UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

Dicionário de termos técnicos das Funções ou Aplicações

Marcos de Abreu dos Santos

Sandro Marcos Guzzo

Cascavel - Pr
Novembro de 2024

1 Introdução

O objetivo deste texto é concentrar uma lista de termos técnicos das aplicações e constituir um dicionário das funções, onde o leitor possa encontrar as definições destes termos. Os leitores que temos em mente são estudantes do ensino médio, estudantes universitários e professores.

Este material apresenta de forma simples e direta essas definições, sendo a porta de entrada para uma exploração mais detalhada e aprofundada de uma função ou uma propriedade específica. A maioria dos livros que tratam de forma exclusiva de funções geralmente se concentram em alguns poucos tipos ou uma quantidade bem limitada de propriedades de funções, com um nível de aprofundamento relativamente considerado.

Nesse trabalho fazemos diferente. Trazemos uma abordagem menos aprofundada, porém com um número significativo de definições que envolvem funções. Nesse trabalho o leitor irá perceber que o foco maior é sempre algébrico e não geométrico.

2 Aplicações

Definição 1. Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma *aplicação* de X em Y é uma lei de correspondência ou de associação entre os elementos de X e de Y, de forma que cada elemento $x \in X$ está associado com apenas um elemento $y \in Y$ por esta lei.

Indicamos uma aplicação entre dois conjuntos tradicionalmente por uma letra minúscula. Usamos a representação

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

para indicar que f é uma aplicação de X em Y, e portanto uma lei de associação entre os elementos de X e de Y. Lembremos que neste caso, a cada $x \in X$ existe apenas um elemento $y \in Y$ satisfazendo $x \mapsto y$ por f.

O (único) elemento $y \in Y$ que está associado com $x \in X$ é chamado de imagem de x por f e escrevemos $y = f(x)$ para indicar a corresponência entre os elementos $x \in X$ e $y \in Y$ por f.

É usual fornecer uma expressão que dependa de x e que permite determinar por meio de cálculos o elemento $y = f(x)$ associado com $x \in X$. Neste caso dizemos que a aplicação está definida por esta expressão.

O conjunto X é chamado de domínio da aplicação e o conjunto Y é chamado de contradomínio de f. O conjunto imagem de f é o subconjunto de Y, representado por $Im(f)$ e formado por todos os elementos (de Y) que estão correspondidos com algum elemento do conjunto X. De outra forma,

$$Im(f) = \{y \in Y; \quad y = f(x) \quad \text{para algum} \quad x \in X\},$$

ou equivalentemente

$$Im(f) = \{y \in Y; \quad \text{existe} \quad x \in X \quad \text{tal que} \quad y = f(x)\}.$$

Segundo Domingues e Iezzi (2003), uma aplicação $f : X \to Y$ onde o contradomínio Y é um conjunto numérico, é habitualmente chamada de função. Apesar do autor dizer também que às vezes, usa-se a palavra função para designar uma aplicação qualquer. Usaremos neste texto a palavra função apenas para as aplicações em que Y é um conjunto numérico.

Neste sentido, de acordo com as características do seu domínio ou do seu contradomínio, uma aplicação pode ser classificada como:

(i) **Função**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada de *função* se o conjunto Y é um conjunto numérico (números reais ou complexos por exemplo);

(ii) **Funcional ou Forma**: Uma aplicação f é chamada de *funcional* ou de *forma* se o domínio é um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e o contradomínio é este corpo de escalares. Tradicionalmente é escrito como $f : V \to \mathbb{K}$ em que $\mathbb{K}$ é um corpo e V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Usualmente $\mathbb{K}$ é o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$;

(iii) **Transformação**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada de *transformação* se os conjuntos X e Y forem espaços vetoriais;

(iv) **Morfismo**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é um *morfismo* se preserva alguma estrutura entre os conjuntos X e Y;

Pode ser que precisemos em algum momento nos referirmos a duas aplicações iguais. Vamos esclarecer então este conceito. Duas aplicações $f : X \to Y$ e $g : A \to B$ são consideradas iguais, e escrevemos $f = g$ se $X = A$, $Y = B$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, duas aplicações são iguais se (e somente se) seus domínios coincidem, seus contradomínios coincidem e seus valores pontuais coincidem.

3 Aplicações específicas

Nesta seção iremos apresentar algumas funções ou aplicações específicas. Cada uma das funções ou aplicações apresentadas nesta seção, podem ainda possuir as propriedades que apresentaremos na seção subsequente.

Para não sermos repetitivos, em todo este texto, vamos considerar que ao mencionar uma aplicação $f : X \to Y$, os conjuntos envolvidos X e Y serão sempre não vazios.

1) **Constante**: Uma aplicação constante é uma aplicação $f : X \to Y$ que a cada $x \in X$ associa o mesmo elemento $k \in Y$. É portanto a aplicaçao definida pela expressão $f(x) = k$. Representamos também esta aplicação na forma estendida

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) = k. \end{aligned}$$

2) **Nula**: A aplicação nula é a aplicação $f : X \to Y$ que associa o valor 0 para todos $x \in X$. De outra forma, é a aplicação

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) = 0. \end{aligned}$$

Note que neste caso é necessário que o conjunto Y contenha o elemento 0. Em alguns casos o elemento 0 não é necessariamente o número 0. É comum na teoria dos grupos, dos anéis e dos corpos que o elemento neutro para uma operação seja chamado de zero do conjunto, mesmo que não seja o número 0.

3) **Identidade**: A aplicação identidade (de X) é a aplicação $f : X \to X$ que a cada $x \in X$ associa o próprio valor x. É a aplicação

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ x &\mapsto f(x) = x. \end{aligned}$$

Note que é obrigatório para esta aplicação que o domínio coincida com o contradomínio. É comum também representar a aplicação identidade de um conjunto X por Id_X.

