ &= (\alpha\,\beta)\,\gamma. \end{aligned}$$

(h) Para $\alpha < 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\gamma < 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha\,(\beta\,\gamma) &= -[(-\alpha)\,(\beta\,\gamma)] \\ &= -\{(-\alpha)\,[(-\beta)\,(-\gamma)]\} \\ &= -\{[(-\alpha)\,(-\beta)]\,(-\gamma)\} \\ &= -[(\alpha\,\beta)\,(-\gamma)] \\ &= (\alpha\,\beta)\,\gamma. \end{aligned}$$

Logo, vale a associatividade em $\mathbb{R}$.

(3) Para a existência do elemento identidade, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

(a) Se $\alpha \in \mathbb{R}_+$, já demonstramos que

$$\alpha\,1^\star = 1^\star\,\alpha = \alpha.$$

(b) Se $\alpha = 0^\star$, temos que

$$1^\star\,0^\star = 0^\star\,1^\star = 0^\star.$$

(c) Se $\alpha < 0^\star$, temos que

$$-\alpha > 0^\star \quad \text{e} \quad \alpha\,1^\star = -[(-\alpha)\,1^\star] = -(-\alpha) = \alpha.$$

Analogamente, temos que $1^\star\,\alpha = \alpha$.

(4) Para a existência do elemento inverso, seja $0^\star \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Então,

(a) Se $\alpha > 0$, então

$$\alpha^{-1} > 0^\star \quad \text{e} \quad \alpha\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\,\alpha = 1^0.$$

(b) Se $\alpha < 0^\star$, então $-\alpha > 0^\star$. Sendo assim, $\alpha^{-1} < 0^\star$. E assim,

$$\alpha\,\alpha^{-1} = (-\alpha)\,(-\alpha^{-1}) = 1^\star.$$

Analogamente, mostra-se que $\alpha^{-1}\,\alpha = 1^\star$.

Portanto, $1^\star$ é o elemento identidade da multiplicação.

(5) Para a comutatividade, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos,

(a) Para $\alpha > 0^\star$ e $\beta > 0^\star$, já sabemos que a comutatividade é válida em $\mathbb{R}_+$.

(b) Para $\alpha > 0^\star$ e $\beta < 0^\star$, temos que

$$\alpha\,\beta = -[\alpha\,(-\beta)] = -[(-\beta)\,\alpha] = \beta\,\alpha.$$

(c) Para $\alpha < 0^\star$ e $\beta > 0^\star$, temos que

$$\alpha\,\beta = -[(-\alpha)\,\beta] = -[\beta\,(-\alpha)] = \beta\,\alpha.$$

(d) Para $\alpha < 0^\star$ e $\beta < 0^\star$, temos que

$$\alpha\,\beta = (-\alpha)\,(-\beta) = (-\beta)\,(-\alpha) = \beta\,\alpha.$$

Portanto, vale a comutatividade em $\mathbb{R}$.

(6) Para a distributividade, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Para evitarmos trivialidades, podemos supor que α, β e γ são diferentes de $0^\star$. Pela comutatividade, basta mostrarmos que

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

Vejamos,

(a) Se $\alpha > 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\beta + \gamma > 0^\star$, analisemos dois subcasos.

(i) Se $\gamma > 0^\star$, já sabemos que vale a distributividade em $\mathbb{R}_+$.

(ii) Se $\gamma < 0^\star$, como $\beta = (\beta + \gamma) + (-\gamma)$, temos que

$$\alpha\,\beta = \alpha\,(\beta + \gamma) + \alpha\,(-\gamma).$$

Como $\alpha\,\gamma = -[\alpha\,(-\gamma)]$, temos que

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

(b) Sejam $\alpha > 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\beta + \gamma < 0^\star$. Como $\beta > 0^\star$ e $\beta + \gamma < 0^\star$ temos que $\gamma < 0^\star$. Observando que

$$-\gamma = -(\beta + \gamma) + \beta,$$

temos que

$$\alpha\,(-\gamma) = \alpha\,[-(\beta + \gamma)] + \alpha\,\beta.$$

Como $\alpha\,(-\gamma) = -(\alpha\,\gamma)$ e $-[\alpha\,(\beta + \gamma)] = \alpha[-(\beta + \gamma)]$, temos que

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

(c) Sejam $\alpha > 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\beta + \gamma > 0^\star$. Como $\beta < 0^\star$ e $\beta + \gamma > 0^\star$, temos que $\gamma > 0^\star$. Observando que

$$\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta),$$

temos que

$$\alpha\,\gamma = \alpha\,(\beta + \gamma) + \alpha\,(-\beta).$$

Como $\alpha\,\beta = -[\alpha\,(-\beta)]$, temos que

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

(d) Sejam $\alpha > 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\beta + \gamma < 0^\star$.

