UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

PRODUTO EDUCACIONAL

Professor orientador: Dr. Carlos Rodrigues da Silva

Orientando: Mauro Sergio Santana

O Cálculo do Volume

Habilidade EF05MA21: Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.

Introdução

Áreas e volumes são as primeiras noções geométricas a despertarem o interesse do homem com a necessidade que tinham em medir as terras e definir o limite das propriedades. É um assunto rico em sua aplicabilidade no cotidiano e pode, nesse aspecto, cumprir perfeitamente o caráter da aprendizagem significativa tão procurada atualmente e tratada nesse trabalho, pois é, talvez, o assunto com maior possibilidade desse aspecto de o aluno trabalhar com o concreto. É também, vasta nesse assunto, a possiblidade de proposta de problemas importante em que os alunos exercitam a técnica de resolução esquematizada nos capítulos anteriores. Talvez por, isso a grande maioria dos alunos demonstram enorme interesse quando tratamos desse assunto no Ensino Médio. E esse interesse dos alunos deve ser buscado e mantido pelo professor ao introduzir esse conceito no Ensino Médio. Apresentar as definições formais e regras sob forma de receita para calcular volume, como ás vezes é feito em alguns livros didáticos, tem grande chance de desmotivar o interesse do aluno pelo tema. Apresentar, de início, uma ideia intuitiva de volume e aguçar a curiosidade do aluno com várias comparações de objetos sólidos de várias formas, em que o aluno compare qual tem maior ou menor volume é mais próprio e mantem a curiosidade do aluno em, sentindo a dificuldade de uma análise mais adequada na comparação, se interessar pela busca da forma de se determinar o volume desse sólidos.

Na busca de conceituar essa grandeza “volume” temos uma diferença fundamental nos procedimentos adotados para o cálculo de áreas e para o cálculo de volume. Não é possível, em volume, a dedução como é feito em área, onde decompomos um polígono em polígonos menores e mais simples. Pois no estudo de áreas, para se chegar na área de um polígono qualquer partimos do cálculo da área de um retângulo, e seguimos, então, deduzindo a área do paralelogramo por cortes no retângulo, seguindo para a área do triângulo, por cortes no paralelogramo e, então, chegamos na área de um polígono qualquer, seccionando-o em vários triângulos. Desse processo chegar-se a área de uma figura plana, a qual definimos, de forma intuitiva, como sendo um número real cujas aproximações por faltas são áreas dos polígonos nela inscritos. Todo esse procedimento em área é garantido pelo Teorema de Bolyai, onde afirma que dois polígonos que mesma área são sempre decomponíveis, ou seja podemos sempre decompor um em linhas poligonais de forma seja congruentes a linhas poligonais do outro (cortar um triangulo e forma um quadrado de mesma). Já para o estudo de volume não podemos seguir esse procedimento de recorte, como feito em área. Não podemos calcular, por exemplo, o volume de um prisma triangular como feito no cálculo da área de um triângulo, por cortes em um paralelogramo. Pois dois poliedros de mesmo volume não são necessariamente equidecomponíveis.

Para um estudo mais aprofundado de volume temos que, inevitavelmente, usar o recurso do cálculo infinitesimal (Limites, Derivadas e Integrais) em suas noções de funções, limites, derivadas e integrais. Não vale, nesse estudo, o achismo muitas vezes concretizado nas fórmulas encontrada em alguns livros didáticos. A busca de métodos que tratam do conceito de volume de forma matematicamente honesta mais em uma linguagem acessível em cada etapa do Ensino costuma apresentar as alternativas que veremos a seguir.

Método para o Cálculo de Volume

Nessa busca dos métodos, para uma conceituação matematicamente honesta no estudo de volumes, podemos usar alguns métodos nas demonstrações das fórmulas estudas:

1) Passagem ao limite

Trabalha-se a ideia do infinito. É uma abordagem clássica onde o volume dos "corpos redondos" (cilindro, com e esfera) é obtido por aproximações do volume de outros sólidos, como no caso do volume do cone e cilindro obtido por aproximação de pirâmides e prismas respectivamente ou por aproximações do volume de figuras obtidas por rotações de polígonos, como no caso do volume da esfera, obtida pela rotação em torno do diâmetro de um polígono regular inscrito no círculo equatorial.