4) **Definida por partes**: Uma aplicação ou uma função $f : X \to Y$ é uma aplicação definida por partes, se essa aplicação é definida utilizando-se de n sentenças $f_1, f_2, \ldots, f_n$, com $n \geq 2$, onde cada sentença f_k estará definida para valores de $x \in X_k$ em que os conjuntos $X_k \subset X$ satisfazem $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \cdots \cup X_n = X$ e $X_i \cap X_j = \emptyset$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. A aplicação definida por várias sentenças é tradicionalmente denotada na forma simplificada por

$$f(x) = f_k(x) \qquad \text{para} \qquad x \in X_k,$$

ou na forma estendida por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad x \in X_1; \\ f_2(x) & \text{se} \quad x \in X_2; \\ f_3(x) & \text{se} \quad x \in X_3; \\ \vdots & \\ f_n(x) & \text{se} \quad x \in X_n. \end{cases}$$

A quantidade de conjuntos $X_k \subset X$ e consequentemente de sentenças $f_k : X_k \to Y$ usadas não é necessariamente finita.

5) **Escada**: Uma aplicação escada, ou uma função escada, é uma aplicação definida por várias sentenças em que cada sentença $f_k : X_k \to Y$ é uma aplicação constante.

6) **Função afim**: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a função afim é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinada pela lei de formação $f(x) = ax + b$. Resumindo, é a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b. \end{aligned}$$

Note que se $a = 0$ recuperamos a definição de função ou aplicação constante.

7) **Função quadrática**: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, a função quadrática é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Resumindo, é a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Note que se $a = 0$ recuperamos a definição de função afim.

8) **Função potência**: A função potência de expoente $n \in \mathbb{N}^*$ é a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x) = x^n.$$

9) **Função raiz**: A função raiz de índice $k \in \mathbb{N}^*$ é a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x) = x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}.$$

Naturalmente precisa-se da condição $X \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ no caso em que k é um número par.

10) **Função polinomial**: A função polinomial de grau n, é a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

em que $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são números fixados (chamados de coeficientes) e $a_n \neq 0$.

11) **Função racional**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função racional se f é o quociente de duas funções polinomiais com denominador não nulo em X. De outra forma, se $f = \frac{g(x)}{h(x)}$ com g e h funções polinomiais e $h(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

12) **Função algébrica**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função algébrica se puder ser escrita como soma ou produto de uma quantidade finita de potências racionais de funções polinomiais.

As funções potência, raiz, polinomial e racional são também funções algébricas.

13) **Função modular**: A função modular, é a função $f : X \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in X$ associa o valor $f(x) = |x|$.

14) **Função exponencial**: Dado $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, a função exponencial de base a é a função $f : X \to \mathbb{R}$ dada pela expressão

$$f(x) = a^x.$$

Quando $a \neq 1$ a função exponencial de base $a > 0$ é uma função injetora.

Um caso especial, de particular interesse na matemática, ocorre quando a é o número irracional $e \approx 2,718281828459....$ Neste caso a função dada por $f(x) = e^x$ é chamada simplesmente de função exponencial.

15) **Função logarítmica**: Dado $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, e $X \subset (0, \infty) = \mathbb{R}_+^*$, a função logarítmica de base a é a função $f : X \to \mathbb{R}$ dada pela expressão

$$f(x) = \log_a x.$$

No caso em que a é o número irracional $e \approx 2,718281828459...$, a função logarítmica é chamada de função logarítmica natural ou função logarítmica Neperiana. Neste caso a função é tradicionalmente representada pela expressão $f(x) = \log_e x = \ln x$.

A função logarítmica é a função inversa da função exponencial. Quando $a > 0$ e $a \neq 1$ a função exponencial de base a,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to (0, \infty) \\ x &\mapsto h(x) = a^x \end{aligned}$$

é bijetora. Portanto admite função inversa. A inversa é chamada de função logarítmica de base a. Nestes termos

$$a^x = y \qquad \text{se e somente se} \qquad \log_a y = x,$$

e especificamente quando $a = e \approx 2,718281828459...$ escrevemos

$$e^x = y \qquad \text{se e somente se} \qquad \ln y = x.$$

16) **Função seno**: A função seno é a função $f : X \to \mathbb{R}$ determinada pela expressão $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{sen} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa o seno do ângulo x.

17) **Função cosseno**: A função cosseno é a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \cos(x)$ ou $f(x) = \cos x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa o cosseno do ângulo x.

18) **Função tangente**: A função tangente é a função $f : X - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{tg} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a tangente do ângulo x.

    Matematicamente temos que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e por se tratar de um quociente, esta função não está definida para os valores de x que tornam o denominador nulo. Como sabemos que $\cos x = 0$ em todos os valores $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. Por esse motivo o domínio da função tangente precisa excluir estes possíveis valores do conjunto X.

19) **Função cotangente**: A função cotangente é a função $f : X - \{k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{ctg} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a cotangente do ângulo x.

    Matematicamente temos que $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ e por se tratar de um quociente, esta função não está definida para os valores de x que tornam o denominador nulo. Como sabemos que $\operatorname{sen} x = 0$ em todos os valores $x \in \{k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Por esse motivo o domínio da função tangente precisa excluir estes possíveis valores do conjunto X.

20) **Função secante**: A função secante é a função $f : X - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \sec(x)$ ou $f(x) = \sec x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a secante do ângulo x.

    Matematicamente temos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e por se tratar de um quociente, esta função não está definida para os valores de x que tornam o denominador nulo. Como sabemos que $\cos x = 0$ em todos os valores $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. Por esse motivo o domínio da função tangente precisa excluir estes possíveis valores do conjunto X.

21) **Função cossecante**: A função cotangente é a função $f : X - \{k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \operatorname{cossec}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{cossec} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a cossecante do ângulo x.

Matematicamente $\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ e por se tratar de um quociente, esta função não está definida para os valores de x que tornam o denominador nulo. Como sabemos que $\operatorname{sen} x = 0$ em todos os valores $x \in \{k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Por esse motivo o domínio da função cossecante precisa excluir estes possíveis valores do conjunto X. É comum também representar esta função usando a expressão $\csc x$.

22) **Função trigonométrica (circular)**: Uma função trigonométrica é qualquer uma das funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante ou cossecante.

23) **Função seno hiperbólico**: A função seno hiperbólico é a função $f : X \to \mathbb{R}$ determinada pela expressão $f(x) = \operatorname{senh}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{senh} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa o seno hiperbólico do ângulo x.