(i) Se $\gamma < 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha\,(\beta + \gamma) &= (-\alpha)\,[-(\beta + \gamma)] \\
&= (-\alpha)\,[(-\beta) + (-\gamma)] \\
&= (-\alpha)\,(-\beta) + (-\alpha)\,(-\gamma) \\
&= \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.
\end{aligned}$$

(ii) Se $\gamma > 0^\star$, como $-\beta = -(\beta + \gamma) + \gamma$, temos que

$$\alpha\,(-\beta) = \alpha\,[-(\beta + \gamma)] + \alpha\,\gamma.$$

Como $\alpha\,\beta = -[\alpha\,(-\beta)]$ e $\alpha\,(\beta + \gamma) = -\{\alpha\,[-(\beta + \gamma)]\}$, temos que

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

(e) Sejam $\alpha < 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\beta + \gamma > 0^\star$.

(i) Se $\gamma > 0^\star$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha\,(\beta + \gamma) &= -[(-\alpha)\,(\beta + \gamma)] \\
&= -[(-\alpha)\,\beta + (-\alpha)\,\gamma] \\
&= -[(-\alpha)\,\beta] + \{-[(-\alpha)\,\gamma]\} \\
&= \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.
\end{aligned}$$

(ii) Se $\gamma < 0^\star$, como $\beta = (\beta + \gamma) + (-\gamma)$, temos que
$$(-\alpha)\,\beta = (-\alpha)\,(\beta + \gamma) + (-\alpha)\,(-\gamma).$$
Como
$$-(\alpha\,\beta) = -[\alpha\,(\beta + \gamma)] + \alpha\,\gamma,$$
temos que
$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

(f) Sejam $\alpha < 0^\star$, $\beta > 0^\star$ e $\beta + \gamma < 0^\star$. Como $\beta > 0^\star$ e $\beta + \gamma < 0^\star$ temos que $\gamma < 0^\star$. Observando que
$$-\gamma = -(\beta + \gamma) + \beta,$$
temos que
$$(-\alpha)\,(-\gamma) = (-\alpha)\,[-(\beta + \gamma)] + (-\alpha)\,\beta.$$
Como $(-\alpha)\,\beta = -(\alpha\,\beta)$, temos que
$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

Questão 01 Mostre os demais casos, que são
(i) $\alpha < 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\beta + \gamma > 0^\star$;
(ii) $\alpha < 0^\star$, $\beta < 0^\star$ e $\beta + \gamma < 0^\star$.

Portanto, vale a distributividade em $\mathbb{R}$.

2.1.3. $\mathbb{Q}$ *isomorficamente identificado em* $\mathbb{R}$. Consideremos a seguinte aplicação $\Phi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$\Phi(r) = r^\star = \{p \in \mathbb{Q} : \, p < r\}.$$
Afirmamos que

(1) Φ é injetiva;
(2) Φ preserva operações, isto é,
 (a) $\Phi(r + s) = \Phi(r) + \Phi(s)$;
 (b) $\Phi(r\,s) = \Phi(r)\,\Phi(s)$.

Provemos a primeira parte. Mais geralmente, provaremos que
$$r < s \text{ se, e somente se, } r^\star < s^\star.$$
Por um lado, se $r < s$*, então* $r \in s^\star$*. Mas,* $r \in r^\star$*. Sendo assim,* $r^\star \subset s^\star$*, mas* $r^\star \neq s^\star$*. Logo,* $r^\star < s^\star$*.*

Por outro lado, se $r^\star < s^\star$*, existe* $p \in s^\star$*, mas* $p \notin r^\star$*. Sendo assim,* $r \leq p < s$*. Logo,* $r < s$*.*

Passemos a segunda parte. Precisamos mostrar que
(a) $(r + s)^\star = r^\star + s^\star$;
(b) $(r\,s)^\star = r^\star\,s^\star$.

Mostremos o item (a). Dados $p \in r^\star$ *e* $q \in s^\star$*, temos que* $p < r$ *e* $q < s$*. Então,* $p + q < r + s$*. Sendo assim,* $p + q \in (r + s)^\star$*. Logo,* $r^\star + s^\star \subset (r + s)^\star$*. Reciprocamente, seja* $p \in (r + s)^\star$*. Desta forma,* $p < r + s$*. Observando que*
$$p = \left[r - \frac{1}{2}\,(r + s - p)\right] + \left[s - \frac{1}{2}\,(r + s - p)\right] \in r^\star + s^\star,$$
concluímos que $p \in r^\star + s^\star$*. Logo,* $(r + s)^\star \subset r^\star + s^\star$*.*

Portanto, $(r + s)^\star = r^\star + s^\star$*.*

Aqui cabe uma consequência da preservação da adição.

Proposição 8. *Dado $r \in \mathbb{Q}$, tem-se que $(-r)^\star = -r^\star$.*

Demonstração. Dado $r \in \mathbb{Q}$,

$$0^\star = [r + (-r)]^\star = r^\star + (-r)^\star.$$

Pela unicidade do simétrico, segue-se que $(-r)^\star = -r^\star$. $\square$

Mostremos o item (b). Inicialmente, suponhamos que $r^\star, s^\star \in \mathbb{R}_+$. Seja $p \in r^\star s^\star$. Sendo assim, existem $0 < \tilde{r} < r$ e $0 < \tilde{s} < s$ tais que $p < \tilde{r}\,\tilde{s} < r\,s$. Segue-se que $p \in (r\,s)^\star$. Logo, $r^\star s^\star \subset (r\,s)^\star$.