Nesse método usamos a ideia intuitiva dada pela *função volume* (que veremos adiante), onde, uma de suas propriedades é de que o volume da união de dois sólidos que tem em comum apenas uma superfície é a soma dos volumes de cada um e assim podemos calcular o volume por aproximações que, quando passamos o limite, fazemos o número de lados dos polígonos considerados nessas aproximações aumentem indefinidamente.

2) O conceito de Integral

É um estudo mais avançado e próprio para volumes. A integral de funções elementares é mais eficiente na dedução das fórmulas e no cálculo volumes de sólidos, pois é definitivo e tem a vantagem da variedades de aplicações em outras áreas como em Física, mas tem uma linguagem muito rigorosa e de difícil acesso aos alunos do Ensino Médio.

O Cálculo Integral e Diferencial já fez parte do currículo do Ensino Médio, talvez por considerarem o seu aspecto de ser definitivo no cálculo de volumes e de sua aplicabilidade, mas foi banido justamente pela linguagem pouco acessível aos alunos nessa fase do ensino. Nos Trabalhos de Conclusão de Curso do PROFMAT da minha turma, tem um tema focado nesse sentido, onde ele busca introduzir o Cálculo no Ensino Médio em uma linguagem mais suave, tentando passar justamente essas vantagens de se trabalhar com integrais no cálculo de áreas e volumes.

3) O Princípio de Cavalieri

É um princípio de enunciado simples, de fácil acesso aos alunos do ensino médio e permite trabalhar de forma intuitiva mas honesta e matematicamente aceitável para o estudo de volumes. É a melhor alternativa para as justificativas das fórmulas clássicas de volume do sólidos que não sejam os “corpos redondos” onde não se aplica esse princípio.

Veremos mais adiante os detalhes e aplicações desse princípio.

Definição de Volume

A ideia intuitiva de volume é a seguinte:

Volume é a medida de espaço ocupado por um sólido.

Para uma definição mais formal de volume, o professor Elon, por exemplo, parte da definição da *função volume.*

Função volume é uma função que a cada sólido X associa um número real v(X) com as propriedades que resumidamente são:

i) $v(X) > 0$;

ii) v(X) é invariante de movimento do sólido;

iii) Se o sólido for decomposto como reunião de duas partes X_1 e X_2, de tal modo que a parte comum entre elas é uma superfície, então:

$v(X) = v(X_1) + v(X_2)$. Daí resulta que se $X_1 \subset X_2$ então, $v(X_1) < v(X_2)$

Na interpretação dessas propriedades, podemos definir a grandeza volume (de forma intuitiva e seguindo um procedimento que veremos mais adiante) como sendo:

Um número real cujas aproximações por falta são volumes dos poliedros retangulares contidos nele.

Dessa forma reduzimos, a determinação do volume de um sólido, ao volume dos poliedros retangulares nele contido, os quais, por sua vez, decorrem da determinação do volume do bloco retangular, pois o bloco retangular é definido como uma composição finita, por justaposição, de blocos retangulares.

Antes, porém, recordaremos a noção de proporcionalidade, pois na determinação do volume do bloco retangular, veremos que o procedimento se resume na adoção de uma unidade de volume e na noção de proporcionalidade do volume com relação as dimensões do bloco.