24) **Função cosseno hiperbólico**: A função cosseno hiperbólico é a função $f : X \to \mathbb{R}$ determinada pela expressão $f(x) = \cosh(x)$ ou $f(x) = \cosh x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa o cosseno hiperbólico do ângulo x.

25) **Função tangente hiperbólica**: A função tangente hiperbólica é a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{tgh} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a tangente hiperbólica do ângulo x.

Matematicamente a tangente hiperbólica satisfaz a igualdade $\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$. Mesmo se tratando de um quociente, o denominador $\cosh x$ nunca assume o valor 0. Por esse motivo não há restrições para o domínio da função tangente hiperbólica.

26) **Função cotangente hiperbólica**: A função cotangente hiperbólica é a função $f : X - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \operatorname{ctgh}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{ctgh} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a cotangente hiperbólica do ângulo x.

Matematicamente $\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$ e por se tratar de um quociente, esta função não está definida para os valores de x que tornam o denominador nulo. Como sabemos que $\operatorname{senh} x = 0$ somente em $x = 0$. Por esse motivo o domínio da função tangente não pode conter o ponto 0.

27) **Função secante hiperbólica**: A função secante hiperbólica é a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{sech} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a secante hiperbólica do ângulo x.

Matematicamente a secante hiperbólica satisfaz a igualdade $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$. Mesmo se tratando de um quociente, o denominador $\cosh x$ nunca assume o valor 0. Por esse motivo não há restrições para o domínio da função secante hiperbólica.

28) **Função cossecante hiperbólica**: A função cossecante hiperbólica é a função $f : X - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \operatorname{cossech}(x)$ ou $f(x) = \operatorname{cossech} x$. É a função que a cada ângulo radiano x associa a cossecante hiperbólica do ângulo x.

Matematicamente $\operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$ e por se tratar de um quociente, esta função não está definida para os valores de x que tornam o denominador nulo. Como sabemos que $\operatorname{senh} x = 0$ somente em $x = 0$. Por esse motivo o domínio da função tangente não pode conter o ponto 0. É comum também representar esta função com a expressão $\operatorname{csch} x$.

29) **Função trigonométrica hiperbólica**: Uma função trigonométrica hiperbólica é qualquer uma das funções seno hiperbólico, cosseno hiperbólico, tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica ou cossecante hiperbólica.

30) **Função transcendente**: Uma função que não é algébrica é chamada de função transcendente.

    Todas as funções trigonométricas, circulares ou hiperbólicas, são funções transcendentes. As funções exponencial e logarítmica de base $a > 0$ com $a \neq 1$ são também funções transcendentes.

31) **Maior inteiro (menor ou igual do que)**: Se $X \subset \mathbb{R}$, a função maior inteior (menor ou igual do que) é a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; \quad n \leq x\}$.

    Para cada $x \in X$ esta função associa o maior dentre todos os inteiros menores ou iguais a x.

32) **Norma/Seminorma**: Suponha que V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma norma em V é uma aplicação (ou função ou funcional)

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\| \end{aligned}$$

    que satisfaz

    i) $\|u\| \geq 0$, e mais ainda, $\|u\| = 0$ se e somente se $u = 0$;

    ii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$;

    iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

    para todos $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

    Um espaço vetorial V que possui uma norma definida nele é chamado de espaço normado.

    Se no item (i) descrito acima, fosse removida a condição $\|u\| = 0$ se e somente se $u = 0$ então a aplicação é chamada de seminorma. Fica claro que toda norma é uma seminorma mas o contrário não é sempre verdadeiro.

33) **Métrica**: Suponha que V é um espaço vetorial. Uma métrica em V é uma aplicação (ou função ou funcional)

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto d(u, v) \end{aligned}$$

    que satisfaz

    i) $d(u, v) \geq 0$, e mais ainda, $d(u, v) = 0$ se e somente se $u = v$;

    ii) $d(u, v) = d(v, u)$;

iii) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$,

para todos $u, v \in V$.

Uma métrica em um conjunto V é uma noção de distância entre os elementos de V. Um espaço vetorial V que possui uma métrica definida nele é chamado de espaço métrico.

Se V é um espaço vetorial normado, então a aplicação $d(u,v) = \|v - u\|$ é uma métrica, chamada de métrica induzida pela norma.

34) **Produto interno**: Suponha que V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno em V é uma aplicação (ou função ou funcional)

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\to \mathbb{K} \\ (u,v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

que satisfaz

i) $\langle u, u \rangle \geq 0$, e além disso, $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se $u = 0$;

ii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;

iii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$;

iv) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

para todos $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

No item (*iii*), $\overline{\langle v, u \rangle}$ é o conjugado complexo de $\langle v, u \rangle$ no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e $\overline{\langle v, u \rangle} = \langle v, u \rangle$ no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Observe também que o item (*iii*) juntamente com o item (*iv*) significam que $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$ para todos $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial V que possui um produto interno definido nele é chamado de espaço com produto interno.

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno, a aplicação $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ é uma norma, chamada de norma induzida pelo produto interno.

4 Propriedades das aplicações

Nesta seção iremos descrever as propriedades das aplicações, mais especificamente as definições destas propriedades. Algumas destas propriedades podem ser atribuídas a qualquer classe de aplicações (funções, transformações ou morfismos) e algumas propriedades são específicas para apenas uma destas classes de aplicações. Estas propriedades não são exclusivas, sendo que uma aplicação ou função específica, pode possuir várias das propriedades que listaremos. Em particular as aplicações ou funções apresentadas na seção anterior podem possuir tais propriedades.

1) **Composta**: Dadas duas aplicações $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ a composta de f com g é a aplicação

$$\begin{aligned} (g \circ f) : X &\to Z \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

2) **Injetora**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é injetora se elementos distintos $x, y \in X$ estiverem associados a elementos distintos $f(x), f(y) \in Y$. Dito de outra forma, se $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$.