Seja $p \in (r\,s)^\star$. Sendo assim, $p < r\,s$.

- *Se $p \leq 0$, dados $0 < \tilde{r} < r$ e $0 < \tilde{s} < s$, tem-se que $p < \tilde{r}\,\tilde{s}$. Donde, $p \in r^\star s^\star$. Logo, $(r\,s)^\star \subset r^\star s^\star$.*
- *Se $p > 0$, temos que $0 < p\,(r\,s)^{-1} < 1$. Consideremos*

  $$p\,(r\,s)^{-1} = q_1\,q_2,$$

  onde $0 < q_1 < 1$ e $0 < q_2 < 1$. Sendo assim,

  $$0 < r\,q_1 < r \quad e \quad 0 < s\,q_2 < s.$$

  Desta forma, $r\,q_1 \in r^\star$ e $s\,q_2 \in s^\star$. E então,

  $$p = (r\,q_1)\,(s\,q_2) \in r^\star s^\star.$$

  Logo, $(r\,s)^\star \subset r^\star s^\star$.

Portanto, $(r\,s)^\star = r^\star s^\star$.

Mostremos para os outros casos.

- *Sejam $r > 0$ e $s < 0$. Então,*

$$\begin{aligned} r^\star s^\star &= -[r^\star\,(-s^\star)] \\ &= -[r^\star\,(-s)^\star] \\ &= -[r\,(-s)]^\star \\ &= -[-(r\,s)]^\star \\ &= -[-(r\,s)^\star] \\ &= (r\,s)^\star \end{aligned}$$

- *Sejam $r < 0$ e $s > 0$. Então,*

$$\begin{aligned} r^\star s^\star &= -[(-r^\star)\,s^\star] \\ &= -[(-r)^\star\,s^\star] \\ &= -[(-r)\,s]^\star \\ &= -[-(r\,s)]^\star \\ &= -[-(r\,s)^\star] \\ &= (r\,s)^\star \end{aligned}$$

- *Sejam $r < 0$ e $s < 0$. Então,*

$$\begin{aligned} r^\star s^\star &= (-r^\star)\,(-s^\star) \\ &= (-r)^\star\,(-s)^\star \\ &= [(-r)\,(-s)]^\star \\ &= (r\,s)^\star \end{aligned}$$

Concluímos que $\Phi(\mathbb{Q})$ é um cópia isomorfa de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

2.2. **Corpo Ordenado Completo que estende $\mathbb{Q}$.** As referências para esta seção são [4, 5].

Até o momento demonstramos que

Teorema 10. *Existe um corpo ordenado completo, isto é, um corpo ordenado que tem a propriedade do supremo.*

Na realidade, pode-se demonstrar que, *a menos de isomorfismo, existe um único corpo ordenado completo.*

O corpo ordenado completo que construímos acima é denominado de *o corpo dos números reais*, que denotamos, como acima, por $\mathbb{R}$.

Proposição 9. *Todo corpo ordenado completo é arquimediano.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado não-arquimediano. Sendo assim, existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $n \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, $n+1 \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E então, $n \leq k-1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, não existe sup $\mathbb{N}$. □

Consideremos $\alpha = 0^\star \cup \{0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : \ 0 < p \ \text{ e } \ p^2 < 3\}$. Afirmamos que α é um corte não-racional.

(a) Para o primeiro requerimento, observamos que $1 \in \alpha$ e $2 \notin \alpha$. Logo, $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(b) Para o segundo requerimento, seja $p \in \alpha$. E também, seja $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < p$.
   (i) Se $q \leq 0$, temos que $q \in \alpha$.
   (ii) Se $0 < q < p$, temos que $q^2 < q\,p < p^2 < 3$. Então, $q \in \alpha$.

(c) Para o terceiro requerimento, seja $p \in \alpha$. Se $p \leq 0$, temos que

$$p \leq 0 < 1.$$

Como $1 \in \alpha$, temos que para o caso em que $p \leq 0$, o terceiro requerimento é satisfeito.

Seja $0 < p$. Tomando $0 < r < \max\{1, \dfrac{3-p^2}{1+2\,p}\}$, temos que

$$\begin{aligned} (p+r)^2 &= p^2 + 2\,p\,r + r^2 \\ &< p^2 + 2\,p\,r + r \\ &= p^2 + (1+2\,p)\,r \\ &< 3 \end{aligned}$$

Então, $p+r \in \alpha$ e $p < p+r$.

Portanto, α é um corte.

Agora, α não é um corte racional, já que não existe um número racional cujo quadrado é 3. Isto mostra-nos que $\mathbb{Q}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$. Os cortes não-racionais são ditos *cortes irracionais.*

Referências

[1] Ayres, Jr, F., Álgebra Moderna, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda, Rio de Janeiro, 1965.

[2] Hefez, A., Curso de Álgebra, Segunda Edição, Volume 1, CMU, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[3] Landau, E., Foundations of Analysis, Third Edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1966.

[4] Lima, E. L., Curso de Análise, 7^a Edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1992.

[5] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, Third Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1976.