Proporcionalidade

Atividade 1

Como a noção de proporcionalidade é fundamental na determinação do volume do bloco retangular que veremos a seguir, podemos induzi-la ao aluno usando exemplos concretos com blocos retangulares para que o aluno perceba a relação do volume desses blocos com cada uma de suas dimensões. Usando sólidos cuja base horizontal seja sempre a mesma, como um copo cilíndrico, por exemplo, enchendo com água levar o aluno a perceber, que o volume é proporcional à altura do recipiente. O que é uma boa forma de induzi-lo a ideia intuitiva do Princípio de Cavalieri, necessário, mais adiante, para o cálculo de volume de diferentes sólidos. O aluno pode perceber nessas comparações, a ideia que esse princípio traz, onde o volume de alguns sólidos pode ser calculado comparando-os com o volume de sólidos de mesma base, porém de formas mais fácil se serem calculados. É também uma boa forma para, como Arquimedes, perceber como calcular o volume de alguns sólidos maciços, por imersão comparando o deslocamento da altura do líquido no recipiente.

Proporcionalidade é um dos conceitos mais antigo e mais importante da matemática elementar. É a base desse caráter prático que alguns autores dão para matemática quando a define como sendo um conjunto de teorias gerais e abstratas que se aplica a uma situação concreta, pois está entranhado nas noções de aplicabilidade da matemática na vida cotidiana. Até mesmo nos assuntos mais avançados da matemática e noção de proporcionalidade também é importante, como no Cálculo, que se baseia em tornar as coisas não lineares (curvas e "corpos redondos") em lineares onde vale a proporcionalidade.

Um erro comum é pensar que duas crescentes entre si são proporcionais, o que não é verdade.

Duas grandezas x e y são proporcionais quando existem uma correspondência, que associa a cada valor de x de uma um valor y a outra, de tal forma que:

1) Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos:

Se $x \to y$ e $x' \to y'$, então $x < x'$ implica $y < y'$

2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor dy será dobrado, triplicado, etc. Em termos matemáticos

Se $x \to y$ então $nx \to ny$, *para todo n (fator de proporcionalidade) natural.*

Com essa noção de proporcionalidade, inicial definida para números naturais (ou até mesmos racionais) podemos determinar o volume do bloco retangular. Para uma definição mais completa de volume é necessário o recurso do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, onde estende essa noção para números reais. O professor pode usá-la como um fato deixando sua demonstração para outro momento

Bloco Retangular

Vimos, então que, na interpretação das propriedades da definição da *função volume* podemos seguir num procedimento para o cálculo do bloco retangular. Veremos dois procedimentos que em comum partem da adoção de unidade de volume como sendo o volume de um cubo de aresta 1 (uma unidade de comprimento) e, com a noção de proporcionalidade, determina-se o volume do bloco retangular para, então seguir determinando o volume dos principais sólidos.

1° Procedimento:

Podemos determinar o volume do bloco retangular partindo da definição da função volume vista acima no seguintes esquema:

Considerando o bloco retangular com um paralelepípedo cujas arestas são mutualmente perpendiculares, considera o volume V como uma função de suas coordenadas no espaço, logo V(x, y, z).

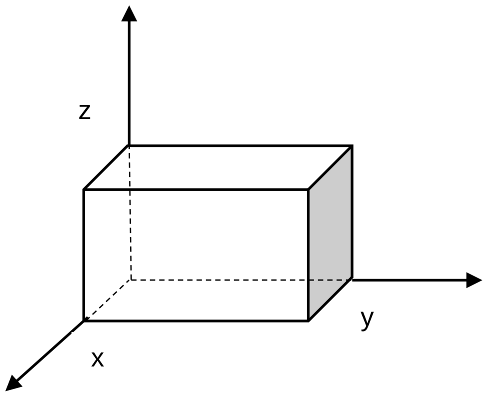


Figura 5.5.1: Coordenadas do Bloco

Fixando duas de suas coordenadas, por exemplo y e z, o volume V é proporcional a x. E a expressão matemática dessa proporcionalidade é uma função linear V(x) = ax, onde a é fator de proporcionalidade. Assim tomando a = 1, temos:

$$V(x, y, z) = V(1.x, y, z)$$
$$= xV(1, y, z)$$

Assim por diante, para as coordenadas y e z.

$$V(x, y, z) = xyV(1, 1.y, z)$$
$$= xyV(1, 1, z)$$
$$= xyV(1,1, 1.z)$$
$$= xyzV(1, 1, 1)$$
$$= xyz. 1,$$

= xyz, pois V(1, 1, 1) é definido como volume 1, volume do paralelepípedo tomado por (x, y, z) = (1, 1, 1) (cubo de aresta de uma medida de unidade)

Com o auxílio do Teorema Fundamental da Proporcionalidade o fator de proporcionalidade a é um número real. Assim o volume de um bloco retangular é proporcional a cada uma de suas coordenadas.