   Mas note que esta implicação é um tanto trabalhosa por se tratar de uma desigualdade. Matematicamente preferimos trabalhar com igualdades e neste caso usamos a contrapositiva equivalente, se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

   Desta forma f é injetora se $f(x) = f(y)$ implicar $x = y$. Lembremos que uma aplicação é uma lei que cada $x \in X$ associa apenas um elemento $y \in Y$. Mas isso não precisa ocorrer para os elementos de Y que podem estar associados a mais de um elemento de X. Uma aplicação injetora é uma aplicação que cada $y \in Y$ também está associado com apenas um $x \in X$.

3) **Sobrejetora**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é sobrejetora se qualquer elemento $y \in Y$ estiver associado com algum $x \in X$. Dito de outra forma, dado qualquer $y \in Y$, existe (pelo menos) um $x \in X$ de forma que $y = f(x)$.

   Então f é sobrejetora qualquer elemento de Y for imagem de algum elemento de X. Lembremos que em uma aplicação, todo elemento $x \in X$ deve estar associado com um elemento de y. Mas isso não precisa ocorrer para os elementos de Y que não precisam estar associados com elementos de X. Uma aplicação sobrejetora é uma aplicação que cada $y \in Y$ também está associado com algum $x \in X$.

4) **Bijetora**: Uma aplicação é bijetora se for simultaneamente injetora e sobrejetora.

5) **Invertível/Inversível pela direita**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é inversível pela direita, se existir uma aplicação $g : Y \to X$ de forma que $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in Y$. Em outras palavras, se $(f \circ g)$ é a aplicação identidade de Y.

   Neste caso, dizemos também que f possui ou admite inversa pela direita, e a aplicação g mencionada no parágrafo anterior é chamada de inversa pela direita de f.

   Um resultado clássico da análise matemática é que uma aplicação f é inversível pela direita, se e somente se, f é sobrejetora.

6) **Inversa pela direita**: Se $f : X \to Y$ é uma aplicação, e existir uma aplicação $g : Y \to X$ de forma que $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in Y$, então g é chamada de inversa pela direita de f.

   Neste caso, dizemos também que f possui ou admite inversa pela direita ou que f é inversível pela direita.

   Um resultado clássico da análise matemática é que uma aplicação f é inversível pela direita, se e somente se, f é sobrejetora. Além disso, no caso de f admitir uma inversa pela direita, esta inversa não é necessariamente única.

7) **Invertível/Inversível pela esquerda**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é inversível pela esquerda, se existir uma aplicação $h : Y \to X$ de forma que $(h \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, se $(h \circ f)$ é a aplicação identidade de X.

   Neste caso, dizemos também que f possui ou admite inversa pela esquerda, e a aplicação h mencionada no parágrafo anterior é chamada de inversa pela esquerda de f.

Um resultado clássico da análise matemática diz que uma aplicação f é inversível pela esquerda, se e somente se, f é injetora.

8) **Inversa pela esquerda**: Se $f : X \to Y$ é uma aplicação, e existir uma aplicação $h : Y \to X$ de forma que $(h \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$, então h é chamada de inversa pela esquerda de f.

   Neste caso, dizemos também que f possui ou admite inversa pela esquerda ou que f é inversível pela esquerda.

   Um resultado clássico da análise matemática diz que uma aplicação f é inversível pela esquerda, se e somente se, f é injetora. Além disso, no caso de f admitir uma inversa pela esquerda, esta inversa não é necessariamente única.

9) **Invertível/Inversível**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é inversível, ou invertível, se f for inversível pela direita e pela esquerda simultaneamente.

   Desta forma, f possui inversa pela direita $g : Y \to X$ e possui inversa pela esquerda $h : Y \to X$, e neste caso podemos provar que estas inversas são únicas e que elas coincidem, isto é, $g = h$. Sendo assim, utilizamos a representação $f^{-1} : Y \to X$ para representar estas inversas pela direita e pela esquerda de f. A aplicação f^{-1} é chamada de inversa de f e deve satisfazer portanto $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in Y$ e $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$.

   Neste caso, dizemos também que f possui ou admite inversa. Resultados da análise matemática garantem que uma aplicação f é inversível, se e somente se, f é bijetora.

10) **Inversa**: Se $f : X \to Y$ é uma aplicação bijetora, a aplicação inversa de f é a aplicação $f^{-1} : Y \to X$ que satisfaz $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$, e $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in Y$.

11) **Operador**: Um operador é uma transformação em que o domínio e o contradomínio são o mesmo conjunto. De outra forma, se V é um espaço vetorial, uma transformação $T : V \to V$ é chamado de operador.

    Embora a definição formal de operador exija que o domínio e o contradomínio sejam o mesmo conjunto é usual na literatura matemática chamar de operador uma transformação qualquer (mesmo que o domínio não coincida com o contradomínio).

12) **Operador linear**: Se U e V são dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma transformação $T : U \to V$ é linear se $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ para todos $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

    Note que exigimos agora que o domínio e o contradomínio da aplicação (transformação) sejam espaços vetoriais. Isso porque as expressões $\alpha u + \beta v$ e $\alpha T(u) + \beta T(v)$ exigem que estejam definidas no domínio e no contradomínio da aplicação uma adição e uma multiplicação por escalar. Os conjuntos matemáticos que possuem uma adição e uma multiplicação por escalar são os espaços vetoriais.

13) **Operador limitado**: Se U e V são dois espaços vetoriais normados, um operador $T : U \to V$ é limitado se existir uma constante C, de forma que $\|T(u)\|_V \leq C\|u\|_U$ para todo $u \in U$.

    Em outras palavras, um operador é limitado se a imagem de um conjunto limitado de U é também limitado em V. Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial no qual está definida uma norma.

14) **Operador bilinear**: Se U, V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma transformação (ou um operador) $T : U \times V \to W$ é bilinear se

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha T(u_1, v) + \beta T(u_2, v)$$

e

$$T(u, \gamma v_1 + \kappa v_2) = \gamma T(u, v_1) + \kappa T(u, v_2),$$

para todos $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \in \mathbb{K}$. Em outras palavras, T é bilinear se for linear na primeira e na segunda variável.

O produto escalar de $\mathbb{R}^2$, definido por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2, \end{aligned}$$

para quaisquer $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ é um dos exemplos mais clássicos de aplicação bilinear.

15) **Operador trilinear**: Se U, V, W e M são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma transformação (ou um operador) $T : U \times V \times W \to M$ é trilinear se

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2, v, w) = \alpha T(u_1, v, w) + \beta T(u_2, v, w),$$

$$T(u, \gamma v_1 + \kappa v_2, w) = \gamma T(u, v_1, w) + \kappa T(u, v_2, w)$$

e

$$T(u, v, \delta w_1 + \sigma w_2) = \delta T(u, v, w_1) + \sigma T(u, v, w_2),$$

para todos $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ e $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \delta, \sigma \in \mathbb{K}$. Em outras palavras, T é trilinear se for linear na primeira, na segunda e na terceira variável.

16) **Operador multilinear/n-linear**: Se U_k e V para $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ são $n+1$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma transformação (ou um operador) $T : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to W$ é n-linear ou multilinear se for linear em cada uma das n componentes variáveis.

17) **Operador sesquilinear**: Se U, V e W são espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, uma transformação (ou um operador) $T : U \times V \to W$ é sesquilinear se

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha T(u_1, v) + \beta T(u_2, v)$$

e

$$T(u, \gamma v_1 + \kappa v_2) = \overline{\gamma} T(u, v_1) + \overline{\kappa} T(u, v_2),$$

para todos $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, T é sesquilinear se for linear na primeira componente variável e conjugado linear na segunda variável.

18) **Operador simétrico**: Se V é um espaço vetorial com produto interno, uma transformação (ou um operador) $T : V \to V$ é simétrico se $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$, para todos $u, v \in V$.

19) **Operador antissimétrico**: Se V é um espaço vetorial com produto interno, uma transformação (ou um operador) $T : V \to V$ é antissimétrico se $\langle T(u), v \rangle = -\langle u, T(v) \rangle$, para todos $u, v \in V$.

20) **Operador alternado**: Se V é um espaço vetorial, uma aplicação multilinear ou um operador multilinear $T : V \to V$ é alternado se $T(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$ sempre que pelo menos dois vetores entre os $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forem iguais.

21) **Operador diagonalizável**: Um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável, se existe uma base para o espaço vetorial V formada por auto-vetores de T.

22) **Operador idempotente**: Um operador linear $T : V \to V$ é um operador idempotente se $T^2 = T$.

    A expressão T^2 significa T composta com T, isto é, $T^2 = T \circ T$.

23) **Operador autorreflexivo**: Um operador linear $T : V \to V$ é um operador autorreflexivo se T^2 é a aplicação identidade.

    A expressão T^2 significa T composta com T, isto é, $T^2 = T \circ T$. Se $T \circ T = I$ em que I é a aplicação identidade de U, então decorre da teoria das aplicações bijetoras que T é bijetora e que $T = T^{-1}$.

24) **Operador nilpotente**: Um operador linear $T : U \to V$ é um operador nilpotente se existir $k \in \mathbb{N}$ de forma que T^k é a aplicação identicamente nula.

    A expressão T^k significa T composta com T, k vezes.

25) **Operador compacto**: O conceito de operador compacto, também chamado de transformação linear compacta, é um conceito da Análise Funcional. Se X e Y são dois Espaços de Banach então uma transformação linear $T : X \to Y$ é compacta (ou um operador linear compacto), se dado qualquer conjunto limitado $B \subset X$, então $\overline{T(B)}$ é um conjunto compacto de Y.

    Note que para ser uma transformação compacta (ou um operador compacto) é obrigatório também que seja uma transformação linear.

26) **Operador adjunto**: Seja H um espaço de Hilbert, e $T : H \to H$ um operador linear limitado (equivalentemente um operador linear contínuo). Se existir um operador $T^* : H \to H$ que satisfaz

$$\langle u, T(v) \rangle = \langle T^*(u), v \rangle,$$

    para todos $u, v \in H$, então T^* é chamado de operador adjunto de T.

    Note que um operador linear T pode não possuir operador adjunto.

27) **Operador autoadjunto**: Um operador linear T é um operador autoadjunto se $T = T^*$, isto é, se T for igual ao seu operador adjunto.

28) **Operador normal**: Um operador linear T é um operador normal se $T \circ T^* = T^* \circ T$, isto é, se T comuta com o seu operador adjunto.

29) **Operador ortogonal**: Se U é um espaço vetorial com um produto interno, um operador $T : U \to U$ é um operador ortogonal se $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todos $u, v \in V$.

    É conhecido também da Análise Funcional ou da Álgebra Linear que um operador T é ortogonal se e somente se $\|T(u)\| = \|u\|$ para todo $u \in U$. Em outras palavras T preserva a norma.

30) **Vetorial**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada de aplicação ou função vetorial se o domínio X é um conjunto numérico e o contradomínio é um conjunto de vetores. Em outras palavras para cada $x \in X$, $f(x)$ é um vetor.

31) **Multivalente**: Este termo parece ferir o conceito primordial de uma função ou aplicação. Uma aplicação deve obrigatoriamente a cada elemento x pertencente ao domínio, associar apenas um elemento do contradomínio. Uma aplicação ou função multivalente é uma aplicação que associa a cada elemento do domínio, mais de um elemento do contradomínio.

    Embora isto pareça uma contradição, o termo multivalente é usado no estudo de certas funções de variável complexa.

32) **Função crescente**: Se $X \subset \mathbb{R}$ uma função crescente é uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(x) < f(y)$ para todos $x, y \in X$ com $x < y$.

33) **Função não decrescente**: Se $X \subset \mathbb{R}$ uma função não decrescente é uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(x) \leq f(y)$ para todos $x, y \in X$ com $x < y$.

34) **Função decrescente**: Se $X \subset \mathbb{R}$ uma função decrescente é uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(y) < f(x)$ para todos $x, y \in X$ com $x < y$.

35) **Função não crescente**: Se $X \subset \mathbb{R}$ uma função não crescente é uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(y) \leq f(x)$ para todos $x, y \in X$ com $x < y$.

36) **Função monótona**: Uma função $f : X \to Y$ é monótona se for crescente, decrescente, não crescente ou não decrescente.