2° procedimento:

No material do PROFMAT, temos uma forma semelhante, mas um pouco mais direta de determinarmos o volume do bloco retangular. Adotou-se intuitivamente como fato o conceito de proporcionalidade, determinou o volume desse bloco como sendo composto de blocos unitários (cubo de aresta de medida uma unidade de comprimento). Para isso, bastou observar que o volume do bloco retangular é respectivamente proporcional a cada uma de suas dimensões (comprimento, largura e altura), ou seja, dobrando, triplicando, etc. uma de suas dimensões o volume dobra, triplica, etc.

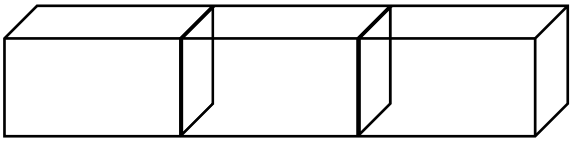


Figura 5.5.2: Volume Proporcional do Bloco

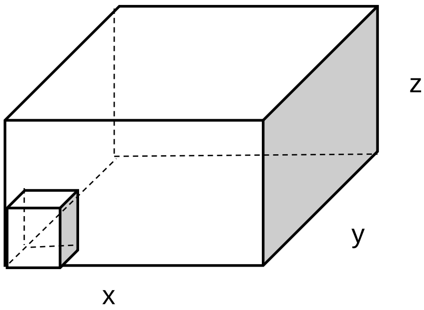


Figura 5.5.3: Bloco Retangular

Assim, sendo V(x, y, z) o volume do bloco retangular de dimensões x, y e z, temos:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V(x.1, y.1, z.1) \\ &= xV(1, y.1, z.1) \\ &= xyV(1, 1, z.1) \\ &= xyzV(1, 1, 1) \\ &= xyz, \end{aligned}$$

Pois V(1, 1, 1) é unidade de volume (volume do cubo de aresta uma unidade)

Neste modo também necessitamos do auxílio do Teorema Fundamental da Proporcionalidade para validar que o fator de proporcionalidade seja um número real. Assim o volume de um bloco retangular é proporcional a cada uma de suas coordenadas.

Dominado esse assunto de obter o volume dos blocos retangulares, podemos avançar para o volume de os outros sólidos. Para isso definimos volume como sendo um número real sujas aproximações por falta são volumes dos poliedros retangulares nele contidos, cujo os volumes já sabemos determinar, pois poliedros retangulares é definido com uma composição finita, por justaposição, de blocos retangulares. Veja no esquema abaixo.

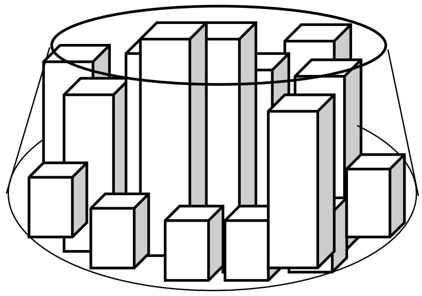


Figura 5.5.4: Aproximações por poliedros

Essa definição preliminar de volume como sendo um número real cujas aproximações por falta são volumes dos blocos retangulares nele contidos, é uma definição que a priori dá a ideia intuitiva interpretada pelas propriedades da função volume mas é um pouco restrita. O problema é que, para muitos poliedros não conseguimos realizar esse processo utilizando uma quantidade finita de peças, forçando, inevitavelmente, o uso o cálculo infinitesimal para uma interpretação mais geral de volume. Podemos, então, nesse aspecto recorrer a uma forma também simples mais muito forte em sua conceituação matemática, que é o Princípio de Cavalieri, o qual é resultado do Cálculo Integral mas numa linguagem mais simples e acessível aos alunos do Ensino Médio. É um princípio matemático bastante forte para o cálculo de volume dos sólidos clássicos estudados nessa fase do ensino básico. É o que veremos no capítulo seguinte.