37) **Função limitada inferiormente**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente se existir $N \in \mathbb{R}$ de forma que $N \leq f(x)$ para todo $x \in X$. De outra forma, podemos dizer que $f(x) \in [N, \infty)$ para todo $x \in X$.

    O número N que satisfaz a definição é chamado de limitante inferior de f. Note que, se existir, este N não é único. De fato, qualquer outro número $C < N$ também satisfaz $C < N \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e portanto C é também um limitante inferior para f.

38) **Função limitada superiormente**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente se existir $M \in \mathbb{R}$ de forma que $f(x) \leq M$ para todo $x \in X$. De outra forma, podemos dizer que $f(x) \in (-\infty, M]$ para todo $x \in X$.

    O número M que satisfaz a definição é chamado de limitante superior de f. Note que, se existir, este M não é único. De fato, qualquer outro número $C > M$ também satisfaz $f(x) \leq M < C$ para todo $x \in X$ e portanto C é também um limitante superior para f.

39) **Função limitada**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada se for simultaneamente limitada inferiormente e limitadas superiormente. Isto é, se existirem $n, M \in \mathbb{R}$ de forma que $N \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in X$, ou ainda se $f(x) \in [N, M]$ para todo $x \in X$.

40) **Função não negativa**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é não negativa se $0 \leq f(x)$ para todo $x \in X$, ou equivalentemente, se $f(x) \in [0, \infty)$ para todo $x \in X$.

    Note que uma função não negativa é uma função limitada inferiormente.

41) **Função positiva**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é positiva se $0 < f(x)$ para todo $x \in X$, ou equivalentemente, se $f(x) \in (0, \infty)$ para todo $x \in X$.

Note que uma função positiva é uma função limitada inferiormente e também é uma função não negativa.

42) **Função não positiva**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é não positiva se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in X$ ou ainda se $f(x) \in (-\infty, 0]$ para todo $x \in X$.

Uma função não positiva é uma função limitada superiormente.

43) **Função negativa**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é negativa se $f(x) < 0$ para todo $x \in X$ ou ainda se $f(x) \in (-\infty, 0)$ para todo $x \in X$.

Uma função negativa é uma função limitada superiormente e também é uma função não positiva.

44) **Função par**: Uma função par é uma função $f : X \to Y$ que satisfaz $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

45) **Função ímpar**: Uma função ímpar é uma função $f : X \to Y$ que satisfaz $f(-x) = -f(x)$ (ou equivalentemente $f(x) = -f(-x)$) para todo $x \in X$.

46) **Função periódica**: Uma função ou aplicação $f : X \to Y$ é periódica se existir $T \in X$ de forma que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in X$. Neste caso o menor número T positivo que satisfaz essa propriedade é chamado de período de f.

47) **Contínua**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua em um ponto $a \in X$ se

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x). \tag{1}$$

Note que esta igualdade implica que f deve estar definida em $a \in X$, que o limite do lado direito da igualdade exista e que ambos os valores coincidem. Podemos também dizer que a aplicação f é contínua em todo o conjunto X se for contínua em todo ponto $a \in X$.

O conceito de limite é um conceito do Cálculo Diferencial e Integral. Não vamos aqui discutir este conceito pois está fora do contexto deste material. O leitor não familiarizado com o conceito de limite pode consultar Guidorizzi (2001) ou outro texto de Cálculo Diferencial e Integral.

A igualdade (1) pode ser reescrita usando a definição formal de limite. Nestes termos $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta.$$

Geralmente esta última formulação faz parte de um curso de Análise Real. Note que $|x-a|$ e $|f(x) - f(a)|$ são expressões que fazem alusão ao conceito de distância, uma destas distâncias medida no conjunto X e a outra medida no conjunto Y. É preciso portanto que os conjuntos X e Y tenham uma noção de distância entre os seus elementos.

O conceito de continuidade de uma aplicação pode ainda ser formulado sem a necessidade de uma noção de distância nos conjuntos. A Topologia é um ramo da matemática em que não há a necessidade de se definir uma norma ou distância nos conjuntos. Mesmo assim é possível definir a continuidade de uma aplicação utilizando as ferramentas da Topologia. Na Topologia, se X e Y são dois espaços topológicos, uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, dado qualquer aberto $V \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(V) = \{a \in X; \quad f(a) \in V\} \subset X$ é também aberto.

Novamente, não vamos aqui apresentar ou discutir os conceitos de conjunto aberto ou de espaço topológico. O leitor interessado nas noções topológicas mencionadas pode consultar Lima (2024) ou outro texto de Topologia.

48) **Descontínua**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é descontínua em um ponto $a \in X$ se ela não for contínua em a. De acordo com a definição de continuidade de uma aplicação em um ponto a, podemos afirmar que f é descontínua em a se f não estiver definida em a, se não existir o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ou caso existam estes valores não são iguais.

    Podemos também dizer que f é descontínua em X se for descontínua em algum ponto $a \in X$.

49) **Uniformemente contínua**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é uniformemente contínua se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - y| < \delta$$

    quaisquer que sejam $x, y \in X$.

    Resultados de Análise garantem que uma função uniformemente contínua é uma função contínua. O recíproco não é necessariamente verdadeiro.

50) **Equicontínua**: Este é um conceito que não se aplica a uma aplicação em específico mas a um conjunto de aplicações $\mathcal{F} = \{f_j; \quad j \in J\}$ em que J é algum conjunto de índices.

    Dizemos que a família de aplicações $\mathcal{F}$ é equicontínua se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - y| < \delta$$

    quaisquer que sejam $x, y \in X$ e $j \in J$.

    De outra forma, a família $\mathcal{F}$ é equicontínua se cada uma das aplicações f_j for uniformemente contínua com o mesmo δ.

51) **Semicontínua inferiormente**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é semicontínua inferiormente em $a \in X$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ de forma que

$$f(a) - \varepsilon < f(x) \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta.$$

    Dizemos que f é semicontínua inferiormente (em X) se for semicontínua inferiormente em todos os pontos $a \in X$.

    Uma função contínua é uma função semicontínua inferiormente. Uma função semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente é uma função contínua.