Atividade 2

Neste momento já podemos propor problemas onde o conceito de volume seja aplicado a paralelepípedo retangular, bem como aplicar todas os outros conceitos da Geometria Espacial características desse sólido: Relação de Euler para esse poliedro, diagonais etc.

Assim procurei problemas que que focassem a contextualização, fato importante na motivação para a aprendizagem do aluno, nessa linha da aprendizagem significativa defendida nesse trabalho. Nos problemas mais usuais (problemas convencionais ou problemas de reconhecimento na classificação dada no capítulo 2) segui, no primeiro exemplo como modelo para os demais, o esquema de resolução de problemas detalhado por Polya num exemplo que envolve as diagonais do bloco retangular.

1) Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.

Resolução: No esquema de resolução de problemas, temos:

Compreensão:

Qual a incógnita?

O comprimento da diagonal de um paralelepípedo.

Quais os dados?

O comprimento, a largura e altura do paralelepípedo.

Adotando uma notação adequada. Qual letra representará a incógnita e os dados?

x para incógnita e a, b e c para os dados.

Qual a condicionante entre a, b e c com x?

x é a diagonal do paralelepípedo no qual a, b e c são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.

A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

Sim, se conhecermos a, b e c, conheceremos o paralelepípedo e sua diagonal poderá ser determinada.

Plano:

Neste problema basta conhecermos o teorema de Pitágoras e algumas das aplicações à Geometria Plana e um conhecimento mesmos que superficial de Geometria Espacial. Um desenho indicativo explicita a ideia de resolução que é a introdução de um triângulo retângulo destacada na figura.

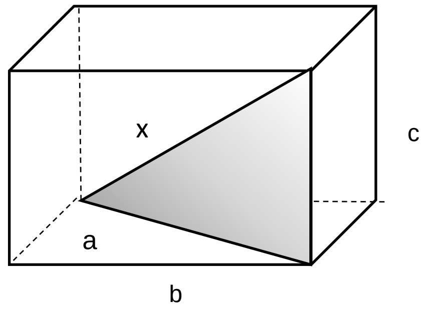


Figura 5.6: Diagonal do Paralelepípedo

Execução:

Temos já a ideia da resolução. É fácil perceber que já temos o triângulo retângulo no qual x é a hipotenusa e c é um do catetos; o outro cateto é a diagonal de uma face, a qual denotamos por y. Dessa forma estamos introduzindo um problema auxiliar cuja a incógnita é y. Calculando um triângulo após o outro teremos:

$$x^2 = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

E daí, eliminando a incógnita auxiliar y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Retrospecto:

Nesse problema poderemos apresentar várias indagações numa revisão sobre possíveis falhas no resultado e também para aproveitarmos para explorar questões relevantes para conceitos futuros ou mesmo em problemas semelhantes. Exemplos dessas indagações:

- Utilizou todos os dados? Todos os dados aparecem na fórmula que exprime a diagonal?

- O comprimento, largura e altura desempenham funções no problema? A diagonal e simétrica em relação a a, b e c?

- Conforme aumentarmos ou diminuirmos c a diagonal aumento ou diminui também?

- Se substituirmos a, b e c por 2a, 2b e 2c a diagonal também será multiplicada por 2?

- Se a, b e c estiverem expressas em metros a diagonal também será expressa em metros?

Atividade 3

Escolhi alguns problemas envolvendo volume mas que também tenham possam envolver outros conceitos matemáticos ou de outras disciplinas.

Esse problema a seguir cumpre o aspecto da aplicação no cotidiano e envolve outros conceitos matemáticos além de volume, como a interpretação de gráficos e do cálculo de porcentagem.

2. (VUNESP -2010) Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir uma cisterna fechada, que acumule toda a água proveniente da chuva que cai sobre o telhado de sua casa, ao longo do período de um ano. As figuras e o gráfico representam as dimensões do telhado da casa, a forma da cisterna a ser construída e a quantidade medida mensal de chuva na região onde o agricultor possui a casa.

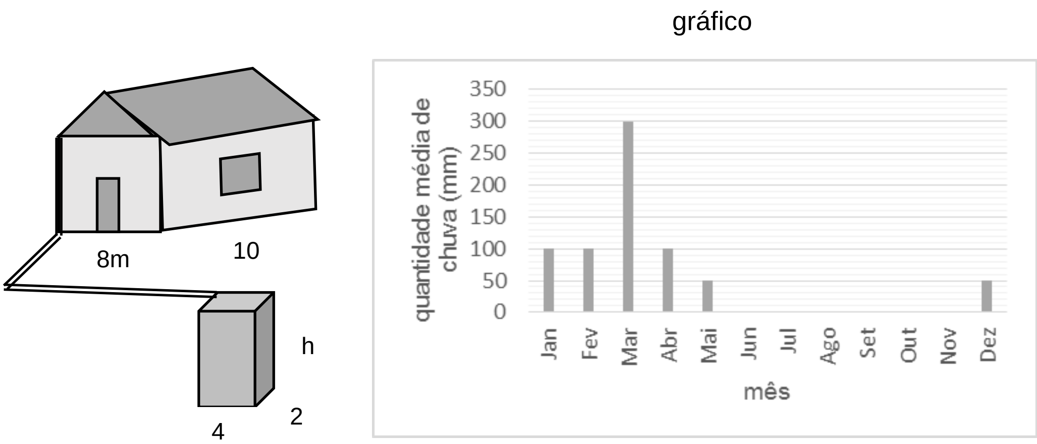


Figura 5.7: Problema da Cisterna

Sabendo que 100 milímetro de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em um superfície plana horizontal (perspectiva do topo) de 1 metro quadrado, determine a profundidade (h) da cisterna para que ela comporte todo o volume de água da chuva armazenada durante um ano, acrescida de 10% desse volume (aproximadamente o que a cisterna absorve do solo).

Solução;

O total de precipitação de chuva no ano considerado, de acordo com o gráfico, foi de:

100 + 100 + 300 + 50 + 50 = ***700 mm***

De acordo com o enunciado cada 100 mm de chuva equivale ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana de 1 m²^{2}. Como a área da superfície horizontal correspondente ao telhado é de:

8 . 10 = ***80 m²***

Essa chuva representa um volume de:

700 . 80 = ***56000 litros de água***

Portanto na cisterna, estarão armazenados:

56000 + 10% de 56000 = 56000 +560

= ***61600 litros***

Se 1 l = 1 dm^{3}, logo 1000 l = 1 m^{3}, assim: 61600 l = 61,6 m^{3}.

Temos que a altura h é tal que:

4 . 2. h = 61,6

8. h = 61,6

h = 61.6 : 8

h = ***7,7 m (profundidade da cisterna)***

Atividade 4

O problema a seguir envolve, além dos conceitos matemáticos de volume, regra de três e função tipo exponencial (em sua caracterização) o conceito da Física, de vazão, e da Química, de concentração molecular.

3. Uma piscina tem capacidade para 100 m^3 de água. Quando está cheia é colocado 1 kg de cloro. A água pura continua a ser colocada com uma vazão constante, sendo o excesso eliminado na mesma vazão. Sabe-se que após uma hora, restam 900 g de cloro. Pergunta-se:

a) Qual a concentração de cloro após dez horas?

b) Qual concentração de cloro após meia hora?

c) Qual a concentração de cloro após t horas?