52) **Semi-contínua superiormente**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é semicontínua superiormente em $a \in X$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ de forma que

$$f(x) < f(a) + \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta.$$

Dizemos que f é semicontínua superiormente (em X) se for semicontínua superiormente em todos os pontos $a \in X$.

Uma função contínua é uma função semicontínua superiormente. Uma função semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente é uma função contínua.

53) **Lipschitz contínua**: Suponha que X e Y sejam dois espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma aplicação Lipschitziana se existir uma constante C, chamada de constante de Lipschitz, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|,$$

para todos $x, y \in X$.

Uma aplicação Lipschitziana também é chamada de Lipschitz contínua já que a condição de Lipschitz garante a continuidade uniforme de f.

54) **Hölder contínua**: Suponha que X e Y sejam dois espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma aplicação Hölder-contínua com expoente $\sigma \in (0, 1]$ se existir uma constante C de forma que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\sigma,$$

para todos $x, y \in X$.

No caso em que $\sigma = 1$, a condição de Hölder coincide com a condição de Lipschitz.

55) **Função derivável**: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $a \in X$ se existir o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ou o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

É conhecido do Cálculo Diferencial e Integral que os dois limites acima são coincidentes. No caso de algum deles existir o outro limite também existe e os valores destes limites coincidem. No caso de existir o valor do limite é chamado de derivada de f no ponto a e representado por $f'(a)$.

Uma função f é derivável em um conjunto X se for derivável em todos os pontos $a \in X$. Não vamos neste texto discutir a existência ou como calcular os limites acima. O leitor interessado neste assunto pode consultar Guidorizzi (2001) ou algum outro texto sobre Cálculo Diferencial e Integral.

56) **Função diferenciável**: Uma função de várias variáveis reais $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um ponto x_0 se existe uma aplicação linear $D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - D(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Quando $m = n = 1$ o conceito de diferenciabilidade coincide com o conceito de derivabilidade.

57) **Função derivada**: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em todos os pontos do conjunto X, então a função $f' : X \to \mathbb{R}$ que a cada ponto $x \in X$ associa $f'(x)$ é a função derivada de f.

58) **Função continuamente derivável**: Uma função $fXX \to \mathbb{R}$ é uma função derivável com derivada f' contínua.

59) **Função uniformemente derivável**: Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente derivável se f for derivável em I e para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$
sempre que $0 < |h| < \delta$ para $x, x+h \in I$.

60) **Imersão**: Uma imersão é uma função ou aplicação diferenciável entre superfícies diferenciáveis, cuja derivada é injetiva em todos os pontos.

61) **Homeomorfismo**: Um homeomorfismo $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e bijetora, com inversa $f^{-1} : Y \to X$ contínua.

62) **Difeomorfismo**: Um difeomorfismo $f : X \to Y$ é uma aplicação derivável e bijetora, com inversa $f^{-1} : Y \to X$ derivável.

63) **Função integrável**: Uma função integrável em um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma função $f : X \to \mathbb{R}$ de forma que existe a integral
$$\int_X f(x)dx.$$
Este é um conceito do Cálculo Diferencial e Integral, e não vamos aqui neste texto discutir como calcular a expressão acima, chamada de integral de f em X. O leitor interessado neste conceito pode consultar Guidorizzi (2001) ou algum outro texto sobre Cálculo Diferencial e Integral.

64) **Função analítica**: Se $D \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto, uma função complexa $f : D \to \mathbb{C}$ é analítica em um ponto $z_0 \in D$ se for derivável em todo o conjunto $B(z_0, r) = \{z \in D \quad |z - z_0| < r\}$ para algum $r > 0$.

De outra forma, f é analítica em z_0 se for derivável em z_0 e em uma bola de raio r centrada em z_0..

65) **Função inteira**: Uma função complexa é uma função inteira, se for analítica em todo o plano complexo.

66) **Função holomorfa**: Se $D \subset \mathbb{C}$, uma função complexa $f : D \to \mathbb{C}$ é holomorfa se for analítica em cada $z_0 \in D$.

67) **Função meromorfa**: Se $D \subset \mathbb{C}$, uma função complexa $f : D \to \mathbb{C}$ é meromorfa em uma região $\Omega \subset D$ se for analítica (ou holomorfa) em Ω exceto em polos isolados de Ω.

68) **Função conforme**: Sejam $D \subset \mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Suponha que C_1 e C_2 são duas curvas suaves contidas em D que se cruzam em um ponto $z_0 \in D$ e sejam $S_1 = f(C_1) = \{f(z); \quad z \in C_1\}$ e $S_2 = f(C_2) = \{f(w); \quad w \in C_2\}$ as imagens das curvas C_1 e C_2 que se cruzam no ponto $f(z_0)$. A função ou aplicação f é uma aplicação conforme se o ângulo entre as curvas C_1 e C_2 em z_0 for igual ao ângulo entre as curvas S_1 e S_2 em

$f(z_0)$, em valor absoluto e em sentido (ambos medidos no sentido horário ou ambos medidos no sentido anti-horário).

De outra forma mais simplificada, f é conforme se preserva ângulos.

69) **Mensurável**: Sejam X e Y dois espaços topológicos mensuráveis. Uma aplicação $f : X \to Y$ é mensurável se para cada conjunto mensurável $A \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(A) = \{x \in X; \quad f(x) \in A\} \subset X$ é mensurável.

70) **Convexa**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é convexa se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$.

Geometricamente, no caso em que há uma representação gráfica para a aplicação f, quando $t \in [0, 1]$, o ponto $((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y))$ é um ponto localizado no segmento que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$. Geometricamente então, uma aplicação convexa é uma aplicação em que o segmento que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está acima do gráfico de f ou toca o gráfico de f, quaisquer que sejam os pontos x e y escolhidos do domínio. Isto também significa que a concavidade do gráfico da aplicação é voltada para cima.

71) **Estritamente convexa**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é estritamente convexa se

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$.

72) **Côncava**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é côncava se

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$.