Solução:

Para cada instante t teremos um volume de água v. Dividindo o tempo em intervalos constantes Δt, *teremos os estágios de entrada de água pura, mistura e água retirada nesses intervalos da seguinte forma no esquema abaixo:*

Para um intervalo de tempo Δt *:*

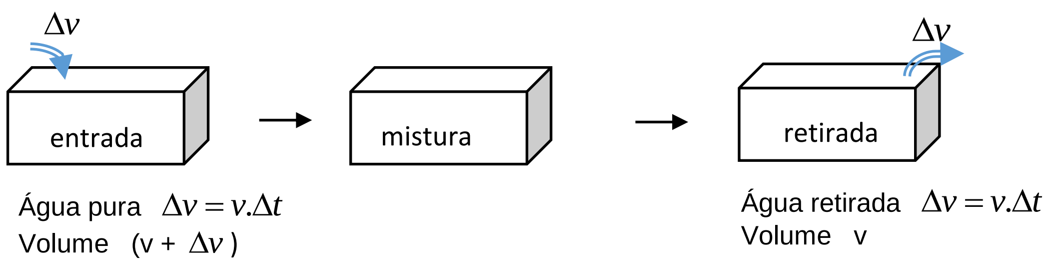


Figura 5.8: Esquema dos estágios da água na piscina

A quantidade de cloro retirada é proporcional a quantidade de água misturada Δv *que sai em função do tempo.*

	Quantidade de cloro	*Volume de água*
Antes da saída	*c(t)*	$v + \Delta v$
Depois da saída	*c(t +* Δt *)*	v

Assim,

$$\frac{c(t+\Delta t)}{v} = \frac{c(t)}{v+\Delta v}$$

$$c(t+\Delta t) = c(t).\frac{v}{v+v.\Delta t}$$

A variação de cloro Δc *no intervalo* Δt é dada por, $\Delta c = c(t+\Delta t) - c(t)$, logo:

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t).\frac{v}{v+v.\Delta t} - c(t)$$

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t)\left(\frac{v}{v+v.\Delta t} - 1\right)$$

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t).\left(\frac{-v.\Delta t}{v+v.\Delta t}\right)$$

$$\boxed{\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{c(t)} = \frac{-v.\Delta t}{v+v.\Delta t}}$$

Portanto a variação relativa de cloro é constante $\left(\frac{-v.\Delta t}{v+v.\Delta t}\right)$ *e depende só do incremento* Δt é não de instante t em que é medida, o que, então, caracteriza da função c(t) como sendo do tipo exponencial. Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{c(t) = c_o.a^t}}$$

onde, c_o é a ***quantidade inicial*** *de cloro e a é a* ***taxa de variação*** *da concentração de cloro no instante t.*

Assim:

a) Como no instante inicial t = 0 a quantidade de cloro era 1000 g, temos, então c_o = 1000. Assim para o instante t = 1 h temos c(t) = 900g, logo a taxa de variação será::

$c(t) = c_o.a^t$

$c(1) = 1000.a^1$

$900 = 1000.a$

$a = \frac{900}{1000}$

$\boldsymbol{a = 0,9}$

Assim,

$\boldsymbol{c(t) = 1000.(0,9)^t}$

Para o instante t = 10 h, teremos:

$$c(10) = 1000.(0,9)^{10}$$
$$= 1000.\ 0,349$$
$$= \mathbf{349\ g}$$

b) *Para o instante t = 0,5 h, teremos:*

$$c(0,5) = 1000.(0,9)^{0,5}$$
$$= 1000.0,948$$
$$= \mathbf{948\ g}$$

c) *Para o instante t, teremos:*

$$\mathbf{c(t) = 1000.(0,9)^t}$$

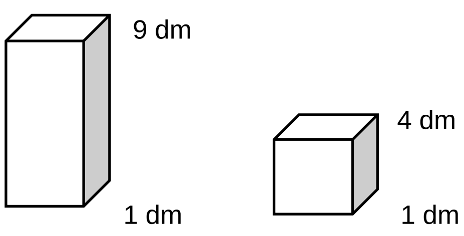
Atividade 5

Um problema envolvendo volume numa forma de um desafio. Achei interessante por esse aspecto do desafio podendo ser proposto em qualquer fase do ensino e por ser um exemplo de problema em que a estratégia inverter o processo de resolução, onde começar de trás para frente se mostrou o melhor caminho.

4. Como é possível retirar de um rio exatamente seis litros de água se só se dispõe, para medir a água, de dois recipientes, com quatro e nove litros de capacidade?

Solução:

Pelos os dados do problema, imaginemos com clareza os instrumentos que dispomos, os dois recipientes. Admitindo que são vasos retangulares, de bases quadradas de 1 dm de comprimento cujas alturas são 9 dm e 4 dm conforme a figura abaixo. Assim teremos recipientes com as capacidades do enunciado



Como não sabemos medir exatamente 6 litros, poderíamos, como muita gente faz, começar com os recipientes vazios, experimentarmos isto e aquilo, enchendo e esvaziando, e quando não conseguimos, recomeçamos por tentar alguma outra coisa, caminhando para frente, da situação inicial para a situação final desejada, dos dados para a incógnita e acidentalmente, ter bom êxito. No entanto, poderíamos, numa reversão da situação, imaginarmos o vaso maior já com 6 litros e o menor vazio (figura 5.9.2) e tentarmos obter situações antecedentes dessa situação final.

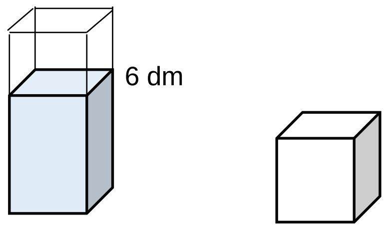


Figura 5.9.2: Recipiente com 6 litro

Poderíamos encher o vaso maior o que significa completa-lo com 3 litros. Para consegui isto... teríamos de ter exatamente 1 litro de água no vaso menor, o que é uma situação antecedente mais fácil de se chegar (figura 5.9.3).

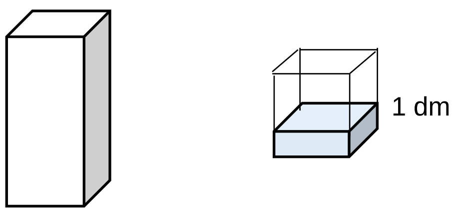


Figura 5.9.3: Recipiente com 1 litro

Chegar nessa situação são passos facilmente reconhecidos, pois podemos obter 1 litro enchendo o vaso maior de 9 litros e desejando a água no vaso menor de 4 litros duas vezes seguidas (1 = 9 – 4 – 4). Assim teremos a situação desejada que é ilustrada na figura 5.9.2, bastando encher o vaso 9 litros e transferir a água para o vaso menor contendo 1 litro, restando, assim, 6 litros no vaso maior (6 = 9 – 3).

Atividade 6

Nessa atividade proponho os exercícios mais usuais para a fixação dos conceitos envolvidos no bloco retangular (paralelepípedos retangular, mais precisamente) para os cálculos de volume e demais características da Geometria Espacial envolvidas nesse sólido: diagonais, Relação de Euler e outras curiosidades e desafios. Proponho os exercícios dos livros didáticos referidos nesse trabalho bem como os exercícios do material do PROFMAT relacionados a esse tópico. São vários exercícios e de fácil acesso a qualquer professor, por isso relato apenas os problemas anteriores para os quais percebi algum caráter da aprendizagem significativa trabalhada nessa proposta.

Referência

AUSUBEL, D. P. *A aprendizagem significativa:* a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

LIMA, Elon Lajes. Medida e forma em geometria / Elon Lages Lima. 4.ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MOREIRA, Marco A. (1999). *Aprendizagem significativa.* Brasília: Editora da UnB. 129 p.

PEREIRA, W. C. de A. Resolução de Problemas Criativos - Ativação da Capacidade de Pensar. Brasília, EMBRAPA-DID, 1980.

POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.