Geometricamente, no caso em que há uma representação gráfica para f, quando $t \in [0, 1]$, o ponto $((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y))$ é um ponto localizado no segmento que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$. Desta forma, uma aplicação côncava é uma aplicação em que o segmento que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está abaixo do gráfico de f ou toca o gráfico de f, quaisquer que sejam os pontos x e y escolhidos do domínio. Isto também significa que a concavidade do gráfico da aplicação é voltada para baixo.

73) **Estritamente côncava**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é estritamente côncava se

$$f((1-t)x + ty) > (1-t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$.

74) **Isometria**: Se X e Y são dois espaços métricos com as respectivas métricas d_X e d_Y, uma aplicação $f : X \to Y$ é uma isometria se

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in X$.

75) **Contração**: Se X e Y são dois espaços métricos com as respectivas métricas d_X e d_Y, uma aplicação $f : X \to Y$ é uma contração se

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in X$.

76) **Dilatação**: Se X e Y são dois espaços métricos com as respectivas métricas d_X e d_Y, uma aplicação $f : X \to Y$ é uma dilatação se

$$d_Y(f(x), f(y)) \geq d_X(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in X$.

77) **Inclusão**: Se $X \subset Y$, a aplicação inclusão é a aplicação $f : X \to Y$ definida pela lei de formação $f(x) = x \in X \subset Y$.

78) **Restrição**: Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Se $A \subset X$, a aplicação restrição de f ao conjunto A é a aplicação $h : A \to Y$ definida pela lei de formação $h(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Uma aplicação restrição é tradicionalmente representada por $f|_A$. Essencialmente a restrição tem o papel de manter a lei de formação mas com domínio reduzido ao conjunto $A \subset X$.

79) **Extensão**: Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Se $X \subset A$, a aplicação extensão de f ao conjunto A é a aplicação $h : A \to Y$ definida pela lei de formação $h(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Essencialmente a extensão tem o papel de ampliar o domínio da aplicação mantendo a lei de formação no subconjunto $X \subset A$.

80) **Projeção**: A aplicação projeção é a aplicação

$$\begin{aligned} f : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = x, \end{aligned}$$

e neste caso dizemos também que esta aplicação é a projeção sobre a primeira componente.

Podemos também definir a aplicação dada por $f(x, y) = y$ que chamaremos de projeção sobre a segunda componente. É possível definir projeções de forma mais geral colocando

$$\begin{aligned} f : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n &\to X_k \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_k, \end{aligned}$$

sendo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neste caso a projeção é chamada de projeção sobre a k-ésima componente.

81) **Coerciva**: Seja V um espaço vetorial normado. Uma aplicação ou um funcional bilinear $T : V \to V \to \mathbb{R}$ é coerciva, quando existe um número real $\beta > 0$ tal que $T(u, u) = \beta \|u\|^2$.

82) **Aberta**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma aplicação aberta se $f(A)$ é um conjunto aberto qualquer que seja o conjunto aberto $A \subset X$. Em outras palavras, f é aberta se a imagem de qualquer aberto de X é um aberto de Y.

83) **Fechada**: Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma aplicação fechada se $f(F)$ é um conjunto fechado qualquer que seja o conjunto fechado $F \subset X$. Em outras palavras, f é fechada se a imagem de qualquer fechado de X é um fechado de Y.

84) **Homomorfismo**: Um homomorfismo é uma aplicação que preserva a estrutura entre duas estruturas algébricas.

    Uma estrutura algébrica é um grupo, um anel ou um corpo. Como um grupo exige apenas uma operação, um homomorfismo entre dois grupos $(G, *)$ e $(H, \circ)$ é uma aplicação $f : G \to H$ de forma que
    $$f(x * y) = f(x) \circ f(y),$$
    para todos $x, y \in X$.

    No caso de um anel, como existem duas operações envolvidas, um homomorfismo entre os anéis $(A, *, \circ)$ e $(B, \oplus, \odot)$ é uma aplicação $f : A \to B$ que satisfaz
    $$f(x * y) = f(x) \oplus f(y),$$
    e
    $$f(x \circ y) = f(x) \odot f(y),$$
    para todos $x, y \in A$.

85) **Endomorfismo**: Um endomorfismo é um homomorfismo em que o domínio e o contradomínio coincidem.

86) **Epimorfismo**: Um epimorfismo é um homomorfismo sobrejetor.

87) **Monomorfismo**: Um monomorfismo é um homomorfismo injetor.

88) **Isomorfismo**: Um isomorfismo é um homomorfismo bijetor.

89) **Automorfismo**: Um automorfismo é um isomorfismo em que o domínio e o contradomínio coincidem.

5 Considerações Finais

Este trabalho reuniu uma grande lista de tipos e propriedades de aplicações que dependendo do contexto e de sua natureza são designados por funções, transformações, formas ou morfismos. No caso das funções, ao leitor podemos dizer que existe um lista maior ainda de denominações para as funções que englobam tipos e propriedades que não foram contempladas nesse material, e que por vezes, exigem um conhecimento mais aprofundado e complexo. Fizemos um trabalho de pesquisa para concentrar e trazer um bom número de terminações que estão diretamente associadas às funções. Varremos exaustivamente o que encontramos nos livros que tratam do conceito de função de uma variável real.

Muitos termos e propriedades extrapolam o conhecimento matemático presente no ensino fundamental ou médio. Porém nos atrevemos em dizer que todas as funções e propriedades estudadas e abordadas no ensino fundamental e médio foram contempladas nesse material. Para essas funções e propriedades fizemos a apresentação formal, definindo-as ou caracterizando-as. Além de varrer todo o campo do nível médio, expandimos o tratamento de funções e/ou aplicações para níveis mais avançados de conhecimento e trouxemos um leque de definições que também pode servir de material de busca para o nível universitário.

Sentimos que o objetivo desse trabalho foi alcançado mas que a construção desse material pode ainda continuar. Com toda a certeza existem termos técnicos que não foram mencionados neste trabalho.

6 Referências

Domingues, Hygino H. & Iezzi, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4^a edição. Editora Atual. São Paulo, 2003.

Guidorizzi, Hamilton L. **Um curso de cálculo**. Volume 1, 5^a edição, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001.

Lima, Elon L. **Elementos de Topologia Geral**. Textos Universitários, 4^a edição, io de Janeiro: SBM, 2024.

Índice Remissivo